

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. HELFFER

P. KERDELHUE

J. SJÖSTRAND

## **Le papillon de Hofstadter revisité**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 43 (1990)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1990\\_2\\_43\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1990_2_43__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LE PAPILLON DE HOFSTADTER

## REVISITÉ

par B.Helffer , P. Kerdelhué et J.Sjöstrand

### RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous poursuivons l'étude de l'équation de Harper  $\cosh D_x + \cos x$  d'un point de vue plus qualitatif en approfondissant les points de vue développés par Hofstadter et Claro-Wannier. On montre comment la structure du papillon et son caractère cantorien se déduisent de la conjecture que les trous dans le spectre ne se referment que pour des valeurs rationnelles de  $h/2\pi$ .

### ABSTRACT

In this paper, we continue the study of the Harper's operator  $\cosh D_x + \cos x$  with a more qualitative point of view. In particular, we analyze more deeply the approaches by Hofstadter and Claro-Wannier. We show how the structure of the butterfly and its Cantor's character can be deduced of the conjecture that the gaps in the spectrum can only disappear for rational values of  $h/2\pi$ .

Texte reçu le 15 février 1990

B.Helffer : DMI , Université de Nantes, 44072 Nantes Cedex 03 URA CNRS 758  
et DMI , ENS Ulm , 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05

P.Kerdelhue : DMI , ENS Ulm , 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05

et Dép. de Mathématiques de Paris-Sud 91405 Orsay Cedex, URACNRS 760

J.Sjöstrand: Dép. de Mathématiques de Paris-Sud 91405 Orsay Cedex, URACNRS760

<b>§0 Introduction</b>	.....	3
<b>§1 Rappels sur la densité d'états</b>	.....	5
<b>§2 Etude de certains trous</b>	.....	11
<b>§3 Applications : description du papillon</b>	.....	23
<b>3.1 Une démonstration d'un résultat de Bellissard et Simon .</b>	.....	23
<b>3.2 Description du papillon à l'aide de fuseaux</b>	.....	26
<b>§4 L'approche de Hofstadter : le formalisme des trapèzes</b>	.....	43
<b>4.1 Préliminaires</b>	.....	43
<b>4.2 Construction des trapèzes " à droite"</b>	.....	44
<b>4.3 Liens avec les développements en fractions continues</b>	.....	54
<b>4.4 Calcul du nombre de bandes dans un trapèze</b>	.....	59
<b>4.5 Liens avec les constructions de Hofstadter</b>	.....	60
<b>§5 Aspects semi-classiques . Classes de Chern</b>	.....	67
<b>(en liaison avec les travaux de Wilkinson)</b>		
<b>Appendice K : Rappels sur les fractions continues</b>	.....	77
<b>Dessins</b>	.....	81
<b>Références</b>	.....	83

## §0 Introduction

Dans toute une série d'articles ([He-Sj]<sub>1,2,3</sub>), deux des auteurs ont développé à la suite des travaux de Wilkinson [Wilk]<sub>1,2,3,4</sub> une étude semi-classique du fameux papillon de Hofstadter. On trouvera dans [Gu-He-Tr] toute une série de dessins décrivant les résultats obtenus.

Ces résultats, même s'ils apportent un bon éclairage sur la plupart des phénomènes observables sur le papillon, sont, de par leur caractère asymptotique, partiels. On se propose ici de faire le point sur toute une famille d'autres résultats, ou heuristiques ou dont la démonstration n'a pas été publiée, concernant la structure globale du papillon et qui tournent autour de la conjecture des dix Martinis due à M.Kac. Nous pensons ici à la discussion initiale de Hofstadter ([Ho]) qui sera reprise au §4, aux raisonnements sur la densité d'état initialisés par Claro et Wannier ([Cl-Wa]), à des arguments de perturbation indiqués par Bellissard et Simon ([Be-Si]) que nous aborderons au §2 et enfin au lien avec les classes de Chern observé par Wilkinson ([Wilk]<sub>2,4</sub>) que nous préciserons dans un cadre semi-classique au §5. Seul le point de vue des  $C^*$ -algèbres n'a pas été repris ici et nous renvoyons pour cette question aux surveys de J.Bellissard ([Be]<sub>1,2</sub>).

Ceci ne nous a malheureusement pas conduit à la démonstration de la conjecture des dix Martinis dans le cas général (des réponses partielles sont obtenues chez Bellissard-Simon [Be-Si], Helffer-Sjöstrand [He-Sj]<sub>1,2,3</sub>, Van Mouche [Mo]<sub>1,2</sub>, Choi-Elliott-Yui [C-E-Y]).

Dans un appendice ajouté dans la version finale de ce dernier article, les auteurs donnent une démonstration détaillée d'un résultat annoncé dans [Be-Si] dont nous proposerons une autre démonstration

au §3.1 en s'appuyant sur les résultats du §2. Cet appendice contient également des considérations recoupant celles du §5. Les techniques d'approche sont cependant différentes. Ce travail a été annoncé par l'un des auteurs au colloque de Delphes en septembre 89.

## §1 Rappels sur la densité d'états

On rappelle dans cette section un certain nombre de résultats classiques qui sont utilisés sans démonstration dans les autres paragraphes et on précise certains résultats. Il s'agit en particulier de rappeler le lien entre différentes définitions.

### Première approche :

Rappelons que nous nous intéressons principalement dans cet article à la famille d'opérateurs  $P_{\alpha,\theta}^\lambda$  définis sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$  par :

$$(1.1) \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u_n \rightarrow (P_{\alpha,\theta}^\lambda u)_n = (1/(1+\lambda))((\lambda/2)(u_{n+1} + u_{n-1}) + \cos(2\pi(\alpha n + \theta))u_n)$$

(à normalisation près, c'est l'opérateur de Harper)

On introduit dans  $\tilde{Q}=[0,1] \times [-1,1]$  l'ensemble :

$$(1.2) \Sigma^\lambda = \cup_\alpha (\alpha, \Sigma_\alpha^\lambda) \quad \text{où } \Sigma_\alpha^\lambda \text{ est défini par:}$$

$$(1.3) \Sigma_\alpha^\lambda = \cup_\theta (\Sigma_{\alpha,\theta}^\lambda)$$

où  $\Sigma_{\alpha,\theta}^\lambda$  désigne le spectre de  $P_{\alpha,\theta}^\lambda$ .

La densité d'état intégrée  $k_\alpha^\lambda$  a été introduite depuis longtemps par les physiciens (cf [Si] , [CFKS] , [Av-Si]... ). Si  $\mathcal{X}_\ell$  est l'opérateur de multiplication (opérant sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ) par la fonction caractéristique de  $\{n \mid -\ell \leq n \leq \ell\}$ , on peut la définir par :

$$(1.4) k_{\alpha,\theta}^\lambda(E) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (2\ell+1)^{-1} \text{Tr} ( \mathcal{X}_\ell P_{(-\infty, E]} ( P_{\alpha,\theta}^\lambda ) )$$

où  $P_\Omega(P^\lambda)$  est la projection spectrale de  $P^\lambda$  sur l'intervalle  $\Omega$ .

Elle a les propriétés suivantes :

$$(1.5) E \rightarrow k_{\alpha,\theta}^\lambda(E) \text{ est indépendante de } \theta \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \Sigma_\alpha^\lambda. \text{ Elle est}$$

indépendante de  $\theta$  si  $\alpha$  est irrationnel.

(1.6)  $E \rightarrow k_{\alpha,\theta}^\lambda(E)$  est continue, constante dans chaque trou du spectre  
(cf [Si] qui réfère à [J-M],[Ben-Pas] et à [Sh]).

Compte tenu de (1.4) et (1.5), on la notera  $k_\alpha^\lambda$  lorsqu'elle ne dépend pas de  $\theta$  (i.e pour  $\alpha$  irrationnel ou pour  $E$  dans  $\mathbb{R} \setminus \Sigma_\alpha^\lambda$ , cf (1.8) et (1.12)).

(1.7) Pour  $E$  dans  $\mathbb{R} \setminus \Sigma_\alpha^\lambda$ , il existe deux entiers  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que :

$$k_\alpha^\lambda(E) = m\alpha + n$$

(cf [Be], pour une présentation et des références comme par exemple [Pi-Vo])

De plus, dans une composante connexe  $\mathcal{S}^\lambda$  de  $\tilde{Q} \setminus \Sigma^\lambda$ , on peut trouver  $m$  et  $n$  tels que (1.7) soit vérifiée pour tout  $(\alpha, E)$  dans  $\mathcal{S}^\lambda$ .

(1.8) Pour  $E$  dans  $\mathbb{R} \setminus \Sigma_\alpha^\lambda$  et  $\alpha = p/q$ ,  $k_\alpha^\lambda(E)$  se calcule comme le nombre de bandes situées avant  $E$  divisé par le nombre total de bandes, i.e  $q$ .

On a en effet la formule (qui résulte de la théorie de Floquet) :

$$(1.9) \quad k_\alpha^\lambda(E) = (1/q) \left( \sum_n \int_{\lambda_n(\theta) \leq E} d\theta \right)$$

où  $\lambda_n(\theta)$   $n=1, \dots, q$  désigne la  $n^{\text{ème}}$  valeur propre de Floquet.

(1.10) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $I$  un intervalle contenu dans  $[0, 1]$  et  $I \ni \lambda \rightarrow E(\lambda)$  un chemin continu à valeur dans  $[-1, 1]$  tel que :  $\forall \lambda \in I$ ,  
 $(\alpha, E(\lambda)) \in \tilde{Q} \setminus \Sigma^\lambda$ , alors  $k_\alpha^\lambda(E(\lambda))$  ne dépend pas de  $\lambda$ .

(1.11) Si  $E \in \Sigma_{\alpha,\theta}^\lambda$ , alors  $k_{\alpha,\theta}^\lambda(E+\varepsilon) - k_{\alpha,\theta}^\lambda(E-\varepsilon) > 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Soit  $k_\alpha^\lambda$  la fonction définie par :

$$(1.12) \quad k_{\alpha}^{\lambda}(E) = \int k_{\alpha, \theta}^{\lambda}(E) \, d\theta$$

Alors, pour  $\alpha$  irrationnel, on a :

$$(1.13) \quad k_{\alpha}^{\lambda}(E) = k_{\alpha, \theta}^{\lambda}(E)$$

On notera parfois dans la suite :  $k(\alpha, E) = k_{\alpha}(E)$ .

$$(1.14) \quad \text{Si } E \in \Sigma_{\alpha}^{\lambda}, \text{ alors } k_{\alpha}^{\lambda}(E+\epsilon) - k_{\alpha}^{\lambda}(E-\epsilon) > 0, \forall \epsilon > 0.$$

(C'est (1.10) dans le cas irrationnel et c'est facile à vérifier dans le cas rationnel par la théorie de Floquet.)

### Deuxième approche :

On a vu dans ([Wilkinson], [He-Sj]<sub>1,2,3</sub>) tout l'intérêt qu'il pouvait y avoir à penser à l'opérateur de Harper comme un pseudo-différentiel  $(2\pi\alpha)$ -quantifié à symbole périodique en  $(x, \xi)$ . Cette approche remonte aux travaux de Wilkinson et a été utilisée intensivement dans les travaux de [He-Sj] concernant l'équation de Harper. Dans cette approche, on considère l'opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl :

$$p(x, \xi) = (1/(1+\lambda))(\lambda \cos x + \cos \xi)$$

et le spectre de  $(1/(1+\lambda))(\lambda \cos x + \cos (2\pi\alpha D_x))$  est exactement  $\Sigma_{\alpha}^{\lambda}$ .

Plus généralement, considérons donc  $P_{\alpha} = P(x, 2\pi\alpha D_x)$  un opérateur  $2\pi\alpha$ -pseudo-différentiel de symbole de Weyl  $p(x, \xi)$  supposé  $C^{\infty}$  et  $2\pi$ -périodique à la fois en  $x$  et  $\xi$  ( $p$  dépend éventuellement de  $\alpha$ ). On définit :  $\tilde{\text{tr}}(P_{\alpha})$  comme la valeur moyenne du symbole de  $P$ .

Introduisant alors la série de Fourier de  $P$  :

$$(1.15) \quad p(x, \xi) = \sum \sum \hat{p}(j, k) e^{i(jx + k\xi)},$$

on a alors :

$$(1.16) \quad \tilde{\text{tr}}(P_\alpha) = \hat{p}(0,0).$$

Si  $p$  est réel, alors  $p(x, 2\pi\alpha D_x)$  est autoadjoint et si  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f(P)$  est aussi le  $2\pi\alpha$ -quantifié de Weyl de  $p_{f,\alpha}(x,\xi)$  qui a les mêmes propriétés. On peut donc définir  $\tilde{\text{tr}} f(P_\alpha)$ , et il existe une mesure de Borel  $\rho_\alpha$  telle que :

$$(1.17) \quad \tilde{\text{tr}} f(P_\alpha) = \int f(t) \rho_\alpha(dt), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

On a en effet :

$$(1.18) \quad \tilde{\text{tr}} f(P_\alpha) \geq 0 \text{ pour } f \geq 0$$

(cf [He-Sj]<sub>4</sub> ou voir plus loin la remarque 1.1 après (1.23)').

Au niveau des  $2\pi\alpha$ -quantifiés de Weyl, on trouve à l'aide de (1.15) :

$$(1.19) \quad P = \sum_{j,k} \hat{p}(j,k) e^{2\pi i j k \alpha / 2} e^{i j x} \tau_{-2\pi k \alpha},$$

où  $\tau_\beta u(x) = u(x - \beta)$ .

Pour chaque  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $P$  opère sur  $\ell^2(2\pi((\theta) + Z\alpha))$  et si on écrit :

$$(\theta) + Z\alpha \ni (x/2\pi) = n\alpha + \theta$$

l'action est donnée en identifiant  $\ell^2(2\pi((\theta) + Z\alpha))$  et  $\ell^2(Z)$  par la matrice  $\mathcal{M}_\theta$  avec :

$$(1.20) \quad \mathcal{M}_\theta(n,m) = \sum_j \hat{p}(j, n-m) e^{\pi i j (n-m)\alpha} e^{2\pi i j (n\alpha + \theta)}$$

En particulier,

$$(1.21) \quad \mathcal{M}_\theta(n,n) = \sum_j \hat{p}(j,0) e^{2\pi i j \theta} (e^{2\pi i j \alpha})^n$$

Considérons d'abord le cas où  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . On s'intéresse à la moyenne de

$n \rightarrow \mathcal{M}_\theta(n,n)$  :

$$(1.22) \quad (1/2N+1) \sum_{-N}^N \mathcal{M}_\theta(n,n) = \sum_j \hat{p}(j,0) e^{2\pi i j \theta} \left( (1/2N+1) \sum_{-N}^N (e^{2\pi i j \alpha})^n \right).$$

Ici pour chaque  $j$  fixé :

$$\left( (1/2N+1) \sum_{-N}^N (e^{2\pi i j \alpha})^n \right) \text{ est égal à } 1 \text{ si } j=0 \text{ et tend vers } 0, \text{ lorsque } N$$

tend vers l'infini si  $j \neq 0$ .

De plus :

$$\left| \left( (1/2N+1) \sum_{-N}^N (e^{2i\pi j\alpha})^n \right) \right| \leq 1$$

et comme  $j \rightarrow \hat{p}(j,0)e^{2i\pi j\theta}$  est sommable, une application du théorème de convergence dominée donne :

$$(1.23) \quad (1/2N+1) \sum_{-N}^N \mathcal{M}_\theta(n,n) \rightarrow \hat{p}(0,0) = \tilde{\text{tr}}(P) \text{ quand } N \text{ tend vers } l'∞.$$

Lorsque  $\alpha$  est rationnel, la limite dépendra de  $\theta$ , mais on observe que si on fait la moyenne par rapport à  $\theta$ , on a :

$$(1.23)' \quad (1/2N+1) \int \left( \sum_{-N}^N \mathcal{M}_\theta(n,n) \right) d\theta = \hat{p}(0,0) \text{ pour tout } N.$$

Dans la suite, on définit donc  $\tilde{\text{tr}}(\mathcal{M}_\theta)$  comme la limite dans (1.23) (ou 1.23').

De même qu'on a associé à  $P$  la matrice infinie  $\mathcal{M}_\theta$ , on peut, pour tout  $f$  dans  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , associer à  $f(P)$  la matrice infinie de  $f(\mathcal{M}_\theta)$ .

Remarque 1.1 :

Il est facile de montrer maintenant (1.18) plus directement. La positivité de  $f(P)$  entraîne celle de  $f(\mathcal{M}_\theta)$  et de  $f(\mathcal{M}_\theta)(n,n)$  pour tout  $n$ . On conclut alors par (1.23)'.

On peut donc écrire :

$$\tilde{\text{tr}} f(\mathcal{M}_\theta) = \int f(t) \rho(dt)$$

Dans le cas de l'équation de Harper, on a ainsi identifié le premier point de vue avec le second et on a donc :

$$(1.23) \quad k(\alpha,E) = \int_{-\infty}^E \rho_\alpha(dt).$$

Ceci nous permettra d'utiliser indifféremment les techniques des

matrices de Jacobi (cf [Av-Si]) ou celles des opérateurs pseudo-différentiels (cf [Sh], [He-Sj]).

Rappelons également le résultat suivant (cf [He-Sj]<sub>4</sub>, §7 et [He-Sj]<sub>5</sub>, §6) de Continuité par rapport à  $\alpha$  :

(1.24) Pour tout  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \rightarrow \tilde{\text{tr}} f(P_\alpha)$  est  $C^\infty$

### Continuité par rapport à $\lambda$

On se limite ici au cas de l'équation de Harper correspondant à l'o.p.d de symbole :  $p^\lambda(x, \xi) = (1/(1+\lambda))(\lambda \cos x + \cos \xi)$ , avec  $\lambda \in [0, 1]$ .  
Si  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , on s'intéresse à la continuité par rapport à  $\lambda$  de :  $\tilde{\text{tr}} f(P^\lambda)$ .

Pour cela, on utilise la formule :

$$(1.25) f(P^\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(z) (z - P^\lambda)^{-1} L(dz)$$

où  $L(dz)$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$ ,  $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$  est une extension presque analytique de  $f$ . Puisque :

$$(z - P^\lambda)^{-1} - (z - P^{\lambda'})^{-1} = (z - P^\lambda)^{-1} (P^\lambda - P^{\lambda'}) (z - P^{\lambda'})^{-1}$$

est de norme inférieure à  $C |\lambda - \lambda'| / |\text{Im}z|^2$ , on trouve donc :

$$(1.26) \|f(P^\lambda) - f(P^{\lambda'})\| \leq C \|f\|_{C^3(\mathbb{R})} \cdot |\lambda - \lambda'|$$

Comme chaque élément diagonal de  $\mathcal{M}_0$  est majoré par la norme, on a donc :

$$(1.27) |\tilde{\text{tr}}(f(P^\lambda)) - \tilde{\text{tr}}(f(P^{\lambda'}))| \leq C \|f\|_{C^3(\mathbb{R})} \cdot |\lambda - \lambda'|.$$

## §2 Etude de certains trous :

On s'intéresse à l'opérateur  $H^\lambda = H_{\alpha, \theta}^\lambda$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$  donné par :

$$(2.1) (H^\lambda u)(n) = \lambda \Delta u(n) + (\cos 2\pi(\alpha n + \theta)) u(n)$$

où  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$  et  $\Delta u(n) = (u(n+1) + u(n-1))/2$

Notons que  $P^\lambda = (1/(1+\lambda))H^\lambda$ , mais il est plus facile dans ce paragraphe de travailler avec  $H^\lambda$  (puis de dilater les résultats). Notons que  $P^0 = H^0$ .

Pour  $\lambda=0$ , le spectre est bien entendu l'adhérence de l'ensemble des valeurs propres  $(\cos 2\pi(\alpha n + \theta))$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Quand  $\lambda$  est différent de 0, on cherche à établir l'existence de trous dans le spectre dus à un effet tunnel entre des "puits ponctuels"  $n$  et  $n+\ell$  où  $\ell \in \{1, 2, \dots\}$  est fixé et  $n \in \mathbb{Z}$  a la propriété que  $\cos 2\pi(\alpha n + \theta)$  est très voisin de  $\cos 2\pi(\alpha(n+\ell) + \theta)$ . Il y a un certain nombre de cas dégénérés à exclure (bien qu'intéressants en eux-mêmes), ce qui nous amènera à supposer :

$$(2.2) \alpha \in ]0, 1[ \setminus \bigcup_{j=1}^{2\ell} \mathbb{N} \cdot \left\{ \frac{1}{j} \right\}.$$

La première observation (on sera désormais toujours sous l'hypothèse (2.2)) est que :

(2.3) Si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  vérifient  $\cos 2\pi(\alpha n + \theta) = \cos 2\pi(\alpha(n+\ell) + \theta)$  alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $2\pi(\alpha(n+\ell) + \theta) = 2\pi k - 2\pi(\alpha n + \theta)$ .

preuve : Si  $n, \theta$  vérifient l'hypothèse de (2.3) mais pas la conclusion, alors  $2\pi(\alpha(n+\ell) + \theta) - 2\pi(\alpha n + \theta) \in 2\pi\mathbb{Z}$ , c.à.d. :  $\alpha\ell \in \mathbb{Z}$ , donc  $\alpha = \frac{\tilde{k}}{\ell}$ ,  $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ , en contradiction avec (2.2). #

Avec  $n, \theta$  comme dans (2.3), on a :  $(\alpha n + \theta) = \frac{k}{2} - \frac{\alpha\ell}{2}$ , et donc :

$$(2.4) \cos 2\pi(\alpha n + \theta) = \cos(\pi k - \pi\alpha\ell) = (-1)^k \cos \pi\alpha\ell.$$

On pose :

$$(2.5) E_{\alpha, \ell} = \cos(\pi\alpha\ell),$$

et la deuxième observation est que :

$$(2.6) E_{\alpha, \ell} \notin \{0, 1, -1\}$$

La troisième observation est que :

$$(2.7) \text{ Si } \ell' \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}, \text{ alors } |E_{\alpha, \ell'}| \neq |E_{\alpha, \ell}|.$$

preuve :

Supposons le contraire. Alors il existe  $\ell' < \ell$  et  $k \in \mathbb{Z}$  tels que  $\pi\alpha\ell = \pi k \pm \pi\alpha\ell'$  pour un signe convenable. Donc  $\alpha(\ell \mp \ell') = k$ ,  $\alpha = k / (\ell \mp \ell')$  et comme  $\ell \mp \ell' \in \{1, 2, \dots, 2\ell-1\}$ , on obtient une contradiction avec (2.2).

#

La quatrième observation est :

$$(2.8) \text{ Si } n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \cos 2\pi(\alpha n + \theta) = \cos 2\pi(\alpha(n+\ell) + \theta),$$

alors  $\cos 2\pi(\alpha n + \theta) \neq \cos 2\pi(\alpha(n-\ell) + \theta)$

preuve:

Sinon, il y aurait  $n, k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$2\pi(\alpha(n-\ell) + \theta) = 2\pi \tilde{k} - 2\pi(\alpha n + \theta)$$

$$2\pi(\alpha(n+\ell) + \theta) = 2\pi k - 2\pi(\alpha n + \theta),$$

et en faisant la différence de ces deux équations, on trouverait

$$\alpha = (k - \tilde{k}) / (2\ell)$$

en contradiction avec (2.2).

#

Les résultats et estimations ci-dessous sont valables uniformément pour  $\ell$  fixé,  $\alpha$  dans un compact fixé (mais arbitraire) contenu dans l'ensemble introduit en (2.2),  $\theta \in \mathbb{R}$  et pour  $\lambda > 0$  assez petit.

On se propose d'établir l'existence d'un trou dans le spectre de  $H^\lambda$ , qui tend vers  $(E_{\alpha,\ell})$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . On pose :

$$(2.9) \quad A_{\epsilon,\theta,\alpha} = \{ n \in \mathbb{Z} ; \alpha n + \theta \pm (\alpha\ell/2) \in \mathbb{Z} + [-\epsilon,\epsilon] \text{ (pour un des signes)} \}$$

et on remarque que  $A_{\epsilon,\theta,\alpha}$  est union de couples  $(n, n+\ell)$ .

Avec  $\ell$  fixé et  $\alpha$  dans un compact fixé (mais arbitraire) contenu dans l'ensemble introduit en (2.2) et  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous avons uniformément pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit :

Lemme 2.1:

Ou bien  $A_{\epsilon,\theta,\alpha} = \emptyset$  (ce qui se produit uniquement dans le cas  $\alpha \in \mathbb{Q}$ )

ou bien  $A_{\epsilon,\theta,\alpha} = \cup (n_j, n_j + \ell)$ , où  $n_j \in \mathbb{Z}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  est une suite croissante avec :  $n_{j+1} \geq n_j + 2\ell + 1$ . De plus, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\epsilon$ , telle que :

$$(2.10) \quad \left| \cos(2\pi(\alpha n + \theta)) - E_{\alpha,\ell} \right| \begin{cases} \geq \epsilon/C, & n \in \mathbb{Z} \setminus A_{\epsilon,\theta,\alpha} \\ \leq C\epsilon, & n \in A_{\epsilon,\theta,\alpha} \end{cases}$$

preuve :

Si  $A_{\epsilon,\theta,\alpha} \neq \emptyset$ , alors en considérant séparément les cas  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , on voit que :  $A_{\epsilon,\theta,\alpha} = \cup_{-\infty}^{+\infty} (n_j, n_j + \ell)$ , où  $n_j$  est une suite strictement croissante. Supposons que la première assertion du lemme soit fausse. Il

existerait alors une suite  $\varepsilon^{(v)}$  tendant vers 0, une suite  $\alpha^{(v)}$  tendant vers  $\alpha^{(0)} \in ]0,1[ \setminus \cup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}(1/j)$ , un nombre  $n_1 \in (1, 2, \dots, \ell-1, \ell+1, \dots, 2\ell)$  et une suite  $\theta^{(v)} \in \mathbb{R}$  convergent vers  $\theta^{(0)} \in ]0, 2\pi]$  telle que  $0, n_1 \in A_{\varepsilon^{(v)}, \theta^{(v)}, \alpha^{(v)}}$ .

Passant à la limite, on obtient :

$$\cos 2\pi(\alpha^{(0)} \cdot 0 + \theta^{(0)}) = \cos 2\pi(\alpha^{(0)} \cdot \ell + \theta^{(0)}) = \cos 2\pi(\alpha^{(0)} \cdot n_1 + \theta^{(0)})$$

ce qui est en contradiction avec l'une des quatre observations faites ci-dessus.

Soit  $n \in A_{\varepsilon, \theta, \alpha}$  et supposons par exemple que  $\alpha n + \theta = k - (\alpha \ell)/2 + \delta$ , avec  $|\delta| \leq \varepsilon$ . Alors  $\cos 2\pi(\alpha n + \theta) = \cos(\pi \alpha \ell + \delta) = E_{\alpha, \ell} + O(\delta) = E_{\alpha, \ell} + O(\varepsilon)$  ce qui correspond à la deuxième partie de (2.10). La démonstration de la première partie de (2.10) est voisine, mais utilise aussi (2.6) qui implique que  $E_{\alpha, \ell}$  n'est pas valeur critique de la fonction cosinus.

#

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on considère  $\mathcal{P}^\lambda(z) : \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(A_\varepsilon) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(A_\varepsilon)$  donné par la matrice

$$(2.11) \quad \mathcal{P}^\lambda(z) = \begin{pmatrix} H^\lambda - z & i \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

où  $\pi : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(A_\varepsilon)$  est l'opérateur de restriction, et

$i = \pi^* : \ell^2(A_\varepsilon) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  est donné par :

$$(iu)(n) = \begin{cases} u(n), & n \in A_\varepsilon \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus A_\varepsilon. \end{cases}$$

Pour  $\lambda=0$  , on peut voir  $\mathcal{P}^0(z)$  comme une somme directe indexée sur  $\mathbb{Z}$  de scalaires ou de matrices  $2 \times 2$  selon que  $n \in \mathbb{Z} \setminus A_c$  ou  $n \in A_c$ . Dans le premier cas, le terme est  $\cos 2\pi (\alpha n + \theta) - z$  et quand  $n \in A_c$  , le terme correspondant vaut :

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi (\alpha n + \theta) - z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $|z - E_{\alpha, \ell}| \leq (\frac{1}{2C})\epsilon$  (avec le même C que dans le lemme),  $\mathcal{P}^0(z)$  est bijective d'inverse :

$$(2.12) \quad \mathcal{P}^0(z)^{-1} = \begin{pmatrix} (1-\pi)((P^0 - z)|_{\mathbb{Z} - A_c})^{-1}(1-\pi) & i \\ \pi & (z - P^0)|_{A_c} \end{pmatrix}$$

On a :

$$(2.13) \quad \|\mathcal{P}^0(z)^{-1}\| \leq C\epsilon^{-1} \text{ (avec une nouvelle constante C).}$$

Avec une nouvelle constante  $C > 0$  , on en déduit que  $\mathcal{P}^\lambda(z)$  est inversible pour  $|z - E_{\alpha, \ell}| \leq \frac{\epsilon}{C}$  ,  $|\lambda| \leq \frac{\epsilon}{C}$  et que l'inverse est de norme  $\leq \frac{C}{\epsilon}$  et donné par la série de Neumann :

$$(2.14) \quad \mathcal{P}^\lambda(z)^{-1} = \sum_0^\infty (-\lambda)^j \mathcal{P}^0(z)^{-1} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}^0(z)^{-1} \Big)^j$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_0^\infty (-\lambda)^j E_0^+ (\Delta E_0^+)^j & \sum_0^\infty (-\lambda)^j (E_0^+ \Delta)^j E_0^+ \\ \sum_0^\infty (-\lambda)^j E_0^- (\Delta E_0^-)^j & E_0^{-+} + \sum_1^\infty (-\lambda)^j E_0^- (\Delta E_0^-)^{j-1} \Delta E_0^+ \end{pmatrix},$$

où (cf (2.12) ) :

$$E_0 = (1-\pi)((P^0 - z)|_{Z-A_\epsilon})^{-1}(1-\pi)$$

$$E_0^+ = i$$

$$E_0^- = \pi$$

$$E_0^{-+} = (z-P_0)|_{A_\epsilon}.$$

Ecrivant :

$$(2.15) \quad \mathcal{P}^\lambda(z)^{-1} = \begin{pmatrix} E_\lambda(z) & E_\lambda^+(z) \\ E_\lambda^-(z) & E_\lambda^{-+}(z) \end{pmatrix},$$

on a donc :

$$(2.16) \quad E_\lambda^{-+}(z) = (z-P^0)|_{A_\epsilon} + \sum_1^{\infty} (-\lambda)^j \pi (\Delta(1-\pi)((z-P^0)|_{Z-A_\epsilon})^{-1}(1-\pi))^{j-1} \Delta i.$$

L'observation principale et désormais habituelle est que :

$$(2.17) \quad z \in \sigma(H^\lambda) \iff 0 \in \sigma(E_\lambda^{-+}(z))$$

De (2.16) , on déduit d'abord pour  $k=0,1,2,\dots$  l'estimation :

$$(2.18) \quad |\partial_z^k E_\lambda^{-+}(z)(n,m)| \leq C_{\epsilon,k} \lambda^{|n-m|},$$

pour tous  $n,m \in A_\epsilon$ .

Ici  $E_\lambda^{-+}(z)(n,m)$  désigne l'élément de la matrice de  $E_\lambda^{-+}(z)$  correspondant à  $(n,m)$ .

Soit  $n, n+\ell \in A_\epsilon$ , et soit :

$$(2.19) \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{n,\lambda,z} & \mu_{n,\lambda,z} \\ \mu_{n,\lambda,z} & \hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z} \end{pmatrix} + O_\varepsilon(\lambda^{\ell+1}),$$

le bloc correspondant dans la matrice de  $E_\lambda^{-+}(z)$ , où  $\hat{\lambda}_{n,\lambda,z}$ ,  $\hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}$  et  $\mu_{n,\lambda,z}$  sont les contributions à ce bloc provenant de  $(z-P^0)_{|A_c} + \sum_{j=1}^\ell$  dans (2.16) tandis que le  $O_\varepsilon(\lambda^{\ell+1})$  indique la contribution de  $\sum_{\ell+1}^\infty$ .

Regardons d'abord de plus près les éléments diagonaux, que nous notons  $\hat{\lambda}_{n,\lambda,z}(\theta)$ ,  $\hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}(\theta)$  pour rappeler la dépendance par rapport à  $\theta$ , qui prend maintenant de l'importance. Ces éléments (aussi bien que  $\mu_{n,\lambda,z} = \mu_{n,\lambda,z}(\theta)$ ) restent parfaitement bien définis si on remplace la variable  $\theta$  par une variable  $\tilde{\theta}$  qui varie dans le plus grand intervalle  $\mathcal{J}_n$  contenant  $\theta$  avec la propriété que  $n, n+\ell \in A_{\varepsilon_0, \tilde{\theta}}$ , où  $\varepsilon_0$  est fixé et petit ( $\gg \varepsilon$ ). Plus

explicitement, si  $k \in \mathbb{Z}$  est tel que :  $n\alpha + \theta + \frac{\alpha\ell}{2} \in k + [-\varepsilon, \varepsilon]$

alors  $\hat{\lambda}_{n,\lambda,z}(\tilde{\theta})$ ,  $\hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}(\tilde{\theta})$  et  $\mu_{n,\lambda,z}(\tilde{\theta})$  restent bien définis pour  $|\tilde{\theta} - \theta_0| \leq \varepsilon_0$ , où on définit  $\theta_0$  par :  $n\alpha + \theta_0 + \frac{\alpha\ell}{2} = k$ .

Soit  $\delta(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta} - \theta_0 (= n\alpha + \tilde{\theta} + \frac{\alpha\ell}{2} - k)$ . Alors  $|\delta(\tilde{\theta})| \leq \varepsilon$ . ( $\theta_0$  dépend de  $n$ .)

Pour  $\tilde{\theta} = \theta_0$ ,  $n$  et  $n+\ell$  sont dans une situation symétrique pour la fonction  $\tilde{n} \rightarrow \cos 2\pi(\alpha\tilde{n} + \tilde{\theta})$  :

$$(2.20) \cos 2\pi(\alpha(n+\nu) + \theta_0) = \cos(2\pi\alpha\nu - \pi\alpha\ell) = \cos 2\pi\alpha(\nu - (\ell/2)),$$

et par des arguments de symétrie on obtient :

$$(2.21) \hat{\lambda}_{n,\lambda,z}(\theta_0) = \hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}(\theta_0) =_{\text{def}} Z^{-1} E_{\alpha,\ell,\lambda,z},$$

où :

$$(2.22) \quad \begin{cases} E_{\alpha,\ell,\lambda,z} = E_{\alpha,\ell} + O(\lambda^2), \\ \partial_z^k E_{\alpha,\ell,\lambda,z} = O_k(\lambda^2) \end{cases}$$

et  $E_{\alpha,\ell,\lambda,z}$  est indépendant de  $n$ .

(On peut aussi remarquer que la dépendance de  $n$  dans  $\hat{\lambda}_{n,\lambda,z}(\tilde{\theta})$  et  $\hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}(\tilde{\theta})$  ne se manifeste qu'à travers  $\tilde{\theta} - \theta_0$ .)

De (2.16), on tire aussi le renseignement :

$$(2.23) \quad \partial_{\tilde{\theta}} \hat{\lambda}_{n,\lambda,z}(\theta_0) = q + O(\lambda^2), \quad \partial_{\tilde{\theta}} \hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}(\theta_0) = -q + O(\lambda^2) \quad \text{où :}$$

$$(2.24) \quad q = 2\pi \sin(\pi\alpha\ell) \neq 0$$

Avec  $\delta = \theta - \theta_0$ , on obtient par développement de Taylor :

$$(2.25) \quad \begin{cases} \hat{\lambda}_{n,\lambda,z}(\theta) = z - E_{\alpha,\ell,\lambda,z} + q\delta + O(\lambda^2|\delta| + |\delta|^2) \\ \hat{\lambda}_{n+\ell,\lambda,z}(\theta) = z - E_{\alpha,\ell,\lambda,z} - q\delta + O(\lambda^2|\delta| + |\delta|^2). \end{cases}$$

On pose :

$$(2.26) \quad w(z,\lambda) = z - E_{\alpha,\ell,\lambda,z}$$

et on constate que :

$$(2.27) \quad |w(z,\lambda)| \sim |z - z(\lambda)|, \quad \text{où } z(\lambda) = E_{\alpha,\ell} + O(\lambda^2) \text{ est indépendant de } n.$$

Pour  $\mu_{n,\lambda}$ , on a la formule explicite :

$$(2.28) \quad \mu_{n,\lambda} = (-\lambda/2)^\ell / \prod_{j=1}^{\ell-1} (\cos(2\pi(n+j)\alpha + \theta) - z),$$

mais il nous suffira d'utiliser le renseignement plus faible :

$$(2.29) \quad |\mu_{n,\lambda}| \sim \lambda^\ell$$

Les valeurs propres du premier terme de (2.19) sont :

$$(2.30) \quad \hat{\lambda}_\pm = (\hat{\lambda}_n + \hat{\lambda}_{n+\ell})/2 \pm \sqrt{\mu^2 + ((\hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_{n+\ell})/2)^2},$$

et on obtient par conséquent :

$$(2.31) \quad (\hat{\lambda}_+ + \hat{\lambda}_-)/2 = w(z,\lambda) + O(\lambda^2|\delta| + |\delta|^2)$$

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad (\hat{\lambda}_+ - \hat{\lambda}_-)/2 &= \sqrt{\mu^2 + ((\hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_{n+\ell})/2)^2} \\
 &\sim |\mu| + |(\hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_{n+\ell})/2| \sim \lambda^\ell + \delta + O(\lambda^2|\delta| + |\delta|^2) \\
 &\sim \lambda^\ell + \delta \text{ (si } \varepsilon \text{ et } \lambda \text{ sont assez petits )}
 \end{aligned}$$

Si :

$$(2.33) \quad |z - z(\lambda)| \leq \lambda^\ell / C \text{ avec } C \text{ assez grand ,}$$

on a :  $|w(z, \lambda)| \leq \lambda^\ell / \tilde{C}$  avec  $\tilde{C}$  aussi grand qu'on veut ,

et comparant (2.31) et (2.32) , on voit que  $\hat{\lambda}_+ - \hat{\lambda}_- > (\hat{\lambda}_+ + \hat{\lambda}_-)/2$  , donc

$$|\hat{\lambda}_+|, |\hat{\lambda}_-| \geq \frac{1}{\text{const}} (\lambda^\ell + \delta).$$

Le premier bloc de (2.19) admet donc un inverse de norme  $O(1)/(1/(\lambda^\ell + \delta))$ .

Comme la zone ne dépend pas de  $n$  , que de plus ce résultat est valable

pour un  $\varepsilon > 0$  fixé assez petit, et comme, modulo  $O(\lambda^{\ell+1})$  dans  $\mathcal{L}(\ell^2(A_\varepsilon),$

$\ell^2(A_\varepsilon))$ ,  $E_\lambda^{-+}(z)$  est une somme directe de blocs de ce type, on obtient

finalement :

**Théorème 2.2 :**

Soit  $H_{\alpha, \theta}^\lambda$  défini en (2.1), soit  $\ell \in \{1, 2, \dots\}$ , soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble compact

contenu dans  $]0, 1[ \setminus \cup_{j=1}^{2\ell} \mathbb{N} \cdot (\frac{1}{j})$ . Alors, uniformément pour  $\alpha \in \mathcal{A}$  et  $\lambda$

$\in ]0, \lambda_0[$  avec  $\lambda_0 > 0$  assez petit, il existe  $z_\ell(\lambda) = \cos(\pi\alpha\ell) + O(\lambda^2)$  et une

constante  $C > 0$ , tels que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on ait :

$$] z_\ell(\lambda) - (\lambda^\ell / C) , z_\ell(\lambda) + (\lambda^\ell / C)[ \cap \sigma(H_{\alpha, \theta}^\lambda) = \emptyset$$

et on a le même résultat près de  $-z_\ell(\lambda)$ .

#

**Remarque 2.3 :**

Le théorème 2.2 met en évidence l'existence d'un trou dans le spectre de

diamètre minoré par  $2\lambda^\ell / C$ . On voit immédiatement que ce diamètre est

majoré par  $2\lambda$ . En effet, pour  $\lambda=0$  le spectre est  $[-1,1]$ , et la perturbation est de norme bornée par  $\lambda$ . Comparant avec les résultats de Van Mouche [Mo]<sub>2</sub>, on constate que l'on a obtenu, pour  $\alpha$  rationnel, tous les trous du spectre et que les minorations en  $\lambda^\ell$  de leur taille sont en fait des équivalents.

Remarque 2.4 :

Divisant par  $(1+\lambda)$ , on obtient les résultats correspondants pour  $P^\lambda$ .

Nous allons maintenant donner une application au calcul de la densité d'états pour l'équation de Harper. Rappelons que l'on a désigné par  $\rho^\lambda$  la mesure associée à  $P^\lambda$  par :

$$(2.34) \quad \text{tr} f(P^\lambda) = \int f \rho^\lambda(dt), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Pour  $\lambda = 0$ , cette mesure peut être calculée explicitement, en utilisant pour  $\alpha$  irrationnel que les points  $2\pi(\alpha n + \theta) \bmod 2\pi$  sont équidistribués sur  $S^1$ . On trouve :

$$(2.35) \quad \rho^0([-\infty, t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ \frac{1}{\pi} \arccos(-t), & -1 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et donc

$$(2.36) \quad \rho^0(dt) = (1/\pi) \cdot \mathbf{1}_{|-t,|}(t) (1/\sqrt{1-t^2}) dt.$$

Si  $I$  est un intervalle :

$$(2.37) \quad \rho^0(I) \leq C_0 \|I\|^{(1/2)},$$

où  $||I||$  est la longueur de  $I$ .

Prenant une fonction  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$  avec  $F = 1$  sur  $I$ ,  $\|F\|_{C^3} \leq ||I||^{-3}$  et

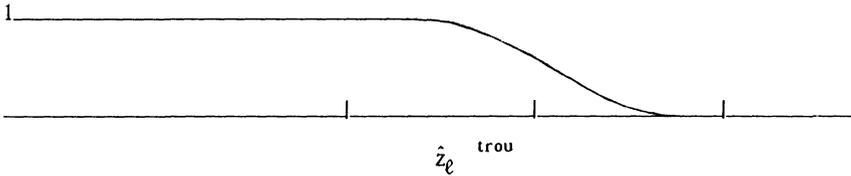
$\text{supp}(F)$  contenu dans un intervalle de longueur  $2||I||$ , on trouve à l'aide de

(1.27) :

$$(2.38) \quad \rho^\lambda(I) \leq \tilde{\text{tr}} F(P^\lambda) \leq \tilde{\text{tr}} F(P^0) + C ||I||^{-3} \lambda \leq \tilde{C} ( ||I||^{(1/2)} + ||I||^{-3} \cdot \lambda )$$

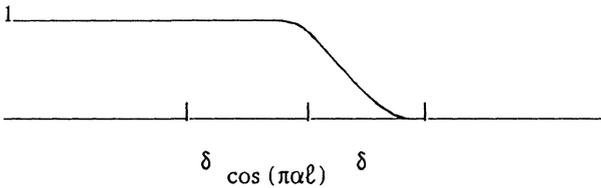
Soient maintenant  $\alpha, \ell$  et  $z_\ell = z(\alpha, \ell, \lambda)$  comme dans le théorème 2.2. On

pose pour étudier  $P^\lambda \hat{z}_\ell = z_\ell / (1 + \lambda)$ . On choisit alors  $f = f_\lambda$  :



de telle sorte qu'elle ne soit non constante que dans le trou déterminé précédemment (théorème 2.2 et remarque 2.4).

Alors on sait (cf 1.7) que pour  $\lambda > 0$   $\int f_\lambda(t) \rho^\lambda(dt)$  appartient à  $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ , et comme d'autre part cette intégrale dépend continûment de  $\lambda$ , elle est constante. Pour  $\delta > 0$  petit soit  $F$  une fonction indépendante de  $\lambda$  :



Pour  $\lambda$  assez petit,  $F - f_\lambda$  est ( et en prenant  $\delta$  assez petit ) à support dans

$[\cos(\pi\alpha\ell) - \delta, \cos(\pi\alpha\ell) + \delta]$  et prend ses valeurs dans  $[-1,1]$  ; en utilisant (2.38), on obtient :

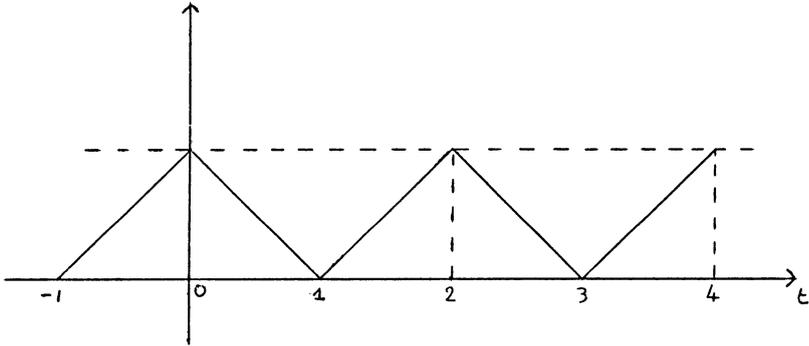
$$(2.39) \quad \left| \int f_\lambda \rho^\lambda(dt) - \int F \rho^\lambda(dt) \right| \leq C(\delta^{(1/2)} + \delta^{-3}\lambda)$$

D'autre part,  $\int F \rho^\lambda(dt) \rightarrow \int F \rho^0(dt) = \rho^0(]-\infty, \cos(\pi\alpha\ell)]) + O(\delta^{(1/2)})$

quand  $\lambda$  tend vers 0. Comme on peut prendre  $\delta > 0$  arbitrairement petit et comme  $\int f_\lambda \rho^\lambda(dt)$  est indépendant de  $\lambda$ , on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \rho^\lambda(]-\infty, \hat{z}(\alpha, \ell, \lambda)]) &= \int f_\lambda \rho^\lambda(dt) = \rho^0(]-\infty, \cos(\pi\alpha\ell)]) \\ &= \frac{1}{\pi} \arccos(-\cos\pi\alpha\ell) = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos(\pi + \pi\alpha\ell)) \\ &= 1 - \text{dist}(\alpha\ell, 2\mathbb{Z}) = |2(\ell\alpha/2) - 1| \end{aligned}$$

On a le graphe suivant pour la fonction  $1 - \text{dist}(t, 2\mathbb{Z})$  :



On a ainsi démontré la :

Proposition 2.5 :

La valeur de la densité d'état intégrée dans le trou entourant  $\hat{z}(\alpha, \ell, \lambda)$  est donnée par :

$$(2.40) \quad \rho^\lambda(]-\infty, \hat{z}(\alpha, \ell, \lambda)]) = |2(\ell\alpha/2) - 1|$$

### §3 Applications : description du papillon

#### §3.1 Une démonstration d'un résultat de Bellissard et Simon

Réexaminons tout d'abord les résultats obtenus au §2 dans le cas rationnel.

Soit donc  $\alpha_0 = p/q = q_0 + 1/(q_1 + 1/(q_2 + \dots + 1/(q_{k-1} + 1/q_k)))$  avec  $q_i \in \mathbb{Z}$  un rationnel compris entre 0 et 1. On notera dans la suite :

$$\alpha_0 = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_k)$$

La condition (2.2) est satisfaite dans le cas où  $q$  est impair pour  $\ell = 1, \dots, (q-1)/2$  et dans le cas où  $q$  est pair pour  $\ell = 1, \dots, (q/2) - 1$ .

Or nous savons que, pour tout  $\lambda > 0$ , le spectre est constitué de  $q$  bandes disjointes (à l'exception dans le cas où  $q$  est pair des deux bandes centrales). Ce résultat est obtenu par deux démonstrations différentes dans Van Mouche[Mo] et Choi, Elliott, Yui [C-E-Y] qui s'appuient sur des résultats antérieurs de Bellissard et Simon[Be-Si].

Examinons le cas où  $q$  est impair. Le théorème (2.2) nous donne l'existence de trous autour de  $\pm \hat{z}(\alpha, \ell, \lambda)$ , ( $\ell = 1, \dots, (q-1)/2$ ), où  $\hat{z}(\alpha, \ell, \lambda)$  est proche, à  $O(\lambda)$  près, de  $\cos \pi \alpha \ell$ . Ceci est vrai pour  $\alpha$  assez proche de  $\alpha_0$  et  $\lambda$  assez petit positif. Pour  $\alpha = \alpha_0$ , on obtient ainsi tous les  $(q-1)$  trous centraux séparant les  $q$  bandes de spectre.

La proposition (2.4) va nous permettre de calculer la densité d'états dans chacun de ces trous, résultat remarqué depuis longtemps par les physiciens (cf par exemple Claro-Wannier[Cl-Wa]) et annoncé comme théorème dans [Be-Si] (remarque à la fin de l'article) mais dont la démonstration n'a pas à notre connaissance été publiée. On note  $I_{\pm}(\alpha, \ell, \lambda)$  la composante connexe dans le complémentaire du spectre de  $\pm \hat{z}(\alpha, \ell, \lambda)$ .

Il s'agit de calculer la valeur de la densité d'états pour  $E$  dans  $I_{\pm}(\alpha, \ell, \lambda)$  avec  $\alpha$  proche de  $\alpha_0$  et  $\lambda$  assez petit.

D'après des résultats classiques ( cf §1)), on sait que la valeur de la densité d'états intégrée est de la forme  $m\alpha + n$  où  $m$  et  $n$  sont des entiers relatifs constants pour  $\alpha$  assez voisin de  $\alpha_0$ . La question était de déterminer  $(m, n)$ .

On a montré en (2.18) que, dans le trou  $I_{\pm}(\alpha, \ell, \lambda)$ , la densité d'états intégrée est donnée par :

$$k(\alpha, E) = |2(\ell\alpha/2) - 1| \quad \text{pour } E \text{ dans } I_{+}(\alpha, \ell, \lambda)$$

$$k(\alpha, E) = 1 - |2(\ell\alpha/2) - 1| \quad \text{pour } E \text{ dans } I_{-}(\alpha, \ell, \lambda)$$

Ceci nous permet de voir que les seules valeurs de  $m$  qui apparaissent et chacune une seule fois sont  $m = \pm 1, \dots, \pm(q-1)/2$ .

On a donc bien obtenu une démonstration de la dernière remarque de [Be-Si]. Nous pouvons la reformuler de la manière suivante :

Si on numérote les trous  $0, 1, \dots, q$  ( $q+1$  trous,  $q-1$  trous centraux), on sait (cf §2) que pour  $\alpha = \alpha_0$ , la valeur de la densité d'états intégrée dans le trou  $r$  est donné par  $r/q$ . Cette propriété ne détermine  $m$  que modulo  $q$ . Dans cette classe de congruence, il n'y a qu'un  $m$  dans  $[-(q-1)/2, (q-1)/2]$ . Le résultat se dit alors :

Proposition 3.1.1:

Soit  $\alpha_0 = (p/q)$  avec  $q$  impair.

Pour  $E$  dans  $I_{\pm}(\alpha, \ell, \lambda)$  avec  $\alpha$  voisin de  $\alpha_0$  et  $\lambda$  assez petit,  $k(\alpha, E)$  est égal à  $m\alpha + n$  où  $m$  est l'entier de module minimal tel que  $m\alpha_0 = r_{\ell}^{\pm} / q$  (modulo  $\mathbb{Z}$ ) où  $r_{\ell}^{\pm}$  est le numéro du trou correspondant à  $\pm \cos \pi\alpha_0 \ell$ .

Cette proposition a une interprétation graphique remontant sans doute à Claro-Wannier (et qui est reprise dans [Gu-He-Tr]). Dans le plan des  $(\alpha, y)$  (voir plus loin (3.2.7), pour la définition), on détermine le couple  $(m, n)$  déterminant la densité d'états du trou  $r$  pour  $\alpha = \alpha_0 = p/q$  en traçant toutes les demi-droites brisées partant du point  $(p/q, r/q)$  (en utilisant la réflexion naturelle en  $\alpha=0$  et  $\alpha=1$ ) d'équation (au départ)  $(y - r/q) = m(\alpha - p/q)$  avec  $m$  entier,  $(r - mp)/q$  entier,  $m \in \{ \pm 1, \dots, \pm (q-1)/2 \}$  joignant  $(p/q, r/q)$  à  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  ou  $(1,1)$  et en prenant celle de longueur minimale (qui correspond également à celle dont la pente est minimale).

Dans le cas où  $q$  est pair, les trous numérotés :

$1, \dots, (q/2)-1; (q/2)+1, \dots, q-1$

se traitent de la même manière. Le trou central étant fermé pour  $\alpha = \alpha_0$ , on a de nouveau décrit toute l'évolution des trous.

### Remarque 3.1.2

On n'a parlé jusqu'ici que du cas  $\lambda > 0$  assez petit. Mais cette restriction est inutile pour obtenir la proposition ci-dessus. En effet, la démarche à suivre est explicitée chez [Be-Si] et est basée sur les deux remarques suivantes :

En dehors des deux bandes centrales dans le cas  $q$  pair qui sont toujours collées, les trous ne se referment jamais quand on fait varier  $\lambda$  de  $\lambda_0$  très petit positif à 1.

Par ailleurs si  $E \in I(\alpha, \ell, \lambda)$ ,  $E \in I(\tilde{\alpha}, \ell, \tilde{\lambda})$  pour  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\lambda}$  assez proche de  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $(m, n)$  restent constants.

On peut alors montrer par déformation (voir au §3.2 pour des précisions) que la proposition reste vraie pour tout  $\lambda \in ]0,1]$  puis en utilisant la dualité d'Aubry pour tout  $\lambda > 0$  (cette dualité permet en effet de passer des résultats pour un  $\lambda$  à ceux pour  $1/\lambda$ ).

Calcul pour  $\alpha_0 = 1/q$  ( $q \geq 1$ )

Si  $\alpha_0 = 1/q$ , il est facile de voir à partir des formules ci-dessus que :

$$k(\alpha_0, E) = r \alpha_0 \quad \text{pour } E \text{ dans le trou } r ; (r = 1, \dots, (q-1)/2)$$

$$k(\alpha_0, E) = 1 + (r-q)\alpha_0 \quad \text{pour } E \text{ dans le trou } r ; (r = (q+1)/2, \dots, q)$$

### §3.2 Description du papillon à l'aide de fuseaux :

On s'intéresse dans ce paragraphe à la structure du papillon à des déformations près respectant les trous. Il est alors bien plus commode de faire une description du papillon (pour  $\lambda$  très petit) en la reliant avec un cas limite puis d'effectuer la déformation. Nous allons introduire une notion de fuseau qui est bien entendue intimement liée au problème du "gap labelling". Considérons d'abord dans  $\tilde{Q} = [0,1] \times [-1,1]$  l'ensemble  $\Sigma^\lambda = \cup_\alpha (\alpha, \Sigma_\alpha^\lambda)$  où  $\Sigma_\alpha^\lambda$  est défini par:  $\Sigma_\alpha^\lambda = ( \cup_\theta \Sigma_{\alpha,\theta}^\lambda )$ ,  $\Sigma_{\alpha,\theta}^\lambda$  désignant le spectre de l'équation de Harper normalisée. (Tout dépend de  $\lambda > 0$  mais on omet parfois la référence à  $\lambda$  si on travaille à  $\lambda$  fixé.) Il est classique que  $\Sigma$  est fermé dans  $\tilde{Q}$ . On pose alors la :

#### Définition 3.2.1 :

On appelle fuseau  $\mathcal{S}^\lambda$  une composante connexe du complémentaire de  $\Sigma^\lambda$ .

Toute la discussion qui suit est consacrée à une description aussi précise que possible des fuseaux.

Observons tout d'abord la propriété P1 :

P1 Si la droite  $\alpha = \alpha_0$  coupe un fuseau  $\mathcal{S}^\lambda$ , elle le coupe sur un intervalle ouvert  $\mathcal{S}_\alpha^\lambda = I(\alpha, \lambda)$ .

En effet attaché à un fuseau  $\mathcal{S}^\lambda$ , il y a un couple  $(m, n)$  dans  $\mathbb{Z}^2$  tel que la densité d'états soit donnée par  $(m\alpha + n)$  pour les couples  $(\alpha, E)$  dans le fuseau  $\mathcal{S}^\lambda$ . On sait par ailleurs qu'à  $\alpha$  fixé  $E \rightarrow k(\alpha, E)$  est monotone et strictement croissante en un point du spectre (cf §1). Comme elle est constante dans la tranche de fuseau  $\mathcal{S}_{\alpha_0}^\lambda (= \mathcal{S}^\lambda \cap \{\alpha = \alpha_0\})$  cette tranche est nécessairement un intervalle.

P2 Pour tout fuseau  $\mathcal{S}$ , il existe des points  $\alpha_\pm(\mathcal{S})$  tels que :

$$\mathcal{S} \subset ]\alpha_-(\mathcal{S}), \alpha_+(\mathcal{S})[ \times [-1, 1], 0 \leq \alpha_-(\mathcal{S}) < \alpha_+(\mathcal{S}) \leq 1, \alpha_\pm(\mathcal{S}) \in \pi(\overline{\mathcal{S}})$$

Ceci résulte immédiatement de la connexité.

On introduit maintenant la conjecture dont va dépendre toute la construction du spectre.

**C3=Hypothèse** (suggérée par l'examen du papillon)

Pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout fuseau, les points  $\alpha_\pm$  sont rationnels.

(ceci n'est pas démontré à notre connaissance et ne sera pas démontré dans cet article, mais c'est l'unique hypothèse sur laquelle s'appuiera toute la construction du spectre).

Désormais, on suppose que C3 est vérifiée et on va mettre en évidence toutes les conséquences d'une telle hypothèse.

Observons maintenant que, sous l'hypothèse C3, on a :

P4 La frontière d'un fuseau est "continue".

Plus précisément, si on désigne par  $f_-(\alpha, \lambda)$ ,  $f_+(\alpha, \lambda)$  les deux bornes de l'intervalle  $\mathcal{S}_\alpha$ , alors  $]\alpha_-, \alpha_+[ \ni \alpha \rightarrow f_\pm(\alpha, \lambda)$  est dans la classe de Hölder  $C^{1/3}_{loc}(\] \alpha_-, \alpha_+[)$  et continue sur  $[\alpha_-, \alpha_+]$  avec :  $f_-(\alpha_\pm, \lambda) = f_+(\alpha_\pm, \lambda)$

La propriété de continuité est attribuée à Elliott ([E1]) dans [Be]<sub>2</sub> (théorème 5, Bellissard parle de gap boundaries of the spectrum), le caractère Hölder résulte de l'estimation donnée chez [C-E-Y]. Ces derniers démontrent en effet que, si on définit par  $\text{Dist}(K_1, K_2)$  la distance de Hausdorff entre  $K_1$  et  $K_2$  (i.e. le plus petit  $d$  tel que tout point de  $K_1$  soit à une distance inférieure à  $d$  de  $K_2$  et inversement), alors  $\text{dist}(\Sigma_\alpha^\lambda, \Sigma_{\alpha'}^\lambda) \leq C_\lambda |\alpha - \alpha'|^{1/3}$ .

On en déduit facilement le caractère Hölder local mais un point qui ne nous semble pas avoir été étudié clairement dans la littérature antérieure est la continuité aux points  $\alpha_-$  et  $\alpha_+$ .

On donne ici une démonstration qui s'appuie sur l'hypothèse C3 et l'analyse semi-classique de [He-Sj]<sub>2</sub>.

D'après C3, les points  $\alpha_\pm$  sont rationnels de telle sorte qu'on peut utiliser les résultats de [He-Sj]<sub>2</sub> (théorème 0.1, ce théorème est énoncé avec  $\lambda=1$ ,

mais ce que nous en utilisons est vrai pour tout  $\lambda > 0$ ) (cf aussi [Be]<sub>2</sub> (Théorème 9)). Il est d'abord clair à partir de l'étude semi-classique près de  $\alpha_{\pm}$  que la largeur de  $S_{\alpha}^{\lambda}$  lorsque  $\alpha \rightarrow \alpha_{\pm}$  tend vers 0. En effet près de chaque bande du spectre  $\Sigma_{\alpha_{\pm}}^{\lambda}$ , on a montré que le spectre  $\Sigma_{\alpha}^{\lambda}$  était concentré dans des intervalles de taille majorée par  $\exp-C|\alpha-\alpha_{\pm}|$  sauf dans un voisinage arbitrairement petit d'un point  $\ell_0^{\lambda}(\alpha_{\pm})$  de la bande (le voisinage de ce point est étudié dans [He-Sj]<sub>3</sub>). De plus la distance entre deux de ces intervalles tend vers 0 (cf le théorème 0.1 de [He-Sj]<sub>2</sub>). Ceci montre que :  $f_{+}(\alpha, \lambda) - f_{-}(\alpha, \lambda) \rightarrow 0$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $\alpha_{\pm}$  ( $\pm \alpha < \alpha_{\pm}$ ).

Il reste à montrer que  $f_{-}(\alpha, \lambda)$  tend vers une limite qui nécessairement appartiendra à une bande correspondant au spectre du rationnel  $\alpha_{\pm}$ . Soit donc  $\ell$  une valeur d'adhérence de  $f_{-}$  en  $\alpha_{\pm}$ , c'est à dire (compte-tenu de la propriété sur  $f_{+} - f_{-}$  que l'on vient d'établir) un réel  $\ell$  tel qu'il existe une suite  $(\alpha_n, E_n)$  telle que  $S \ni (\alpha_n, E_n) \rightarrow (\alpha_{\pm}, \ell)$ . L'analyse semi-classique montre alors que nécessairement  $\ell$  est soit  $\ell_0^{\lambda}$ , soit l'une des extrémités  $\ell_{\pm}^{\lambda}$  de la bande. Comme  $f_{-}$  est continue par rapport à  $\alpha$  dans  $] \alpha_{-}, \alpha_{+} [$ , l'ensemble de ces valeurs d'adhérence en  $\alpha_{\pm}$  est un intervalle et est donc réduit à l'un des points  $\ell_{-}^{\lambda}, \ell_{+}^{\lambda}, \ell_0^{\lambda}$ , qui est alors la limite de  $f_{-}$  en  $\alpha_{\pm}$ . On a ainsi obtenu que  $f_{-}(\alpha, \lambda)$  et  $f_{+}(\alpha, \lambda)$  convergent vers  $\ell_0^{\lambda}$  ou vers une extrémités de la bande lorsque  $\alpha$  tend vers  $\alpha_{\pm}$ . (voir théorème 3.2.1 où on démontrera un théorème encore plus précis).

#

P5 Pour tout  $\alpha$ , l'intervalle  $S_{\alpha}^{\lambda} = I(\alpha, \lambda)$  ne se referme jamais quand on fait varier  $\lambda$  dans  $]0, \infty[$ .

$$(3.2.6) \quad m_{t+1}\alpha(s) + n_{t+1} = m_t \alpha(s) + n_t + 1/q(s)$$

Soit encore :

$$(3.2.7)_s \quad (m_{t+1} - m_t)p(s) + (n_{t+1} - n_t)q(s) = 1$$

Par ailleurs, on a, pour  $s$  tendant vers  $\pm\infty$ , (on choisit le signe de  $s$  en imposant  $(-1)^k s > 0$  (cf §4.3)) la relation :

$$(3.2.8)_\infty: (m_{t+1} - m_t)p + (n_{t+1} - n_t)q = 0$$

Ces deux équations fournissent alors un système à deux inconnues  $y$  et  $z$ :

$$y.p(s) + z.q(s) = 1 ; y.p + z.q = 0$$

Utilisant des relations classiques sur les développements en fraction continue (formule K2), on obtient immédiatement comme solution :

$$y = -q ; z = p$$

On voit ainsi que partant de  $(\alpha_0, a_\lambda)$  on obtient (à condition de s'approcher suffisamment de la bande, car le résultat semi-classique n'est vrai qu'asymptotiquement lorsqu'on tend vers  $\alpha_0$ ) des fuseaux pour lesquels le couple  $(m, n)$  vérifie  $m = m_0 + n q$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ ). En partant de l'extrémité droite de la bande voisine gauche (si elle existe), on obtient les fuseaux pour lesquelles  $m = m_0 - n q$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ ).

Pour les bandes extérieures, on couple l'extrémité droite de la bande droite et l'extrémité gauche de la bande de gauche.

Pour le pseudotrou central (dans le cas où le dénominateur est pair), on a deux fuseaux symétriques arrivant au point  $(0, \alpha_0)$  correspondant à des  $m$  de signe opposés. L'étude semi-classique réalisée dans  $[\text{He-Sj}]_2$  permet également de conclure.

#

#### Démonstration de (3.2.5)<sub>b</sub>

Dans la démonstration des points précédents, on a montré que le fuseau

Autre démonstration de (3.2.4) :

Une autre idée pour démontrer cette proposition est de montrer qu'en considérant tous les fuseaux passant par les extrémités de la bande, on épuise ainsi tous les fuseaux possibles, ce qui exclura par conséquent des fuseaux parasites ayant leur "bout" à l'intérieur d'une bande. On construit ces fuseaux par déformation du cas  $\lambda=0$  étudié au §1. Soit donc  $\alpha_0 = p/q = (q_0, \dots, q_k)$  un rationnel et  $B(\lambda) = [a_\lambda, b_\lambda]$  la bande qui nous intéresse et que nous supposerons isolée pour simplifier. On traitera le cas  $q$  impair pour fixer les idées. Soit  $(m_0, n_0)$  le couple correspondant à la densité d'états dans le fuseau  $S_0^\lambda$  contenant le trou contigu à  $a_\lambda$ . On sait que  $|m_0| \in (0, (q-1)/2)$  et qu'à chacun des  $q+1$  trous est affecté un unique  $m$ . Montrons comment on peut construire les autres fuseaux partant de  $a_\lambda$ . Ceci résulte de l'étude semi-classique effectuée dans  $[\text{He-S}]_2$  (cf aussi les résultats rappelés au §5) où on a étudié la structure du spectre pour des  $\alpha$  proches de  $\alpha_0$ . De l'étude semi-classique, on déduit l'existence de fuseaux  $S_t^\lambda$  ( $t=1,2,\dots$ ) aboutissant par la droite en  $(\alpha_0, a_\lambda)$  et dont l'intersection avec  $\alpha = \alpha(s)$  (où  $\alpha(s) = (q_0, \dots, q_k, s) =_{\text{def}} p(s)/q(s)$  (cf l'appendice K)) est un des trous  $]b_{t,s}^\lambda, a_{t+1,s}^\lambda[$  du complémentaire de  $\Sigma_{\alpha(s)}^\lambda$  et  $[a_{t,s}, b_{t,s}]$  est une bande de  $\Sigma_{\alpha(s)}^\lambda$ . De plus deux trous successifs correspondent à des valeurs successives de  $t$ .

Calculons le couple  $(m_t, n_t)$ . On calcule la densité d'états dans  $S_t^\lambda$  par comparaison avec la densité d'états intégrée dans  $S_{t-1}^\lambda$ .

On utilisera la formule (1.8) rappelée au §1 qui permet le calcul de la densité d'états pour des  $\alpha$  rationnels en comptant le nombre de bandes. On obtient en comparant les densités d'états intégrées entre deux fuseaux successifs pour  $\alpha = \alpha(s)$  :

$$\rho_{\alpha_-}^\lambda(g) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_-} \rho_\alpha^\lambda(g)$$

Or  $|\rho_\alpha^\lambda(g)| \leq |m_1\alpha + n_1 - m_0\alpha - n_0|$  pour  $\alpha$  assez voisin de  $\alpha_-$ .

On en déduit que  $\rho_{\alpha_-}^\lambda(g) = 0$  compte-tenu de (3.2.1). On a obtenu ainsi la contradiction.

Cas de la bande centrale lorsque  $\alpha$  est un rationnel à dénominateur pair.

Supposons donc que  $a_\lambda$  (ou  $b_\lambda$ ) soit égal à 0 (ce sera  $a_\lambda$  dans la suite pour fixer les idées). Supposons toujours d'abord que  $k(\alpha, E)$  soit continu par rapport à  $(\alpha, E)$  et que pour une valeur de  $\lambda$ , on ait un fuseau  $\mathcal{S}_1^\lambda$  tel que :  $E_\pm(\mathcal{S}_1^\lambda)$  (ce sera  $E_-$  dans la suite pour fixer les idées) soit à l'intérieur de la bande  $B(\lambda) = [0, b_\lambda]$ . Quand on fait tendre  $\lambda$  vers 0 alors nécessairement  $(\mathcal{S}_1^\lambda)$  tend vers un arc ayant comme extrémité  $\cos \pi \alpha_\pm \ell$  pour un certain  $\ell$  cette extrémité correspondant à 0 (si on veut tomber sur un cas différent du cas traité auparavant).

La densité d'états intégrée  $k^\lambda(\alpha, E)$  est, pour  $(\alpha, E)$  dans le fuseau  $\mathcal{S}_1^\lambda$ , de la forme  $m_1\alpha + n_1$  avec  $m_1$  et  $n_1$  indépendants de  $\lambda$ .

Soit  $(\mathcal{S}_1^\lambda)' = \{(\alpha, E) : (\alpha, -E) \in \mathcal{S}_1^\lambda\}$  le fuseau symétrique, dans lequel la densité d'états intégrée est associée au couple  $(m'_1, n'_1) = (1 - m_1, -n_1)$ .

On remarque alors que d'une part en faisant tendre  $\lambda$  vers 0 :

$$(3.2.4) \quad m_1\alpha_- + n_1 = m'_1\alpha_- + n'_1 = 1/2$$

et d'autre part, si on admet la continuité par rapport à  $(\alpha, E)$  :

$$(3.2.5) \quad m_1\alpha_- + n_1 = k^\lambda(\alpha_-, E_-) \neq k^\lambda(\alpha_-, -E_-) = m'_1\alpha_- + n'_1$$

On a ainsi obtenu une contradiction. La suppression de l'hypothèse de continuité par rapport à  $(\alpha, E)$  est analogue au cas traité précédemment.

#

Pour fixer les idées, supposons que ce soit  $a_0$ . On désignera par  $k^\lambda(\alpha, E)$  la densité d'états intégrée qui, pour  $(\alpha, E)$  dans le fuseau  $\mathcal{S}_1^\lambda$ , est nécessairement de la forme  $m_1\alpha + n_1$  avec  $m_1$  et  $n_1$  indépendants de  $\lambda$ .

Traisons d'abord le cas où la bande ne touche pas de bande voisine en  $a_0$ . Soit  $\mathcal{S}_0^\lambda$  le fuseau dont la section par  $\alpha = \alpha_\pm$  est un intervalle dont un bord est  $a_\lambda$ . Ce fuseau est forcément distinct de  $\mathcal{S}_1^\lambda$ . La densité d'états, pour  $(\alpha, E)$  dans le fuseau  $\mathcal{S}_0^\lambda$ , est nécessairement de la forme  $m_0\alpha + n_0$  avec  $m_0$  et  $n_0$  indépendants de  $\lambda$ . On a vu au §2 que les expressions  $m_0\alpha + n_0$  et  $m_1\alpha + n_1$  de la densité d'états restent valables sur les fuseaux limite pour  $\lambda \rightarrow 0$ . Comme ces deux fuseaux limite se coupent au point d'abscisse  $\alpha_\pm$ , on a :

$$(3.2.2) \quad m_0\alpha_\pm + n_0 = m_1\alpha_\pm + n_1;$$

D'autre part, si on admet la continuité de  $k(\alpha, E)$  quand  $(\alpha, E)$  tend vers  $(\alpha_\pm, E_\pm)$ , on vérifie que :

$$(3.2.3) \quad m_1\alpha_\pm + n_1 = k^\lambda(\alpha_\pm, E_\pm) \neq k^\lambda(\alpha_\pm, a_\lambda) = m_0\alpha_\pm + n_0$$

L'inégalité médiane est due au fait que :  $E_\pm \neq a_\lambda$  et à la stricte monotonie de  $E \rightarrow k^\lambda(\alpha_\pm, E)$  sur la bande  $B(\lambda)$ . On a ainsi obtenu une contradiction.

On ne sait pas en fait que  $(\alpha, E) \rightarrow k^\lambda(\alpha, E)$  est continue mais on a seulement la propriété 1.24. On procède alors ainsi pour modifier la démonstration. Soit  $g$  une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $]a_\lambda, E_-(\mathcal{S}_1^\lambda)[$  égale à 1 sur  $]a'_\lambda, a''_\lambda[$  (avec  $a_\lambda < a'_\lambda < a''_\lambda < E_-(\mathcal{S}_1^\lambda)$ ) et inférieure à 1 partout.

On a d'une part :

$$\rho_{\alpha_-}^\lambda(g) > 0 \text{ de par la propriété de stricte monotonie dans } B(\lambda) \text{ (cf §2)}$$

et d'autre part :

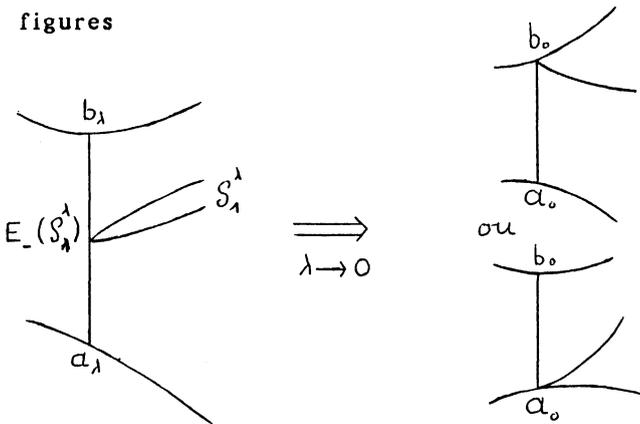
rationnels au voisinage desquels on peut refaire la même construction. On met donc en évidence pour  $\beta^t$  un  $\ell^t$  tel que  $\beta^t \notin \cup_{j \leq 2\ell^t} \mathbb{N}\{1/j\}$  et tel que le fuseau se contracte dans  $]\beta^t - \eta, \beta^t + \eta[ \setminus \cup_{j \leq 2\ell^t} \mathbb{N}\{1/j\}$  sur  $\text{ecos}(\pi\alpha\ell^t)$  (avec  $\eta$  assez petit). On en déduit immédiatement que  $\ell^t = \ell$  et que par conséquent :  $]\alpha_-, \alpha_+[ \setminus \cup_{j \leq 2\ell} \mathbb{N}\{1/j\} = \emptyset$

Le théorème (2.2) montre en fait que les fuseaux sont ouverts pour  $\lambda \neq 0$  sauf éventuellement dans  $\cup_{j \leq 2\ell} \mathbb{N}\{1/j\}$ . Par conséquent, on a effectivement (3.2.5)<sub>a</sub>.

Démonstration de (3.2.4) :

Supposons un instant que  $(\alpha, E) \rightarrow k(\alpha, E)$  soit continue et que pour une valeur de  $\lambda$ , on ait un fuseau  $S_1^\lambda$  tel que :  $E_-(S_1^\lambda)$  soit à l'intérieur d'une bande  $B(\lambda) = [a_\lambda, b_\lambda]$ . Quand on fait tendre  $\lambda$  vers 0 alors nécessairement  $(S_1^\lambda)$  tend vers un arc ayant comme extrémité  $\cos \pi\alpha_\pm \ell$  pour un certain  $\ell$  cette extrémité correspond à l'une des extrémités de la bande limite  $a_0$  ou  $b_0$ .

figures



$|\lambda' - \lambda| < (1/4) |f_+(\alpha, \lambda') - f_-(\alpha, \lambda')|$ , alors (3.2.2) est vérifiée. Pour obtenir (3.2.2) pour  $\lambda_1, \lambda_2$  quelconques, on trouve une suite croissante finie  $\lambda^{(j)}$  ( $j=1, \dots, N$ ) de  $[\lambda_1, \lambda_2]$  telle que  $\lambda^{(1)} = \lambda_1$ ,  $\lambda^{(N)} = \lambda_2$  et telle que :

$$\forall j, |\lambda^{(j+1)} - \lambda^{(j)}| < (1/2) |f_+(\alpha, \lambda^{(j)}) - f_-(\alpha, \lambda^{(j)})|.$$

On obtient alors (3.2.2) en sommant sur  $j$  les inégalités :

$$|f_{\pm}(\alpha, \lambda^{(j)}) - f_{\pm}(\alpha, \lambda^{(j+1)})| \leq 4 |\lambda^{(j+1)} - \lambda^{(j)}|$$

#### démonstration de (3.2.1)

Dans  $]\alpha_-, \alpha_+ ] \times [0, \infty[$ , on a vu la continuité partielle par rapport à  $\alpha$  au point P4, (3.2.2) permet alors de conclure car le caractère Lipschitzien est uniforme par rapport à  $\alpha$ .

#### démonstration de (3.2.5)

Quand  $\lambda$  tend vers 0, chacun des fuseaux  $\mathcal{S}^\lambda$  se contracte sur un fuseau limite  $\mathcal{S}^0$  constitué d'un arc situé sur la courbe  $E = \pm \cos \pi \alpha \ell$ . Plus précisément, il existe un  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon = \pm 1$  tel que, pour tout compact  $K$  de  $]\alpha_-, \alpha_+ ]$ , il existe  $C$  tel que :

$$(3.2.6) \sup_{x \in I(\alpha, \lambda)} |x - \varepsilon \cos(\pi \alpha \ell)| \leq C \lambda, \quad \forall \alpha \in K.$$

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème 2.2 qui

localise les trous et de (3.2.2) qui contrôle le diamètre ( on a :

$f_+(\alpha, 0) - f_-(\alpha, 0) = 0$ ). Le théorème (2.2) donne d'abord le résultat dans tout compact de  $]\alpha_-, \alpha_+ ] \setminus \bigcup_{j \leq 2\ell} \mathbb{N}\{1/j\}$  pour un certain  $\ell$  obtenu à partir de

l'examen de la situation pour un rationnel dans  $]\alpha_-, \alpha_+ ]$ . Ce  $\ell$  est

déterminé par la valeur de la densité d'état dans le fuseau.

Les points exceptionnels  $\beta^t$  de  $]\alpha_-, \alpha_+ ] \setminus \bigcup_{j \leq 2\ell} \mathbb{N}\{1/j\}$  sont des

Théorème 3.2.1

Si on fait l'hypothèse C3, il existe pour toute famille de fuseaux  $\mathcal{S}^\lambda$  ( $\lambda \in ]0, \infty[$ ) obtenue par déformation continue deux rationnels  $\alpha_-$  et  $\alpha_+$  (avec  $0 \leq \alpha_- < \alpha_+ \leq 1$ ) tels que :

$\forall \lambda, \pi(\overline{\mathcal{S}^\lambda}) = [\alpha_-, \alpha_+]$  et deux fonctions  $f_-$  et  $f_+$  définies sur  $]\alpha_-, \alpha_+[ \times ]0, \infty[$  telles que :

$$(3.2.1) f_{\pm}(\alpha, \lambda) \in C^0([\alpha_-, \alpha_+] \times [0, \infty])$$

$$(3.2.2) |f_{\pm}(\alpha, \lambda_1) - f_{\pm}(\alpha, \lambda_2)| \leq 2 |\lambda_1 - \lambda_2|$$

$$(3.2.3) f_-(\alpha, \lambda) < E < f_+(\alpha, \lambda), \alpha \in ]\alpha_-, \alpha_+[ \text{ ssi } (\alpha, E) \in \mathcal{S}^\lambda$$

$$(3.2.4) f_-(\alpha_{\pm}, \lambda) = f_+(\alpha_{\pm}, \lambda) \text{ appartient à une extrémité d'une bande de } \Sigma_{\alpha_{\pm}}^\lambda$$

(dans le cas où  $\alpha_{\pm}$  est un rationnel à dénominateur pair, 0 sera considéré comme extrémité de bande)

(3.2.5) Si la densité d'état dans  $\mathcal{S}^\lambda$  est donnée par  $k(\alpha, E) = m\alpha + n$ , alors

$$(a) \alpha_{\pm} \in \bigcup_{j \leq 2|m|} \mathbb{N}\{1/j\} \cup (0, 1)$$

et

$$(b) ]\alpha_-, \alpha_+[ \cap \left( \bigcup_{j \leq 2|m|} \mathbb{N}\{1/j\} \cup (0, 1) \right) = \emptyset$$

\*

preuve du théorème :

L'existence de  $\alpha_-, \alpha_+, f_-$  et  $f_+$  a déjà été obtenue dans la discussion précédant le théorème.

démonstration de (3.2.2)

Pour  $\alpha$  fixé dans  $]\alpha_-, \alpha_+[$  et  $\lambda \in ]0, \infty[$ , on montre par un argument de perturbation immédiat que si :

Pour  $\alpha$  rationnel, c'est l'objet des résultats de Van Mouche [Mo] et Choi-Elliott-Yui [C-E-Y]. On peut numéroter chacun des intervalles entre deux bandes par un  $r \in \{1, \dots, q-1\}$  (si  $q$  est impair) ou à  $\{1, \dots, (q-2)/2, (q+2)/2, \dots, q-1\}$  si  $q$  est pair.

La déformation pour  $\alpha$  rationnel d'un intervalle  $I(\alpha, \lambda)$  quand  $\lambda$  varie est clairement définie en disant que son numéro  $r$  est fixé. Ceci va nous permettre de définir la notion de variation continue d'un fuseau  $\mathcal{S}^\lambda$  par variation de  $\lambda$ . Soit  $\lambda_0$  et choisissons un  $\alpha_0$  rationnel tel que  $I(\alpha_0, \lambda_0)$  soit non vide. On définit la variation du fuseau en prenant pour tout  $0 < \lambda$  le fuseau contenant  $I(\alpha_0, \lambda)$ .

Le problème est qu'on n'a pas nécessairement unicité du fuseau déformé quand on change de  $\alpha$  rationnel avec la propriété ci-dessus. Si on prend en effet deux rationnels  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  distincts, on pourrait obtenir deux familles distinctes de fuseaux  $\mathcal{S}^{0, \lambda}$  et  $\mathcal{S}^{1, \lambda}$ . Mais ceci suppose qu'il y a une valeur de  $\alpha$  entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  pour lequel  $I(\alpha, \lambda)$  s'est refermé. Compte-tenu de  $C_3$  et de ce qui précède ceci ne peut se produire ni sur un rationnel ni sur un irrationnel car on aurait un fuseau à extrémité irrationnelle. Par conséquent, dans la déformation, l'intervalle  $I(\alpha, \lambda)$  ne se referme jamais et le même argument donne aussi :

(P6)  $\alpha_{\pm}(\mathcal{S}^\lambda)$  est indépendant de  $\lambda$ .

Si on fait l'hypothèse C3, on a donc toutes les propriétés P1 à P6. On résume et complète cette discussion dans le "théorème" suivant :

$\mathcal{S}^\lambda$  se contractait lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  vers un fuseau limite  $\mathcal{S}^0$  correspondant à l'arc :  $E = \pm \cos \pi \alpha \ell$ ,  $\alpha \in ]\alpha_-, \alpha_+[$

Par l'homéomorphisme  $\psi$  défini par :

$$(3.2.7) \quad \psi(\alpha, E) = (x, y) \text{ avec } y = 1 - (1/\pi)(\text{Arc cos } E), \quad x = \alpha,$$

on peut envoyer  $\Sigma^0$  sur un fermé  $\Sigma^0$  de  $[0,1] \times [0,1]$  et chaque fuseau limite sur un segment de droite de la forme :

$$y = \pm x \ell + n \quad (n \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}), \quad x \in ]\alpha_-, \alpha_+[.$$

Dans la suite, on identifiera souvent les fuseaux-limites et leur image par  $\psi$ . Il nous reste donc à montrer comment on trouve les différentes valeurs de  $\alpha_-, \alpha_+$  qu'on a déjà localisé dans  $\cup_{j \leq 2\ell} \mathbb{N}\{1/j\}$ . Cette démonstration se fera par récurrence sur  $\ell$  et on en profitera pour donner la règle pratique de détermination des segments (dans la représentation après application de  $\psi$ ).

### Construction des fuseaux limites

Pour chaque fuseau, on donnera la valeur du couple  $(m, n)$ :

étape 1 :

Tracer les droites  $y=x$  et  $y=(1-x)$ . On les appellera les rayons  $R_{\pm}^1$  issus de  $(0,0)$  et  $(0,1)$  en les restreignant au carré  $Q$ . On notera  $R^1 = R_+^1 \cup R_-^1$ .

Il est clair que l'on détermine ainsi dans l'intérieur de  $Q : ]0,1[ \times ]0,1[$  quatre segments de droites ouverts. Ce sont nécessairement les fuseaux limites. En effet, sinon un des rayons serait un fuseau limite ce qui est en contradiction avec le fait que  $E=0$  est toujours dans  $\Sigma^\alpha$  pour tout  $\alpha$ . Les quatre segments correspondent donc aux fuseaux limites suivants :

$$m=1, n=0 \quad x_- = 0, x_+ = 1/2; \quad x_- = 1/2, x_+ = 1$$

$$m = -1, n = 1 \quad x_- = 0, x_+ = 1/2; x_- = 1/2, x_+ = 1$$

Ceci démontre bien  $(3.2.5)_b$  pour  $\ell = 1$ .

On va maintenant poursuivre la construction des rayons sur lesquels sont situés les fuseaux. A chaque étape, on obtiendra toute une famille de segments ouverts portés par ces rayons et il nous restera à montrer que les segments ainsi construits sont des fuseaux limites dans la représentation  $(x, y)$ .

### étape 2

Tracer les droites  $y = 2x$  et  $y = 1 - 2x$ , et lorsque ces droites rencontrent  $y = 0$  ou  $y = 1$  les prolonger dans  $Q$  par réflexion. On obtient ainsi deux rayons  $R_{\pm}^2$ . Les segments de type 2 sont obtenus en prenant sur  $R_{\pm}^2$  les composantes connexes de  $R_{\pm}^2 \setminus (R_{\pm}^2 \cup R_{\pm}^1 \cup R_{\pm}^1 \cup \partial Q)$  ou sur  $R_{\pm}^2$  les composantes connexes de  $R_{\pm}^2 \setminus (R_{\pm}^2 \cup R_{\pm}^1 \cup R_{\pm}^1 \cup \partial Q)$ . On notera  $R^2 = R^1 \cup R_+^2 \cup R_-^2$ .

### étape j :

On suppose qu'on a déterminé les segments de type strictement inférieur à  $j$ , et les ensembles  $R_-^k, R_+^k, R^k$  pour  $k < j$ . On détermine les segments de type  $j$  par la procédure suivante. On trace les droites  $y = jx$  et  $y = 1 - jx$ , et lorsque ces droites rencontrent  $y = 0$  ou  $y = 1$ , on les prolonge dans  $Q$  par réflexion et ainsi de suite. On obtient ainsi deux rayons  $R_{\pm}^j$ . Les segments de type  $j$  sont obtenus en prenant sur  $R_{\pm}^j$  les composantes connexes de  $R_{\pm}^j \setminus (R_{\pm}^j \cup R_{\pm}^{j-1} \cup \partial Q)$  ou sur  $R_{\pm}^j$  les composantes connexes de  $R_{\pm}^j \setminus (R_{\pm}^j \cup R_{\pm}^{j-1} \cup \partial Q)$ . On notera :  $R^j = R^{j-1} \cup R_+^j \cup R_-^j$ .

Fin de la démonstration de (3.2.5)<sub>b</sub>.

On sait par (3.2.5)<sub>a</sub> que tout fuseau limite de type  $\ell$  est un segment ouvert sur un rayon dans  $R_+^\ell \cup R_-^\ell$ . Il suffit alors de vérifier que les abscisses de  $R_+^\ell \cap R_-^\ell$  correspondent à  $(\mathbb{N}/2\ell) \cap ]0,1[$ . Comme dans le cas  $\ell=1$ , ces points correspondent nécessairement à des extrémités de fuseau. On vérifie maintenant que les abscisses des points de  $R_{\pm}^j \cap (R^{j-1} \cup \partial Q)$ , correspondent à  $\cup_{j < 2\ell} \mathbb{N}\{1/j\}$ . En ces points, le nouveau rayon rencontre forcément ou bien  $y=0,1/2$ , ou 1 ou bien un segment de  $R^{j-1}$ . Le fuseau-limite ne peut traverser en ces points.

#

Remarque 3.2.2

Pour  $x$  donné, la densité d'états est déterminée par la valeur de  $y$  sur le segment (= fuseau)

Remarque 3.2.3 : on n'a pas eu besoin des résultats semi-classiques de [He-Sj]<sub>3</sub>. Bien entendu, dans tout ce qui précède, on utilise l'hypothèse C3.

Remarque 3.2.4 :

la conjecture C3 implique bien entendu le caractère cantorien du spectre dans le cas irrationnel. On obtient en effet la forme "dry" ou "strong" de la conjecture des 10 Martinis que B.Simon énonce ainsi dans [Si] :

Pour tout  $\lambda \neq 0$ , tout irrationnel  $\alpha$ , et tout entier  $m, n$  avec  $0 < m\alpha + n < 1$ , il existe un trou sur lequel on a :  $k(\alpha, E) = m\alpha + n$ .

Cette conjecture se déduit de C3 de la manière suivante ; Il résulte du théorème 2.2 que pour tout  $\ell$ , il existe pour  $\lambda > 0$  assez petit, un trou et  $n_{\pm}$  tel que :

$k^{\lambda}(\alpha, E) = m\alpha + n_{\pm}$  avec  $m = \pm \ell$ . Comme pour  $m$  fixé, il n'y a qu'un  $n$  tel que  $0 < m\alpha + n < 1$ , on répond bien à la question modulo cette restriction  $\lambda$  assez petit dépendant de  $\ell$ . La conjecture C3 et ses conséquences nous permet de faire varier  $\lambda$  dans  $]0, \infty[$  sans modifier la densité d'états. On obtient bien ainsi la conjecture.

### Apparition de bandes

La question est la suivante : étant donné une bande correspondant au spectre de Harper correspondant à un rationnel  $\alpha$  dont le développement en fraction continue est  $\alpha_0 = (q_0, q_1, \dots, q_k) = p^k/q^k$ . Comment se répartissent les bandes pour :  $\alpha(q) = (q_0, q_1, \dots, q_k, q)$  où  $q$  est dans  $\mathbb{Z}$  avec  $|q| \geq 2$ . On peut espérer deux types de résultats : un résultat semi-classique pour  $|q|$  grand et le résultat pour tout  $q$  en tenant compte de la description des fuseaux précédente. Ceci sera étudié aux § 4 et 5.

### Remarque 3.2.5: une autre démonstration du point délicat de P4

Il s'agit de montrer la continuité en  $\alpha_{\pm}$  ou  $\alpha_{\pm}$  de  $f_{\pm}(\alpha, \lambda)$  sans utiliser l'approche semi-classique. On reprend pour cela la démonstration de 3.2.4 sans supposer cette propriété.

On va regarder la situation en  $\alpha_{\pm}$  et dans le cas d'une bande simple. Soit :

$$\ell_{-}(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{-}} f_{-}(\alpha, \lambda), \quad \ell_{+}(\lambda) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \alpha_{+}} f_{+}(\alpha, \lambda)$$

Il est clair que  $[\ell_{-}(\lambda), \ell_{+}(\lambda)]$  est à l'intérieur d'une bande  $B(\lambda) = [a_{\lambda}, b_{\lambda}]$ .

Quand on fait tendre  $\lambda$  vers 0 alors nécessairement  $(\mathcal{S}_1^\lambda)$  tend vers un arc ayant comme extrémité  $\cos \pi \alpha_{\pm} \ell$  pour un certain  $\ell$  cette extrémité correspond à l'une des extrémités de la bande limite  $a_0$  ou  $b_0$ . Pour fixer les idées, supposons que ce soit  $a_0$ . Supposons alors que  $\ell_+(\lambda) > a_\lambda$  pour une valeur de  $\lambda$ . Soit  $\mathcal{S}_0^\lambda$  le fuseau dont la section par  $\alpha = \alpha_-$  est un intervalle dont un bord est  $a_\lambda$ . Ce fuseau est forcément distinct de  $\mathcal{S}_1^\lambda$ . La densité d'états, pour  $(\alpha, E)$  dans le fuseau  $\mathcal{S}_0^\lambda$ , est nécessairement de la forme  $m_0 \alpha + n_0$  avec  $m_0$  et  $n_0$  indépendants de  $\lambda$ .

On fait alors deux remarques, d'une part en faisant tendre  $\lambda$  vers 0, on constate que nécessairement :  $m_0 \alpha_- + n_0 = m_1 \alpha_- + n_1$

et d'autre part, si  $g$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact dans

$] a_\lambda, \ell_+(\lambda)[$  égale à 1 sur  $]a'_\lambda, a''_\lambda[$  (avec  $a_\lambda < a'_\lambda < a''_\lambda < \ell_+(\lambda)$  et  $\leq 1$  partout), on a d'une part :

$$\rho_{\alpha_-}^\lambda(g) > 0 \text{ de par la propriété de stricte monotonie dans } B(\lambda) \text{ (cf §2)}$$

et d'autre part :

$$\rho_{\alpha_-}^\lambda(g) = \lim_{\alpha_n \rightarrow \alpha_-} \rho_{\alpha_n}^\lambda(g)$$

Or  $|\rho_{\alpha_n}^\lambda(g)| \leq |m_1 \alpha_n + n_1 - m_0 \alpha_n - n_0|$  pour une suite de  $\alpha_n$  tendant vers  $\alpha_-$ .

On en déduit que  $\rho_{\alpha_-}^\lambda(g) = 0$  compte-tenu de (3.2.1). On a obtenu ainsi la contradiction. On a donc  $\ell_+(\lambda) = a_\lambda$  ce qui implique  $a_\lambda = \ell_-(\lambda) = \ell_+(\lambda)$  et la continuité de  $f_-$  et  $f_+$  en  $\alpha_-$ .

#### §4 L' approche de Hofstadter : le formalisme des trapèzes

Hofstadter [Ho] travaille avec des notions de (sous-)cellules gauche, droite ou centrale s'imbriquant les unes dans les autres. Pour des raisons techniques, on préfère tourner la figure de  $\pi/2$  pour avoir  $x = \alpha$  en abscisse. Regardons ces constructions mais, compte-tenu des résultats du §3, on travaille avec les fuseaux-limites et après l'homéomorphisme introduit précédemment en (3.2.7) envoyant ces fuseaux-limites sur des segments de droites (ou segments de rayon).

##### §4.1 préliminaires :

###### Lemme 4.1.1:

Soient  $x_0 < x_1$ ,  $q, \tilde{q} > 0$ ,  $r, \tilde{r} \in \mathbb{Z}$ . Alors il existe un difféomorphisme  $\phi$ :

$[x_0, x_1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}$  de la forme

$$(4.1.1) \quad \tilde{y} = f(x)y + g(x) \quad ; \quad \tilde{x} = h(x)$$

avec  $f, g, h \in C^\infty([x_0, x_1])$ ,  $f(x) > 0$ ,  $h(x_0) = 0$ ,  $h(x_1) = 1$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h$  quotient de deux fonctions affines, et les propriétés :

$$(4.1.2) \quad \phi \text{ envoie le trapèze } \langle (x_0, (r-1)/q), (x_1, (\tilde{r}-1)/\tilde{q}), (x_1, \tilde{r}/\tilde{q}), (x_0, r/q) \rangle$$

sur le carré standard  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

$$(4.1.3) \quad \text{Pour tous } k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}, \phi \text{ envoie le segment :}$$

$$[(x_0, (r+k-1)/q), (x_1, (\tilde{r} + \tilde{k} - 1)/\tilde{q})] \text{ sur le segment } [(0, k), (1, \tilde{k})]$$

De plus ce difféomorphisme est unique .

Démonstration :

L'utilisation d'une application affine croissante en  $x$  permet de se ramener au cas :  $x_0=0, x_1=1$ . On applique ensuite l'application :

$\phi_1 : (x,y) \rightarrow (x, y - (x(\tilde{r}-1)/q + (1-x)(r-1)/q))$ , ce qui donne une réduction au cas  $r=\tilde{r}=1$ . On cherche ensuite  $\phi$  de la forme (4.1.1) avec  $g(x)=0$ . Il faut

alors trouver  $f$  et  $h$  tels qu'on a l'équivalence :

$$(4.1.4) \quad y = \left(\frac{\tilde{k}}{q} - \frac{k}{q}\right)x + \frac{k}{q} \iff \tilde{y} = (\tilde{k} - k) \tilde{x} + k$$

pour tous  $k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}$ . La deuxième équation de (4.1.4) est équivalente à :

$y = (\tilde{k}-k) \left( h(x)/f(x) \right) + k/f(x)$ . On a donc (4.1.4) si :

$$(4.1.5) \quad h(x)/f(x) = x/\tilde{q}, \quad (1/f(x)) - (h(x)/f(x)) = (1/q) - (x/q)$$

On trouve la solution :

$$(4.1.6) \quad f(x) = 1 / \left( \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q}\right)x \right), \quad h(x) = \left(\frac{x}{q}\right) / \left(\frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q}\right)x\right)$$

et on vérifie les propriétés voulues.

Montrons maintenant l'unicité. Il suffit de montrer que si on a un homéomorphisme du carré  $Q$  sur lui-même qui envoie tout segment  $[(0,k), (1, \tilde{k})]$  sur lui-même alors c'est l'identité. Les points de la forme  $(p/q, r/q)$  avec  $0 < p < q, 0 < r < q$  et  $q$  premiers sont les intersections de deux segments de ce type et sont donc des points fixes pour l'application. Ces points sont denses dans  $Q$ .

#

§4.2 Construction des trapèzes "à droite"

Soit  $p/q \in ]0,1[$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux ( $p, q \in \mathbb{N}$ ). Considérons une droite de la forme  $y=mx+n, m, n \in \mathbb{Z}$  qui passe par  $(p/q, (r-1)/q), r \in \{1, \dots, q\}$ .

Alors on a la condition :

$$(4.2.1) \quad mp+nq = r-1.$$

Appelons la droite  $y=mx+n$  admissible si  $m,n \in \mathbb{Z}$ . Une telle droite est caractérisée par le fait qu'elle passe par les deux points  $(0,k), (1,\tilde{k})$  avec  $k,\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ . La condition (4.2.1) devient :

$$(4.2.2) \quad (q-p)(k - ((r-1)/q)) + p(\tilde{k} - ((r-1)/q)) = 0.$$

Si  $m_0, n_0$  est une solution de (4.2.1), alors la solution générale devient  $(m_0 + \ell q, n_0 - \ell p)$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

Si  $q$  est impair ou si  $q$  est pair et  $m_0 - (q/2) \notin \mathbb{Z}q$ , alors il existe une unique solution  $(m,n)$  de (4.2.1) avec  $|m|$  minimal. C'est l'unique solution avec  $|m| < q/2$ . Si  $m_0 - (q/2) \in \mathbb{Z}q$ , alors il y a deux solutions de (4.2.1) avec  $|m|$  minimal :  $((q/2), n_+)$ ,  $((-q/2), n_-)$ .

Alors  $(q/2)(p/q) + n_+ = ((r-1)/q)$ , c.à.d.  $((r-1)/q) = n_+ + (p/2)$ .

Comme  $q$  est pair,  $p$  impair on a  $((r-1)/q) - (1/2) \in \mathbb{Z}$  et donc :

$$(4.2.3) \quad (r-1)/q = 1/2$$

Inversement si on a (4.2.3), alors  $q$  est pair,  $p$  est impair et (4.2.1) s'écrit :  $m.(p/q) + n = (1/2)$ ,  $2mp = (1-2n)q$  qui implique :  $2m = \ell q$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\ell p = (1-2n)$  et comme  $p$  est impair,  $\ell$  est impair et :  $(m - (q/2)) \in \mathbb{Z}q$ .

Supposons "pour simplifier" (on pourrait traiter les autres cas) que  $((r-1)/q) \neq 1/2$ ,  $r/q \neq 1/2$ . Soit  $m_{r-1}$  la pente de la droite admissible passant par  $(p/q, (r-1)/q)$  de la forme  $y=mx+n$ , avec  $|m|$  minimale ( $=|m_{r-1}|$ ), et définissons  $m_r$  de même. On a donc :

$$(4.2.4) \quad |m_{r-1}| < q/2, |m_r| < q/2.$$

Considérons la droite admissible passant par  $(p/q, (r-1)/q)$  de pente immédiatement supérieure à  $m_{r-1}$ , c.à.d de pente  $(m_{r-1} + q)$  :

$$(4.2.5) \quad y = (m_{r-1} + q)(x - (p/q)) + (r-1)/q$$

Comme  $m_{r-1} + q > q/2 > m_r$ , cette droite coupe la droite de pente  $m_r$

passant par  $(p/q, r/q)$  en un point  $(\tilde{p}/\tilde{q}, r_2/\tilde{q})$  avec  $\tilde{p}/\tilde{q} > p/q$ . On pose :

$$(4.2.6) \quad s = \tilde{p}/\tilde{q} - p/q = (\tilde{p}q - \tilde{q}p)/\tilde{q}q .$$

s vérifie :

$$(4.2.7) \quad ((r-1)/q) + (m_{r-1}+q)s = (r/q) + m_r s ,$$

ou bien :

$$(4.2.8) \quad (m_{r-1}+q-m_r)s = (1/q)$$

Cette dernière équation détermine s.

De même la droite passant par  $(p/q, r/q)$  de pente  $m_r - q$  coupe la droite passant par  $(p/q, (r-1)/q)$  de pente  $m_{r-1}$  en un point  $(\tilde{p}'/\tilde{q}', r_1/\tilde{q}')$ .

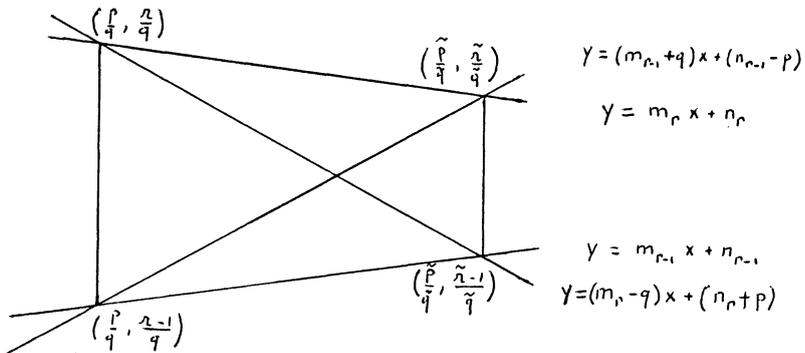
Observons tout d'abord que :  $\tilde{p}'/\tilde{q}' = \tilde{p}/\tilde{q}$ , comme il résulte de (4.2.8) et de :

$$(4.2.8)' \quad (m_{r-1}+q-m_r)s' = (1/q) \text{ avec } s' = \tilde{p}'/\tilde{q}' - p/q$$

On peut choisir :  $\tilde{p}' = \tilde{p}$ ,  $\tilde{q}' = \tilde{q}$  et ainsi  $r_2$  est bien déterminé. On observe que :

$$(4.2.9) \quad (r_2 - r_1)/\tilde{q} = qs , \text{ soit encore } s = (r_2 - r_1)/q\tilde{q} .$$

figure : Le trapèze à droite



Les droites admissibles (i.e. de la forme  $y=mx+n$  avec  $m,n \in \mathbb{Z}$ ) passant par  $(\tilde{p}/\tilde{q}, r_2/\tilde{q})$  passent obligatoirement par un point de la forme  $(p/q, \ell/q)$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$  et leurs pentes sont toutes congruentes modulo  $\mathbb{Z}\tilde{q}$  (de plus, on les obtient toutes ainsi). D'après la construction nous pouvons avoir  $\ell=r$  et  $\ell=r-1$  (et donc tous les  $\ell \in \mathbb{Z}$ ). Les deux droites correspondantes ont donc des pentes qui diffèrent par  $\tilde{q}$  :

$$(4.2.10) \quad m_{r-1} + q - m_r = \tilde{q}$$

En substituant dans (4.2.8), on obtient :

$$(4.2.11) \quad s = 1/q\tilde{q},$$

et comparant avec (4.2.6) et (4.2.9), on a aussi :

$$(4.2.12) \quad \tilde{p}q - \tilde{q}p = 1$$

$$(4.2.13) \quad r_2 - r_1 = 1$$

(on a donc deux "gaps successifs" pour  $x = \tilde{p}/\tilde{q}$ ).

On écrira :  $\tilde{r}-1 = r_1$ ,  $\tilde{r} = r_2$ .

Comparons les modules des pentes  $m_{r-1} + q$ ,  $m_r - q$  (voir figure ci-dessus). Puisque  $|m_{r-1} + q| = m_{r-1} + q$ ,  $|m_r - q| = -(m_r - q)$ , on a l'équivalence :

$$(4.2.15) \quad |m_{r-1} + q| > |m_r - q| \iff m_r + m_{r-1} > 0.$$

Par le même calcul, on a :

$$(4.2.16) \quad |m_{r-1} + q| = |m_r - q| \text{ ssi } m_r + m_{r-1} = 0.$$

La substitution de cette dernière relation dans les égalités :

$$m_{r-1}p + n_{r-1}q = r-1, \quad m_r p + n_r q = r,$$

implique :

$$2m_{r-1}p + (n_{r-1} - n_r)q = -1.$$

Ceci est impossible si  $q$  est pair, mais peut arriver dans le cas où  $q$  est impair (si par exemple  $[(r-1)/q, r/q]$  correspond à la bande centrale).

On applique maintenant le lemme 4.1.1 avec :

$$(x_0, x_1, q, \tilde{q}, r, \tilde{r}) = (p/q, \tilde{p}/\tilde{q}, q, \tilde{q}, r, \tilde{r})$$

(on explicitera plus loin le lien avec les développements en fractions continues).

Soit  $T$  le trapèze  $(p/q, (r-1)/q)$ ,  $(\tilde{p}/\tilde{q}, (\tilde{r}-1)/\tilde{q})$ ,  $(\tilde{p}/\tilde{q}, \tilde{r}/\tilde{q})$ ,  $(p/q, r/q)$ .

On l'appellera dans la suite trapèze à droite ou TD (car  $x_1 > x_0$ ). On a donc

$\phi(T) = Q$  où  $Q = [0,1] \times [0,1]$ . Soit  $A \in \dot{T}$  un point à coordonnées rationnelles et considérons un segment  $S = [p/q, (r+k-1)/q, \tilde{p}/\tilde{q}, (\tilde{r} + \tilde{k}-1)/\tilde{q}]$  qui passe par  $A$ . Soit  $B = \phi(A) = (\hat{p}/\hat{q}, \hat{r}/\hat{q})$ . Alors l'image par  $\phi$  du segment  $S$  est le segment  $[(0,k), (1, \tilde{k})]$ . Ici  $k$  et  $\tilde{k}$  doivent vérifier (cf (4.2.2)) :

$$(4.2.2) \quad (\hat{q} - \hat{p})(k - (\hat{r}/\hat{q})) + \hat{p}(\tilde{k} - (\hat{r}/\hat{q})) = 0.$$

Nous avons pour la pente  $m(\phi(S))$  de  $\phi(S)$  :

$$(4.2.17) \quad m(\phi(S)) = \tilde{k} - k = (\tilde{k} - (\hat{r}/\hat{q})) - (k - (\hat{r}/\hat{q})) = (\hat{q}/(\hat{q} - \hat{p})) (\tilde{k} - (\hat{r}/\hat{q}))$$

Par ailleurs la pente de  $S$   $m(S)$  est donné par :

$$\begin{aligned} m(S) &= (((\tilde{r} + \tilde{k} - 1)/\tilde{q}) - ((r+k-1)/q)) / s = q\tilde{q} (((\tilde{r} + \tilde{k} - 1)/\tilde{q}) - ((r+k-1)/q)) = \\ &= q(\tilde{r} + \tilde{k} - 1) - \tilde{q}(r+k-1) = q\tilde{r} - \tilde{q}r + q\tilde{k} - \tilde{q}k + \tilde{q} - q. \end{aligned}$$

D'après la figure et utilisant aussi que  $s = 1/\tilde{q}q$ , on a :

$$(r-1)/q + m_{r-1}/q\tilde{q} = (\tilde{r}-1)/\tilde{q} \quad \text{et donc} \quad q\tilde{r} - \tilde{q}r + \tilde{q} - q = m_{r-1}.$$

$$(4.2.10) \quad \text{donne aussi : } m_r = m_{r-1} + (q - \tilde{q}) = q\tilde{r} - \tilde{q}r$$

La pente de  $S$  devient donc égale à  $m_{r-1} + q\tilde{k} - \tilde{q}k$  et à

$$m_r + q(\tilde{k}-1) - \tilde{q}(k-1).$$

Pour utiliser (4.2.2), on prend une moyenne pondérée de ces deux égalités et on obtient :

$$(4.2.18) \quad m(S) = (((\hat{q} - \hat{r})/\hat{q})m_{r-1} + (\hat{r}/\hat{q})m_r) + q(\tilde{k} - \hat{r}/\hat{q}) - \tilde{q}(k - \hat{r}/\hat{q})$$

D'après (4.2.2), nous savons que  $(\tilde{k} - \hat{r}/\hat{q})$  et  $(k - \hat{r}/\hat{q})$  sont de signes opposés (et  $\neq 0$ ). Dans la suite  $\hat{p}/\hat{q}$ ,  $\hat{r}/\hat{q}$  sont fixés et on ne considère que

des segments  $S$  admissibles passant par  $A$ .  $k$  et  $\tilde{k}$  vérifient donc (4.2.2). On note dans la suite  $S=S(k,\tilde{k})$ . Soit  $\alpha_+$  la plus petite valeur de  $\tilde{k}-\hat{r}/\hat{q}$  (avec  $(\tilde{k},k)$  solution de (4.2.2) et  $(\tilde{k}-\hat{r}/\hat{q})>0$ ). Soit  $\alpha_-$  la plus grande valeur de  $\tilde{k}-\hat{r}/\hat{q}$  (avec  $(\tilde{k},k)$  solution de (4.2.2) et  $(\tilde{k}-\hat{r}/\hat{q})<0$ ). Soient  $k_+, k_-$  (resp.  $\tilde{k}_+, \tilde{k}_-$ ) les valeurs de  $k$  (resp.  $\tilde{k}$ ) correspondantes. Ainsi  $k_+$  est le plus grand des  $k$  avec  $k-\hat{r}/\hat{q} < 0$  (grâce à (4.2.2)). Alors si  $|\tilde{k}_+-\hat{r}/\hat{q}| < |\tilde{k}_--\hat{r}/\hat{q}|$ , on a (cf(4.2.17)) :  $\min|m(\phi(S(k,\tilde{k}))|=m(\phi(S(k_+,\tilde{k}_+)))$  et ce minimum est atteint en un point unique  $(k_+,\tilde{k}_+)$ . Inversement si :  $|\tilde{k}_+-\hat{r}/\hat{q}| > |\tilde{k}_--\hat{r}/\hat{q}|$ , on a :  $\min|m(\phi(S(k,\tilde{k}))|=m(\phi(S(k_-,\tilde{k}_-)))$  et ce minimum est atteint en un point unique  $(k_-,\tilde{k}_-)$ . Enfin si  $|\tilde{k}_+-\hat{r}/\hat{q}| = |\tilde{k}_--\hat{r}/\hat{q}|$ , alors le minimum est atteint exactement en deux points  $(k_+,\tilde{k}_+)$  et  $(k_-,\tilde{k}_-)$

Compte-tenu de (4.2.18) et (4.2.2), on a les mêmes conclusions si on remplace  $|m(\phi(S(k,\tilde{k}))| = |\tilde{k}-k|$  par :  $|q(\tilde{k}-\hat{r}/\hat{q}) - \tilde{q}(k-\hat{r}/\hat{q})|$ . On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer la :

Proposition 4.2.1

(i) Si  $\min |m(\phi(S))|$  est atteint en un point  $k_0, \tilde{k}_0$  unique, alors  $\min |m(S)|$  est atteint en un point unique et c'est le même.

(ii) Si  $\min |m(\phi(S))|$  est atteint en deux points  $(k_+,\tilde{k}_+)$  et  $(k_-,\tilde{k}_-)$  définis ci-dessus alors  $\min |m(S)|$  est atteint en (au moins) l'un de ces points et en aucun autre. Plus précisément, on a les possibilités suivantes :

- a) Si  $m_{r-1}+m_r < 0$ , alors on a un seul point de minimum pour  $|m(S)|$  :  $(k_+,\tilde{k}_+)$
- b) Si  $m_{r-1}+m_r > 0$ , alors on a un seul point de minimum pour  $|m(S)|$  :  $(k_-,\tilde{k}_-)$

c) Si  $m_{r-1} + m_r = 0$ , alors on a deux points de minimum pour  $|m(S)|$  :  $(k_+, \tilde{k}_+)$  et  $(k_-, \tilde{k}_-)$ .

preuve :

On se place d'abord dans le cas (ii) . On a déjà vu qu'on a nécessairement  $\hat{r}/\hat{q}=1/2$  et alors le premier terme de (4.2.18) devient  $\frac{1}{2}(m_{r-1} + m_r)$ . La conclusion devient évidente.

Plaçons nous maintenant dans le cas (i) . La démonstration n'est pas aussi simple. Compte-tenu de l'unicité de  $\phi$  dans le lemme 4.1.1 et du recouvrement de  $Q$  par une famille dénombrable de trapèzes "à droite" ou "à gauche" introduit par Hofstadter (cf proposition 4.5.1) qui sera décrit au §4.5, on verra dans ce § qu'on peut se ramener au deux cas suivants :

$$(\alpha) \quad |m_{r-1}| \leq 1, |m_r| \leq 1, \tilde{q} \geq 2$$

$$(\beta) \quad r=2, m_1=-1, m_2=1, p=2, q=3, \tilde{p}=1, \tilde{q}=1$$

(ou dans le cas à gauche ( $\beta'$ )  $r=2, m_1=1, m_2=-1, p=1, q=3, \tilde{p}=0, \tilde{q}=1$ )

Au passage on démontrera aussi directement la proposition dans le cas suivant :

$$(\gamma) \quad |m_{r-1}| < \tilde{q}/2 ; |m_r| < \tilde{q}/2$$

qui correspond au cas où le trapèze construit "à droite" à partir de sa bande verticale gauche peut aussi être construit "à gauche" à partir de sa bande verticale droite.

Prenons par exemple  $(k_0, \tilde{k}_0) = (k_+, \tilde{k}_+)$ . Alors

$$|\tilde{k}_+ - \hat{r}/\hat{q}| < |\tilde{k}_- - \hat{r}/\hat{q}| \text{ et donc (à l'aide de (4.2.2)) :}$$

$$|k_+ - \hat{r}/\hat{q}| < |k_- - \hat{r}/\hat{q}| \text{ et}$$

$$|q(\tilde{k}_+ - \hat{r}/\hat{q}) - \tilde{q}(k_+ - \hat{r}/\hat{q})| < |q(\tilde{k}_- - \hat{r}/\hat{q}) - \tilde{q}(k_- - \hat{r}/\hat{q})|.$$

Rappelons qu'on ne considère que des couples  $(k, \tilde{k})$  vérifiant (4.2.2), c'est à dire :

$$(\hat{q} - \hat{p})k + \hat{p}\tilde{k} = \hat{r}$$

et que :

$\tilde{k}_+$  est le plus petit des  $\tilde{k}$  vérifiant  $\tilde{k} > \hat{r}/\hat{q}$

$k_+$  est le plus grand des  $k$  vérifiant  $k < \hat{r}/\hat{q}$

$\tilde{k}_-$  est le plus grand des  $\tilde{k}$  vérifiant  $\tilde{k} < \hat{r}/\hat{q}$

$k_-$  est le plus petit des  $k$  vérifiant  $k > \hat{r}/\hat{q}$

$(k_+, \tilde{k}_+)$  et  $(k_-, \tilde{k}_-)$  vérifient (4.2.2) et de plus :

$$(4.2.19) \quad \tilde{k}_+ - \tilde{k}_- = \hat{q} - \hat{p}, \quad k_- - k_+ = \hat{p}$$

Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que :

$$(4.2.20) \quad \Delta =_{\text{def}} |q(\tilde{k}_- - \hat{r}/\hat{q}) - \tilde{q}(k_- - \hat{r}/\hat{q})| - |q(\tilde{k}_+ - \hat{r}/\hat{q}) - \tilde{q}(k_+ - \hat{r}/\hat{q})| > 2 |(\hat{q} - \hat{r})/\hat{q}|m_{r-1} + (\hat{r}/\hat{q})m_r|$$

car alors, on a bien :

$$|\text{Im}(S(k_+, \tilde{k}_+))| < |\text{Im}(S(k_-, \tilde{k}_-))| \quad (\text{en utilisant (4.2.18)})$$

Tenant compte des signes, on a :

$$(4.2.21) \quad \Delta = q(2\hat{r}/\hat{q} - (\tilde{k}_- + \tilde{k}_+)) + \tilde{q}(k_+ + k_- - 2\hat{r}/\hat{q}),$$

où chaque parenthèse est positive.

$$\underline{\text{Si}} : (2\hat{r}/\hat{q} - (\tilde{k}_- + \tilde{k}_+)) \geq 1$$

alors  $\Delta > q$  ce qui entraîne (4.2.20) car  $|\text{Im}_{r-1}| < q/2$ ,  $|\text{Im}_r| < q/2$ , et donc

$$|(\hat{q} - \hat{r})/\hat{q}|m_{r-1} + (\hat{r}/\hat{q})m_r < q/2.$$

Il reste donc à examiner le cas où :

$$(4.2.22) \quad 0 < (2\hat{r}/\hat{q} - (\tilde{k}_- + \tilde{k}_+)) < 1$$

On distingue encore deux sous-cas :

$$(*) \text{ Si } 0 < (2\hat{r}/\hat{q} - (\tilde{k}_- + \tilde{k}_+)) < 1/2,$$

alors  $2\hat{r}/\hat{q} \in ]0,1[$  et (4.2.22) impliquent que :  $\tilde{k}_+ + \tilde{k}_- = 0$ ,

$$\text{c.à.d : } 2\tilde{k}_+ - (\hat{q} - \hat{p}) = 0$$

ou encore :  $\tilde{k}_+ = (\hat{q} - \hat{p})/2$  (ce qui entraîne  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  impairs)

La substitution dans (4.2.2) donne :

$$\hat{r} = (\hat{q} - \hat{p})k_+ + \hat{p} \cdot (\hat{q} - \hat{p})/2, \text{ ce qui implique en particulier que :}$$

$$\hat{r} = \rho \cdot (\hat{q} - \hat{p})/2 \text{ avec } 1 \leq \rho \in \mathbb{N} \text{ (comme } \hat{p} \text{ est impair } \rho \text{ est impair).}$$

Utilisant ces relations et (4.2.19), on a finalement :

$$(4.2.23) \quad \tilde{k}_+ = (\hat{q} - \hat{p})/2, k_+ = (\rho - \hat{p})/2, \tilde{k}_- = -(\hat{q} - \hat{p})/2, k_- = (\rho + \hat{p})/2$$

Utilisant la formule (4.2.21), on obtient :

$$(4.2.24) \quad \Delta = \rho (q \cdot (\hat{q} - \hat{p})/\hat{q} + \tilde{q} \cdot (\hat{p}/\hat{q}))$$

La proposition est encore vraie si :  $\tilde{q} \geq q$ , car on a alors  $\Delta \geq q$  (ou sous l'hypothèse (V), car on a alors  $\Delta > \inf(q, \tilde{q})$ ).

Nous n'allons donc dans ce sous-cas utiliser qu'on est dans le cas ( $\alpha$ ) ou ( $\beta$ ) que si  $\tilde{q} < q$ . On fait donc maintenant l'hypothèse ( $\alpha$ ) et il suffit de remarquer pour conclure que l'on a dans ce cas ((\*) + ( $\alpha$ )) :

$$2|((\hat{q} - \hat{r})/\hat{q})m_{r-1} + (\hat{r}/\hat{q})m_r| \leq 2 \text{ et } \rho (q \cdot (\hat{q} - \hat{p})/\hat{q} + \tilde{q} \cdot (\hat{p}/\hat{q})) > 2$$

On constate que cette démonstration peut coïncider si  $\tilde{q} = 1$  et  $\rho = 1$  et que par conséquent le cas ((\*) + ( $\beta$ )) devra être traité différemment.

$$(**) \text{ Si } 1/2 \leq \hat{r}/\hat{q} < 1, \text{ alors } 2\hat{r}/\hat{q} \in [1,2[ \text{ et nécessairement : } \tilde{k}_- + \tilde{k}_+ = 1.$$

Donc  $2\tilde{k}_+ - (\hat{q} - \hat{p}) = 1$ , soit encore :  $\tilde{k}_+ = (1 + \hat{q} - \hat{p})/2$  ( $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  sont par conséquent de parité différente). De manière analogue au cas (\*), on

trouve :

$$(4.2.25) \quad \tilde{k}_+ = (1 + \hat{q} - \hat{p})/2, k_+ = (1 + \rho - \hat{p})/2,$$

$$\tilde{k}_- = (1 - (\hat{q} - \hat{p}))/2, k_- = (1 + \rho + \hat{p})/2$$

et

$$(4.2.26) \Delta = \rho (q.(\hat{q} - \hat{p})/\hat{q} + \tilde{q}.(\hat{p}/\hat{q}))$$

La suite de la discussion est alors identique à celle du cas (\*).

Etude du cas ( $\beta$ )

Dans le cas (\*\*), le seul cas posant un problème nouveau est celui où  $\rho=1$  (cf la remarque précédant la définition de (\*\*)); on se demande alors si l'inégalité

$$2|(\hat{q} - \hat{r})/\hat{q}|m_{r-1} + (\hat{r}/\hat{q})m_r < (q.(\hat{q} - \hat{p})/\hat{q} + \tilde{q}.(\hat{p}/\hat{q}))$$

est vérifiée soit :

$$2(-1 + 2\hat{r}/\hat{q}) < 3(\hat{q} - \hat{p})/\hat{q} + \hat{p}/\hat{q}$$

$$2 - 2\hat{p}/\hat{q} < 3 - 2\hat{p}/\hat{q} \quad \text{qui est toujours vérifiée.}$$

Dans le cas (\*), Le seul cas qui échappe encore est donc le cas où  $\rho=1$  et  $\hat{r}=(\hat{q} - \hat{p})/2$  ;  $p=2$  ,  $q=3$  ,  $\tilde{p}=1$  ,  $\tilde{q}=1$ ,  $r=2$  ,  $m_1=-1$ ,  $m_2=1, \tilde{r}=1$ , cas pour lequel on revient à une comparaison directe des pentes.

On a les relations :

$$\tilde{k}^+ + \tilde{k}^- = 0, \tilde{k}^+ = (\hat{q} - \hat{p})/2, k^+ + k^- = 1, k^+ = (1 - \hat{p})/2$$

$$m(S(k^+, \tilde{k}^+)) = -1 + 3\tilde{k}^+ - k^+ ; \quad m(S(k^-, \tilde{k}^-)) = -1 + 3\tilde{k}^- - k^-$$

$$m(\phi(S(k^+, \tilde{k}^+))) = \tilde{k}^+ - k^+ ; \quad m(\phi(S(k^-, \tilde{k}^-))) = \tilde{k}^- - k^-$$

Observons que :

$$m(S(k^+, \tilde{k}^+)) = -1 + 2\tilde{k}^+ + (\tilde{k}^+ - k^+) > 0$$

$$m(S(k^-, \tilde{k}^-)) = -1 + 3\tilde{k}^- - k^- < 0$$

et que

$$m(S(k^+, \tilde{k}^+)) + m(S(k^-, \tilde{k}^-)) = -2 + 3(\tilde{k}^+ + \tilde{k}^-) - (k^+ + k^-) = -3$$

Par conséquent , on a bien :  $|m(S(k^+, \tilde{k}^+))| < |m(S(k^-, \tilde{k}^-))|$

Ceci termine la démonstration dans les cas  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  et le cas général modulo un argument de découpage à la Hofstadter qui sera explicité au §4.5.

On verra au §4.5 les conséquences de cette proposition qui permet de dire après application de  $\phi$  quel est le rayon déterminant la densité d'états.

#

### §4.3 liens avec les développements en fractions continues.

On explicite d'abord le calcul de  $h(x)$  fait au §4.1 dans le cas  $x_0 = p/q$ ,  $x_1 = \tilde{p}/\tilde{q}$

avec (cf (4.2.12))  $\tilde{p}/\tilde{q} - p/q = 1/q\tilde{q}$ .

On trouve immédiatement que :

$$(4.3.1) \quad h(x) = (qx - p) / ((q - \tilde{q})x - (p - \tilde{p}))$$

Inversement, on trouve comme solution de  $\tilde{x} = h(x)$  la formule :

$$(4.3.2) \quad x = (p + (\tilde{p} - p)\tilde{x}) / (q + (\tilde{q} - q)\tilde{x})$$

On va maintenant calculer plus explicitement  $\tilde{p}, \tilde{q}$  en fonction du développement en fraction continues de  $p/q$  supposé vérifier les conditions suivantes :  $\frac{p}{q} \in ]0, 1[$ ,  $\text{p.g.c.d}(p, q) = 1$ .

Soit  $r \in \mathbb{Z}$ ; si  $q$  est pair, on suppose de plus que :

$$(4.3.3) \quad r, r-1 \not\equiv \frac{q}{2} \pmod{q}.$$

Ainsi  $m_{r-1}$  est bien défini comme la pente de la droite admissible passant par  $(p/q, (r-1)/q)$  dont le module de la pente est minimal et  $m_r$  est bien défini de la même manière. Si  $y = m_{r-1}x + n_{r-1}$  est l'équation de la droite admissible de pente  $m_{r-1}$  passant par  $(p/q, (r-1)/q)$ , on a

$$m_{r-1}(p/q) + n_{r-1} = ((r-1)/q) :$$

$$(4.3.4) \sigma(q,p;m_{r-1},-n_{r-1}) = r-1, |m_{r-1}| < q/2$$

De même pour la droite admissible d'équation  $y = m_r x + n_r$  passant par  $(p/q, r/q)$ , on a :

$$(4.3.5) \sigma(q,p;m_r,-n_r) = r, |m_r| < q/2$$

Comme  $q \neq 1, 2$ , la pente  $m_1$  (pour  $r=1$ ) est également bien définie :

$$(4.3.6) \sigma(q,p;m_1,-n_1) = 1, |m_1| < q/2.$$

On a donc :

$$(4.3.7) (m_1, -n_1) = (\tilde{q}^{(k-1)}, \tilde{p}^{(k-1)}) = \pm (q^{(k-1)}, p^{(k-1)})$$

où les nouvelles quantités sont définies dans l'appendice K.

Déterminons le signe qui apparait dans (4.3.7). Rappelons que :

$p/q = (q_0, q_1, \dots, q_k)$  où  $(q_0, q_1, \dots, q_k)$  vérifient les conditions K9 et K10 et que  $p^{(i)}, q^{(i)}$  sont définis au théorème K1.

Posons  $\varepsilon_k = q_k / |q_k|$ . Alors pour  $j \geq 1$  :

$$(4.3.8) \text{signe}(q^{(j)}) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_j = \text{det} \varepsilon^{(j)}$$

En particulier :

$$(4.3.9) q^{(k)} = \varepsilon^{(k)} q, p^{(k)} = \varepsilon^{(k)} p$$

Comparant les relations (K3), (4.3.6) et (4.3.9), on obtient :

$$(q^{(k-1)}, p^{(k-1)}) = (-1)^{k+1} \varepsilon^{(k)} (m_1, -n_1), \text{ d'où :}$$

$$m_1 = (-1)^{k+1} \varepsilon^{(k)} q^{(k-1)}, n_1 = (-1)^k \varepsilon^{(k)} p^{(k-1)}$$

soit encore en posant  $\tilde{\varepsilon}^{(k)} = (-1)^k \varepsilon^{(k)}$ ,

$$(4.3.10) m_1 = -\tilde{\varepsilon}^{(k)} q^{(k-1)}, n_1 = \tilde{\varepsilon}^{(k)} p^{(k-1)}$$

Comparant (4.3.4), (4.3.5) et (4.3.6), on trouve :

$$(4.3.11) (m_r, -n_r) \equiv r(m_1, -n_1) \pmod{\mathbb{Z}(q,p)}$$

$$(4.3.12) (m_{r-1}, -n_{r-1}) \equiv (r-1)(m_1, -n_1) \pmod{\mathbb{Z}(q,p)}$$

En particulier :

$$(4.3.13) \quad m_r - m_{r-1} = m_1 + j_r q = -\varepsilon^{(k)} q^{(k-1)} + j_r \varepsilon^{(k)} q^{(k)}, \text{ avec } j_r \in \mathbb{Z}.$$

Comme  $|m_r|, |m_{r-1}|, |m_1| < q/2$ , on a nécessairement  $|j_r| \leq 1$  ce qui conduit à trois cas :

cas 1 :  $j_r = 0$

cas 2 :  $m_1 > 0$  et  $j_r = -1$

cas 3 :  $m_1 < 0$  et  $j_r = 1$

Remarque 4.3.1: Il résulte de (4.3.13) en sommant de  $r=0$  à  $q-1$  (avec  $m_0 = m_q = 0$ ) qu'on est toujours dans le cas 1 sauf pour exactement  $|q^{(k-1)}|$  valeurs de  $r$  où on se trouve dans la situation 2 ou 3 selon le signe de  $m_1$

Calculons  $\tilde{p}, \tilde{q}$  dans ces trois cas :

cas 1 :  $j_r = 0$

(4.2.10) donne  $\tilde{q} = q - m_1$ . Alors (4.2.12) et (4.3.6) donnent :

$$\tilde{p} = (1 + \tilde{q}p)/q = p + (1 - m_1 p)/q = p + n_1$$

On a donc finalement :

$$(4.3.14) \quad \tilde{p} = p + n_1; \quad \tilde{q} = q - m_1$$

qu'on peut encore réécrire sous la forme :

$$(4.3.15) \quad \begin{aligned} \tilde{p} &= \varepsilon^{(k)} (p^{(k)} + (-1)^k p^{(k-1)}) \\ \tilde{q} &= \varepsilon^{(k)} (q^{(k)} + (-1)^k q^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Appliquant le théorème K1, on conclut que :

$$(4.3.16) \quad \tilde{p}/\tilde{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + (-1)^k)$$

Remarque 4.3.1

La fonction  $t \rightarrow (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + t(-1)^k)$  est croissante sur  $[-1, 1]$

On est maintenant en mesure d'explicitier les calculs du § 4.1. Rappelons (formule (4.3.2) que l'inverse de notre application  $h$  qui envoie  $[p/q, \tilde{p}/\tilde{q}]$  sur  $[0,1]$  est donné par :

$$h^{-1}(\tilde{x}) = (p + (\tilde{p}-p)\tilde{x}) / (q + (\tilde{q}-q)\tilde{x}), \text{ avec } 0 \leq \tilde{x} \leq 1$$

Dans le cas présent, on trouve à l'aide de (4.3.15) et (4.3.9) :

$$\begin{aligned} h^{(-1)}(\tilde{x}) &= (p^{(k)} + (-1)^k \tilde{x} \cdot p^{(k-1)}) / (q^{(k)} + (-1)^k \tilde{x} \cdot q^{(k-1)}) = \\ &= (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + \tilde{x}(-1)^k) \end{aligned}$$

cas 2 :  $m_1 > 0$  et  $j_r = -1$ .

Dans ce cas on a :  $m_r - m_{r-1} = m_1 - q$  et (4.2.10) donne :  $\tilde{q} = 2q - m_1$ .

(4.2.12) donne alors :

$$\tilde{p} = (1+p\tilde{q})/q = \frac{1}{q}(1+p \cdot 2q - p \cdot m_1) = 2p + \frac{1}{q}(1-p \cdot m_1), \text{ et à l'aide de (4.3.6),}$$

on trouve :

$$\tilde{p} = 2p + \frac{1}{q}(q \cdot n_1) = 2p + n_1$$

$$(4.3.17) \quad \tilde{p} = 2p + n_1, \quad \tilde{q} = 2q - m_1$$

Alors :

$$\begin{aligned} h^{-1}(\tilde{x}) &= (p + (p+n_1)\tilde{x}) / (q + (q-m_1)\tilde{x}) \\ &= ((1+\tilde{x})p + n_1\tilde{x}) / ((1+\tilde{x})q - m_1\tilde{x}) \\ &= (p + n_1 \cdot \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})}) / (q - m_1 \cdot \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\varepsilon^{(k)} p^{(k)} + \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})} \varepsilon^{(k)} (-1)^{(k)} p^{(k-1)}) / (\varepsilon^{(k)} q^{(k)} + \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})} \varepsilon^{(k)} (-1)^{(k)} q^{(k-1)}) \\ &= (p^{(k)} + \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})} (-1)^{(k)} p^{(k-1)}) / (q^{(k)} + \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})} (-1)^{(k)} q^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Le théorème K1 donne alors :

$$(4.3.18) \quad h^{-1}(\tilde{x}) = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x})} (-1)^k) .$$

En particulier, on obtient pour  $\tilde{x}=1$  :

$$(4.3.19) \quad \tilde{p}/\tilde{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + \frac{1}{2}(-1)^k) = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k, 2(-1)^k)$$

cas 3 :  $m_1 < 0$  et  $j_r = 1$ .

Dans ce cas on a :  $m_r - m_{r-1} = m_1 + q$  et (4.2.10) donne :  $\tilde{q} = -m_1$ . (4.2.12)

donne alors :

$\tilde{p} = (1 + p\tilde{q})/q = \frac{1}{q}(1 - p.m_1)$ , et à l'aide de (4.3.6), on trouve :

$\tilde{p} = \frac{1}{q}(q.n_1) = n_1$ , soit finalement :

$$(4.3.20) \quad \tilde{p} = n_1, \quad \tilde{q} = -m_1$$

Alors on trouve pour  $0 \leq \tilde{x} < 1$  :

$$\begin{aligned} h^{-1}(\tilde{x}) &= (p + (-p + n_1)\tilde{x}) / (q + (-q - m_1)\tilde{x}) \\ &= ((1 - \tilde{x})p + n_1\tilde{x}) / ((1 - \tilde{x})q - m_1\tilde{x}) \\ &= (p^{(k)} + \frac{\tilde{x}}{(1 - \tilde{x})}(-1)^{(k)} p^{(k-1)}) / (q^{(k)} + \frac{\tilde{x}}{(1 - \tilde{x})}(-1)^{(k)} q^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Le théorème K1 donne alors :

$$h^{-1}(\tilde{x}) = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + \frac{\tilde{x}}{(1 - \tilde{x})}(-1)^k) .$$

On remarque ici que  $q_k + \frac{\tilde{x}}{(1 - \tilde{x})}$  ne s'annule pas, car  $q_k$  a le même signe que  $(-1)^k$ . En effet, on peut écrire :

$0 > m_1 = (-1)^{k+1} \varepsilon_k \cdot \varepsilon^{(k-1)} q^{(k-1)}$ , et comme  $\varepsilon^{(k-1)} q^{(k-1)} > 0$ , on obtient  $\varepsilon_k (-1)^{k+1} \leq 0$ , donc  $\varepsilon_k (-1)^k > 0$ , donc  $q_k (-1)^k > 0$ .

L'expression ci-dessus pour  $h^{-1}(\tilde{x})$  perd son sens pour  $\tilde{x} = 1$ ; il est donc préférable de réécrire la fin de la fraction continue sous la forme :

$$q_{k-1} + \left( 1 / (q_k + \frac{\tilde{x}}{1 - \tilde{x}}(-1)^k) \right) = q_{k-1} + \left( (1 - \tilde{x}) / (q_k(1 - \tilde{x}) + \tilde{x}(-1)^k) \right),$$

ce qui donne :

$$(4.3.21) \quad h^{-1}(\tilde{x}) = (q_0, q_1, \dots, q_{k-2}, q_{k-1} + \left( (1 - \tilde{x}) / (q_k(1 - \tilde{x}) + \tilde{x}(-1)^k) \right)).$$

En particulier, on obtient pour  $\tilde{x} = 1$  :

$$(4.3.22) \quad \tilde{p}/\tilde{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1})$$

Remarque 4.3.2

Remarquons que l'on peut unifier les trois cas pour  $\tilde{x} < 1$  en écrivant :

$$h^{-1}(\tilde{x}) = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + (-1)^k (\tilde{x}/(1-j_r \tilde{x}))).$$

Remarque 4.3.3 :

Dans tous les paragraphes qui précèdent nous avons explicité la construction d'un trapèze à droite qu'on notera TD dans la suite. Comme on l'a déjà indiqué incidemment, on pourrait de même faire une étude de la même construction avec un trapèze TG à gauche de la bande. Ceci ne conduit à aucune difficulté particulière par rapport au cas à droite. La seule question non triviale est de savoir si un trapèze à droite peut être considéré comme un trapèze à gauche. On verra plus loin que ce n'est pas toujours le cas.

§4.4 Calcul du nombre de bandes dans un trapèze.

En fonction de la discussion précédente, nous sommes en mesure d'expliciter le nombre de bandes contenues dans le trapèze TD correspondant à certaines familles de rationnels déterminés par le développement en fractions continues.

On regarde dans TD le spectre correspondant à

$$x = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}) = p^{(k+1)} / q^{(k+1)}.$$

(avec  $(-1)^k q_{k+1} > 0$  pour être dans TD). Il apparaît  $(|q_{k+1}| + v)$  bandes dans TD avec  $v$  à déterminer. On pose  $\tilde{x} = h(x)$  et la formule pour  $h^{-1}$  établie au paragraphe précédent donne :

$$(q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + (1/q_{k+1})) = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + (-1)^k (\tilde{x}/(1-j_r \tilde{x})))$$

i.e.  $\tilde{x} = 1 / ((-1)^k q_{k+1} + j_r)$ .

Le nombre de bandes apparaissant dans TD pour  $\alpha=x$  est donc

$$|(-1)^k q_{k+1} + j_r| = |q_{k+1}| + j_r$$

compte-tenu de  $(-1)^k q_{k+1} > 0$ .

On a donc  $v=j_r$ .

#### §4.5 lien avec les constructions de Hofstadter

On ne décrit que la partie gauche de la figure :  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , la partie droite se déduisant par symétrie.

On trace les deux droites  $y=x$  et  $y=1-x$  qui délimitent trois triangles :

$T_-$  (= triangle inférieur),  $T_c$  (= triangle central),  $T_+$  (= triangle supérieur).

Chacun de ces triangles va être recouvert par une famille de trapèzes du type décrit dans les sous-paragraphes précédents.

Dans  $T_-$  (ou  $T_+$ ), les trapèzes sont obtenus en considérant l'intersection de  $T_-$  (ou  $T_+$ ) avec  $(\frac{1}{q} \leq x \leq \frac{1}{q-1}; q \geq 3)$ .

Chacun des trapèzes "inf"  $TD_{-,q}$  correspond à la construction décrite précédemment avec :

$$x_0 = (1/q), r=1, m_0=0, n_0=0, m_1=1, n_1=0, j_1=0, x_1 = 1/(q-1)$$

On remarque que l'on a :  $m_0 + m_1 > 0$  et que c'est la règle du  $Q_-$  qui s'applique.

Notons que tous sauf  $TD_{-,3}$  peuvent être également considérés comme des trapèzes à gauche. On appellera ces trapèzes réversibles. Le cas du trapèze  $TD_{-,3}$  pourrait être considéré comme un trapèze à gauche moyennant une légère extension de la définition dans le cas des bandes

qui se touchent.

Chacun des trapèzes "sup"  $TD_{+,q}$  correspond à la construction décrite précédemment avec :

$$x_0 = (1/q), r=q, m_{q-1} = -1, n_{q-1} = 1, m_q = 0, n_q = 1, j_q = 0, x_1 = 1/(q-1)$$

On remarque que l'on a :  $m_{q-1} + m_q < 0$  et que c'est la règle du  $Q_+$  qui s'applique.

On notera que tous ces trapèzes, sauf celui correspondant à  $q=3$ , peuvent également être considérés comme des trapèzes à gauche.

Le triangle central est plus délicat à traiter.

Un premier trapèze est obtenu en considérant l'intersection de  $T_c$  avec :  $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ . Il correspond à un trapèze construit "à gauche" à partir de la bande centrale correspondant à  $x_0 = \frac{1}{3}$ . On a ici :

$$x_0 = (1/3), r=2, m_1=1, n_1=0, m_2=-1, n_2=1, j_2=-1, x_{-1}=0.$$

On remarque que l'on a :  $m_1 + m_2 = 0$  et que c'est la règle du  $Q_c$  qui s'applique.

Notons que ce trapèze ne peut pas être considéré comme un trapèze à droite. Le trapèze construit à droite à partir de  $x_0=0$  est  $Q$ .

Un deuxième trapèze est obtenu en considérant l'intersection de  $T_c$  avec :  $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3 - (1/2)}$

Il correspond à un trapèze construit "à droite" à partir de la bande centrale correspondant à  $x_0 = \frac{1}{3}$ . On a :

$$x_0 = (1/3), r=2, m_1=1, n_1=0, m_2=-1, n_2=1, j_2=-1, x_1=2/5.$$

On remarque que l'on a :  $m_1 + m_2 = 0$  et que c'est la règle du  $Q_c$  qui s'applique. Ce trapèze est réversible.

Enfin une dernière famille de trapèzes est obtenue en considérant l'intersection de  $T_c$  avec :  $(1/(2 + 1/q)) \leq x \leq (1/(2 + 1/(q+1)))$  avec  $q \geq 2$ .

On a ici :

$$x_0 = (q/(2q+1)), \quad r=q+1, \quad m_q=1, \quad n_q=0, \quad m_{q+1}=-1, \quad n_{q+1}=1, \quad j_{q+1}=0, \\ x_1=(q+1)/(2q+3).$$

Bien que situé au centre c'est un trapèze correspondant à TD avec  $j_r=0$  (car  $q^{(k-1)} = q^{(1)}$  (car  $k=2$ )=2) et  $\varepsilon_r=1$ .

Tous ces trapèzes sont réversibles.

Chacun de ces trapèzes est envoyé par l'un des difféomorphismes décrits dans les paragraphes précédents sur  $Q$  munis des règles de priorité  $Q_-$ ,  $Q_c$  ou  $Q_+$  qui seront rappelées en conclusion.

On recommence alors dans chacun de ces  $Q$  la construction précédente et on peut itérer indéfiniment. C'est cette construction itérative qui est décrite chez Hofstadter [Ho].

Proposition 4.5.1:

- (i) Tout trapèze obtenu par le découpage de Hofstadter est du type TD ou TG.
- (ii) Inversement, tout trapèze TD ou TG est obtenu par itération du découpage de Hofstadter.

Démonstration :

Considérons la première étape du découpage de Hofstadter, on a vérifié que tous les trapèzes obtenus correspondaient à des trapèzes TG et TD.

Notons que la symétrie utilisée pour passer du cas  $0 \leq x \leq 1/2$  au cas  $1/2 \leq x \leq 1$ , transforme les trapèzes gauches en trapèzes droits. On note  $\mathcal{C}^{(1)}$  la famille des trapèzes ainsi obtenus. On convient aussi que  $\mathcal{C}^{(0)} = \{Q\}$ .

Si  $T^{(i)}$  est un trapèze de  $\mathcal{C}^{(i)}$ , on a vu qu'il existait un difféomorphisme  $\phi_{T^{(i)}}$  envoyant

$T^{(i)}$  sur  $Q$ .

On pose alors :

$$\mathcal{C}^{(2)} = \{ T^{(ij)} \text{ t.q il existe } T^{(i)} \in \mathcal{C}^{(i)} \text{ et } T^{(j)} \in \mathcal{C}^{(i)} \text{ t.q } T^{(ij)} = \phi_{T^{(i)}}^{-1}(T^{(j)}) \}$$

et on définit ainsi par récurrence les recouvrements  $\mathcal{C}^{(k)}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

(i) se vérifie par récurrence sur  $k$  en s'appuyant sur la proposition 4.2.1 uniquement dans les cas  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ .

On a vu que (i) est vraie pour  $k = 1$ . On applique la proposition 4.5.1 dans les cas  $(\alpha)$  ou  $(\beta)$ , pour obtenir que l'image réciproque par  $\phi_{T^{(i)}}$  de  $T^{(ij)}$  (qui est un trapèze TD ou TG) est un trapèze TD ou TG (les segments non parallèles issus de l'une des bandes sont extrémales). Ceci montre que (i) est vrai pour  $k=2$ . La démonstration pour passer du cas  $k$  au cas  $k+1$  est identique.

Démontrons maintenant (ii).

Observons tout d'abord qu'étant donnés deux trapèzes  $T_1$  et  $T_2$  admissibles (c'est à dire du type TD ou TG, en particulier, on vient de démontrer que les trapèzes de Hofstadter sont admissibles; on convient aussi que  $Q$  est admissible), on est forcément dans l'un des trois cas suivants :

$$(4.5.1) (a) \quad T_1 \subset T_2$$

$$(b) \quad T_2 \subset T_1$$

$$(c) \quad \dot{T}_1 \cap \dot{T}_2 = \emptyset \text{ (où } \dot{T} \text{ désigne l'intérieur de } T)$$

Ceci est une conséquence immédiate du fait que les côtés parallèles d'un trapèze ne peuvent pas être coupés par les bords non parallèles de l'autre trapèze en dehors des extrémités. Notons ici que les parties non verticales du bord d'un trapèze sont contenues dans des segments admissibles.

Soit donc  $T$  un trapèze admissible. Il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $T$  est inclus dans un trapèze de la famille  $T^{(k)}$  de la famille  $\mathcal{C}^{(k)}$  et ne peut être contenu dans aucun trapèze de la famille  $\mathcal{C}^{(k+1)}$ . En utilisant le difféomorphisme du lemme (4.1.1), (i) et la proposition 4.2.1 pour le trapèze  $T^{(k)}$ , on se ramène à la situation suivante :

$T$  est un trapèze admissible de  $Q$  qui n'est contenu dans aucun trapèze de  $\mathcal{C}^{(1)}$ . Il nous reste à montrer que  $T=Q$ . Compte-tenu de (4.5.1),  $T$  est une réunion de trapèzes de  $\mathcal{C}^{(1)}$ . Supposons que  $T$  soit un trapèze "à droite". Soit  $T'$ , le trapèze de Hofstadter le plus à gauche contenu dans  $T$  (il existe parce que l'on ne peut éliminer les cas où  $x=0$  ou  $1/2$ ). Soit  $D$  sa bande gauche qui est aussi la bande gauche de  $T$ . Si  $T'$  est un trapèze  $TD$ , on a alors  $T=T'$  et une contradiction. Les seuls trapèzes de Hofstadter non  $TD$  sont ceux où  $D$  est sur  $x=0$  ou sur  $x=1/2$ . Le deuxième cas est exclus car  $D$  correspond à une bande simple. Il nous reste donc le cas  $x=0$ , qui correspond justement à  $T=Q$ .

### Conclusion:

Récapitulons les règles que nous avons maintenant démontrées.

On définira dans  $Q_+$ ,  $Q_c$ ,  $Q_-$  les règles de priorité suivantes pour deux droites admissibles  $D : y=mx+n$  et  $\tilde{D} : y= \tilde{m}x+ \tilde{n}$  se coupant en un point de  $\dot{Q}$ .

$Q_+$  : Si  $|m|<|\tilde{m}|$ , priorité à  $D$ , si  $|m|=|\tilde{m}|$  priorité à la droite de pente positive

$Q_-$  : Si  $|m|<|\tilde{m}|$ , priorité à  $D$ , si  $|m|=|\tilde{m}|$  priorité à la droite de pente négative

$Q_c$  : Si  $|m|<|\tilde{m}|$ , priorité à  $D$ , si  $|m|=|\tilde{m}|$  pas de priorité

Dans la récurrence de Hofstadter, le carré de départ est  $Q= Q_c$ . Si on prend un trapèze de Hofstadter de  $\mathcal{C}^{(i)}$ , et si  $\phi$  est le difféomorphisme qui l'envoie sur  $Q$ , on aura sur  $Q$  la structure  $Q_+$ ,  $Q_-$ , ou  $Q_c$  selon que  $m_{r-1}+m_r<0$ ,  $m_{r-1}+m_r>0$  ou  $m_{r-1}+m_r=0$ , c'est à dire selon sa place par rapport à la décomposition de  $Q$  en

triangles  $T_+$ ,  $T_-$ ,  $T_c$ . A l'étape suivante, les trapèzes appartenant aux triangles  $T_-$  et  $T_+$  de la nouvelle décomposition prennent les règles  $Q_-$  ou  $Q_+$  tandis que les trapèzes appartenant au triangle central gardent la règle de priorité du trapèze dont ils proviennent à l'étape précédente.



§5 Aspects semi-classiques . Classes de Chern

(en liaison avec les travaux de Wilkinson)

§5.1 Rappels (cf [Be]<sub>2</sub>, [He-Sj]<sub>2</sub>, §5.1, et [He-Sj]<sub>4</sub>)

On a vu comment, pour étudier le spectre de  $p^w(x, 2\pi\alpha D_x, \alpha)$  (où  $p$  est un symbole  $2\pi$ -périodique en  $x$  et  $\xi$ ), avec  $\alpha = \frac{p}{q} + h$  ( $h$  petit), on pouvait de manière équivalente étudier le spectre d'un opérateur matriciel  $Q_h := Q^w(x, 2\pi h D_x, h)$  où  $Q(x, \xi, h)$  est une matrice  $q \times q$  associée à  $p$  par la formule

$$(5.1.1) \quad Q(x, \xi, h) = \sum_{j,k} \hat{p}_{jk} e^{i(jx+k\xi)} J_p^j \cdot K^k$$

où les  $\hat{p}_{jk}$  sont les coefficients de Fourier de  $p$ .

Rappelons que  $J$  et  $K$  sont des matrices unitaires  $q \times q$  possédant les propriétés suivantes :

$$(5.1.2) \quad J^q = I ; K^q = I ; JK = e^{2i\pi \cdot p/q} KJ$$

et qu'on a :

$$(5.1.3) \quad \text{Tr } J^\ell K^m = 0 \text{ sauf si } \ell \text{ et } m \text{ sont congrus à } 0 \text{ modulo } q .$$

Rappelons que cette correspondance  $p \rightarrow Q$  était un homomorphisme d'algèbre et que la densité d'état  $\rho_\alpha(dt)$  associée à  $P_\alpha := p^w(x, 2\pi\alpha D_x)$  par la formule :

$$(5.1.4) \quad \int f(t) \rho_\alpha(dt) = \tilde{\text{tr}} f(P_\alpha) = (1/4\pi^2) \iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} \sigma^{2\pi\alpha, w}(f(P_\alpha))(x, \xi) dx d\xi$$

pouvait encore être calculée (grâce à (5.1.3) par la formule :

$$(5.1.5) \quad \begin{aligned} \int f(t) \rho_\alpha(dt) &= \tilde{\text{tr}} f(Q_h) \\ &= (1/q) \cdot (1/4\pi^2) \iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} \text{Tr}(\sigma^{2\pi h, w}(f(Q_h))(x, \xi)) dx d\xi \end{aligned}$$

Lorsque  $p(x, \xi) = \lambda \cos x + \cos \xi$ , on tombe sur le symbole :

$$(5.1.6) \quad Q(x, \xi) = (\lambda/2) (e^{ix} J_p + e^{-ix} J_p^{-1}) + (1/2) (e^{i\xi} K + e^{-i\xi} K^{-1})$$

### §5.2 Etude de la densité intégrée :

On s'intéresse maintenant à la densité d'état intégrée pour  $\alpha = \frac{p}{q} + h$  avec  $h$  très petit, correspondant au voisinage d'une bande isolée  $I$  du cas  $h=0$ . On souhaite pour cela comparer les méthodes semi-classiques et le calcul fonctionnel de Helffer-Robert [He-Ro] qui permettent d'imaginer des développements asymptotiques en puissances de  $h$ , les méthodes qui ont conduit au calcul de la densité d'état intégrée entre deux trous qui laissent prévoir un développement bien plus particulier et le calcul de la densité d'états intégrée dans le cas rationnel obtenu en comptant le nombre de bandes. On mettra ainsi en évidence des relations intéressantes entre les différents points de vue expliquant un peu certaines considérations de Wilkinson [Wilk]<sub>2,4</sub>.

Soit donc  $I$  une bande isolée correspondant à  $\alpha_0 = \frac{p}{q}$  et soit  $\tilde{I}$  un voisinage assez petit de  $I$  qui ne rencontre pas les autres bandes. De par les propriétés de continuité du spectre, on sait que pour  $h$  assez petit le spectre de  $P_{\alpha_0+h}$  est contenu dans  $\tilde{I}$  et dans la réunion de petits voisinages des autres bandes.

La densité d'état intégrée  $k_\alpha(\tilde{I})$  peut être calculée de plusieurs manières (cf [He-Sj]<sub>4</sub>). Ou bien on choisit une fonction  $f_{\tilde{I}}$  qui vaut 1 sur  $\tilde{I}$  et est à support assez petit et on peut alors calculer  $k_\alpha(\tilde{I})$  par la formule :

$$(5.2.1) \quad k_\alpha(\tilde{I}) = \int f_{\tilde{I}}(t) \rho_\alpha(dt)$$

ou bien, et c'est cette formule que nous préférerons utiliser :

(5.2.2)

$$k_{\alpha}(\tilde{\Gamma}) = (1/q) \cdot (1/4\pi^2) \iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} \int_{\gamma_{\tilde{\Gamma}}} \text{Tr} (\sigma^{2\pi h, w} ((z - Q_h)^{-1})(x, \xi)) dz dx d\xi$$

où  $\int_{\gamma_{\tilde{\Gamma}}} := (1/2i\pi) \int_{\gamma_{\tilde{\Gamma}}}$  et  $\gamma_{\tilde{\Gamma}}$  est un contour entourant  $\tilde{\Gamma}$ .

Notre stratégie est maintenant plus facile à préciser. Par des techniques pseudo-différentielles semi-classiques, nous déterminerons les symboles principaux et sous-principaux de  $(z - Q_h)^{-1}$  (i.e. modulo  $O(h^2)$ ). Ce calcul sera effectué au § 5.3 et nous conduira à un résultat de la forme:

$$(5.2.3) \quad k_{\alpha}(\tilde{\Gamma}) = \frac{1}{q} + \mu h + O(h^2)$$

On pose comme auparavant :  $\alpha_0 = (q_0, q_1, \dots, q_k) = p^{(k)} / q^{(k)}$

Par ailleurs si  $h$  est choisi de telle sorte que :

$$(5.2.4) \quad \alpha_0 + h = (q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1})$$

on a également :

$$(5.2.5) \quad k_{\alpha}(\tilde{\Gamma}) = (|q_{k+1}| + v) / |q^{(k+1)}|$$

avec (cf §4.4) :  $v = j_r$

On raisonne dans la suite pour fixer les idées avec  $h > 0$  (mais l'étude simultanée des cas  $h > 0$  et  $h < 0$  est instructive). C'est la comparaison entre les formules (5.2.3) et (5.2.5) qui va nous donner des informations intéressantes.

Notons tout d'abord que, compte-tenu de la relation (K3), on a :

$$(5.2.6) \quad h = (p^{(k+1)} / q^{(k+1)}) - (p^{(k)} / q^{(k)}) = (-1)^k / (q^{(k)} \cdot q^{(k+1)})$$

(notons que  $h > 0$  est équivalent à  $(-1)^k \varepsilon_{k+1} = 1$ )

De ( 5.2.3), on déduit alors :

$$k_{\alpha}(\tilde{\Gamma}) = \alpha \mu + (1/|q^{(k)}| - \mu \cdot (p^{(k)}/q^{(k)})) + O(h^2)$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, on voit que nécessairement le reste  $O(h^2)$  est identiquement nul compte-tenu de la structure affine par rapport à  $h$  de la densité d'état intégrée (cf (1.7)). On a donc :

$$(5.2.7) k_{\alpha}(\tilde{\Gamma}) = \alpha \mu + (1/|q^{(k)}| - \mu \cdot (p^{(k)}/q^{(k)}))$$

et compte-tenu de (5.2.5), on obtient :

$$\mu / ( |q^{(k)}| \cdot |q^{(k+1)}| ) + (1/|q^{(k)}|) = ( |q_{k+1}| + v ) / |q^{(k+1)}|$$

ou encore :

$$\mu = - |q^{(k+1)}| + ( |q_{k+1}| + v ) \cdot |q^{(k)}|$$

D'où finalement :

$$(5.2.8) \mu = -\varepsilon^{(k+1)} q^{(k-1)} + v |q^{(k)}|$$

### §5.3 Détermination de $\mu$ par des méthodes semi-classiques

On va essayer d'expliciter la formule 5.2.2 en calculant le symbole de Weyl de  $(z-Q^w(x, \tilde{h}D_x, h))^{-1}$  où on a posé  $\tilde{h}=2\pi h$ .

Pour cela on va chercher la paramétrix de  $Q^w(x, \tilde{h}D_x)$ .

Le premier candidat est bien entendu  $(z-Q(x, \xi))^{-1}$ . On a :

$$(5.3.1) (z-Q(x, \xi))^{-1} \#_{\tilde{h}}^w (z-Q(x, \xi)) = \\ = I_{q \times q} - \frac{\tilde{h}}{2i} [ \partial/\partial \xi ((z-Q)^{-1}) \cdot \partial Q/\partial x - \partial/\partial x ((z-Q)^{-1}) \cdot \partial Q/\partial \xi ] + O(h^2)$$

On en déduit que  $(z-Q^w(x, \tilde{h}D_x, h))^{-1}$  est un o.p.d.  $\tilde{h}$ -quantifié dont le symbole de Weyl admet le développement :

$$(5.3.2) \sigma^w((z-Q^w(x, hD_x, h))^{-1}) = (z-Q(x, \xi))^{-1} + \\ + \frac{\tilde{h}}{2i} \cdot (z-Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q/\partial \xi \cdot (z-Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q/\partial x \cdot (z-Q(x, \xi))^{-1} \\ - \frac{\tilde{h}}{2i} \cdot (z-Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q/\partial x \cdot (z-Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q/\partial \xi \cdot (z-Q(x, \xi))^{-1}$$

$$+ O(h^2)$$

Ici  $z$  est choisi sur le contour  $\gamma_{\tilde{I}}$

On va maintenant expliciter (5.2.2) en  $y$  insérant (5.3.2). On calcule d'abord le terme principal :

$$(5.3.3) \quad (1/q).(1/4\pi^2) \iint_{[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]} \int_{\gamma_{\tilde{I}}} \text{Tr}((z-Q(x,\xi))^{-1}) dz dx d\xi = \frac{1}{q}$$

(compte-tenu du choix du contour).

Considérons maintenant le coefficient de  $h$  (attention : on passe de  $\tilde{h}$  à  $h$ ) qui va nous déterminer l'expression de  $\mu$  :

$$(5.3.4) \quad \mu = (1/q).(1/2\pi) \iint_{[-\pi,\pi]^2} \int_{\gamma_{\tilde{I}}} \text{Tr}(Q_{1z}(x,\xi)) dz dx d\xi$$

avec :

$$(5.3.5) \quad Q_{1z}(x,\xi) := \frac{1}{2i} \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \\ - \frac{1}{2i} \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1}$$

Il s'agit donc de calculer :

$$(5.3.6) \quad \text{Tr} \int_{\gamma_{\tilde{I}}} \left[ \frac{1}{2i} \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \right] dz$$

ainsi qu'une expression analogue en échangeant les rôles de  $x$  et  $\xi$ .

Pour faciliter les notations, on suppose que  $I$  correspond à la première bande parcourue par la valeur propre  $\lambda_1(x,\xi)$ . On rappelle que  $\lambda_1(x,\xi)$  est une racine simple et que les autres valeurs propres  $\lambda_i(x,\xi)$  ne rencontrent pas  $I$  (ni  $\tilde{I}$ ).

Soit  $e_i(x,\xi)$  une base orthonormée de vecteurs propres correspondant aux  $\lambda_i(x,\xi)$ . On peut de plus choisir  $e_i(x,\xi) \in C^\infty$ .

Pour calculer l'expression (5.3.6), on va regarder :

$$(5.3.7)_i = \int_{\gamma_{\tilde{I}}} \left( \frac{1}{2i} \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot (z-Q(x,\xi))^{-1} \right) e_i | e_i dz$$

en remarquant que :

$$(5.3.6) = \Sigma_i (5.3.7)_i$$

calcul pour  $i=1$

On a :

$$(5.3.7)_1 = \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_1(x, \xi) - z)^{-2} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot e_1 | e_1 \right) dz$$

On exploite maintenant les relations tirées de :

$$(5.3.8) \quad \begin{cases} (Q - \lambda_1(x, \xi)) e_1(x, \xi) = 0 \\ (\partial_x Q - \partial_x \lambda_1) e_1 + (Q - \lambda_1) \partial_x e_1 = 0 \\ (\partial_\xi Q - \partial_\xi \lambda_1) e_1 + (Q - \lambda_1) \partial_\xi e_1 = 0 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$(\partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x) e_1 = \partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} ((\partial_x \lambda_1) e_1 - (Q - \lambda_1) \partial_x e_1)$$

Réutilisant cette relation dans (5.3.7)<sub>1</sub>, on obtient :

$$(5.3.7)_1 = - \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_1(x, \xi) - z)^{-2} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot (Q - \lambda_1) \partial_x e_1 | e_1 \right) dz$$

et réitérant l'argument (avec  $\xi$  à la place de  $x$ ) :

$$(5.3.7)_1 = \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_1(x, \xi) - z)^{-2} \cdot (Q - \lambda_1) \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot (Q - \lambda_1) \partial_x e_1 | \partial_\xi e_1 \right) dz$$

On pose :

$$(5.3.9) \quad \partial_x e_1 = \Sigma \alpha_{ij} e_j ; \partial_\xi e_1 = \Sigma \beta_{ij} e_j$$

On obtient alors finalement pour (5.3.7)<sub>1</sub> :

$$(5.3.7)_1 = - \Sigma_j \alpha_{ij} \cdot \overline{\beta_{ij}} \left( \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_1(x, \xi) - z)^{-2} \cdot (z - \lambda_1)^{-1} \cdot (\lambda_1 - \lambda_1)^2 \right) dz \right)$$

D'où :

$$(5.3.10) \quad (5.3.7)_1 = - \left( \frac{1}{2i} \right) \Sigma_{j \neq 1} \alpha_{ij} \cdot \overline{\beta_{ij}}$$

calcul de (5.3.7)<sub>1</sub> :

Le calcul est très voisin. Soit donc à calculer :

$$(5.3.7)_1 = \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_1(x, \xi) - z)^{-2} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot e_1 | e_1 \right) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\rho} \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_i(x, \xi) - z)^{-2} \cdot (z - \lambda_{\rho})^{-1} \cdot (\partial Q / \partial x \cdot e_i | e_{\rho}) (\partial Q / \partial \xi \cdot e_{\rho} | e_i) \right) dz \\
&= \int_{\gamma_1} \sim \left( \frac{1}{2i} \cdot (\lambda_i(x, \xi) - z)^{-2} \cdot (z - \lambda_1)^{-1} \cdot (\partial Q / \partial x \cdot e_i | e_1) (\partial Q / \partial \xi \cdot e_1 | e_i) \right) dz \\
&= \frac{1}{2i} (\partial Q / \partial \xi \cdot e_i | e_i) \overline{(\partial Q / \partial x \cdot e_i | e_i)} (\lambda_i - \lambda_1)^{-2};
\end{aligned}$$

utilisant (5.3.9), on obtient :

$$(5.3.11) \quad (5.3.7)_i = \frac{1}{2i} \beta_{ii} \cdot \overline{\alpha_{ii}}$$

Regroupant les calculs de (5.3.10) et (5.3.11), on a donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \int_{\gamma_1} \sim \left[ \frac{1}{2i} \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \right] dz = \\
= - \frac{1}{2i} \left( \sum_{i \neq 1} [\alpha_{ii} \cdot \overline{\beta_{ii}} - \beta_{ii} \cdot \overline{\alpha_{ii}}] \right)
\end{aligned}$$

et observant que  $\alpha_{ii} + \overline{\alpha_{ii}} = 0$  ;  $\beta_{ii} + \overline{\beta_{ii}} = 0$ , on a finalement :

$$\begin{aligned}
(5.3.12) \quad \text{Tr} \int_{\gamma_1} \sim \left[ \frac{1}{2i} \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial \xi \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \cdot \partial Q / \partial x \cdot (z - Q(x, \xi))^{-1} \right] dz = \\
= - \frac{1}{2i} \left( \sum_i [\alpha_{ii} \cdot \overline{\beta_{ii}} - \beta_{ii} \cdot \overline{\alpha_{ii}}] \right)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme mentionné en (5.3.5) s'obtient en échangeant le rôle de  $x$  et  $\xi$

(avec le signe opposé) et on a donc finalement (par intégration) pour  $\mu$  l'expression suivante :

$$(5.3.13) \quad \mu = - \frac{1}{i} (1/q) \cdot (1/2\pi) \iint_{|-\pi, \pi|^2} [(\partial e_i / \partial x | \partial e_i / \partial \xi) - (\partial e_i / \partial \xi | \partial e_i / \partial x)] dx \cdot d\xi$$

Cette expression est connue et apparait dans l'étude de l'effet Hall quantique ( cf [Bel]<sub>1,2</sub>, [Av-Se], [He-Sj]<sub>2</sub>, [T-K-N-N], etc.). Il est en particulier classique que l'expression :

$$\frac{1}{i} (1/2\pi) \iint_{|-\pi, \pi|^2} [(\partial e_i / \partial x | \partial e_i / \partial \xi) - (\partial e_i / \partial \xi | \partial e_i / \partial x)] dx \cdot d\xi$$

est un entier. Mais comme on sait déjà (cf §5.2) que  $\mu$  lui-même est un

entier (ce qui n'est pas impliqué par l'affirmation précédente puisqu'on a à diviser par  $q$ ), on va donner un argument indépendant permettant de reconnaître ce caractère entier sur la formule (5.3.13).

Remarquons tout d'abord que cette formule peut se réécrire :

$$(5.3.14) \mu = i (1/q) \cdot (1/2\pi) \iint_{[-\pi, \pi]^2} (de_1 | de_1)$$

On va maintenant utiliser les propriétés suivantes d'invariance de  $Q(x, \xi)$  :

$$(5.3.15) Q(x + \frac{2\pi}{q}, \xi) = U Q U^{-1}; Q(x, \xi + \frac{2\pi}{q}) = V Q V^{-1}$$

avec :

$$(5.3.16) U = J, V = K^{\ell(p)} \text{ avec } \ell(p) = \varepsilon^{(k+1)} q^{(k-1)}$$

Si on reprend les expressions du type (5.3.12) et si on utilise la propriété  $\text{Tr} U^{-1} A U = \text{Tr} A$ , on obtient :

$$(5.3.17) \mu = i q \cdot (1/2\pi) \iint_{[-\pi/q, \pi/q]^2} (de_1 | de_1)$$

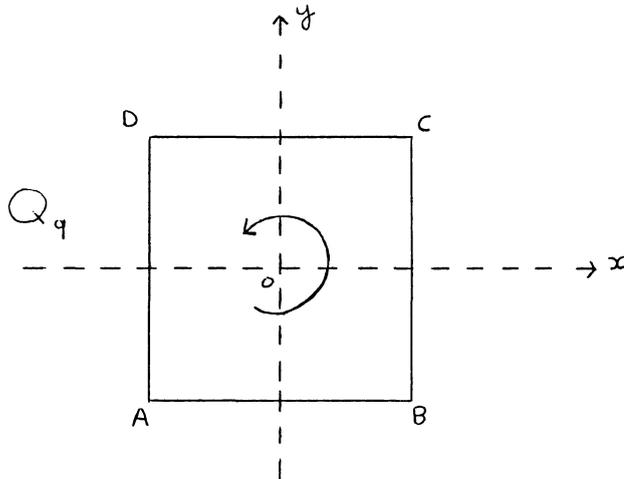
ou encore en utilisant Stokes :

$$(5.3.18) -(q) \cdot (1/2\pi) \text{Im} \left( \int_{\partial Q_q} (e_1 | de_1) \right)$$

où  $Q_q$  est le carré  $[-\pi/q, \pi/q]^2 = (A, B, C, D)$

avec  $A = (-\pi/q, -\pi/q)$ ,  $B = (\pi/q, -\pi/q)$ ,  $C = (\pi/q, \pi/q)$ ,  $D = (-\pi/q, \pi/q)$

Figure :



Le calcul qui suit est très voisin de [Av-Se]. On a :

$$\begin{aligned} (1/2\pi)\text{Im} \left( \int_{\partial Q_q} (e_1 | de_1) \right) &= (1/2\pi)\text{Im} \left( \int_{\partial Q_q} (e_1 | \partial e_1 / \partial x) dx + (e_1 | \partial e_1 / \partial \xi) d\xi \right) \\ &= (1/2\pi)\text{Im} \left[ \int_{AB} (e_1 | \partial e_1 / \partial x) dx + \int_{CD} (e_1 | \partial e_1 / \partial x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{BC} (e_1 | \partial e_1 / \partial \xi) d\xi + \int_{DA} (e_1 | \partial e_1 / \partial \xi) d\xi \right] \\ &= (1/2\pi)\text{Im} \left[ \int_{-\pi/q}^{\pi/q} (e_1(x, -\frac{\pi}{q}) | (\partial e_1 / \partial x)(x, -\frac{\pi}{q})) - (e_1(x, \frac{\pi}{q}) | (\partial e_1 / \partial x)(x, \frac{\pi}{q})) dx \right] + \\ &\quad + (1/2\pi)\text{Im} \left[ \int_{-\pi/q}^{\pi/q} (e_1(\frac{\pi}{q}, \xi) | (\partial e_1 / \partial \xi)(\frac{\pi}{q}, \xi)) - (e_1(-\frac{\pi}{q}, \xi) | (\partial e_1 / \partial \xi)(-\frac{\pi}{q}, \xi)) d\xi \right] \end{aligned}$$

Observons maintenant que (5.3.15) nous donne en particulier :

$$(5.3.19) \quad Q(x, \frac{\pi}{q}) = V Q(x, -\frac{\pi}{q}) V^{-1}; \quad Q(\frac{\pi}{q}, \xi) = U. Q(-\frac{\pi}{q}, \xi) . U^{-1}$$

Si  $e_1(x, \xi)$  est le choix  $C^\infty$  dans le carré , on obtient l'existence de phases  $C^\infty \phi(x)$  et  $\phi^*(\xi)$  telles que :

$$(5.3.20) \quad V^{-1} e(x, \frac{\pi}{q}) = e^{i\phi(x)} e(x, -\frac{\pi}{q}) ; \quad U^{-1} e(\frac{\pi}{q}, \xi) = e^{i\phi^*(\xi)} e(-\frac{\pi}{q}, \xi)$$

On en déduit :

$$(\partial e_1 / \partial x) (x, \frac{\pi}{q}) = V e^{i\phi(x)} (\partial e_1 / \partial x)(x, -\frac{\pi}{q}) + i \phi'(x) e^{i\phi(x)} V e(x, -\frac{\pi}{q}) ,$$

d'où :

$$(e_1(x, \frac{\pi}{q}) | (\partial e_1 / \partial x)(x, \frac{\pi}{q})) = (e_1(x, -\frac{\pi}{q}) | (\partial e_1 / \partial x)(x, -\frac{\pi}{q})) + i \phi'(x)$$

On obtient donc finalement :

$$(5.3.21) \quad \mu = -(q / 2\pi) [ -\phi(\frac{\pi}{q}) + \phi(-\frac{\pi}{q}) + \phi^*(\frac{\pi}{q}) - \phi^*(-\frac{\pi}{q}) ]$$

Il nous reste à examiner le membre de droite de (5.3.21) et pour cela on va continuer d'exploiter les relations (5.3.20).

On a :

$$V^{-1} e(\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}) = e^{i\phi(\pi/q)} e(\frac{\pi}{q}, -\frac{\pi}{q}) = e^{i\phi(\pi/q)} e^{i\phi^*(-\pi/q)} U e(-\frac{\pi}{q}, -\frac{\pi}{q})$$

soit encore :

$$(5.3.22) \quad e(\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}) = e^{i\phi(\pi/q)} e^{i\phi^*(-\pi/q)} V U e(-\frac{\pi}{q}, -\frac{\pi}{q})$$

De même , on a :

$$U^{-1} e\left(\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right) = e^{i\phi^*(\pi/q)} e\left(-\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right) = e^{i\phi(-\pi/q)} e^{i\phi^*(\pi/q)} V e\left(-\frac{\pi}{q}, -\frac{\pi}{q}\right)$$

soit encore :

$$(5.3.23) \quad e\left(\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right) = e^{i\phi(-\pi/q)} e^{i\phi^*(\pi/q)} UV e\left(-\frac{\pi}{q}, -\frac{\pi}{q}\right)$$

Observons maintenant que :

$$(5.3.24) \quad VUV^{-1}U^{-1} = \exp(-2i\pi \ell(p)/q)$$

On déduit alors de (5.3.22) - (5.3.24) , l'existence d'un entier  $\tilde{v}$  tel que :

$$(5.3.25) \quad \left[ -\phi\left(\frac{\pi}{q}\right) + \phi\left(-\frac{\pi}{q}\right) + \phi^*\left(\frac{\pi}{q}\right) - \phi^*\left(-\frac{\pi}{q}\right) \right] = -2\pi \ell(p)/q - 2\pi\tilde{v},$$

ce qui donne pour  $\mu$  la nouvelle formule :

$$(5.3.26) \quad \mu = \ell(p) + \tilde{v} |q^{(k)}| = -\varepsilon^{(k+1)} q^{(k-1)} + \tilde{v} |q^{(k)}|$$

On a donc  $\tilde{v}=v$  (cf (5.2.5) et (5.2.8))

On a ainsi relié, par la formule (5.3.25), le calcul de  $\mu$  a des invariants liés au classes de Chern associées au fibré  $\text{Ker} ( Q(x,\xi) - \lambda_1(x,\xi) )$ .

### Appendice K :

#### Quelques relations utiles sur les fractions continues

On ne considère que des rationnels compris entre 0 et 1 qu'on développe en fractions continues. Le seul point non classique est que certains coefficients sont dans  $\mathbb{Z}$ .

On pose  $(q_0, \dots, q_k) = q_0 + [q_1, \dots, q_k]$ , avec

$$[q_1, \dots, q_k] = 1 / (q_1 + 1 / (q_2 + \dots + 1 / q_k \dots))$$

$\alpha^{(k)}$  est un rationnel dont le développement en fraction continue est de longueur  $k+1$ .  $\alpha^{(k)} = p^{(k)} / q^{(k)} = (q_0, \dots, q_k)$

Les résultats qui suivent se trouvent (lorsque les  $q_k$  sont positifs) essentiellement chez Khinchin [Kh].

#### Théorème K 1

On pose  $p^{(-1)} = 1$  ;  $q^{(-1)} = 0$  ,  $p^{(0)} = q_0$ ,  $q^{(0)} = 1$ . Alors

$$(K1) \quad (q_0, \dots, q_k) = p^{(k)} / q^{(k)} \quad , \quad k=0,1,\dots$$

où  $p^{(j)}$ ,  $q^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq k$  sont donnés par les relations de récurrence :

$$(K2) \quad p^{(j)} = (q_j p^{(j-1)} + p^{(j-2)})$$

$$q^{(j)} = (q_j q^{(j-1)} + q^{(j-2)})$$

De plus , on a pour  $0 \leq j \leq k$  :

$$(K3) \quad \sigma(q^{(j)}, p^{(j)}; q^{(j-1)}, p^{(j-1)}) = (-1)^{j+1}$$

où par définition :  $\sigma(x, \xi; y, \eta) = \xi y - x \eta$

#### Remarque K2

Si les  $q_j$  sont des entiers, alors  $p^{(j)}$ ,  $q^{(j)}$  sont des entiers et

$$\text{p.g.c.d} ( p^{(j)}, q^{(j)} ) = 1$$

On s'intéresse aux développements de nombres rationnels avec  $q_1, q_2, \dots, q_k$  de module  $\geq 2$  et  $q_0, q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Z}$ . Rappelons la procédure pour trouver un tel développement d'un nombre rationnel  $p/q$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}$ , p.g.c.d( $p, q$ )=1,  $|q| \geq 1$ . Si  $q = \pm 1$ , on pose  $q_0 = \pm p$  :  $p/q = (q_0)$ .

Soit  $|q| \geq 2$  et considérons les solutions  $(\tilde{q}, \tilde{p}) \in \mathbb{Z}^2$  de :

$$(K4) \sigma(q, p; \tilde{q}, \tilde{p}) = 1.$$

Comme p.g.c.d( $q, p$ ) = 1, il existe une solution et cette solution est unique modulo  $\mathbb{Z}(q, p)$ . Par réduction mod( $q$ ), il existe une solution  $(\tilde{q}, \tilde{p})$  de K4 avec :

$$(K5) |\tilde{q}| \leq |q|/2$$

### Lemme K3

Si  $|q| \geq 3$ , alors il y a une unique solution  $(\tilde{q}, \tilde{p})$  de (K4),(K5), qui vérifie aussi :  $|\tilde{q}| < |q|/2$ . Si  $|q|=2$ , alors il y a exactement deux solutions de (K4), (K5) et on a  $|\tilde{q}|=1$ .

Soit  $|q| \geq 2$ . Avec un  $k \in \{1, 2, \dots\}$  qui reste à choisir, on pose  $\tilde{q}^{(k)} = q$ ,  $\tilde{p}^{(k)} = p$ ,  $\tilde{q}^{(k-1)} = \tilde{q}$ ,  $\tilde{p}^{(k-1)} = \tilde{p}$ , où  $(\tilde{q}, \tilde{p})$  est la solution de (K4),(K5). Si  $|\tilde{q}^{(k-1)}| \geq 2$ , on recommence :  $\sigma(q^{(k-1)}, p^{(k-1)}; q^{(k-2)}, p^{(k-2)}) = 1$ ,  $|\tilde{q}^{(k-2)}| \leq (\frac{1}{2})|\tilde{q}^{(k-1)}|$  (avec inégalité stricte et unicité, si  $\tilde{q}^{(k-1)} > 2$ ). On continue ce procédé jusqu'à ce qu'on ait atteint  $(\tilde{q}^{(j)}, \tilde{p}^{(j)})$  avec  $|\tilde{q}^{(j)}|=1$ , et on choisit finalement  $k$  pour avoir  $j=0$ .

On a donc :

$$(K6) \sigma(q^{(j)}, p^{(j)}; q^{(j-1)}, p^{(j-1)}) = 1, 1 \leq j \leq k.$$

Avec  $\tilde{p}^{(-1)} = \pm 1$  de signe convenable et  $\tilde{q}^{(-1)} = 0$ , on peut aussi étendre la

validité de (K6) au cas  $j=0$ .

On change maintenant le signe convenablement et de manière unique de chaque  $(\tilde{q}^{(j)}, \tilde{p}^{(j)}) : (q^{(j)}, p^{(j)}) = \pm (\tilde{q}^{(j)}, \tilde{p}^{(j)})$  de façon à obtenir une suite avec  $p^{(-1)}=1, q^{(-1)}=0, q^{(0)}=1$  qui vérifie K3. Grâce à K3, il existe alors des entiers uniques :  $q_0, \dots, q_j$  tels qu'on a aussi K2. Cependant, si  $|\tilde{q}^{(1)}|=2$ , le choix de  $(\tilde{q}^{(0)}, \tilde{p}^{(0)})$  n'est pas unique; dans ce cas, l'unicité du choix de  $(q_0, \dots, q_k)$  n'est valable qu'à partir d'un choix de  $(\tilde{q}^{(0)}, \tilde{p}^{(0)})$ . A partir de  $(p/q)$  il y a donc en général deux choix de  $(q_0, \dots, q_k), p^{(j)}, q^{(j)}$  comme dans le théorème K1 avec :

$$(K7) \quad p/q = (q_0, \dots, q_k),$$

$$(K8) \quad 2|q^{(j-1)}| < |q^{(j)}| \text{ si } j \geq 2, \text{ et } 2|q^{(0)}| \leq |q^{(1)}|.$$

Combinant K8 et la deuxième équation de K2, on voit que :

$$(K9) \quad |q_j| \geq 2, \quad 1 \leq j \leq k,$$

et que :

$$\text{signe}(q^{(j)}) = \text{signe}(q_j, q^{(j-1)}).$$

De plus, il résulte de (K5) que :

$$(K10) \quad \text{Si } j \geq 2 \text{ et si } |q_j|=2, \text{ alors } q_j q_{j-1} > 0.$$

En effet, supposons que  $|q_j|=2$  et  $q_j q_{j-1} < 0$  pour un  $j \geq 2$ . Comme  $q^{(j-1)}$  a le même signe que  $q_{j-1} q^{(j-2)}$ , il résulte que  $q_j q^{(j-1)}$  et  $q^{(j-2)}$  ont de signes opposés, et comme  $|q_j|=2$ , on voit que  $|q^{(j)}| < 2 |q^{(j-1)}|$  en contradiction avec (K8).

On a montré une partie de la proposition :

Proposition K4 :

Soient  $q_0, q_1, \dots, q_k$  des entiers et définissons  $p^{(j)}, q^{(j)}$  comme dans le théorème K1. Alors on a l'équivalence : (K8)  $\iff$  (K9) et (K10)

suite de la preuve :

On a déjà démontré que (K8)  $\Rightarrow$  (K9) et (K10).

On suppose donc (K9) et (K10) et on se propose de montrer (K8) par récurrence. D'abord :  $|q^{(1)}| = |q_1| |q^{(0)}| \geq 2 |q^{(0)}|$ .

Soit  $j \geq 2$  et supposons qu'on a déjà démontré que  $2|q^{(v-1)}| < |q^{(v)}|$  pour  $2 \leq v \leq j-1$ . Si  $|q_j| \geq 3$  alors  $|q^{(j)}| \geq 3|q^{(j-1)}| - |q^{(j-2)}| > 2|q^{(j-1)}|$ .

Supposons que  $|q_j| = 2$ . Alors  $q_j q_{j-1} > 0$  d'après (K10) et  $q_j q^{(j-1)}$  a le même signe que  $q_j q_{j-1} q^{(j-2)}$ , soit encore celui de  $q^{(j-2)}$ . Alors :

$$|q^{(j)}| = 2 |q^{(j-1)}| + |q^{(j-2)}| > 2 |q^{(j-1)}|$$

#

Résumons une partie de la discussion dans les :

### Théorème K5

Tout nombre rationnel peut s'écrire de la forme  $\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$  où les  $q_j$  vérifient (K9) et (K10). Les nombres  $k$  et  $p^{(j)}/q^{(j)}$ ,  $-1 \leq j \leq k$  définis dans le théorème K1 sont déterminés de manière unique et il y a au plus deux choix différents de  $(q_0, q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ .

### Théorème K6

Avec les notations ci-dessus, si  $k \geq 1$ , on a la relation :

$$(K11) \quad q^{(k+1)} p^{(k-1)} - q^{(k-1)} p^{(k+1)} = (-1)^k q_{k+1}$$

FIGURE 1 - LE PAPILLON DE HOFSTADTER

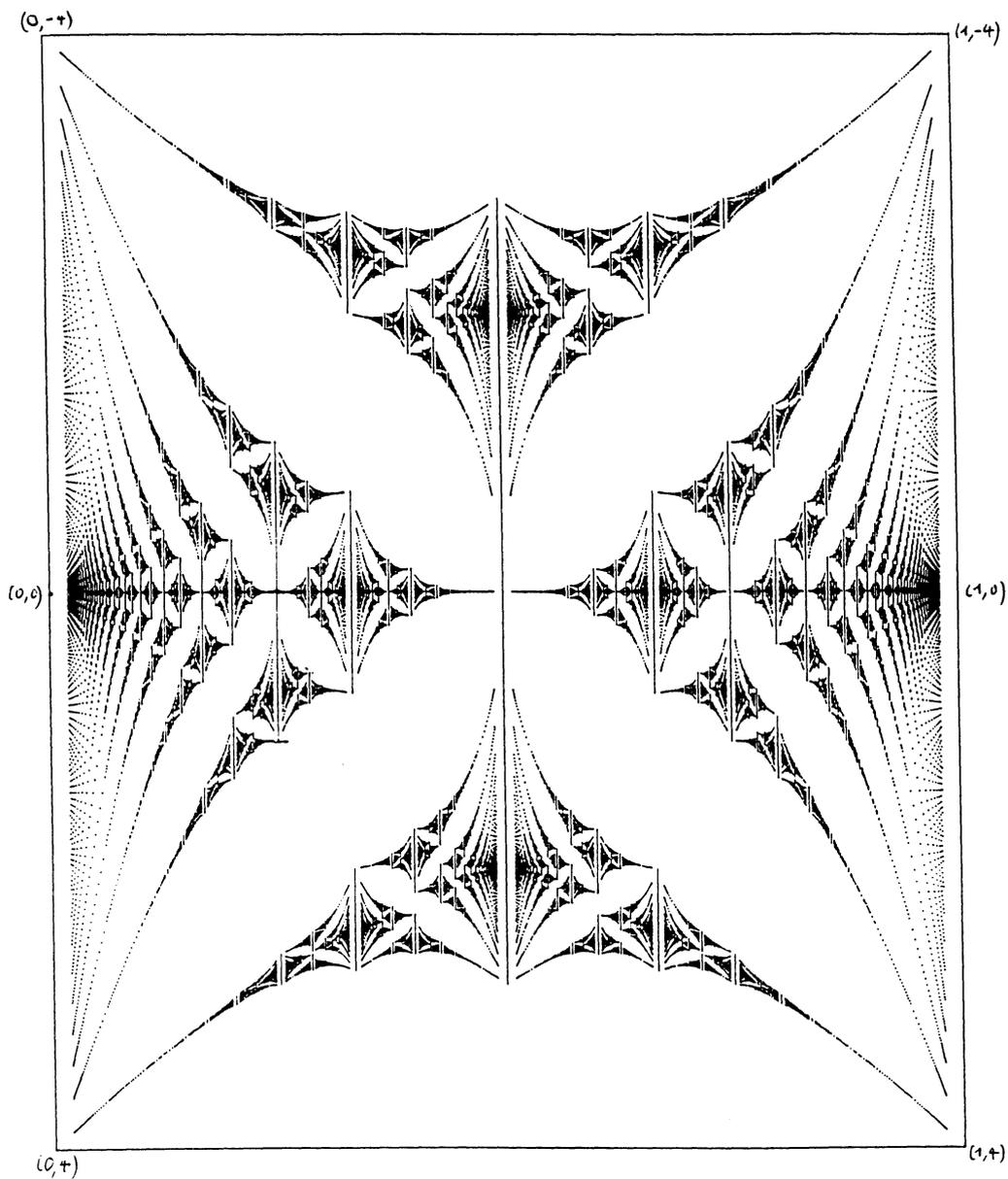
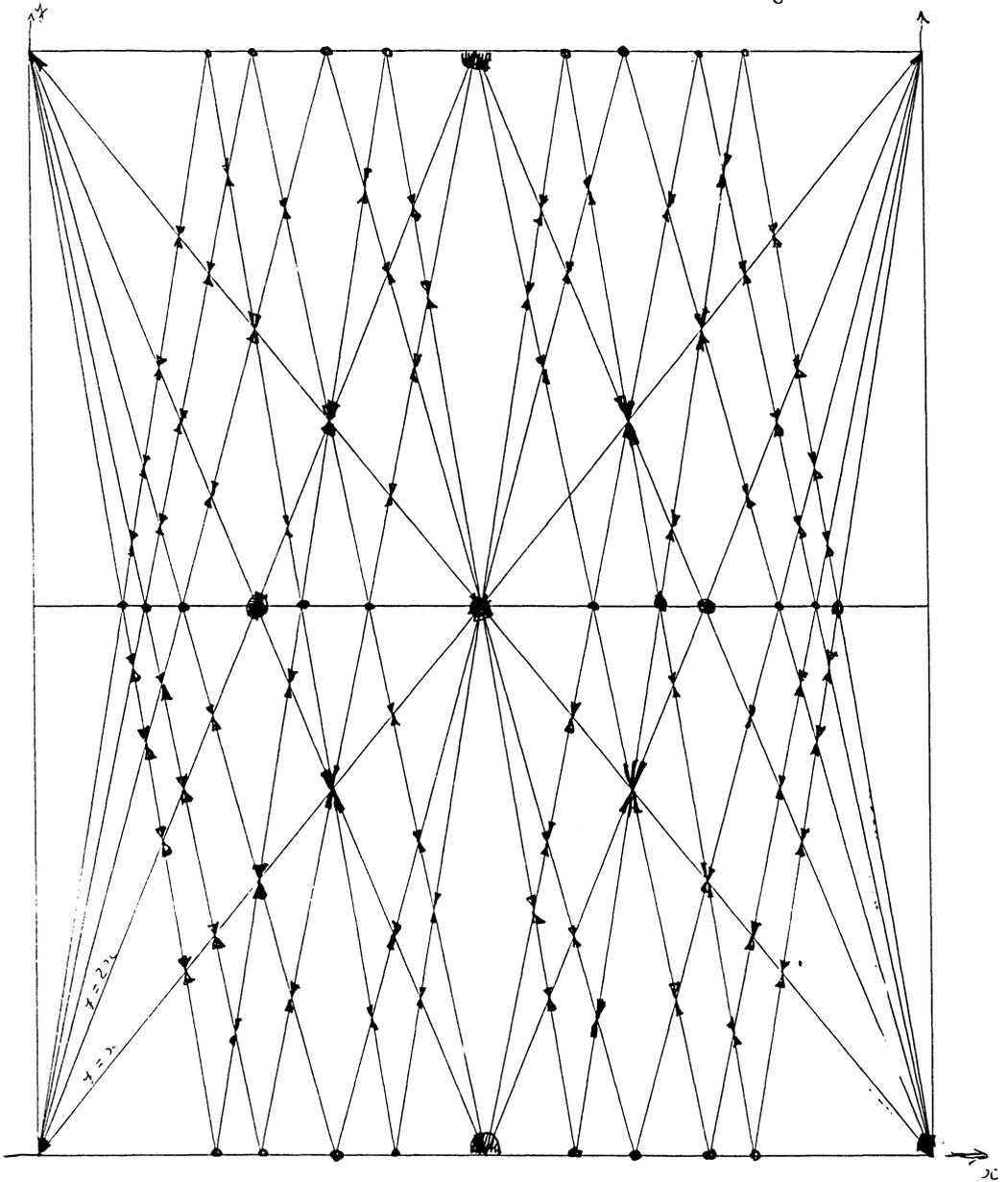


FIGURE 2 - LES RÈGLES DE PRIORITÉ DE  $Q_C$



Références :

[Au] S.Aubry :

The new concept of transition by breaking of analyticity  
Solid State Sci.8 (1978), 264

[Av-Se] J.Avron-R.Seiler :

Quantization of the Hall conductance for general multiparticle  
Schrödinger Hamiltonians.  
Phys.Rev. Letters Vol.54, n°4, Janvier 1985 , p.259-262

[Av-Si] J.Avron-B.Simon :

[1] Almost periodic Schrödinger operators,

I. Limit Periodic potentials

Comm.in Math. Physics. 82 p.101-120 (1981)

[2]Almost periodic Schrödinger operators,

II The density of states

Duke Math. Journal 50 (1983), 369-391

[3]Stability of gaps for periodic potentials under variation of a  
magnetic field

J.Phys.A ; Math.Gen. 18 (1985) p2199-2205

[Az] Ya Azbel :

Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field

Soviet Physics JETP vol.19, n°3 Sept.1964

[Be] J.Bellissard :

[1]Almost periodicity in solid state Physics and  $C^*$ -algebras

"The Harald Bohr Centenary" Proceedings of the symposium held

in Copenhagen conference on almost periodic functions

April : 24- 25 1987 ; C.Berg, B.Fuglede Ed.

The Royal Academy of Sciences, Editions, Copenhagen 1989

[2]C\*-Algebras in solid State Physics-2D Electrons in a uniform magnetic field ; " operator algebras and applications "

D.E.Evans and M.Takesaki Eds

Cambridge University Press, Vol. 2 (1988) pp 49-76

[Be-Li-Te] J.Bellissard-R.Lima-D.Testard :

A metal-insulator transition for the almost Mathieu model

Comm. in Math. Phys.88, 207-234(1983)

[Be-Si] J.Bellissard-B.Simon :

Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Equation

Journal of functional Analysis, vol.48, N°3, Oct 1982

[Ben-Pas] Benderskii-L.Pasteur :

On the spectrum of the one-dimensional Schrödinger equation with a random potential.

Math.USSR Sb. 11, 245 (1970)

[Ch] R.G.Chambers :

The wave function of a Bloch electron in a Magnetic field

Proc.Phys.Soc.89 (1966), 695-710

[C-E-Y] Man Duen Choi, Georges A.Elliott, Noriko Yui :

Gauss polynomials and the rotation algebra

Preprint Septembre 1988,

et Inventiones mathematicae Vol 99 Fasc.2 1990

[Cl-Wa] F.H.Claro, W.H.Wannier :

Magnetic subband structure of electrons in hexagonal lattices

Phys.Rev. B19 (1979), 6068-74

[C-F-K-S] H.L.Cycon-R.G.Froese-W.Kirsch-B.Simon :

Schrödinger operators with applications to quantum mechanics  
and global geometry

Texts and monographs in Physics, Springer Verlag

[El] G.A. Elliott :

Gaps in the spectrum of an almost periodic Schrödinger operator

C.R.Math. Rep. Acad. Sci. Canada 4 (1982) p.255-259

[Gu-He-Tr] J.P.Guillement-B.Helffer-P.Treton :

Walk inside Hofstadter's butterfly

Journal de Physique France 50 (1989) 2019-2058

[He-Ro] B.Helffer-D.Robert :

Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et opérateurs  
admissibles

Journal of Functional Analysis 53 (1983) p.246-268

[He-Sj] B.Helffer, J.Sjostrand :

[1]Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec  
application à l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ  
magnétique) ; Mémoires de la SMF 1988

[2]Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II  
preprint nov.1988 ; à paraître aux mémoires de la SMF 1989

[3] Semi-classical analysis for Harper's equation III  
preprint Orsay (avril 1988), à paraître aux mémoires de la SMF  
1989 et annoncé au Séminaire EDP de l'école Polytechnique 87-88

[4] Equation de Schrodinger avec champ magnétique et équation

de Harper ; Preprint Dec.1988 et paru dans "Schrödinger operators", Proceedings, Sønderborg, Denmark, 1988; Lecture Notes in Physics n°345, Springer Verlag

[5] On Diamagnetism and de Haas-Van Alphen effect

Preprint Paris-sud, mai 1989; à paraître aux annales de l'IHP (section Physique théorique)

[Ho] D.Hofstadter :

Energy Levels and Wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields

Phys.Rev.B 14 (1976), 2239-2249

[J-M] R.Johnson -J. Moser :

The rotation number for almost periodic potentials

Comm.in Math. Phys. 84, (1982), 403-438; 90,(1983), 317-318

[Kh] A.Ya Khinchin :

Continued fractions

Phoenix Science Series (1964)

[Mo] P.(Van) Mouche :

[1] Clustering and Nesting of Energy spectra

Proceedings ICIAM 87, Paris la Villette, June29-July3 1987

[2] The coexistence problem for the discrete Mathieu operator

Preprint Février 88

et Comm. in Math.Physics Vol 122 n°1,1989 , p.23-34

[Pi-Vo] M.Pimsner, D.Voiculescu :

Imbedding the irrational rotation  $C^*$ -algebra into an AF-algebra

Journal Operator theory 4 , 1980 p.211-218

[Sh] M.A.Shubin :

The spectral theory and the index of elliptic operators with almost periodic coefficients

Russian Math. Surveys, 34, (1979), 109-157

[Si] B.Simon :

Almost periodic Schrödinger operators . A review

Advances in applied Mathematics 3 p.463-490 (1982)

[T-K-N-N] D.Thouless, M.Kohmoto, M.Nightingale, M.de Nijs :

Quantized Hall conductance in two dimensional periodic potential.

Phys. Rev. Letters, 49, (1982), p.405-408

[Wa] G.H.Wannier :

Phys.Status Solidi B 88, 757 (1978)

[Wilk] M.Wilkinson :

[1] Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems

Proc. Royal Society of London A391 p305-350 (1984)

[2] Von Neumann lattices of Wannier functions for Bloch electrons in a magnetic field

Proc. R.Soc.Lond.A 403, p 135-166(1986)

[3] An exact effective hamiltonian for a perturbed Landau Level

Journal of Physics A , Vol.20, n°7, 11 May 1987, p. 1761

[4] An exact renormalization group for Bloch electrons in a magnetic fields.

Journal of Physics A, Vol. 20, p.4337-4354