MÉMOIRES DE LA S. M. F.

C. GÉRARD

Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 31 (1988)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_31__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 31
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 116, 1988, fascicule 1

ASYMPTOTIQUE DES PÔLES DE LA MATRICE DE SCATTERING POUR DEUX OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES

ABSTRACT : *We study the location of poles for the acoustic scattering matrix for two strictly convex obstacles. We obtain complete asymptotic expansions for the poles in a strip* $\operatorname{Im} z \leq c$ *as* $\operatorname{Re} z$ *tends to infinity. These expansions are obtained using an approximation of the quantized billiard operator along the trapped ray between the two obstacles.*

RÉSUMÉ : *On étudie la position des pôles de la matrice de scattering acoustique pour deux obstacles strictement convexes. On obtient des développements asymptotiques complets pour les pôles dans une bande* $\operatorname{Im} z \leq c$ *quand* $\operatorname{Re} z$ *tend vers l'infini. Ces développements sont obtenus grâce à une approximation de l'opérateur de billard quantifié le long du rayon capté entre les deux obstacles.*

Texte reçu le 30 janvier 1987.

C.GÉRARD, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, 91405 Orsay, France.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

On suppose que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ où Ω_i est un obstacle strictement convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (n pair) à bord C^∞ Γ_i et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Soit d la distance de Ω_1 à Ω_2 et $a_i \in \Gamma_i$ les points tels que $|a_1 - a_2| = d$. On va utiliser la caractérisation suivante des pôles de la matrice de scattering pour Ω, $S(z)$ (voir [V]).

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la solution du problème suivant :

(1.0) $$\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = f & \text{dans} \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 & \end{cases}$$

et u vérifie les conditions de radiation de Sommerfeld :

$$|u(r)| \leq C\, r^{-n/2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial r} + i\lambda u\right| \leq C\, r^{-(n+1)/2} .$$

Soit d'autre part $\psi(x)$ une fonction C^∞ positive telle que $|D_x^\alpha \psi| \leq C_\alpha\, e^{-|x|^2}$, et W_ψ^2 l'espace de Sobolev à poids défini par $|u|^2_{W^2_\psi} = |\psi u|_{W^2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)}$ où W^s est l'espace de Sobolev classique.

On note d'autre part $L^2_a(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace L^2 usuel à support dans $\{|x| \leqq a\}$ avec a assez grand pour que $\Omega \subset \{|x| \leqq a\}$.

Alors il est montré dans [V] que la résolvante du problème (1.0) définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$, a un prolongement méromorphe avec des résidus de rang fini aux poles, si on la considère comme opérateur de $L^2_a(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)$ dans W^2_ψ.

Cette résolvante notée $S(\lambda)$ est d'autre part holomorphe dans $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$, et ses pôles sont exactement avec multiplicité les pôles de la matrice de scattering pour Ω. Une deuxième caractérisation des pôles est donnée dans la section 6.

Enonçons maintenant le théorème démontré dans cet article.

Le rayon $[a_1, a_2]$ est l'unique rayon captif de Ω. Il correspond au point fixe $(a_1, 0) \in T^*(\Gamma_1)$ pour l'application du billard χ associée aux rayons réfléchis.

Ce point fixe est de type hyperbolique car Γ_1 et Γ_2 sont strictement convexes, et on note $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^n$ les valeurs propres plus grandes que 1 de $D\chi(a_1, 0)$, et $b_o = (\nu_1 \ldots \nu_n)^{-1/2}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on pose $K_\alpha = b_o\, \nu^{-\alpha}$. (On peut avoir $K_\alpha = K_{\alpha'}$ pour $\alpha \neq \alpha'$). On note alors $\lambda_j^\alpha = -i \log \frac{K_\alpha}{2d} + j \frac{\Pi}{d}$, $j \in \mathbb{Z}$, qui sont disposés sur des lignes $\operatorname{Im} z = \text{cste}$ et appellés pseudopôles par [B.G.R]. Pour chaque valeur de K_α, on introduit alors des développements asymptotiques : (on omet l'indice α pour simplifier les notations)

$$\lambda_\ell(j) = \lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\ell}(\lambda_j)^{-k/2a\ell} \quad \text{avec} \quad a\ell \in \mathbb{N} \quad \ell = 1,\dots a$$

qui correspondent à des développements asymptotiques pour les valeurs propres d'une $N \times N$ matrice où $N = \operatorname{Card}\{\alpha' \mid K_{\alpha'} = K_\alpha\}$.

On note p_ℓ la multiplicité de $\lambda_\ell(j)$ comme valeur propre asymptotique. On démontre alors le théorème suivant:

<u>*Théorème*</u> *: Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $j_N \in \mathbb{N}$ et $c_N \in \mathbb{R}$ tels que pour $j \geq j_N$ la matrice de scattering pour Ω a exactement p_ℓ pôles avec multiplicité dans :*

$$\left|\lambda - \lambda_j - \sum_{k=1}^{m_N} a_{k,\ell}(\lambda_j)^{-k/2a\ell}\right| \leq c_N \, |\lambda_j|^{-N}$$

où m_N est le plus grand k tel que $\frac{k}{2a\ell} < N$.

De plus dans le cas où les $|\alpha'|$ ont tous la même parité pour $\alpha' \in \{\alpha' \mid K_{\alpha'} = K_\alpha\}$, le développement asymptotique ne contient que des puissances $\lambda_j^{-k/a\ell}$ et plus de $\frac{1}{2}$ puissances. Le premier résultat dans cette direction est dû à M. Ikawa ([I_1]) qui a démontré ce théorème pour la première rangée de pôles $(\alpha = 0)$ avec un développement asymptotique à l'ordre $O(\lambda_j)^{-1/2}$ et récemment ([I_2]) avec un développement complet.

On donne maintenant le plan de l'article.

On va réduire la recherche de pôles à un problème sur le bord d'un des ouverts, par exemple Γ_1. Pour cela, on introduit les opérateurs suivants : $H_{i,+}(\lambda) : C^\infty(\Gamma_i) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_i)$ est la résolvante du problème :

$$(1.i) \qquad \begin{array}{l} (\Delta+\lambda^2)H_{i,+}(\lambda)v=0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_i \\ H_{i,+}(\lambda)v\big|\Gamma_i = v \end{array}$$

étendue comme $S(\lambda)$ de $W^{3/2}(\Gamma_i)$ dans W^2_ψ (voir [V]). $H_{i,+}$ est définie pour $i = 1,2$ pour λ dans une région $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqq c_0, \mathrm{Re}\,\lambda \geqq c_1\}$ pour c_1 assez grand, car d'après les résultats de $[M_2]$, la matrice de scattering pour un obstacle non captif n'a pas de pôles dans $\{\mathrm{Im}\,\lambda \geqq a \log|\lambda| + b\}$. On note alors $H_i(\lambda)v = H_{i,+}(\lambda)v\big|_{\Gamma_{i+1}}$ où $\Gamma_3 = \Gamma_1$ et $M(\lambda) = H_2(\lambda)\,H_1(\lambda)$.

Dans la section 2, on construit une approximation asymptotique $H(\lambda)$ de $M(\lambda)$ près du point $(a_1, 0)$ de $T^*(\Gamma_1)$, qui est un opérateur intégral de Fourier à grand paramètre λ associé à la transformation canonique du billard.

Dans la section 3 et 4 on étudie H en se plaçant dans des coordonnées symplectiques convenables, et en remplaçant H par une approximation H_0. On peut résoudre un problème de Grushin pour $\mathbb{1} - H_0$, puis pour $\mathbb{1} - H$ par perturbation.

Dans la section 5, on résout un problème de Grushin pour $\mathbb{1}-M(\lambda)$ en utilisant des résultats sur la propagation des singularités en dehors d'un voisinage du rayon périodique $[a_1,a_2]$.

Dans la section 6, on démontre le théorème sur les pôles de $S(z)$.

On a rassemblé dans l'appendice les résultats techniques nécessaires dans les démonstrations.

Enfin nous tenons particulièrement à remercier J. Sjöstrand qui est à l'origine de ce travail pour ses nombreuses suggestions qui ont permis d'améliorer une première version du manuscrit rédigée à l'Institut Mittag-Leffler au printemps 85.

2. CONSTRUCTION DES OPÉRATEURS MICROLOCAUX

On commence par introduire des opérateurs de troncature.

Soient $k_1(x,y,\xi)$, $k_1'(x,y,\xi) \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$, $k_2(x,y,\xi) \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_2 \times \Gamma_2)$, tous à support compact, (voir appendice A.I pour les classes $S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$) avec k_1, k_1' égaux à 1 près de $(a_1,a_1,0)$ et k_2 égal à 1 près de $(a_2,a_2,0)$. Dans la suite, on posera $a_1=0$.

On suppose de plus que $k_2=1$ sur l'intersection avec $\partial T^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_2)$ des rayons sortants de $\operatorname{supp} k_1$, et que k_1' vérifie la même propriété avec k_1 remplacé par k_2.

On aura besoin dans la suite de réduire un nombre fini de fois les supports de k_1, k_2, k_1', en gardant ces propriétés.

On pose alors :

$$K_1 u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(x-y)\cdot\xi}\, k_1(x,y,\xi)\, u(y,\lambda)\, dy\, d\xi \ .$$

K_2 et K_1' sont définis de manière analogue.

K_1 envoie $C^\infty(\Gamma_1)$ dans $C^\infty(\Gamma_1)$ pour $\lambda \in D$ où D est un domaine de $\mathbb{C}$ de la forme $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqq c_o \ , \mathrm{Re}\,\lambda \geqq c_1\}$.

Soit $V_1 \subset T^*(\Gamma_1)$ le support de $K_1(y,\theta)$, et soit K l'intersection du flot des 1/2 rayons sortants de V_1 avec un voisinage U_1 de $\overline{\Omega}_1$ qui contient Γ_2.

Dans ce paragraphe, on va construire un opérateur $\tilde{H}_1 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1) \to \underset{\sim}{C}^\infty(K)$ tel que :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\tilde{H}_1 u = R_1 u \\ \tilde{H}_1 u\big|_{\Gamma_1} = K_1 u \end{cases}$$

où K_1 est l'opérateur de troncature introduit plus haut et R_1 a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(K \times \Gamma_1)$.

On a déjà construit un tel opérateur si U_1 est assez petit dans la Proposition A.II.3. Il reste à étendre cette construction au voisinage de Ω_2.

<u>*Proposition 2.1*</u> *: Il existe un opérateur* $\tilde{H}_1 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1) \to \underset{\sim}{C}^\infty(K)$ *qui vérifie (2.1).* $\tilde{H}_1$ *est de la forme :*

$$\tilde{H}_1 u(x,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(\psi(x,\theta)-y\cdot\theta)} a(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda) dy\, d\theta$$

où a est holomorphe en λ pour $\lambda \in D$,

$$a \in S^{o,o}_{o,o}(K \times \Gamma_1) .$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de voir qu'on peut étendre les constructions de la Proposition A.II.3. On étend ψ à K par :

(2.2) $\psi(x+\ell\nabla\psi(x,\theta),\theta) = \psi(x,\theta)+\ell$. L'extension est bien C^∞ car Γ_1 est strictement convexe.

On peut ensuite étendre a solution de (A.II.8) à K en utilisant que (A.II.8) est une équation différentielle ordinaire le long des rayons qui recouvrent K . On a donc démontré la proposition. □

<u>*Proposition 2.2*</u> *: Soit $V_2 = K \cap \Gamma_2$.*
On a : $(H_1 \circ K_1 - \tilde{H}_1)\big|_{V_2}$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(V_2 \times \Gamma_1)$.

<u>Démonstration</u> : D'après l'appendice, il suffit de montrer que si U_2 est un voisinage de V_2 dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_1$ $(H_1 \circ K_1 - \tilde{H}_1)\big|_{U_2}$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U_2 \times \Gamma_1)$.

En utilisant les arguments de la preuve du th. A.II.12, on voit que l'on peut prendre par exemple $U_2 = K$, et terminer la démonstration de la même façon. □

On peut faire la même construction en échangeant les rôles de Γ_1 et Γ_2 et construire un opérateur :

$$\tilde{H}_2 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_2) \to \underset{\sim}{C}^\infty(K')$$

tel que : $\begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\,\tilde{H}_2\, u = R_2\, u \\ H_2\, u\big|_{\Gamma_2} = K_2\, u \end{cases}$

et R_2 a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(K' \times \Gamma_2)$, K_2 est l'opérateur de troncature introduit plus haut. $\tilde{H}_2$ vérifie l'analogue des propositions 2.1 et 2.2. Les singularités des noyaux de $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ sont décrites dans le corollaire A.II.4.

2.1. Opérateur de billard microlocal

On étudie maintenant l'opérateur $\tilde{H} : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1) \to \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1)$ défini par $\tilde{H} = K_1^{!}\,\tilde{H}_2\,\tilde{H}_1$.

On commence par définir une transformation canonique χ de $T^*(\Gamma_1)$ dans $T^*(\Gamma_1)$ associée aux rayons réfléchis sur Γ_2.

Pour $\rho \in T^*(\Gamma_1)$, ρ proche de $(0,0)$, on trace le 1/2 rayon sortant de ρ noté γ et on note γ' le rayon réfléchi sur Γ_2. γ' coupe Γ_1 et $\chi(\rho)$ est la projection sur $T^*(\Gamma_1)$ du point d'intersection de γ' et de $\partial T^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_1)$.

On montre maintenant un lemme pour étendre la méthode de la phase stationnaire pour des valeurs complexes du grand paramètre.

<u>*Lemme 2.3*</u> : *Soit* $\lambda \in D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Im\,\lambda \leq c_0,\ Re\,\lambda \geq c_1\}$.

Soit $a(x,\lambda) \in S^{0,0}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ *, à support compact en* x *, holomorphe en* λ*,* $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *une fonction avec un unique point critique non dégénéré sur le support de* a *, situé en* $x=0$.

Alors l'intégrale $(\lambda)^{n/2} \int e^{i\lambda\varphi(x)} a(x,\lambda)dx$ *admet un développement asymptotique* $e^{i\lambda\varphi(0)} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\lambda)\lambda^{-k}$ *où* $b_k \in S^0(\mathbb{C})$ *se calcule comme dans le cas* $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : Supposons $\varphi(0) = 0$ et notons I

$$I(\lambda) = \lambda^{n/2} \int e^{i\lambda\varphi(x)} a(x,\lambda)dx .$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, le théorème de la phase stationnaire montre que

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \left|I(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} b_k(\lambda)\lambda^{-k}\right| \leq \tilde{c}_N(1+|\lambda|)^{-(N+1)}$$

pour $|\lambda| \geq \tilde{c}_N$.

Ici les $b_k(\lambda)$ sont donnés par les formules classiques, et holomorphes en λ pour $\lambda \in D$. On commence par remplacer $\sum_{k=0}^{N} b_k\lambda^{-k}$ par une fonction équivalente modulo $(1+|\lambda|)^{-(N+1)}$ pour $|\lambda| \geq c_N$, et qui est holomorphe pour $\lambda \in D$. Par changement d'échelle, on peut se ramener au cas où $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \text{Im}\,\lambda \leq 1 \ , \ \text{Re}\,\lambda \geq c_1\}$.

On cherche cette fonction sous la forme $\sum_{k=0}^{N} c_k(\lambda)(\lambda+2i)^{-k}$.

En écrivant $(\lambda+2i)^{-k} = \lambda^{-k}(1+2i\lambda^{-1})^{-k}$, on peut déterminer les c_k par récurrence, et $c_k(\lambda)$ est holomorphe en λ .

En changeant la constante $\tilde{c}_N$, on a donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \left| I(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} c_k(\lambda)(\lambda+2i)^{-k} \right| \leq \tilde{c}_N (1+|\lambda|)^{-(N+1)}.$$

On estime maintenant $\left| I(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} c_k(\lambda)(\lambda+2i)^{-k} \right|$ pour $\operatorname{Im} \lambda = 1$. Il est clair que : $\left| \sum_{k=0}^{N} c_k(\lambda)(\lambda+2i)^{-k} \right| \leq c_1$ pour $\operatorname{Im} \lambda = 1$.

En écrivant $\lambda = \lambda_1 + i$, on peut majorer $I(\lambda)$ par une constante en utilisant la phase stationnaire avec grand paramètre λ_1 .

On a donc : $\left| I(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} c_k(\lambda)(\lambda+2i)^{-k} \right| \leq c_1'$ pour $\operatorname{Im} \lambda = 1$.
En utilisant le principe du maximum sous une forme démontrée dans $[H_i]$, on en déduit facilement qu'on peut majorer pour $0 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq c_1 < 1$

(2.3) $\left| I(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} c_k(\lambda)(\lambda+2i)^{-k} \right|$ par $c_N' (1+|\lambda|)^{-\alpha(N+1)}$

où $\alpha < 1$ dépend de c_1 .

On peut enlever dans (2.3) les termes c_k pour $k > \alpha(N+1)$, En revenant aux $b_k(\lambda)$, on a aussi :

$$\left| I(\lambda) - \sum_{k=0}^{\alpha(N+1)} b_k(\lambda) \lambda^{-k} \right| \leq c_N' (1+|\lambda|)^{-\alpha(N+1)}$$

pour $|\lambda|$ assez grand.

On a donc démontré le lemme. $\square$

Avec les notations de la page 2.3, on note $\chi_1(\rho)$, pour $\rho \in T^*(\Gamma_1)$, la projection sur $T^*(\Gamma_2)$ du point d'intersection de γ et de $\partial T^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_2))$, χ_1 est une transformation canonique de $T^*(\Gamma_1)$ sur $T^*(\Gamma_2)$.

Si on note χ_2 la transformation définie de façon analogue en échangeant les rôles de Γ_1 et Γ_2, il est facile de voir que $\chi = \chi_2 \circ \chi_1$. On se place dans des coordonnées linéaires centrées en a_1 telles que Γ_i a pour équation $x_{n+1} = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ et on note $(-1)^i A_i$ le hessien de f_i en $(0,\ldots,0)$. A_i est donc défini positif.

On a alors le lemme suivant que nous ne démontrerons pas.

<u>Lemme 2.4</u> : *Dans les coordonnées canoniques induites par* $(x_1,\ldots,x_n)$ *sur* $T^*(\Gamma_1)$ *et* $T^*(\Gamma_2)$ *on a :*

$$D\chi_1(0,0) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} + dA_1 & d\,\mathbb{1} \\ \hline A_2(\mathbb{1} + dA_1) + A_1 & \mathbb{1} + dA_2 \end{array}\right]$$

$$D\chi_2(0,0) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} + dA_2 & d\,\mathbb{1} \\ \hline A_2 + A_1(\mathbb{1} + dA_2) & \mathbb{1} + dA_1 \end{array}\right]$$

On montre maintenant la proposition suivante :

<u>Proposition 2.5</u> : $H = K_1' \tilde{H}_2 \tilde{H}_1$ *est un opérateur intégral de Fourier de la forme suivante :*

$$Hu(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(s(x,\theta)-y.\theta+2d)}\, d(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta$$

où $d \in S^{0,0}_{0,0}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$, *est à support compact en* (x,y,θ) *et holomorphe* *en* λ, *la phase* $s(x,\theta) - y \cdot \theta$ *paramètre la transformation canonique* χ, *et* $s(0,0) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair d'après le corollaire A.II.4 et la définition de χ, que $K_1^{\prime} \tilde{H}_2 \tilde{H}_1$ est un opérateur intégral de Fourier associé à χ. La seule chose à vérifier est la forme de la phase. Si $\psi(y,\theta) - z \cdot \theta$, (resp. $\tilde{\psi}(x,\tilde{\theta}) - y \cdot \tilde{\theta}$) est la phase associée à $\tilde{H}_1$ (resp. $\tilde{H}_2$) $\tilde{H}_2 \tilde{H}_1$ est un O.I.F. associé à la phase $\Phi(x,y,z,\theta,\tilde{\theta}) = \tilde{\psi}(x,\tilde{\theta}) - \tilde{y} \cdot \tilde{\theta} + \psi(y,\theta) - z \cdot \theta$, avec $(y,\theta,\tilde{\theta})$ comme variables de fibres. On peut éliminer les variables $(y,\tilde{\theta})$ par la phase stationnaire car $D\chi(0,0)(\delta_y,0)$ n'est jamais de la forme $(0,\delta_\xi)$, ce qui se vérifie immédiatement avec le lemme 2.4.

Si $x = \theta = 0$, on obtient comme point critique $y = \tilde{\theta} = 0$, c'est-à-dire $(y,\tilde{\theta}) = (a_2,0)$. D'après (2.2), on a $\psi(a_2,0) = d$ et on a aussi $\tilde{\psi}(a_1,0) = d$. La valeur de la phase au point $(0,0)$ est donc bien $2d$, ce qui démontre la Proposition.$\square$

On va maintenant simplifier H par une transformation canonique. D'après [P], $D\chi(0,0)$ n'a que des valeurs propres réelles, différentes de ± 1, car Γ_1 et Γ_2 sont strictement convexes. Donc χ a une variété stable entrante Λ_- et une variété stable sortante Λ_+, qui sont des variétés lagrangiennes qui se coupent transversalement en $(0,0)$. On peut donc trouver une transformation canonique locale $\mathcal{F}$

de $T^*(\Gamma_1)$ dans $T^*(\Omega_\varepsilon)$ où Ω_ε est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, qui envoie Λ_+ sur $\{\xi = 0\}$ et Λ_- sur $\{x=0\}$, au voisinage de $(0,0)$.

$\mathcal{F}$ est paramétrée par une phase $t(x,\theta)-y\cdot\theta$ définie près de $(0,0)$ car dans les coordonnées de départ Λ_- est donnée par une équation $\xi = f_-(x)$ avec $Df_-(0)$ inversible, donc $D\mathcal{F}(0,0)(\delta_y,0)$ n'est jamais de la forme $(0,\delta_\xi)$.

On note alors $\tilde{F} : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1) \to \underset{\sim}{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ l'opérateur :

$$\tilde{F}u(x,\lambda) = (\tfrac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(t(x,\theta)-y\cdot\theta)}\, c(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\, d\theta$$

avec $c \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1 \times \Omega_\varepsilon)$, c holomorphe en λ pour $\lambda \in D$, et $c \in C_o^\infty(\Gamma_1 \times \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^n)$, $c=1$ près de $(0,0,0)$. $\tilde{F}$ admet un inverse microlocal près de $(0,0)$, $\tilde{G} : \underset{\sim}{C}^\infty(\Omega_\varepsilon) \to \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1)$

$$\tilde{G}u(x,\lambda) = (\tfrac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(x\cdot\theta-t(y,\theta))}\, e(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\, d\theta ,$$

où e vérifie les mêmes propriétés que c.

Alors en utilisant le lemme 2.3, on voit que $\begin{cases} \tilde{G}\tilde{F} = \tilde{K} \\ \tilde{F}\tilde{G} = \tilde{K}' \end{cases}$

où $\tilde{K}$ et $\tilde{K}'$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\tilde{K}u(x,\lambda) = (\tfrac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(x-y)\cdot\theta}\, k(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\, d\theta$$

avec $k \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$, holomorphe en λ, et $k=1$ près de $(0,0,0)$. On a une forme analogue pour $\tilde{K}'$.

On prendra les supports de K_1', K_1 assez petits pour qu'ils qu'ils soient inclus dans la région où k=1 .

Théorème 2.6 : On a : $\tilde{F} H \tilde{G} = e^{-i\lambda 2d} M_1$ *avec*

$$M_1 u(x,\lambda) = (\tfrac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)}\, b(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda) dy\, d\theta$$

et $b \in S^{0,0}_{0,0}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$ *b est holomorphe en* λ, $b(0,0,\lambda) = (\nu_1 \ldots \nu_n)^{-1/2} + O(|\lambda|^{-1})$ *où* $\nu_1 \ldots \nu_n$ *sont les valeurs propres plus grandes que 1 de* $D\chi(0,0)$.

Démonstration : Il est clair que l'on peut paramétrer $\mathcal{F} \circ \chi \circ \mathcal{F}^{-1}$ par une phase $\varphi(x,\theta) - y\cdot\theta$, en utilisant le même argument que précédemment.

La deuxième partie du théorème est démontrée dans la Proposition A.III.2 de l'appendice. □

On peut aussi écrire M_1 avec la phase $e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)}$ où $\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda$. Dans la suite on notera $b_0 = (\nu_1 \ldots \nu_n)^{-1/2}$.

Enfin la différentielle $D\chi(0,0)$ s'écrit dans les nouvelles coordonnées symplectiques sous la forme $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^tA^{-1} \end{array}\right]$ où les valeurs propres de A sont $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$.

Dans la section 3, on va étudier l'opérateur $M_0 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Omega_\varepsilon) \to \underset{\sim}{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ défini par :

$$M_0 u(x,\lambda) = (\tfrac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(A^{-1}x-y)\cdot\xi}\, b_0\, u(y,\lambda) dy\, d\xi \ .$$

3. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE GRUSHIN POUR M_o.

3.1. Espace de Hilbert de fonctions microlocalement sortantes.

On définit maintenant un espace de fonctions microlocalement sortantes, dans lequel on va résoudre le problème de Grushin pour P_o.

Définition 3.1 : On pose :

$$H^p = \{u \in D'(\Omega_\varepsilon) \mid m(x^2\lambda_1)^{-p+2|\alpha|}\lambda_1^{|\alpha|}\tilde{D}_x^{2\alpha} u \in L^2(\Omega_\varepsilon)\ \forall\ |\alpha| \leq p/2\}$$

et on munit H^p de la norme naturelle.

Ici $\tilde{D}_x = \frac{1}{\lambda_1} D_x$, $m(t) = (1+t)^{1/2}$.

Rappellons que $P_o = 1\!\!1 - e^{-i\lambda 2d} M_o$, avec

$$(3.1)\qquad M_o u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(A^{-1}x-y)\cdot\xi}\, b_o\, u(y,\lambda)\,dy\,d\xi\ .$$

Notons $m\lambda_1$ l'opérateur de changement d'échelle : $m\lambda_1 u(\tilde{x}) = u(\tilde{x}\lambda_1^{-1/2})$.

Si on pose $\mathcal{P}_o = m\lambda_1 P_o m\lambda_1^{-1}$ et $\mathcal{M}_o = m\lambda_1 M_o m\lambda_1^{-1}$, on a

$$\mathcal{M}_o u(\tilde{x},\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i(A^{-1}\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\tilde{\xi}}\, b_o\, u(\tilde{y})\,d\tilde{y}\,d\tilde{\xi}\ ,$$

en faisant les changements de variable $\tilde{x} = x\lambda_1^{1/2}$, $\tilde{\xi} = \xi\lambda_1^{1/2}$, $\tilde{y} = y\lambda_1^{1/2}$ dans (3.1).

Notons $\mathcal{H}^p = \{u \in D'(\Omega_\varepsilon\lambda_1^{1/2}) \mid m\lambda_1^{-1} u \in H^p\}$. On a :

$$\mathcal{H}^p = \{u\in D'(\Omega_\varepsilon\lambda_1^{1/2}) \mid m(x^2)^{-p+2|\alpha|} D_x^{2\alpha} u \in L^2(\Omega_\varepsilon\lambda_1^{1/2})\ \forall\ |\alpha| \leq p/2\}\ .$$

On va résoudre le problème de Grushin pour $\mathcal{P}_o$ dans $\mathcal{H}^p$.

3.2. <u>Résolution du problème de Grushin pour $\mathcal{M}_o$ dans le cas où A est diagonale</u>.

On note $L^2(m_\alpha)$ l'espace L^2 avec la mesure $m(x^2)^\alpha$. On suppose dans ce paragraphe que A^{-1} est diagonale dans la base $(x_1,\dots,x_n)$. On a donc $A = \mathrm{diag}(\nu_1,\dots,\nu_n)$ avec $1 < \nu_1 \leqq \nu_2 \dots \leqq \nu_n$.

$\mathcal{M}_o$ est l'opérateur $u(\tilde{x}) \to b_o u(A^{-1}\tilde{x})$ et les monômes forment une base de vecteurs propres dans $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ pour $\mathcal{M}_o$.

On note $K_\alpha = b_o \nu^{-\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et on fixe une valeur K_o prise par K_α (éventuellement pour plusieurs multi-indices α).

On note $z \in \mathbb{C}$ un paramètre qui varie dans un petit voisinage V de $\frac{1}{K_o}$, et on posera dans la section 6, $z = e^{-i\lambda 2d}$, où λ varie dans un voisinage V_{K_o} des pseudo-pôles $\mu_j = -i \log \frac{K_o}{2d} + j \frac{\Pi}{d}$ pour $j \in \mathbb{Z}$.

On prend V assez petit pour que : $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $K_\beta \neq K_o$, on a :

$$\forall z \in V \ , \ |1 - z K_\beta| \geqq \varepsilon_o \ , \ |1 - z K_o| \leqq \varepsilon_o \ .$$

Enfin, on note $J = \{\alpha \in \mathbb{N}^n | K_\alpha = K_o\}$ et $a = \mathrm{Card}\, J$.

Prenons $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$|(\det A)^{1/2}\, z\, b_o\, \nu_1^{-N}| \leqq \varepsilon_1 < 1$ pour $z \in V$.

On prend maintenant p assez grand pour que :

$$-p \geqq N + n + 1 ,$$

i.e. les polynômes de degré $\leqq N$ sont dans $\mathcal{H}^p$.

$$- \nu_n^N \leqq \nu_o^p$$

$$- p \geqq 2N + \frac{n}{2} + 1 ,$$

i.e. $\mathcal{H}^p \subset C^{2N}(\Omega_\varepsilon |\lambda|^{1/2})$.

Enfin on note $|u|_s$ la norme de u dans l'espace de Sobolev classique W^s $(|\tilde{x}| \leqq 1)$.

On commence par montrer deux lemmes :

Lemme 3.2 : Soit $k > 1$, et $B_o = B(0,1)$, $B_j = B(0,k^j)$, $D_j = B_j \setminus B_{j-1}$. On a $\forall u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int m(x^2)^{-q}\, |u|^2\, dx \leqq C_q(|u|^2_{B_o} + \sum_{j=1}^{\infty} k^{-jq}\, |u|^2_{B_j})$$

$$\int m(x^2)^{-q}\, |u|^2\, dx \geqq C'_q\, (|u|^2_{B_o} + \sum_{j=1}^{\infty} k^{-jq}\, |u|^2_{B_j}) .$$

Démonstration : Il est facile de voir que

$$\int (1+x^2)^{-q/2}\, |u|^2\, dx$$

est équivalent à

$$|u|^2_{B_o} + \sum_{j=1}^{\infty} k^{-jq}\, |u|^2_{D_j} ,$$

ce qui donne immédiatement la première inégalité.

Pour obtenir la deuxième, il suffit de majorer $\sum_{j=1}^{\infty} k^{-jq} |u|^2_{B_j}$. On a :

$$\sum_{j=1}^{\infty} k^{-jq} |u|^2_{B_j} = \sum_{j=1}^{\infty} k^{-jq} |u|^2_{B_o} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{j} k^{-jq} |u|^2_{D_\ell}$$

$$= \frac{k^{-q}}{1-k^{-q}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} |u|^2_{D_\ell} \times \sum_{j=\ell}^{\infty} k^{-jq} \geq C'_q (|u|^2_{B_o} + \sum_{\ell=1}^{\infty} k^{-\ell q} |u|^2_{D_\ell}).$$

On a donc démontré le lemme. □

Lemme 3.3 : Soit $v \in W^p(B(0,1+\varepsilon_o))$ avec $D_x^\alpha v(0) = 0$ pour $|\alpha| < 2N+n+1$. Alors $\exists\ C$ et $M \in \mathbb{N}$ tels que :

$$(3.2) \quad \sum_{0 \leq |\alpha| < N} |D_x^{2\alpha} v|^2_{L^2(B(0,1))} \leq C \times \sum_{N \leq |\beta| \leq M} |D_x^{2\beta} v|^2_{L^2(B(0,1+\varepsilon_o))} .$$

Démonstration : Si $D_x^\beta v(0) = 0$ pour $|\beta| < 2N+n+1$. On a pour $|\alpha| < N$: $D_x^\beta D_x^{2\alpha} v(0) = 0$ pour $|\beta| < 2N-2|\alpha|+n+1$.

Donc

$$D_x^{2\alpha} v(x) = \sum_{|\delta| = 2N-2|\alpha|+n+1} \frac{x^j}{\delta!} \int_0^1 (1-t)^{|\delta|-1} D_x^{\delta+2\alpha} v(tx)\, dt .$$

Estimons $|D_x^{2\alpha} v|_{L^\infty(B(0,1))}$, on a :

$$|D_x^{2\alpha} v|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C \times \sum_{|\delta| = 2N-2|\alpha|+n+1} |D_x^{\delta+2\alpha} v|_{L^\infty(B(0,1))} .$$

Notons $u = D_x^{2\alpha} v$. Par les inégalités de Sobolev, on a :

$$|D_x^\delta u|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C \left(\sum_{0 \leq |\gamma| \leq n/2+1} |D_x^{\gamma+\delta} u|_{L^2(B(0,1))} \right).$$

Regardons un des termes $D_x^{\gamma+\delta} u$. On a $\gamma + \delta = \beta$ avec

$|\beta| \geq n+1$. Si $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ avec tous les β_i pairs, on peut majorer directement $|D_\lambda^\beta u|_{L^2(B(0,1))}$ par un terme du membre de droite de (3.2).

Si β_1 est impair, une inégalité simple montre que :

$$|D_{x_1}^{\beta_1} \ldots D_{x_n}^{\beta_n} u|^2_{L^2(B(0,1))} \leq C(|D_{x_1}^{\beta_1+1} D_{x_2}^{\beta_2} \ldots D_{x_n}^{\beta_n} u|^2_{L^2(B(0,1+\varepsilon_0))} +$$

$$|D_{x_1}^{\beta_1-1} D_{x_2}^{\beta_2} \ldots D_{x_n}^{\beta_n} u|^2_{L^2(B(0,1+\varepsilon_0))}) .$$

Pour $|\beta| \geq n+1$, on peut donc estimer $|D_x^\beta u|^2_{L^2(B(0,1)}$ par $C \sum_{1 \leq |\gamma| \leq 3n/2+N+1} |D_x^{2\gamma} u|^2_{L^2(B(0,1+\varepsilon_0))}$. Comme $u = D_x^{2\alpha} v$, on a donc démontré (3.2). □

<u>*Proposition 3.4*</u> *: Soit $u \in \mathcal{H}^p$ avec $D_x^\alpha u(0) = 0$ pour $|\alpha| < 2N+n+1$, alors $\|u\|^2_{\mathcal{H}^p} \leq C \times \sum_{N \leq |\alpha| \leq p/2} |m^{-p+2|\alpha|} D_x^{2\alpha} u|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon \lambda_1^{1/2})}$.*

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 3.2, on a :

$$|m^{-p+2|\alpha|} D_x^{2\alpha} u|^2_{L^2} \leq C(|D_x^{2\alpha} u|^2_{B_0} + \sum k^{-2j(p-2|\alpha|)} |D_x^{2\alpha} u|^2_{B_j}) .$$

Posons $x = k^j y$ et $u(x) = \tilde{u}(y)$. On a : $D_x^{2\alpha} u = k^{-j2|\alpha|} D_y^{2\alpha} \tilde{u}$, et :

$$k^{-2j(p-2|\alpha|)} |D_x^{2\alpha} u|^2_{B_j} = k^{jn} k^{-2jp} k^{-4|\alpha|} |D_y^{2\alpha} \tilde{u}|_{L^2(B(0,1))} .$$

D'après le lemme 3.3, on a :

$$k^{-2j(p-2|\alpha|)}\,|D_x^{2\alpha}u|^2_{B_j} \leq C \times$$

$$\sum_{N\leq|\beta|\leq M} k^{-2jp}\,k^{-4|\alpha|}\,k^{jn}\,|D_y^{2\beta}\tilde{u}|^2_{L^2(B(0,1+\varepsilon_0))}$$

$$\leq C \sum_{N\leq|\beta|\leq M} k^{-2j(p-2|\beta|)}\,|D_x^{2\beta}u|^2_{L^2(B(0,k^j(1+\varepsilon_0)))} \ .$$

Le lemme 3.2 est encore vrai en changeant de décomposition dyadique, ce qui démontre la proposition. □

<u>*Proposition 3.5*</u> *: Soit* $f \in \mathcal{H}^p$ *, et*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<2N+n+1} D_x^\alpha f(0)\,\frac{x^\alpha}{\alpha!} + f_N(x) \ ,$$

le développement de Taylor à l'ordre $2N+n+1$ *de* f.

Alors la série de Neumann $v = \sum_{j=0}^{\infty} (z\mathcal{M}_0)^j f_N$ *converge dans* $\mathcal{H}^p$ *uniformément pour* $z \in V$ *et on a :*

$$\|v\|_{\mathcal{H}^p} \leq c_p \|f\|_{\mathcal{H}^p} \ .$$

<u>Démonstration</u> : On va estimer $\|(z\mathcal{M}_0)^j f_N\|_{\mathcal{H}^p}$.

D'après la proposition 3.4, il suffit d'estimer les dérivées d'ordre supérieur à N de $(z\mathcal{M}_0)^j f_N$.

On commence par remarquer qu'à cause des inégalités de Sobolev, on a si $|\beta| \leq 2N+n+1$, $|D_x^\beta f(0)| \leq c_p\|f\|_{\mathcal{H}^p}$. Donc on a :

$$\|f_N\|_{\mathcal{H}^p} \leq c_p \|f\|_{\mathcal{H}^p} \ . \tag{3.3}$$

$(z\mathcal{M}_o)^j f_N(x) = (z\, b_o)^j f_N(A^{-j}x)$, et $D_x^{2\alpha}(f_N(A^{-j}x)) = \nu^{-2\alpha j} D_x^{2\alpha} f_N(A^{-j}x)$.

Si $|\alpha| \geqq N$, on a :

$$|m^{-p+2|\alpha|} \nu^{-2\alpha j} (z\, b_o)^j D_x^{2\alpha} f_N(A^{-j}x)|^2_{L^2}$$

$$\leqq |z\, b_o|^{2j} \nu_1^{-4jN} \int_{|x| \leqq \varepsilon \lambda_1^{1/2}} m^{-p+2|\alpha|}(x^2) |D_x^{2\alpha} f_N(A^{-j}x)|^2 dx.$$

en faisant le changement de variables $A^{-j}x = \tilde{x}$ et en utilisant que m est croissante, on peut majorer cette intégrale par :

$$|z\, b_o|^{2j} \nu_1^{-4jN} (\det A)^j \int_{|x| \leqq \varepsilon \lambda_1^{1/2}} m^{-p+2|\alpha|}(x^2) |D_x^{2\alpha} f_N(x)|^2 dx.$$

Donc on a :

$$|m^{-p+2|\alpha|} D_x^{2\alpha} (z\mathcal{M}_o)^j f_N|^2_{L^2} \leqq$$

$$\leqq |\det A\, (z\, b_o)^2 \nu_1^{-4N}|^j \times |m^{-p+2|\alpha|} D_x^{2\alpha} f_N|^2_{L^2} .$$

Pour $z \in V$, on a : $\det A\, |z\, b_o|^2 \nu_1^{-4N} \leqq \varepsilon_1 < 1$, donc la série $\sum_{j=0}^{\infty} (z\mathcal{M}_o)^j f_N$ converge dans $\mathcal{H}^p$, ce qui démontre la proposition. □

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.6 : On peut inverser dans $\mathcal{H}^p$ le problème de Grushin :

$$\begin{cases} u - z\mathcal{M}_o u = \mathcal{R}_o^+ c + f & \text{pour } f \in \mathcal{H}^p ,\ c \in \mathbb{C}^a , \\ \mathcal{R}_o^- u = d & z \in V \end{cases}$$

avec : $\mathcal{R}_o^+ c = \sum_{\beta\in J} c_\beta \frac{x^\beta}{\beta!}$, $\mathcal{R}_o^- u = (D_x^\beta u(0))_{\beta\in J}$.

L'inverse s'écrit $\mathcal{F}_o = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_o & \mathcal{E}_o^+ \\ \mathcal{E}_o^- & \mathcal{E}_o^{+-} \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{E}_o(f) = \sum_{\substack{\beta\notin J\\ |\beta|<\tilde{N}}} \left(\frac{1}{1-zK_\beta}\right) D_x^\beta f(0) \frac{x^\beta}{\beta!} + r(x)$$

$$r(x) = (1-z\mathcal{K}_o)^{-1} f_N(x) \ , \ f_N(x) = f(x) - \sum_{|\beta|<\tilde{N}} \frac{x}{\beta!} D_x^\beta f(0)$$

$$\mathcal{E}_o^+ d = \sum_{\beta\in J} d_\beta \frac{x^\beta}{\beta!} \qquad \mathcal{E}_o^- f = -(D_x^\beta f(0))_{\beta\in J}$$

$$\mathcal{E}_o^{+-} d = (1-zK_o)d \ .$$

On a : $\forall z \in V$

(3.3) $$|\mathcal{F}_o|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^p \times \mathbb{C}^a)} \leq C_p \ .$$

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{H}^p$ et soit

(3.4) $$f(x) = \sum_{|\beta|<\tilde{N}} \frac{x^\beta}{\beta!} D_x^\beta f(0) + f_N(x)$$

le développement de Taylor de f à l'ordre $\tilde{N}$.

Si $u \in \mathcal{H}^p$, on écrit u sous la forme (3.4) en séparant dans le développement de Taylor les monômes x^β pour $\beta \in J$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{F}_o$ est bien de la forme indiquée.

La seule chose à voir est l'estimation (3.3).

Pour cela, il suffit d'estimer $|D_x^\beta f(0)|$ en fonction de $|f|_{\mathcal{H}^p}$, d'utiliser la proposition 3.5, et d'estimer $|x^\beta|_{\mathcal{H}^p}$ pour $|\beta| < \tilde{N}$.

On a : $|D_x^\beta f(0)| \leq C(N,n)\, |D_x^\beta f|_{W^{n+2+1}(|x| \leq 1)} \leq C_p |f|_{\mathcal{H}^p}$

$$|x^\beta|_{\mathcal{H}^p} \leq C(N) \quad \text{pour} \quad |\beta| < \tilde{N} .$$

On a donc démontré la proposition. $\square$

3.3. <u>Résolution du problème de Grushin pour $\mathcal{M}_o$ dans le cas où A n'est pas diagonalisable</u>.

Sur l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à N, $\mathcal{M}_o$ a pour valeurs propres $b_o \nu^{-\alpha}$, mais n'est pas diagonalisable, si A n'est pas diagonalisable. Fixons une base $\{p_\ell(x)\}$ de polynômes homogènes dans laquelle $\mathcal{M}_o$ est sous forme de Jordan, et notons $\{p_\ell(x)\}_{\ell \in J}$ l'ensemble des p_ℓ qui sont des vecteurs propres généralisés de $\mathcal{M}_o$ pour la valeur propre K_o considérée dans le §.3.2.

On peut alors écrire le développement de Taylor de f à l'ordre $\tilde{N}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{\ell \notin J} p_\ell(x)\, K_\ell(f) + \sum_{\ell \in J} p_\ell(x)\, K_\ell(f) + f_{\tilde{N}}(x) .$$

Il faut maintenant remplacer la norme sur $\mathcal{H}^p$ par une norme équivalente.

Pour simplifier les notations, on supposera que A^{-1} n'a qu'un seul bloc de Jordan associé à la valeur propre ν_1^{-1}, le cas général se traitant de la même façon.

On peut trouver une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ $\|\xi\|_1^2 = \sum_1^n \gamma_i \xi_i^2$ telle que $\|{}^tA^{-1}\xi\|_1^2 \leq \frac{1}{C}\|\xi\|_1^2$ avec $C > 1$. On peut aussi trouver une autre norme $\|x\|_2^2 = \sum_1^n \beta_i x_i^2$ telle que $\|Ax\|_2^2 \geq C\|x\|_2^2$.

On pose alors $\tilde{m}(x,\lambda) = m(\|x\|_2^2 \lambda_1)$, et m munit H^p de la norme

$$\|u\|_{H^p}^2 = \sum_{0\leq|\alpha|\leq p/2} |\tilde{m}(x,\lambda)^{-p+2|\alpha|} \lambda_1^{|\alpha|} \gamma^\alpha \tilde{D}_x^{2\alpha} u|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

le lemme 3.2 s'étend si on remplace les boules B_j par les boules pour la métrique $\|x\|_2^2$ et en utilisant les arguments de la preuve du lemme 3.3 et les décompositions dyadiques, on montre facilement qu'une norme équivalente sur H^p est

$$\|u\|_{H^p}^2 = \sum_{0\leq|\alpha|\leq p} |\tilde{m}^{-p/2+|\alpha|} \lambda^{|\alpha|/2} D_x^\alpha u|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} .$$

On a la proposition suivante :

<u>*Proposition 3.7*</u> : *On peut résoudre dans $\mathcal{H}^p$ le problème de Grushin :* $\begin{cases} u - z\mathcal{M}_o u = \mathcal{R}_o^+ c + f & \text{pour } f \in \mathcal{H}^p,\ c,d \in \mathbb{C}^a,\ z \in V \\ \mathcal{R}_o^- u = d \end{cases}$

avec $\mathcal{R}_o^+ c = \sum_{\ell\in J} c_\ell p_\ell(x)$, $\mathcal{R}_o^- u = (K_\ell(u))_{\ell\in J}$.

L'inverse s'écrit : $\mathcal{F}_o = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_o & \mathcal{E}_o^+ \\ \mathcal{E}_o^- & \mathcal{E}_o^{+-} \end{pmatrix}$ *avec :*

$$\mathcal{E}_o f = \sum_{\ell\notin J} (1 - z\mathcal{M}_o)^{-1} K_\ell(f)\, p_\ell(x) + (1 - z\mathcal{M}_o)^{-1} f_N(x)$$

$$\mathscr{E}_o^+ d = \sum_{\ell \in J} d_\ell \, p_\ell(x) \quad , \quad \mathscr{E}_o^- f = (-K_\ell(f))_{\ell \in J}$$

$\mathscr{E}_o^{+-}$ est la matrice de $1\!\!1 - z\mathscr{M}_o$ dans la base $\{p_\ell(x)\}_{\ell \in J}$ et $|\mathscr{F}_o|_{\mathscr{L}(H^p, \mathbb{C}^a)} \leq C(p)$, $\forall z \in V$.

Démonstration : D'après la Proposition 3.4, il suffit d'estimer $D_x^\alpha(f_N(A^{-j}x))$ pour $|\alpha| \geq N$.
Au lieu d'estimer $D_x^\alpha g$ on peut estimer $\tilde{D}_x^\alpha g$ où :

$$\begin{cases} \tilde{D}_{x_1} = D_{x_1} \\ \tilde{D}_{x_i} = D_{x_i} - \nu_1 D_{x_i - 1} \quad \text{pour} \quad i \geq 2 . \end{cases}$$

On a alors : $(\tilde{D}_x)^\alpha f_N(A^{-j}x) = \nu_1^{-|\alpha| j} (D_x^\alpha f_N)(A^{-j}x)$.

On peut alors terminer la démonstration de la même façon. □

3.4. Résolution du problème de Grushin pour M_o.

Comme $\mathscr{M}_o$ est obtenu par conjugaison de M_o par $m\lambda_1$, on obtient immédiatement les propositions suivantes:

Proposition 3.8 : Si A est diagonalisable, on peut résoudre dans H^p le problème de Grushin suivant :

$$\begin{cases} u - z\, M_o\, u = R_o^+ c + f \\ R_o^- u = d \end{cases}$$

pour $f \in H^p$, $c, d \in \mathbb{C}^a$, $z \in V$ avec :

$$R_o^+ c = \sum_{\beta \in J} c_\beta \frac{(x\lambda^{1/2})^\beta}{\beta!} \quad , \quad R_o^- u = (\lambda^{-|\beta|/2} D_x^\beta u(0))_{\beta \in J} \quad .$$

L'inverse s'écrit : $F_o = \begin{pmatrix} E_o & E_o^+ \\ E_o^- & E_o^{+-} \end{pmatrix}$ *avec :*

$$E_o f = \sum_{\beta \notin J,\ |\beta| < \tilde{N}} \frac{1}{(1 - z K_\beta)} D_x^\beta f(0) \frac{x^\beta}{\beta!} + r(x)$$

$$r(x) = (1 - z M_o)^{-1} \left(f(x) - \sum_{|\beta| < \tilde{N}} D_x^\beta f(0) \frac{x^\beta}{\beta!}\right)$$

$$E_o^+(\lambda) d = \sum_{\beta \in J} d_\beta \frac{(x \lambda^{1/2})^\beta}{\beta!}$$

$$E_o^-(\lambda) f = -\left(D_x^\beta f(0) \lambda^{-|\beta|/2}\right)_{\beta \in J}$$

$$E_o^{+-}(\lambda) d = (1 - z K_o) d$$

et : $$|F_o|_{\mathcal{L}(H^p \times \mathbb{C}^a)} \leq C_p \ , \ \forall z \in V \ .$$

<u>*Proposition 3.9*</u> *: Si* A *n'est pas diagonalisable, on peut résoudre dans* H^p *le problème de Grushin suivant :*

$$\begin{cases} u - z M_o u = R_o^+ c + f \quad \text{pour} \quad f \in H^p \ , \ c, d \in \mathbb{C}^a \\ R_o^- u = d \end{cases}$$

$R_o^+ c = \sum_{\ell \in J} c_\ell p_\ell (x \lambda^{1/2})$, $R_o^- u = (\lambda^{-|\beta|/2} K_\ell(u))_{\ell \in J}$ *où* $|\beta| =$ *degré de* p_ℓ .

L'inverse s'écrit $F_o = \begin{pmatrix} E_o & E_o^+ \\ E_o^- & E_o^{+-} \end{pmatrix}$ *avec :*

$$E_o f = \sum_{\ell \notin J} (1 - z M_o)^{-1} K_\ell(f) p_\ell(x) + r(x)$$

$$r(x) = (1 - z M_o)^{-1} \left(f(x) - \sum_\ell p_\ell(x) K_\ell(f)\right)$$

$$E_o^+ d = \sum_{\ell \in J} d_\ell \, p_\ell(x\lambda^{1/2}) \quad , \quad E_o^- f = -\,(\lambda^{-|\beta|/2} K_\ell(u))_{\ell \in J}$$

E_o^{+-} *est la matrice de* $1 - zM_o$ *dans la base* $\{p_\ell(x)\}_{\ell \in J}$ *et*

$$|F_o|_{\mathcal{L}(H^p \times \mathbb{C}^a)} \leq C_p \ , \ \forall\, z \in V \ .$$

<u>Démonstration</u> : On suit les preuves de la Proposition 3.6, Proposition 3.7, en utilisant que si $\lambda \in V_{K_o}$, $\operatorname{Im}\lambda$ est borné, donc $|\lambda|$ est équivalent à $|\lambda_1|$ pour λ assez grand. □

4. <u>RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE GRUSHIN POUR M_1</u>.

Dans ce paragraphe, on va inverser le problème de Grushin suivant :

$$(4.1) \begin{cases} u - zM_1 u = R_o^+ c + f \\ R_o^- u = d \end{cases}$$

où R_o^+ et R_o^- sont les opérateurs introduits dans les Propositions 3.8 et 3.9, et u et f sont dans H^p.

On commence par fixer quelques notations :

Soit $r(s) \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ avec $\begin{cases} r(s) = 1 & \text{pour } |s| \leq \alpha_o \\ r(s) = 1 & \text{pour } |s| \geq 1 \end{cases}$

où α_o sera fixé plus tard.

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme euclidienne notée $\|\ \|$ comme dans la Proposition 3.7, telle que $\|Ax\|^2 \geq c\|x\|^2$ et $\|{}^tA^{-1}\xi\|^2 \leq \frac{1}{c}\|\xi\|^2$ avec $c > 1$. Pour $\frac{1}{3} < \rho < \frac{1}{2}$,

$\alpha \in \mathbb{R}^+$, la fonction $r(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho} \alpha^{-2})$ est dans $S^{o,o}_{\rho,o}(\Omega_\varepsilon)$ et la fonction $r(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho} \alpha^{-2})$ est dans $S^{o,o}_{o,\rho}(\Omega_\varepsilon)$ avec les notations de l'appendice A.I. On note $Q_{\alpha,x}$ (resp. $Q_{\alpha,\xi}$) l'opérateur de symbole $r(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho} \alpha^{-2})$ (resp. $r(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho} \alpha^{-2})$), et on note $Q_{1,x} = Q_x$, $Q_{1,\xi} = Q_\xi$, $Q = Q_x\, Q_\xi$.

Tous ces opérateurs sont pris à support propre.

4.1. <u>Estimation de $(M_1 - M_o) \circ Q$</u>.

On introduit l'espace de symboles $\tilde{S}^{m,k}_\rho(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$ défini par : $u(x,y,\theta,\lambda) \in \tilde{S}^{m,k}_\rho(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$ si :

$\forall\, (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{N}^{3n}$

$$|m(x,\lambda)^{|\alpha|}\, m(y,\lambda)^{|\beta|}\, \partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_\theta^\gamma\, u| \leq$$

$$\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\, |\lambda|^{+k+|\alpha|+|\beta|+\rho|\gamma|/2}\, (1+|\theta|)^m$$

si $m(x,\lambda) = m(|x|^2 \lambda_1)$.

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 4.1 : Soit $A : C_o^\infty(\Omega_\varepsilon) \to D'(\Omega_\varepsilon)$ *un opérateur de la forme suivante :*

$$A\, u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\,\lambda_1(\varphi(x,\theta) - y\cdot\theta)}\, a(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\, dy\, d\theta$$

avec :

$$(4.2)\begin{cases} a \in \tilde{S}^{o,o}_\rho(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon) \cap S^{o,o}_{\rho,\rho}, \ a \text{ est à support compact en } \theta, \\ \varphi(x,\theta) = A(x,\theta)x\cdot\theta \ \text{ où } A \text{ est une } n\times n \text{ matrice avec } A(0,0) \\ \qquad \text{inversible.} \end{cases}$$

On a alors :

(4.3) $$\|A\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(p) .$$

<u>Démonstration</u> : On a :

$$m^{-p+|\alpha|}\,\lambda_1^{|\alpha|/2}\,\tilde{D}_x^\alpha Au =$$

(4.4) $$\left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int \lambda_1^{-|\alpha|/2}\, m^{-(p-|\alpha|)} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\alpha^\beta\, \partial_x^\beta \left(e^{i\lambda_1(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)}\right) \partial_x^\gamma a\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta .$$

On vérifie facilement par récurrence sur $|\beta|$ et en utilisant (4.2) que :

$$\partial_x^\beta \left(e^{i\lambda_1\varphi(x,\theta)}\right) = \sum_{|\delta|\leq|\beta|} e^{i\lambda_1\varphi(x,\theta)} (\lambda_1\theta)^\delta\, \varphi_\delta(x,\theta) .$$

Chaque terme de (4.4) est donc de la forme :

$$\left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda_1(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)}\, \lambda_1^{-|\alpha|/2}\, m^{-(p-|\alpha|)}(x,\lambda)\, \varphi_\delta(x,\theta)\, \partial_x^\gamma\, \partial_y^{\delta_1} a\, \partial_y^{\delta_2} u(y,\lambda)\,dy\,d\theta$$

avec $\delta_1+\delta_2=\delta$ et $|\delta|\leq|\beta|$.

Si $u\in H^p(\Omega_\varepsilon)$, on a $\partial_y^{\delta_2} u = \lambda^{|\delta_2|/2}\, m(y,\lambda)^{p-|\delta_2|}\, v_{\delta_2}(y,\lambda)$ avec $|v_{\delta_2}|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_p\, |u|_{H^p(\Omega_\varepsilon)}$. On est donc ramené à estimer la norme dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon))$ d'opérateurs du type :

$$K_\alpha v(x,\lambda) = (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{i\lambda_1(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)} m^{-(p-|\alpha|)}(x,\lambda)$$

$$\lambda^{(|\delta_2|-|\alpha|)/2} m^{p-|\delta_2|}(y,\lambda)\, c(x,y,\theta,\lambda)\, v\, dy\, d\theta$$

où c est de la forme $\varphi_\delta(x,\theta)\,\partial_x^\gamma \partial_y^{\delta_1} a(x,y,\theta,\lambda)$.

Pour estimer la norme de K_α dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon))$, il suffit d'estimer celle de $K_\alpha^* K_\alpha$. Le noyau de $K_\alpha^* K_\alpha$ est égal à :

$K(x,z,\lambda) =$

$$(\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda_1(-\varphi(x,\theta)+y\cdot\theta+\varphi(z,\tilde\theta)-y\cdot\tilde\theta)} b(x,y,z,\theta,\tilde\theta,\lambda)\,dy d\theta d\tilde\theta$$

où $b = m(x,\lambda)^{-(p-|\alpha|)} m(z,\lambda)^{-(p-|\alpha|)} m^{2(p-|\delta_2|)}(y,\lambda)\bar{c}(y,x,\theta,\lambda)\, c(y,z,\tilde\theta,\lambda)$.

On va éliminer l'intégrale en (y,θ) par la phase stationnaire :

Le point critique est donné par :

$$\begin{cases} \theta = \tilde\theta \\ y = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tilde\theta) = \phi(x,\tilde\theta) \end{cases} \quad \text{et est non dégénéré.}$$

Vérifions que le développement de la phase stationnaire est convergent. Le k-ième terme est de la forme :

$$\lambda^{-k} R_{2k}(x,z,\tilde\theta,\partial_y,\partial_\theta)b\big|_{y=\phi(x,\tilde\theta),\theta=\tilde\theta} \,.$$

Ici R_{2k} est un opérateur différentiel d'ordre 2k. Si

$2k = k_1 + k_2 + k_3$ où k_1 est le nombre de dérivées en y qui portent sur $m^{2(p-|\delta_2|)}$, k_2 le nombre de dérivées en y sur $c\,\overline{c}$, k_3 le nombre de dérivées en θ sur $c\,\overline{c}$.
On obtient un terme dans $S^{o-k+\rho(k_2+k_3)}_{\rho,\rho}$, donc le développement est convergent car $\rho < \frac{1}{2}$.
On a :

$$K(x,z,\lambda) = (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\tilde{\theta})-\varphi(z,\tilde{\theta}))}\, m(x,\lambda)^{-p+|\alpha|}$$

$$m(z,\lambda)^{-p+|\alpha|}\ \tilde{b}(x,z,\tilde{\theta},\lambda)\, d\tilde{\theta}\ .$$

On a : $-\varphi(x,\tilde{\theta}) + \varphi(z,\tilde{\theta}) = (x-z) \cdot \theta(x,z,\tilde{\theta})$, où le changement de variables $(x,z,\tilde{\theta}) \to (x,z,\theta(x,z,\tilde{\theta}))$ est inversible au voisinage de $(0,0,0)$.
Par l'astuce de Kuranishi, on peut donc écrire l'opérateur de noyau K comme un opérateur pseudodifférentiel, en faisant dans l'intégrale le changement de variables $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x,z,\theta)$.
L'amplitude de $K^*_\alpha K_\alpha$ est de la forme :

$$m(x,\lambda)^{-p+|\alpha|} m(z,\lambda)^{-p+|\alpha|}\ \tilde{b}(x,z,\tilde{\theta}(x,z,\theta),\lambda)\, \frac{d\tilde{\theta}}{d\theta} = d(x,z,\theta,\lambda)$$

$\tilde{b}$ appartient à $S^{o,\varepsilon_o}_{\rho,\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$, donc $d(x,z,\theta,\lambda) \in S^{o,\varepsilon_o}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$. Le problème est de déterminer ε_o. On peut calculer le symbole de $Op(K^*_\alpha K_\alpha)$, G_K car $\rho + \frac{1}{2} < 1$, en utilisant la Prop. (A.I.4).

Regardons le 1er terme du développement asymptotique de G_K :

Si on pose $\psi(x,\theta) = \phi(x,\tilde{\theta}(x,x,\theta))$ et $a(x,z,\theta,\lambda) = a(x,z,\tilde{\theta}(x,x,\theta),\lambda)$, on obtient, modulo un facteur borné :

$$\frac{(1+\lambda_1\psi(x,\theta)^2)^{p-|\delta_2|}}{(1+\lambda_1 x^2)^{p-|\alpha|}} |\lambda|^{-|\alpha|+|\delta_2|} \partial_x^\gamma \partial_y^{\delta_1} a(\phi(x,\theta),x,\theta,\lambda)$$
$$\partial_x^\gamma \partial_y^{\delta_1} \overline{a}(\phi(x,\theta),x,\theta,\lambda)$$

on a : $\psi(x,\theta)^2 \sim (x)^2$ donc $(1+\lambda_1\psi(x,\theta)^2) \sim (1+\lambda_1 x^2)$

et :

$$\partial_x^\gamma \partial_y^{\delta_1} a(\phi(x,\theta),x,\theta,\lambda) \times (1+\lambda_1 x^2)^{|\gamma+\delta_1|/2} \in O(|\lambda|^{|\gamma+\delta_1|/2})$$

car $a \in \tilde{S}_\rho^{o,o}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$.

Donc le 1er terme du développement de G_k est majoré par :

$$C \times (1+\lambda_1 x^2)^{|\alpha|-|\delta_2|-|\delta_1|-|\gamma|} |\lambda|^{-|\alpha|+|\delta_2|+|\delta_1|+|\gamma|} \leqq C$$

car $|\alpha| \geqq |\delta_1| + |\delta_2| + |\gamma|$.

Les autres termes du développement de G_K s'estiment de la même façon, et on obtient que $G_K \in S^{o,o}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$. En utilisant la Prop. A.I.6, on obtient que

$$\|K_\alpha^* K_\alpha\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))} \leqq C$$

ce qui démontre le lemme. □

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.2 : *On a* $\|(M_1 - M_o)Q\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(p)|\lambda|^{-\varepsilon_o}$ *où*

$$\varepsilon_o = \inf(\rho, 3\rho-1) .$$

Démonstration : On a :

$$(M_1-M_o)u(x,\lambda) = (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)} (b(x,y,\theta,\lambda)-b_o)\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta$$

$$+ (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)} b_o\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta - (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(A^{-1}x-y)\cdot\theta} b_o\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta = I_1 u + I_2 u .$$

Commençons par étudier le 1er terme :

On a : $b(x,y,\theta,\lambda) = b_o + x\cdot b_x + y\cdot b_y + \theta\cdot b_\theta + b_{-1}$, avec :

$$b_x, b_y, b_\theta \in S^{o,o}_{o,o}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon) \ , \ b_{-1} \in S^{o,-1}_{o,o}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon) .$$

Donc $I_1 u = I_x u + I_y u + I_\theta u + I_{-1} u$. On a :

$$I_2 u(x,\lambda) = (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int_0^1 dt \int b_o \frac{d}{dt}(e^{-i\lambda_1(\psi_t(x,\theta)-y\cdot\theta)})\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta\,dt$$

où $\psi_t(x,\theta) = t\,A^{-1}x\cdot\theta + (1-t)\,\varphi(x,\theta)$. Donc :

$$I_2 u(x,\lambda) = (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int_0^1 dt \int b_o\, i\,\lambda_1(A^{-1}x\cdot\theta - \varphi(x,\theta))\, e^{-i\lambda_1(\psi_t(x,\theta)-y\cdot\theta)}\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta$$

sur le support de $r(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})\ r(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho})$, on a :

$$|x\cdot b_x| \leq C|\lambda_1|^{-\rho} \ , \ |y\cdot b_y| \leq C|\lambda_1|^{-\rho} \ , \ |\xi\cdot b_\xi| \leq C|\lambda_1|^{-\rho} .$$

D'autre part $A^{-1}x\cdot\xi - \varphi(x,\theta) \in O(x^3,\theta^3)$ donc sur le support de $r(\|x\|^2\lambda_1^{2\rho})\, r(\|\xi\|^2\lambda_1^{2\rho})$, on a :

$$|\lambda_1(A^{-1}x\cdot\xi - \varphi(x,\xi))| \leq C\,|\lambda_1|^{1-3\rho}\,.$$

En utilisant ces remarques, il est facile de voir que l'on peut écrire modulo un régularisant $I_1 \circ Q$ comme un opérateur du type étudié dans le lemme 4.1 avec une amplitude dans $S^{o,-\rho}_{\rho,\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$.

D'autre part $r(\|x\|^2\lambda_1^{2\rho})r(\|\xi\|^2\lambda_1^{2\rho})$ appartient à $\tilde{S}^{o,o}_{\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$, et on en déduit que l'amplitude de $I_1 \circ Q$ sera aussi dans $\tilde{S}^{o,-\rho}_{\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$.

De même $I_2 \circ Q$ s'écrit modulo un régularisant comme une somme $\int A_t\,dt$, où A_t est du type étudié dans le lemme 4.1, avec une amplitude dans $\tilde{S}^{o,1-3\rho}_{\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon) \cap S^{o,1-3\rho}_{\rho,\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$.

Il suffit donc d'appliquer le lemme 4.1 pour démontrer la proposition. □

4.2. Construction d'une nouvelle norme sur H^p.

On veut munir H^p d'une norme équivalente qui est plus adaptée à l'estimation de M_1 et M_o. On se place d'abord dans le cas où A est diagonalisable.

Posons $N(p) = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq p\}$ et notons pour $0 \leq j \leq N(p)-1$, $t_j(x,\xi,\lambda) = (m(x,\lambda) + \lambda(z_1^j\xi_1^2 + \ldots + z_n^j\xi_n^2))^p$, où $(z_1,\ldots,z_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

On notera $T_j = Op(t_j)$ et il est facile de voir que $t_j(x,\xi,\lambda) \in S^{p,p/2}_{o,1/2}(\Omega_\varepsilon)$.

On a le lemme suivant :

Lemme 4.3 : Soit $|u|^2_p = \sum_{o}^{N(p)-1} |T_j u|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ *pour* $u \in C^\infty_o(\Omega_\varepsilon)$. *On a :*

$$|u|^2_p \leq C(p) \| u \|^2_{H^p}$$

$$\| u \|^2_{H^p} \leq C(p) \, |u|^2_p \, .$$

Démonstration : On a :

$$(m+\lambda(z^j_1 \xi^2_1 + \ldots + z^j_n \xi^2_n))^p = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq p} C^{|\alpha|}_p \, C^{|\alpha|-\alpha_1}_{|\alpha|} \ldots$$

$$C^{\alpha_n}_{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \, m^{p-|\alpha|} \, \lambda^{|\alpha|} \, (z^j)^\alpha \, \xi_1^{2\alpha_1} \ldots \xi_n^{2\alpha_n} \, .$$

Donc le vecteur $(t_o,\ldots,t_{N(p)-1})$ est l'image du vecteur $(A^{|\alpha|}_p \, m^{p-|\alpha|} \, \lambda^{|\alpha|} \, \xi^{2\alpha})_{|\alpha| \leq p}$ par la matrice de Van der Monde :

$$K = \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ y_1 & & y_{N(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{N(p)-1} & & y_{N(p)}^{N(p)-1} \end{vmatrix}$$

où $(y_1,\ldots,y_{N(p)})$ est le $N(p)$ vecteur formé des z^α.

On peut prendre $(z_1,\dots,z_n)$ tel que $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$, donc K est inversible.

Il suffit de prendre $C(p) = \sup(\|K\|^2, \|K^{-1}\|^2)$ où $\|K\|$ est la norme d'opérateur pour la norme hilbertienne sur $\mathbb{C}^{N(p)}$.

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on pose $\tilde{\xi}_i^2 = \gamma_i \xi_i^2$, où les γ_i sont définis dans le §.3.3 et on remplace t_j par

$$\tilde{t}_j(x,\xi,\lambda) = (\tilde{m}(x,\lambda) + \lambda(z_1^j \tilde{\xi}_1^2 + \dots + z_n^j \tilde{\xi}_n^2))^p .$$

On a l'analogue du lemme 4.3, si on prend $|u|_p^2 = \sum_0^{N(p)-1} |\tilde{T}_j u|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ et $\|u\|_p^2$ est la norme définie au §.3.3.

4.3. <u>Estimation de $M_1 \circ (1-Q)$ et $M_0 \circ (1-Q)$ dans le cas où A est diagonalisable.</u>

On va maintenant estimer $M_1 \circ (1-Q)$ et $M_0 \circ (1-Q)$ à l'aide des opérateurs T_j. Il suffit de traiter le cas de $M_1 \circ (1-Q)$, le cas de $M_0 \circ (1-Q)$ se traitant de la même façon.

Dans la suite on notera $t(x,\xi,\lambda)$ pour $t_j(x,\xi,\lambda)$ et $T = Op(t)$.

Posons maintenant $s_1(x,\xi,\lambda) = t^{-1}(x,\xi,\lambda)(1-r)(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho})$.

D'après l'appendice A.I, s_1 appartient à

$S^{-2p,(2\rho-1)p}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$. Il est facile de voir en utilisant le calcul symbolique qu'il existe $s_1'(x,\xi,\lambda) \in S^{-p,(2\rho-1)p}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$ tel que : $s_1' \# t = 1 - r(\|\xi\|^2 \lambda^{2\rho}) + R_{-\infty}$ avec $R_{-\infty} \in S^{-\infty}$. Enfin on note $\tilde{S}_1$ un opérateur de symbole s_1' et proprement supporté, et on peut écrire $\tilde{S}_1$ avec un symbole à droite $\tilde{s}_1(y,\xi,\lambda)$ qui est dans $S^{-p,(2\rho-1)p}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$.
On a donc : $\tilde{S}_1 \circ T = (1-Q_\xi) + R_{-\infty}$, avec $R_{-\infty} \in S^{-\infty}$. De même on pose $s_2(x,\xi,\lambda) = t^{-1}(x,\xi,\lambda)(1-r)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})$ $r(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho})$.

D'après l'appendice A.I., s_2 appartient à $S^{-2p,(2\rho-1)p}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$. Il existe $s_2'(x,\xi,\lambda) \in S^{-p,(2\rho-1)p}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$ tel que :

$$s_2' \# t = (1-r)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})\ r(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho}) + R_{-\infty}$$
$$\text{avec } R_{-\infty} \in S^{-\infty}.$$

On note $\tilde{S}_2$ un opérateur proprement supporté de symbole s_2' et on peut écrire $\tilde{S}_2$ avec un symbole à droite $\tilde{s}_2(y,\xi,\lambda)$ qui est dans $S^{-p,(2\rho-1)p}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$.
On a donc : $\tilde{S}_2 \circ T = (1-Q_x)Q_\xi + R_{-\infty}$, avec $R_{-\infty} \in S^{-\infty}$.

On commence par montrer un lemme :

<u>Lemme 4.4</u> : Soit $X \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que si $(1-r)(\|y\|^2) \neq 0$ et $X(\|x\|^2) \neq 0$ alors $\|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(x,\theta) - y\| \geq C$ avec $C > 0$, pour θ dans le support de $b(x,y,\theta,\lambda)$.
On a : $\|X(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})\, M_1 \circ (1-Q_x)\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \in O(|\lambda|^{-\infty})$.

Démonstration : Il suffit d'estimer le noyau de $X(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho}) M_1 \circ (1-Q_x)$. On a :

$$X(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho}) M_1 \circ (1-Q_x) u(x,\lambda) =$$

$$= (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)} \; b(x,y,\theta,\lambda) \; X(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})(1-r)$$
$$(\|y\|^2 \lambda_1^{2\rho}) \; u(y,\lambda) dy \, d\theta \; .$$

On introduit l'opérateur :

$$L(x,y,\theta,\partial_\theta) = \frac{1}{|\nabla_\theta(\varphi-y\cdot\theta)|^2} \sum_1^n (\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}(x,\theta)-y_i) \frac{\partial}{\partial\theta_i} \; .$$

On a $L(e^{i\lambda\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)}) = i\,\lambda\, e^{i\lambda(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)}$ et

$$^tL = -\frac{1}{|\nabla_\theta(\varphi-y\cdot\theta)|^2} \sum_1^n (\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}(x,\theta)-y_i) \frac{\partial}{\partial\theta_i} - \sum_1^n a_i(x,y,\theta)$$

où :

$$a_i(x,y,\theta) = \frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_i^2}(x,\theta)}{|\nabla_\theta(\varphi-y\cdot\theta)|^2} +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{2(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}(x,\theta)-y_i) \times \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}}{|\nabla_\theta(\varphi-y\cdot\theta)|^4}$$

sur le support de $X(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})(1-r)(\|y\|^2 \lambda_1^{2\rho})$ on a :

$|\nabla_\theta(\varphi-y\cdot\theta)| \geq C\,\lambda_1^{-\rho}$ et d'autre part $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \in O(|x|)$ car $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(0,\theta) = 0$.

Donc $|a_i| \leq C\,\lambda_1^{2\rho}$ sur le support de $X(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})(1-r)$ $(\|y\|^2 \lambda_1^{2\rho})$ et il est facile de voir que les dérivées en θ de $\dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}(x,\theta)-y_i}{|\nabla_\theta(\varphi-y\cdot\theta)|^2}$ sont toujours bornées par $\lambda_1^{2\rho}$ sur le support de l'amplitude. On peut donc intégrer par parties en θ à l'aide de l'opérateur ${}^tL$, ce qui montre que le noyau de $X(\|x\|^2\lambda_1^{2\rho})\, M_1\circ(1-Q_x)$ est dans $O(\lambda_1^{-\infty})$.

On peut alors suivre la preuve du lemme 4.1 pour démontrer le lemme. □

On démontre maintenant la proposition suivante :

Proposition 4.5 : On a :

$$T\circ M_1\circ\tilde{S}_1\, u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-y\cdot\xi)}\,\tilde{m}(x,z,\xi,\lambda)\, u(z,\lambda)\,dz\,d\xi$$

avec : $\forall N \geqq 1\ ,\ \tilde{m}(x,z,\xi,\lambda) = \sum_0^{N-1} m_n(z,\xi,\lambda) + m_N(x,z,\xi,\lambda)$ *et :*

$$m_n(z,\xi,\lambda) \in S^{o,(\rho-1/2)n}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$$

$$m_N(x,z,\lambda) \in S^{o,(\rho-1/2)N}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon\times\Omega_\varepsilon)\ .$$

Démonstration : On a :

$$M_1\circ\tilde{S}_1\, u(x,\lambda) =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^{2n}\int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)-i\lambda_1(y-z)\cdot\xi}\, b(x,y,\theta,\lambda)\,\tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)\, u(z,\lambda)\,dz\,d\xi\,d\theta\,dy\ .$$

Comme $\tilde{S}_1$ est proprement supporté, on peut inclure une troncature en z, $X(z)$ dans l'amplitude dans changer l'opérateur car le support en y de b est inclus dans un compact fixe.

On estime l'intégrale en (y,θ) par la phase stationnaire :

$$I_1 = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)-i\lambda_1 y\cdot\xi}\, b(x,y,\theta,\lambda)\,dy\,d\theta \ .$$

Rappellons que $\lambda = \lambda_1 + i\,\lambda_2$ et qu'on intègre sur un compact, on peut donc considérer λ_2 comme un paramètre supplémentaire variant dans un compact. Les points critiques sont $\begin{cases} y = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) \\ \theta = \xi \end{cases}$ et le développement de la phase stationnaire est asymptotiquement convergent car $b \in S^{o,o}_{o,o}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$. On a :

$$M_1 \circ \tilde{S}_1\, u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\,\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)}\, \tilde{b}(x,\xi,\lambda)\, X(z)\, \tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)u(z)\,dz\,d\xi$$

avec $\tilde{b} \in S^{o,o}_{o,o}(\Omega_\varepsilon)$ et $\tilde{b}$ est à support compact en ξ, modulo un terme dans $S^{-\infty}$.

$$T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1\, u(x,\lambda) =$$
$$= \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^{2n} \int e^{-i\lambda_1(x-y)\theta-i\lambda_1(\varphi(y,\xi)-z\cdot\xi)}\, t(x,\theta,\lambda)\tilde{b}(y,\xi,\lambda)\, X(z)\, \tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)\, u(z)\,dz\,d\xi\,dy\,d\theta \ .$$

On estime à nouveau l'intégrale en (y,θ) par la phase stationnaire. Les points critiques sont $\begin{cases} \theta = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) \\ y = x \end{cases}$

et le développement est convergent car $t \in S^{p,p/2}_{o,1/2}(\Omega_\varepsilon)$.

On va avoir besoin de la forme précise du développement de la phase stationnaire : Notons $X=(x,\xi)$, $Y=(y,\theta)$ et $(X,Y)\to(X,Z)$ est un changement de coordonnées donné par le lemme de Morse. On a :

$$\left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(x-y)\cdot\theta-i\lambda_1\varphi(y,\xi)}\, t(x,\theta,\lambda)\,\tilde{b}(y,\xi,\lambda)\,dy\,d\theta =$$

$$e^{-i\lambda_1\varphi(x,\xi)}\,\tilde{d}(x,\xi,\lambda)$$

avec $\tilde{d}(x,\xi,\lambda) = \sim \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_1^{-k}}{k!} R^k(X,Z,\partial_Z)\, d(X,Z,\lambda)\Big|_{Z=0}$

$d(X,Z,\lambda) = t(x,\theta,\lambda)\,\tilde{b}(y,\xi,\lambda)$, $R^k(X,Z,\partial_Z) = \frac{1}{2} < Q^{-1}(X)\partial_Z,\partial_Z >$

et $Q(X)$ est le hessien de $(x-y)\cdot\theta+\varphi(y,\xi)$ au point critique.

On a donc : $Q^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 0\ , & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1}\ , & -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,\xi) \end{pmatrix}$.

D'autre part $\frac{\partial Z}{\partial Y} = \mathbb{1} + K(X,Y)(Y-Y(X))$, où $Y(X)$ est le point critique, donc $\partial_Z = \partial_Y + (Y-Y(X))\,K(X,Y)\partial_Y$, et $< Q^{-1}(X)\partial_Z,\partial_Z > = < Q^{-1}(X)\partial_Y,\partial_Y > + P(X,Y,\partial_Y)$, où P est un polynôme de degré 2 en ∂_Y , dont les coefficients de $\partial^2 y$ s'annulent en $Y=Y(X)$.

Enfin $< Q^{-1}(X)\partial_Y,\partial_Y > = -2\,\partial_y\,\partial_\theta - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,\xi)\partial_{\theta^2}$.

Donc dans $< Q^{-1}(X)\partial_Z,\partial_Z >$, les termes de degré 2 en ∂_θ sont facteurs soit d'un terme qui s'annule quand $Z=0$, soit d'un terme du type $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ qui est dans $O(|\xi|)$. Il est alors facile de voir que :

$$(4.5)\qquad R^k(X,Z,\partial_Z)\, d(X,Z,\lambda)\Big|_{Z=0} = \sum_{0\leq\alpha\leq p} \lambda_1^{|\alpha|}\, \tilde{d}_k^\alpha(x,\xi,\lambda)$$

où $\tilde{d}_k^\alpha$ est borné sur un voisinage de 0 et $\tilde{d}_k^\alpha \in O(|\xi|)^{(2\alpha-k)_+}$, $\tilde{d}_k^\alpha \in S^{o,o}_{o,1/2}(\Omega_\varepsilon)$.

On utilise maintenant le lemme 4.6 démontré plus bas pour écrire :

$$\tilde{d}(x,\xi,\lambda) =$$

$$(4.6)\qquad = \tilde{d}(k(z,\xi),\xi,\lambda) + \sum_{n=1}^{N-1} < d_n(z,\xi,\lambda), (\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi)-z)^n > +$$

$$+ < d_N(x,z,\xi,\lambda), (\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi)-z)^N > .$$

Ici $d_n(z,\xi,\lambda)$ est égal à $P_n(x,\xi,\partial_x)\, \tilde{d}(x,\xi,\lambda)\big|_{x=k(z,\xi)}$ où P_n est un opérateur différentiel de degré n et $k(z,\xi)$ est la solution de $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) = z$.

On remarque que :

$$(4.7)\qquad d_n(z,\xi,\lambda) \in S^{p,p/2+n/2}_{o,1/2}(\Omega_\varepsilon) .$$

En effet la seule chose à estimer est les dérivées en ξ de d_n qui portent sur $k(z,\xi)$. On remarque alors que $\partial_\xi^\alpha k(z,\xi) \in O(|z|)$, et on en déduit (4.7) (voir appendice A.I.).

On peut donc écrire $T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1$ sous la forme : $T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1 = \sum_{n=0}^{N} \tilde{M}_n$, où $\tilde{M}_n$ est défini par :

$$\tilde{M}_n u(x,\lambda) =$$

$$(4.8) \quad = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)} < d_n(z,\xi,\lambda), \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi)-z\right)^n > \tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)X(z)u(z,\lambda)dzd\xi$$

pour $n \leqq N-1$, et pour $n=N$ on remplace l'amplitude par le dernier terme de la somme (4.6). On a :

$$e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(x,\xi)-z_i\right) =$$

$$= \frac{i}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial\xi_i} \left(e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)}\right) .$$

On peut donc intégrer n fois par parties en ξ dans (4.8), et on obtient

$$\tilde{M}_n u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)} m_n(z,\xi,\lambda)X(z)u(z,\lambda)dzd\xi$$

pour $n \leqq N-1$ et pour $n=N$, m_n dépend aussi de x.

Il reste à estimer m_n :

Pour $n=0$, $m_o(z,\xi,\lambda) = \tilde{d}(k(z,\xi),\xi,\lambda)\ \tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)$.

Pour $n \geqq 1$, m_n est la somme asymptotique des termes obtenus en remplaçant $\tilde{d}$ par les termes de (4.5).

Avec les notations de (4.5), on a :

$$\tilde{d}^\alpha_{k,n}(z,\xi,\lambda) = \lambda_1^{|\alpha|-k}\ e^\alpha_{k,n}(z,\xi,\lambda) \times \lambda_1^{n/2} ,$$

où $e^\alpha_{k,n} \in S^{o,o}_{o,1/2}(\Omega_\varepsilon)$, et $e^\alpha_{k,n} \in O(|\xi|)^{(2\alpha-k)_+}$.

Notons par abus de notation $\xi^2 = z_1\,\xi_1^2 + \dots + z_n\,\xi_n^2$.

$\partial_\xi^n \tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)$ est la somme asymptotique de termes de la forme suivante :

$$s(z,\xi,\lambda) = \frac{\lambda_1^{q_1+q_2/2-\gamma-\beta}\ \lambda_1^{\rho\gamma}\ a(z,\xi,\lambda)}{(m+\lambda\xi^2)^{p+q_1+q_2}}$$

avec : $a(z,\xi,\lambda) \in S^{o,o}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$, $a(z,\xi,\lambda) \in O(|\xi|^{2q_1-\beta-n})$, a est à support dans $\{\ \|\xi\| \geq \frac{1}{2}\lambda_1^{-\rho}\ \}$, et :

$$\begin{cases} (n+\beta)/2 \leq q_1 \leq n+\beta \\ \qquad\qquad q_2 \leq \beta \quad . \end{cases}$$

Donc m_n est la somme asymptotique de termes de la forme suivante :

$$e(z,\xi,\lambda) =$$

$$= \frac{\lambda_1^{-n/2}\ \lambda_1^{|\alpha|-k}\ \lambda_1^{q_1+q_2/2-\gamma-\beta+\rho\gamma} \times O(|\xi|)^{2q_1-\beta-n+(2\alpha-k)_+}}{(m+\lambda\xi^2)^{p+q_1+q_2}} \quad .$$

Si on pose $\tilde{\xi} = \lambda_1^{1/2}\xi$, on a :

$$|e(z,\xi,\lambda)| \leq \frac{C \times |\tilde{\xi}|^{2\alpha-k+2q_1-\beta-n} \times \lambda_1^{q_2/2}\ \lambda_1^{-|\beta|/2}}{(m+\tilde{\xi}^2)^{p+q_1+q_2}} \quad .$$

On a : $2\alpha-k+2q_1-\beta-n \leq 2p-n+2q_1 < 2p+2q_1+2q_2$.

Donc :

$$\sup_{\|\xi\| \geq 1/2\, \lambda_1^{-\rho}} |e(z,\xi,\lambda)| \leq C \lambda_1^{(1/2-\rho)(-n-2q_2)} \lambda_1^{q_2/2} \leq$$
$$\leq C \lambda_1^{(\rho-1/2)n} .$$

Donc $m_n(z,\xi,\lambda) \in S^{o,(\rho-1/2)n}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$.

En utilisant les mêmes estimations, on voit que modulo un terme dans $S^{o,(\rho-1/2)}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$, on peut remplacer $m_o(z,\xi,\lambda)$ par

$$t(k(z,\xi), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(k(z,\xi),\xi),\lambda)\ \tilde{b}(k(z,\xi),\xi,\lambda) \times s_1(z,\xi,\lambda) .$$

On a donc démontré la proposition. □

On montre maintenant une proposition analogue pour $T \circ M_1 \circ \tilde{S}_2$.

<u>*Proposition 4.6*</u> *: On a :*

$$T \circ (1-X)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})\, M_1 \circ \tilde{S}_2 u(x,\lambda) =$$
$$= (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)}\ \tilde{m}(x,z,\xi,\lambda)\ u(z,\lambda)\ dz\ d\xi$$

avec : $\forall N \geq 1$, $\tilde{m}(x,z,\xi,\lambda) = \sum_{0}^{N-1} m_n(z,\xi,\lambda) + m_N(x,z,\xi,\lambda)$ *et :*

- $m_n(z,\xi,\lambda) \in S^{o,(\rho-1/2)n}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$
- $m_N(x,z,\xi,\lambda) \in S^{o,(\rho-1/2)N}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$.

<u>Démonstration</u> : On a :

$$M_1 \circ \tilde{S}_2 u(x,\lambda) =$$
$$= (\frac{\lambda_1}{2\pi})^{2n} \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-y\cdot\theta)-i\lambda_1(y-z)\xi}\ b(x,y,\theta,\lambda)\ \tilde{s}_1(z,\xi,\lambda)$$
$$u(z,\lambda)\,dz\ d\xi\ d\theta\ dy.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 4.5, on peut éliminer les variables (y,θ) par la phase stationnaire, et on a :

$$M_1 \circ \tilde{S}_2 u(x,\lambda) =$$
$$= (\frac{\lambda_1}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)} \tilde{b}(x,\xi,\lambda)\, X_1(z)\, \tilde{s}_2(z,\xi,\lambda)\, u(z)\, dz\, d\xi$$

avec $\tilde{b}(x,\xi,\lambda) \in S^{o,o}_{o,o}(\Omega_\varepsilon)$ et $\tilde{b}(x,\xi,\lambda)$ est à support compact en ξ modulo un terme dans $S^{-\infty}$. Puis on a :

$$T \circ (1-X)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})\, M_1 \circ \tilde{S}_2 u(x,\lambda) =$$
$$= (\frac{\lambda_1}{2\pi})^{2n} \int e^{-i\lambda_1(x-y)\cdot\theta - i\lambda_1(\varphi(y,\xi)-z\cdot\xi)} t(x,\theta,\lambda)(1-X)$$
$$(\|y\|^2 \lambda_1^{2\rho})\, \tilde{b}(y,\xi,\lambda)\, \tilde{s}_2(z,\xi,\lambda)\, X_1(z)\, u(z)\, dz\, d\xi\, dy\, d\theta\ .$$

On estime à nouveau l'intégrale en (y,θ) par la phase stationnaire : les points critiques sont $\begin{cases} \theta = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) \\ y = x \end{cases}$

et le développement est convergent car $(1-X)(\|y\|^2 \lambda_1^{2\rho}) \in S^{o,o}_{o,\rho}(\Omega_\varepsilon)$.

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 4.5, on obtient avec les mêmes notations :

$$(4.5') \quad R^k(X,Z,\partial_Z)d(X,Z,\lambda)\Big|_{Z=0} \sum_{\substack{0\leq|\alpha|\leq p \\ k_1+k_2=k}} \lambda_1^{|\alpha|}\, \lambda_1^{k_1\rho}\, \tilde{d}^{\alpha}_{k_2}(x,\xi,\lambda)$$

où $\tilde{d}^{\alpha}_{k_2} \in S^{o,o}_{o,\rho}(\Omega_\varepsilon)$ et $\tilde{d}^{\alpha}_{k_2} \in O(|\xi|^{(2\alpha-k_2)_+})$.

On peut maintenant écrire $\tilde{d}$ sous la forme (4.6), avec $d_n(z,\xi,\lambda) \in S^{p,p/2+\rho n}_{o,\rho}(\Omega_\varepsilon)$. Ici, on ne perd que des puissances de λ_1^ρ en dérivant à cause de la troncature $(1-X)(\|y\|^2 \lambda_1^{2\rho})$.

Il reste à estimer les amplitudes $m_n(z,\xi,\lambda)$:

Pour $n = 0$, $m_o(z,\xi,\lambda) = \tilde{d}(k(z,\xi),\xi,\lambda)\, \tilde{s}_2(z,\xi,\lambda)$

Pour $n \geqq 1$, m_n est la somme asymptotique des termes obtenus en remplaçant $\tilde{d}$ par les termes de (4.5').

Avec les notations de (4.6), on a :

$\tilde{d}^\alpha_{k,n}(z,\xi,\lambda) = \lambda_1^{|\alpha|-k+\rho k_1} e^\alpha_{k,n}(z,\xi,\lambda)\lambda_1^{\rho n}$, où $e^\alpha_{k,n} \in S^{o,o}_{o,\rho}(\Omega_\varepsilon)$ et $e^\alpha_{k,n} \in O(|\xi|^{(2\alpha-k_2)_+})$ avec $k_1+k_2=k$.

Comme auparavant, $\partial^n_\xi \tilde{s}_2(z,\xi,\lambda)$ est la somme asymptotique de termes de la forme suivante :

$$s(z,\xi,\lambda) = \frac{\lambda_1^{q_1+q_2\rho-\beta}\, a(z,\xi,\lambda)}{(m+\lambda_1\,\xi^2)^{p+q_1+q_2}}$$

avec : $a(z,\xi,\lambda) \in S^{o,o}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$, $a(z,\xi,\lambda) \in O(|\xi|^{2q_1-\beta-n})$

et $(n+\beta)/2 \leqq q_1 \leqq n+\beta$

$q_2 \leqq \beta$.

Donc m_n est la somme asymptotique de termes de la forme suivante :

$$e(z,\xi,\lambda) = \frac{\lambda_1^{(\rho-1)n}\, \lambda_1^{|\alpha|-k+\rho k_1}\, \lambda_1^{q_1+\rho q_2-\beta}\, O(|\xi|)^{2q_1-\beta-n+(2\alpha-k_2)_+}}{(m+\lambda_1\,\xi^2)^{p+q_1+q_2}} .$$

Si on pose $\tilde{\xi} = \lambda_1^{1/2}\,\xi$, on a :

$$|e(z,\xi,\lambda)| \leq$$

$$\leq \frac{C_1\,|\tilde{\xi}|^{2\alpha-k_2+2q_1-\beta-n} \times \lambda_1^{(\rho-1/2)n} \times \lambda_1^{(\rho-1)k_1-k_2/2}\,\lambda_1^{\rho q_2-\beta/2}}{(m+\tilde{\xi}^2)^{p+q_1+q_2}} .$$

On a : $2\alpha - k_2 + 2q_1 - \beta - n \leq 2p + 2q_1 - n < 2p + 2q_1 + 2q_2$.

Donc :

$$\sup_{|\xi|\leq C} e(z,\xi,\lambda) \leq C_2\,\lambda_1^{(\rho-1/2)n} \times \lambda^{\rho q_2-\beta/2} \leq C_2\,\lambda_1^{(\rho-1/2)n}$$

car $q_2 \leq \beta$ et $\rho < 1/2$.

Donc $m_n(z,\xi,\lambda) \in S^{o,(\rho-1/2)n}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$.

En utilisant les mêmes estimations, on voit que modulo un terme dans $S^{o,\rho-1/2}_{1/2,\rho}(\Omega_\varepsilon)$, on peut remplacer $m_o(z,\xi,\lambda)$ par :

$$t(k(z,\xi),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\ (k(z,\xi),\xi),\lambda)\ \tilde{b}(k(z,\xi),\xi,\lambda) \times s_2(z,\xi,\lambda) .$$

On a donc démontré la proposition. □

<u>*Lemme 4.7*</u> : *Soit $a(x,\xi,\lambda)$ une fonction C^∞ de (x,ξ) définie au voisinage de $(0,0)$, $\forall N \geq 1$, on a :*

$$a(x,\xi,\lambda) =$$

$$= a(k(z,\xi),\xi,\lambda) + \sum_1^{N-1} \langle P_n(x,\xi,\partial_x)\,a(k(z,\xi),\xi,\lambda), (\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\ (x,\xi)-z)^n \rangle$$

$$+ \langle (\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\ (x,\xi)-z)^N,\ Q_N(x,z,\xi,\lambda) \rangle .$$

Avec : $k(z,\xi)$ est la solution de $\frac{\partial\xi}{\partial x}(x,\xi) = z$, et $P_n(x,\xi,\partial_x)$ est un opérateur différentiel de degré n.

<u>Démonstration</u> : On considère le changement de coordonnées $(x,\xi) \to (\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi),\xi) = (\tilde{x},\xi)$. C'est un difféomorphisme local car $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) = A^{-1}x + O(x^2,\xi^2)$.

Si on pose $a(x,\xi,\lambda) = \tilde{a}(\tilde{x},\xi,\lambda)$ la formule de Taylor appliquée à $\tilde{a}$ donne :

$$\tilde{a}(\tilde{x},\xi,\lambda) =$$

$$= \tilde{a}(z,\xi,\lambda) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} < D_{\tilde{x}}^n \tilde{a}(z,\xi,\lambda),(\tilde{x}-z)^n > + (\tilde{x}-z)^N \times$$

$$\times\ \tilde{a}_N(\tilde{x},z,\xi,\lambda) \ .$$

Enfin on a $\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} = c(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x}$, donc $D_{\tilde{x}}^n \tilde{a}$ est égal à $P_n(x,\xi,\partial_x)a$ où P_n est un opérateur différentiel de degré n.

On a donc démontré le lemme. □

On peut maintenant estimer $M_1 \circ (1-Q)$ et $M_o \circ (1-Q)$.

<u>*Théorème 4.8 :*</u>

Pour $i = 0,1$ on a pour $|\lambda|$ assez grand :

$$\begin{cases} |M_i(1-Q_\xi)|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n)(k_o')^{-p} \\ |M_i(1-Q_x)Q_\xi|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n)(k_o')^{-p} \\ |M_o(1-Q_x)|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n)(k_o')^{-p} \ . \end{cases}$$

avec $k_o' > 1$.

Démonstration : On a : $M_1 \circ (1-Q) = M_1 \circ (1-Q_\xi) + M_1 \circ (1-Q_x)Q_\xi$.
Commençons par estimer $M_1 \circ (1-Q_\xi)$.
On a vu que : $\tilde{S}_1 \circ T = 1-Q_\xi + R_{-\infty}$.
Donc $M_1 \circ (1-Q_\xi) = M_1 \circ \tilde{S}_1 \circ T + M_{-\infty}$.
On remarque tout de suite que $\|M_{-\infty}\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C_N(p)|\lambda_1|^{-N}$, $\forall N \geq 0$. En effet il suffit de vérifier d'après le lemme 4.1 que $\|R_{-\infty}\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \in O(\lambda^{-\infty})$, ce qui est facile.
Il reste donc à estimer $M_1 \circ \tilde{S}_1 \circ T$:
Soit $u \in H^p$ et posons $v=Tu$. On a : $T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1 \circ Tu = T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1 v$, et il faut donc estimer :

$$\|T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))} .$$

On utilise maintenant la Proposition 4.4 :

$$T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1 = \sum_0^N \tilde{M}_n \qquad \text{où :}$$

$$\tilde{M}_n u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)} m_n(z,\xi,\lambda)u(z,\lambda)dz\,d\xi$$

pour $n \leq N-1$, et M_n est une intégrale du même type avec une amplitude $m_n(x,z,\xi,\lambda)$.
Comme $m_N \in S^{o,(\rho-1/2)N}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$, on peut prendre N assez grand pour que le noyau $K_N(x,z,\lambda)$ associé à M_N vérifie :

$$\sup_{(x,z)\in\Omega_\varepsilon\times\Omega_\varepsilon} |K_N(x,z,\lambda)| \leq C\,|\lambda_1|^{-1} ,$$

ce qui entraîne que

$$\|M_N\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq C\ |\lambda_1|^{-1} .$$

Pour $1 \leq n \leq N-1$, on peut écrire $\tilde{M}_n$ sous la forme $U \circ T_n$, avec :

$$Uu(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(\varphi(x,\xi)-z\cdot\xi)} u(z,\lambda)dz\, d\xi$$

$$T_n u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(x-z)\cdot\xi} m_n(z,\xi,\lambda)u(z,\lambda)dzd\xi .$$

D'après l'appendice A.1,

$$\begin{cases} \|U\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq C \\ \|T_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq C_n(p)\,|\lambda_1|^{(\rho-1/2)n} \end{cases}$$

car $m_n \in S^{o,(\rho-1/2)n}_{\rho,1/2}(\Omega_\varepsilon)$.

Il reste donc à estimer $\tilde{M}_o$, c'est-à-dire :

$$T_o u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda_1(x-z)\cdot\xi} m_o(z,\xi,\lambda)\, u(z,\lambda)dz\, d\xi .$$

Grâce à la remarque de la fin de la démonstration de la Proposition 4.5, on peut remplacer m_o par :

$$t(k(z,\xi),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(k(z,\xi),\xi),\lambda)\ \tilde{b}(k(z,\xi),\xi,\lambda)\ s_1(z,\xi,\lambda) .$$

D'après la Proposition A.I.6, pour estimer $\|T_o\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))}$, il suffit de majorer son symbole.

$\tilde{b}(k(z,\xi),\xi,\lambda)$ est majoré par une constante indépendante de p. Il suffit donc de majorer

$$\tilde{m}_o = t(k(z,\xi),\frac{\partial\varphi}{\partial x}(k(z,\xi),\xi),\lambda)\ s_1(z,\xi,\lambda) =$$

$$= \frac{(m(k(z,\xi),\lambda)+\lambda_1 < \frac{\partial\varphi}{\partial x}(k(z,\xi),\xi) >^2)^p \times (1-r)(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho})}{(m(z,\lambda) + \lambda_1 < \xi >^2)^p}$$

où on a posé $< \xi >^2 = \sum_1^n z_i\, \xi_i^2$.

Rappellons que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) = {}^t A^{-1}\xi + O(x^2,\xi^2)$, donc si (x,ξ) est proche de $(0,0)$, on a : $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi)\right\| \leqq k_o^{-1}\|\xi\|$, où $k_o > 1$, et k_o est inférieur à la plus petite valeur propre de A.

Sur le support de $(1-r)(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho})$, on a :

$$\|\xi\| \geqq \frac{1}{2}\lambda_1^{-\rho} \quad , \quad \text{et} \quad \lambda_1^{1/2}\|\xi\| \geqq \frac{1}{2}\lambda_1^{1/2-\rho} .$$

D'autre part, $|m(z,\lambda)| \leqq 1$, donc on a :

$|\tilde{m}_o(z,\xi,\lambda)| \leqq C(n)(k_o')^{-p}$ pour λ_1 assez grand où $1<k_o'<k_o$.

Donc : $\|T \circ M_1 \circ \tilde{S}_1\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),L^2(\Omega_\varepsilon))} \leqq C(n)(k_o')^{-p}$ pour λ_1 assez grand.

Estimons maintenant $M_1 \circ (1-Q_x)Q_\xi$.

Grâce au lemme 4.4, on peut remplacer $M_1 \circ (1-Q_x)Q_\xi$ par $(1-X)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho})M_1 \circ (1-Q_x)Q_\xi$, modulo une erreur de norme dans $O(\lambda_1^{-\infty})$. Comme plus haut, il suffit d'estimer :

$$\| T \circ (1-X)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho}) M_1 \circ \tilde{S}_2 \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), L^2(\Omega_\varepsilon))},$$

et modulo des termes de norme $\lambda_1^{(\rho-1/2)}$, on est ramené à majorer le symbole suivant :

$$\tilde{n}_o(z,\xi,\lambda) =$$

$$= \frac{(m(k(z,\xi),\lambda)+\lambda_1 < \frac{\partial \varphi}{\partial x}(k(z,\xi),\xi)>^2)^p (1-r)(\|z\|^2 \lambda_1^{2\rho}) r(\|\xi\|^2 \lambda_1^{2\rho})}{(m(z,\lambda) + \lambda_1 < \xi >^2)^p}.$$

Comme plus haut, on a $< \frac{\partial \varphi}{\partial x}(k(z,\xi),\xi) >^2 \leq k_o^{-1} < \xi >^2$, et il est facile de vérifier que :

$$\sup_\xi \tilde{n}_o(z,\xi,\lambda) = \left(\frac{m(k(z,\xi),\lambda)}{m(z,\lambda)} \right)^p .$$

Rappellons que $k(z,\xi)$ est la solution de $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x,\xi) = z$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(x,\xi) = A^{-1}x + O(x^2,\xi^2)$, donc pour (z,ξ) proche de $(0,0)$, on a $\|k(z,\xi)\| \geq k_o \|z\|$ où $k_o > 1$ et k_o est inférieur à la plus petite valeur propre de A.
Enfin sur le support de $(1-r)(\|z\|^2 \lambda_1^{2\rho})$, on a :

$$\lambda_1^{1/2} \|z\| \geq 1/2\, \lambda_1^{1/2-\rho} \quad , \quad \text{donc} \quad \frac{m(k(z,\xi),\lambda)}{m(z,\lambda)} \leq \left(\frac{1}{k_o}\right)^2$$

et $|\tilde{n}_o(z,\xi,\lambda)| \leq 2\,(k_o)^{-p}$.

Donc : $\| T \circ (1-X)(\|x\|^2 \lambda_1^{2\rho}) M_1 \circ \tilde{S}_2 \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq$ $C(n)\, k_o^{-p}$ pour λ_1 assez grand.

Finalement si λ_1 est assez grand, on a :

$$|M_1(1-Q_\xi)|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n)(k'_o)^{-p}$$

$$|M_1(1-Q_x)Q_\xi|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n)(k'_o)^{-p} \quad .$$

Le cas de M_o se traite de la même façon. □

4.4. Estimation de $M_1 \circ (1-Q)$ et $M_o \circ (1-Q)$ dans le cas où A n'est pas diagonalisable.

Dans ce cas, on remplace les opérateurs T_j par les $\tilde{T}_j$ définis en 4.2.

Les propositions 4.5 et 4.6 s'étendent sans difficulté. Pour démontrer l'analogue du théorème 4.8 on utilise les estimations sur les normes $||\xi||_1^2$ et $||x||_2^2$ démontrées dans le §.3.3.
On a donc les estimations du théorème 4.8 dans le cas où A n'est pas diagonalisable.

4.5. Résolution du problème de Grushin pour M_1.

On va maintenant inverser le problème de Grushin (4.1).

On commence par montrer un lemme qui montre comment E_o agit sur l'ensemble de fréquence.

Lemme 4.9 : Soit $w \in H^p$ tel que $Q_{\alpha,\xi}\, w = w$. Alors on a :

$$Q_{\alpha,\xi}\, E_o\, w = E_o\, w \; .$$

Démonstration : On commence par écrire :

$$w(x) = \sum_{|\beta|<N} D_x^\beta w(0) \frac{x^\beta}{\beta!} + w_N(x) .$$

On a $Q_{\alpha,\xi} w = w$, $Q_{\alpha,\xi}(x^\beta) = x^\beta$, donc

$$Q_{\alpha,\xi} w_N = w_N . \tag{4.9}$$

Puis on a $r = \sum_{p=0}^{\infty} (z M_o)^p w_N$ et on vérifie facilement que :

$$\widehat{M_o^p w_N}(\xi) = b_o^p |\det A|^p \hat{w}_N({}^t A^p \xi) .$$

Comme le support de $\hat{w}_N(\xi)$ est inclus dans : $\|\xi\| \leq \alpha_o \alpha |\lambda_1|^{-p}$, d'après (4.9), on a : $Q_{\alpha,\xi} r = r$.

Enfin $E_o w$ est la somme de r et d'un polynôme, donc $Q_{\alpha,\xi} E_o w = E_o w$. □

<u>*Proposition 4.10*</u> *: Notons $R = z(M_1 - M_o)$. Pour p et $|\lambda|$ assez grands, $z \in V$ on a :*

$$\| E_o R Q_{\alpha,\xi} \|_{\mathcal{L}(H^p, H^p)} \leq C(n)(k_o')^{-p} \quad \text{où} \quad k_o' > 1 .$$

<u>Démonstration</u> : On a :

$$E_o R Q_{\alpha,\xi} = E_o z(M_1 - M_o) Q_{\alpha,\xi} =$$

$$= E_o z(M_1 - M_o) Q_{\alpha,x} Q_{\alpha,\xi} + E_o z(M_1 - M_o)(1 - Q_{\alpha,x}) Q_{\alpha,\xi}$$

$$= E_o z(M_1 - M_o) Q_{\alpha,x} Q_{\alpha,\xi} + E_o z M_1 (1 - Q_{\alpha,x}) Q_{\alpha,\xi}$$

$$+ E_o z M_o (1 - Q_{\alpha,x}) Q_{\alpha,\xi}$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 .$$

D'après la proposition 4.2 on a :

$$\|A_1\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leqq C(p,\alpha)\lambda_1^{-\varepsilon_0} \quad \text{pour} \quad \lambda \in D .$$

Il reste donc à estimer A_2 et A_3.

Estimons A_2, A_3 s'estimant de la même façon.

D'après le théorème 4.8 on a :

$$\| z\, M_1(1-Q_{\alpha,x})Q_{\alpha,\xi}\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leqq C(n)k_0'^{-p}$$

et d'après le lemme 4.4 on a :

$$(4.10) \quad \|Q_{\tilde{\alpha},x}\, M_1(1-Q_{\alpha,x})Q_{\alpha,\xi}\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leqq C_M|\lambda_1|^{-M}, \ \forall M \geqq 0$$

avec $\tilde{\alpha} = k\,\alpha_0\,\alpha$, $k > 1$.

Posons $w = M_1(1-Q_{\alpha,x})Q_{\alpha,\xi}\,u$. A cause de (4.10) on a :

$$|D_x^\alpha w(0)| \leqq K_M|\lambda|^{-M} \quad \forall M \geqq 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| < N$$

et si $\quad w_N(x) = w(x) - \sum\limits_{|\alpha|<N} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D_x^\alpha w(0)$, on a :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} &|Q_{\tilde{\alpha},x}\, w_N|_{H^p} \leqq K_M\, |\lambda|^{-M}\, |u|_{H^p} \\ &\Big|\sum_{\substack{\beta \notin J \\ |\beta|<N}} (1-z\,K_\beta)^{-1} \frac{x^\beta}{\beta!} D_x^\beta w(0)\Big|_{H^p} \leqq K_M\, |\lambda|^{-M}\, |u|_{H^p} . \end{aligned}$$

Il reste à estimer : $(1-z\,M_0)^{-1}\, w_N = (1-z\,M_0)^{-1}\, Q_{\tilde{\alpha},x}\, w_N\, +$ $(1-z\,M_0)^{-1}(1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N$, les deux termes étant définis car $Q_{\tilde{\alpha},x}\,w_N$ et $(1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N$ s'annulent à l'ordre N en $x=0$.

D'après (4.11) et le lemme 4.3 on a :

$$(4.12) \qquad |(1-z\,M_o)^{-1}\,Q_{\tilde{\alpha},x}\,w_N|_{H^p} \leq C_M(p)\,|\lambda|^{-M}\,|u|_{H^p}\ .$$

Il reste donc à estimer $(1-z\,M_o)^{-1}\,(1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N$.

On cherche donc $v \in H^p$ tel que :

$$(4.13) \qquad v - z\,M_o v = (1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N\ .$$

Pour cela, on prend v solution de : $v - z\,M_o(1-Q_{\alpha_1,x})v =$ $(1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N$. v existe pour p assez grand, d'après le théorème 4.8.

On a :

$$(4.14) \qquad |v|_{H^p} \leq 2|w_N|_{H^p} \leq 2C(n)k_o'^{-p}|u|_{H^p}.$$

Il suffit de vérifier que l'on peut prendre α_1 tel que : $Q_{\alpha_1,x}v = 0$. On a :

$$Q_{\alpha_1,x}v = Q_{\alpha_1,x}(1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N +$$
$$+\ Q_{\alpha_1,x}\,z\,M_o(1-Q_{\alpha_1,x})(1-z\,M_o(1-Q_{\alpha_1,x}))^{-1}\,(1-Q_{\tilde{\alpha},x})w_N\ .$$

$Q_{\alpha_1,x}v = 0$ si $\alpha_1 < \tilde{\alpha}\,\alpha_o$, et si α_o est assez grand pour que $c\,\alpha_o > 1$. Donc v est bien solution de (4.13).

D'après (4.11), (4.12), (4.14), on a :

$$||A_2||_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n,\alpha)k_o'^{-p} \quad \text{pour } |\lambda| \text{ assez grand.}$$

On a la même estimation pour A_3, ce qui démontre la proposition. □

On peut maintenant démontrer le théorème suivant :

<u>*Théorème 4.11*</u> *: On peut résoudre dans H^p pour p et $|\lambda|$ assez grands, $z \in V$ le problème de Grushin :*

$$(4.1) \qquad \begin{cases} u - z\, M_1\, u = R_o^+ c + f \\ R_o^- u = d \end{cases}$$

avec : $|u|_{H^p} + |c|_{\mathbb{C}^a} \leq C(p)(|f|_{H^p} + |d|_{\mathbb{C}^a})$ pour $\lambda \in D$, $z \in V$.

On notera $\begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} = \mathcal{E}_1 \begin{pmatrix} f \\ d \end{pmatrix}$ la solution de (4.1).

D'après le théorème 4.8 on a :

$$\|M_1(1-Q_\xi)\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq C(n) k_o'^{-p} .$$

On peut donc prendre p assez grand pour que :

$$\| M_1 \ z(1-Q_\xi)\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq 1/2 \ , \ \forall \lambda \in D .$$

On peut donc pour $f \in H^p$, trouver $\tilde{u} \in H^p$ unique tel que :

$$\tilde{u} - z\, M_1(1-Q_\xi)\tilde{u} = f .$$

Pour résoudre (4.1), il suffit donc de résoudre :

$$(4.1') \qquad \begin{cases} v - z\, M_1 v = R_o^+ c + \tilde{f} \\ R_o^+ v = \tilde{d} \end{cases}$$

où : $\tilde{d} = d - R_o^+ \tilde{u}$, $\tilde{f} = -z\, M_1\, Q_\xi\, \tilde{u}$, et de poser $u = v + \tilde{u}$.

D'après la théorie de Fredholm de A.III.3, il suffit pour résoudre (4.1') de savoir calculer $(1-E_oR)^{-1}E_o\tilde{f}$ et $(1-E_oR)^{-1}E_o^+\tilde{d}$. Il est facile de démontrer en suivant la preuve du lemme 4.4 que :

$$\|(1-Q_{\alpha,\xi})M_1 \; Q_\xi\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq K_M|\lambda|^{-M} \quad \forall\, M \geq 0 \quad \text{si} \quad \alpha > \frac{1}{C}\alpha_o \, .$$

On a donc :

$$(4.15) \qquad |Q_{\alpha,\xi}\tilde{f}-\tilde{f}|_{H^p} \leq K_M|\lambda|^{-M}\,|f|_{H^p} \, .$$

On peut donc remplacer dans (4.1') $\tilde{f}$ par $\tilde{g} = Q_{\alpha,\xi}\tilde{f}$. D'autre part, il est clair que $Q_{\alpha,\xi}\,E_o^+\tilde{d} = E_o^+\tilde{d}$, car $E_o^+\tilde{d}$ est un polynôme. Il suffit donc de savoir calculer $(1-E_oR)^{-1}\,Q_{\alpha,\xi}h$, pour $h \in H^p$.
On prend $\tilde{u}$ solution de :

$$(4.16) \qquad \tilde{u} - E_oR\,Q_{\tilde{\alpha},\xi}\tilde{u} = Q_{\alpha,\xi}h \, .$$

$\tilde{u}$ existe d'après la proposition 4.9, si p est assez grand, et on a :

$$|\tilde{u}|_{H^p} \leq 2\,|h|_{H^p} \, .$$

Il reste à estimer :

$$(1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})\tilde{u} = (1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})Q_{\alpha,\xi}h +$$

$$+ (1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})E_oR\,Q_{\tilde{\alpha},\xi}(1-z\,E_oR\,Q_{\tilde{\alpha},\xi})^{-1}\,Q_{\alpha,\xi}h = (1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})Q_{\alpha,\xi}h$$

$$+ (1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})E_oR\,Q_{\tilde{\alpha},\xi}\,\tilde{u} \, .$$

Si $\alpha_1 \geqq \frac{\tilde{\alpha}}{k\alpha_o}$ où $k > 1$ est plus petit que la plus petite valeur propre de A, on a :

$$\|(1-Q_{\alpha_1,\xi})R\,Q_{\tilde{\alpha},\xi}\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq K_M\,|\lambda|^{-M} \quad \forall M \geqq 0$$

car cette estimation est vraie pour M_1 et M_o.

$(1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})E_o\,R\,Q_{\tilde{\alpha},\xi} = (1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})E_o\,Q_{\alpha_1,\xi}\,R\,Q_{\tilde{\alpha},\xi} + R_2$ avec :

$$\|R_2\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq K_M\,|\lambda|^{-M}\;.$$

En utilisant le lemme 4.9 on a : $(1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})E_o\,Q_{\alpha_1,\xi} = 0$ si $\alpha_1 \leqq \tilde{\alpha}\,\alpha_o$. Si α_o est assez proche de 1 pour que $\frac{1}{k\,\alpha_o^2} \leqq 1$, les deux conditions $\alpha_1 \geqq \frac{\tilde{\alpha}}{k\,\alpha_o}$ et $\alpha_1 \leqq \tilde{\alpha}\,\alpha_o$ sont compatibles. On a donc :

$$|(1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})E_o\,R\,Q_{\tilde{\alpha},\xi}\tilde{u}|_{H^p} \leq K_M\,|\lambda|^{-M}\,|\tilde{u}|_{H^p}\;.$$

Il reste à prendre $\tilde{\alpha} > \alpha\,\alpha_o^{-1}$ pour que $(1-Q_{\tilde{\alpha},\xi})Q_{\alpha,\xi}h=0$. Donc : $\tilde{u} - E_o\,R\,\tilde{u} = Q_{\alpha,\xi}h + R_3\,Q_{\alpha,\xi}h$ avec : $\|R_3\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq K_M|\lambda|^{-M}$ et on peut trouver $u \in H^p$ tel que :

$$(4.17)\qquad u - E_o\,R\,u = Q_{\alpha,\xi}h \quad \text{avec} \quad |u|_{H^p} \leq 3|h|_{H^p}\;.$$

En appliquant (4.17) à $h = \tilde{f}$ et $h = E_o^+\tilde{d}$, on voit qu'on peut obtenir :

$$\begin{cases} u_1 = (1-E_o\,R)^{-1}\,E_o\,Q_{\alpha,\xi}\,\tilde{f} \\ u_2 = (1-E_o\,R)^{-1}\,E_o^+\,d\;, \end{cases}$$

avec :
$$|u_1|_{H^p} \leqq C(p)\,|\tilde{f}|_{H^p}$$
$$|u_2|_{H^p} \leqq C(p)\,|d|_{\mathbb{C}^a} .$$

D'après la théorie de Fredholm, on a donc résolu (4.1') modulo une erreur de norme $O(|\lambda|^{-\infty})$, d'après (4.15). Il suffit d'appliquer une série de Neumann qui converge pour $|\lambda|$ assez grand pour résoudre (4.1'). On a donc démontré le théorème. □

On montre maintenant que (4.1) a une solution unique.

<u>*Proposition 4.12*</u> *: Soient* $u \in H^p$, $c \in \mathbb{C}^a$, *tels que :*

$$(4.18) \qquad \begin{cases} u - z\, M_1\, u = R_0^+\, c \\ R_0^-\, u = 0 \end{cases}$$

alors $u = c = 0$.

<u>Démonstration</u> : D'après l'appendice A.III.3, on a si (u,c) vérifie (4.18) :

$$(4.19) \qquad \begin{cases} u - E_0\, Ru = 0 \\ c = E_0^-\, Ru . \end{cases}$$

Si on applique $(1-Q_{\alpha,\xi})$ à la 1ère équation de (4.18) on a :

$$(1-Q_{\alpha,\xi})u = z(1-Q_{\alpha,\xi})M_1 u$$

on a : $(1-Q_{\alpha,\xi})M_1 u = (1-Q_{\alpha,\xi})M_1 \times (1-Q_{\alpha,\xi})u + R_\infty u$ où

$$\|R_\infty\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq K_N \, |\lambda|^{-N} \quad \forall\, N \geq 0 \, .$$

En répétant cette estimation un nombre fini de fois on a : $\forall\, \varepsilon > 0$, pour $|\lambda| \geq C_\varepsilon$ $|(1-Q_{\alpha,\xi})u|_{H^p} \leq \varepsilon\, |u|_{H^p}$, d'après le théorème 4.8.

Or $u = E_0 Ru = E_0 R(1-Q_{\alpha,\xi})u + E_0 R\, Q_{\alpha,\xi}\, u$.

En utilisant la proposition 4.10, on voit, en prenant ε assez petit pour que $\|E_0 R\|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \leq \frac{1}{4\varepsilon}$, que : $|u|_{H^p} \leq \frac{1}{2}\, |u|_{H^p}$ pour p assez grand. Donc $u=0$ et $c=0$ à cause de la 2ème équation de (4.19). $\square$

Corollaire 4.13 : L'opérateur $\mathscr{E}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} E_1(\lambda) & E_1^+(\lambda) \\ E_1^-(\lambda) & E_{+-}^1(\lambda) \end{pmatrix}$ *qui inverse le problème de Grushin (4.1) est holomorphe en* λ *pour* $\lambda \in D$ *,* λ *assez grand.*

Proposition 4.14 : Si $\underset{\sim}{WF} f \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$ *, on a* $\underset{\sim}{WF}\, u \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$ *, si* u *est la solution de (4.1).*

Démonstration : Rappellons que M_1 est un opérateur intégral de Fourier au sens de A.I. associé à la transformation canonique χ qui a pour variété stable entrante $\{x=0\}$. La série $\tilde{u} = \sum_{j=0}^{\infty} (M_1\, z(1-Q_\xi))^j f$ converge dans H^p, et à cause de l'action de M_1 sur l'ensemble de fréquence, chaque terme a son ensemble de fréquence dans $\{|\xi| \leq \varepsilon\}$, donc $\tilde{u}$ a son ensemble de fréquence dans $\{|\xi| \leq \varepsilon\}$. Il reste donc à vérifier que $\underset{\sim}{WF}\, v \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$ où $v = (1-E_o R)^{-1} E_o \tilde{f} + (1-E_o R)^{-1} E_o^+ \tilde{d}$ avec les notations du théorème 4.11.

On a $\underset{\sim}{WF}\, \tilde{f} \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, donc d'après le lemme 4.9, $\underset{\sim}{WF}(E_o \tilde{f}) \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, et $\underset{\sim}{WF}(E_o^+ \tilde{d}) \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, car $E_o^+ \tilde{d}$ est un polynôme.

Enfin si $\underset{\sim}{WF}\, v \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, alors $\underset{\sim}{WF}(E_o Rv) \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, en utilisant le lemme 4.9, et le fait que $R = z(M_1 - M_o)$ agit sur l'ensemble de fréquence comme M_1.

Donc $\underset{\sim}{WF}((1-E_o R)^{-1} E_o f)$ et $\underset{\sim}{WF}((1-E_o R)^{-1} E_o^+ \tilde{d})$ sont inclus dans $\{|\xi| \leq \varepsilon\}$, et on a démontré la proposition.$\square$

5. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE GRUSHIN POUR M.

On pose $\mathcal{H} = L^2(\Gamma_1)$.

Rappellons que dans la section 2, on a introduit des opérateurs de troncature $K_1, K_1' \in L^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1)$, $K_2 \in L^{o,o}_{o,o}(\Gamma_2)$, et on a construit une approximation asymptotique H de $K_1' H_2 K_2 H_1 K_1$, étudiée dans la section 4.

On a $M = H_2 H_1 = K_1' H_2 K_2 H_1 K_1 + (1-K_1') H_2 K_2 H_1 K_1 + H_2 (1-K_2) H_1 K_1 + H_2 H_1 (1-K_1)$.

5.1. Estimation de $M(1-K_1)$.

En utilisant la proposition A.II.2 et le théorème de trace, on voit que :

$$|H_1 u|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C\, |\lambda|^2\, |u|_{W^4(\Gamma_1)} \qquad \forall\, \lambda \in D .$$

Si on tronque à l'aide d'une partition de l'unité pseudodifférentielle, $u = Au + (1-A)u$, où $\underset{\sim}{WF}(1-A)u)$ est inclus dans la région elliptique, $H_1(1-A)$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ à cause du $\underset{\sim}{WF}'$ de H_1. Donc :

$$|H_1(1-A)u|_{H^s(\Gamma_2)} \leq C|(1-A)u|_{L^2(\Gamma_1)} .$$

D'autre part, on a :

$$|Au|_{W^4(\Gamma_1)} \leq C|\lambda|^4 \; |Au|_{L^2(\Gamma_1)} ,$$

car Au a son $\underset{\sim}{WF}$ dans une région $\{|\xi| \leq C\}$.

Donc on a :

$$|H_1u|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C|\lambda|^8 \; |u|_{L^2(\Gamma_1)}$$

et comme H_1u a son $\underset{\sim}{WF}$ dans une région $\{|\xi| \leq C\}$ on a :

$$|H_1u|_{W^s(\Gamma_2)} \leq C|\lambda|^{8+s} \; |u|_{L^2(\Gamma_1)} . \tag{5.1}$$

On note encore Λ_+ et Λ_- les variétés obtenues en étendant par l'action des itérées de χ les variétés locales Λ_+ et Λ_-.

On étend la relation canonique χ de la façon suivante :

$$\chi : T^*(\Gamma_1) \cup \omega \to T^*(\Gamma_1) \cup \omega$$

où ω désigne un point à l'infini.

Pour $\rho \in T^*(\Gamma_1)$, on trace le 1/2 rayon sortant de ρ (s'il existe).

Deux cas se produisent :

1) γ ne se réfléchit pas sur Γ_2, ou le rayon réfléchi γ' sur Γ_2 ne rencontre pas Γ_1. On pose alors $\chi(\rho)=\omega$.

2) Sinon $\chi(\rho)$ est la projection sur $T^*(\Gamma_1)$ de l'intersection de γ' et de $\partial T^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_1)$.

Enfin on pose $\chi(\omega) = \omega$.

Comme les deux obstacles sont strictement convexes, si $B(\rho,\varepsilon) \not\subset \Lambda_-$,

(5.2) il existe m tel que $\chi^m(B(\rho,\varepsilon)) = \omega$.

Enfin on appellera opérateurs négligeables les opérateurs de norme $O(|\lambda|^{-\infty})$.

Proposition 5.1 : On a :

$$\|(1-K_1')H_2\ K_2\ H_1\ K_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq K_N\ |\lambda|^{-N}$$

$$\|H_2(1-K_2)\ H_1\ K_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq K_N\ |\lambda|^{-N} .$$

Démonstration : Il suffit de montrer que ces opérateurs ont un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$. Pour cela, on utilise que les 1/2 rayons sortants du support de K_2 arrivent sur Γ_1 dans la région $\{K_1' = 1\}$, et que les 1/2 rayons sortants du support de K_1 arrivent sur Γ_2 dans la région $\{K_2 = 1\}$. On peut donc conclure à l'aide du Théorème A.II.12. □

Proposition 5.2 : Soit $f \in \mathcal{H}$ tel que $\underset{\sim}{WF} f$ ne rencontre pas un voisinage de la variété stable entrante Λ_-.
Alors $\exists\, u \in \mathcal{H}$ tel que :

$$(5.3)\qquad \begin{cases} u - Mu = f + R_\infty^1 f \\ R_0^- \tilde{F} u = R_\infty^2 f \end{cases}$$

avec $|u|_{\mathcal{H}} \leq C\,|\lambda|^{N_1}\,|f|_{\mathcal{H}}$, et R_∞^i négligeables.

Démonstration : En introduisant une partition de l'unité pseudodifférentielle et en utilisant (5.2), il est clair que $u = \sum_{j=0}^{m} M^j f$ vérifie la première équation de (5.3).
Il reste à vérifier que $R_0^- \tilde{F} M^j f \in O(|\lambda|^{-\infty})$.
Comme $\underset{\sim}{WF} f$ ne rencontre pas un voisinage de Λ_-, il en est de même pour $\underset{\sim}{WF} M^j f$. Donc si $X(x)$ est une fonction de troncature à support près de 0, on a $X \tilde{F} M^j f \in O(|\lambda|^{-\infty})$, donc $R_0^- \tilde{F} M^j f \in O(|\lambda|^{-\infty})$.
On a donc démontré la proposition. □

Proposition 5.3 : Soit $k(x,y,\xi) \in S^{0,0}_{0,0}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$ une fonction de troncature égale à 1 près de $(0,0,0)$. On note $K = Op\,k$ défini dans A.I ,
$\forall f \in \mathcal{H}$, $\exists\, u \in \mathcal{H}$ tel que :

$$(5.4)\qquad u - M(1-K)u = f\ ,\ \text{avec } |u|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^{N_1}\,|f|_{\mathcal{H}}\ .$$

Démonstration : On va définir u par la série de Neumann $\tilde{u} = \sum_0^\infty (M(1-K))^j f$.

On prend une partition de l'unité pseudodifférentielle $1 = \sum_1^M \chi_j(x,\xi)$ telle que :

- si $\operatorname{supp}\chi_j \cap \Lambda_- \neq \emptyset$, alors il existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\chi^m(\operatorname{supp}\chi_j) \cap \operatorname{supp}(1-K) = \emptyset .$$

Il suffit de résoudre (5.4) avec f remplacé par $\chi_j f$.

Deux cas peuvent se produire :

1) $\operatorname{supp}\chi_j \cap \Lambda_- = \emptyset$. Alors d'après (5.2) il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\chi^{m_2}(\operatorname{supp}\chi_j) = \omega$. On en déduit que $(M(1-K))^{m_2}\chi_j$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$.

2) Si $\operatorname{supp}\chi_j \cap \Lambda_- \neq \emptyset$, comme les support des χ_j sont assez petits, il existe m_1 tel que $(1-K)(M(1-K))^{m_1}\chi_j$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$.

Si on prend $m = \sup(m_1,m_2)$ et $\tilde{u} = \sum_{j=0}^m (M(1-K))^j f = Ef$.

On a : $(1-M(1-K))\tilde{u} = f - (M(1-K))^{m+1} f = f - R_\infty f$ où R_∞ est négligeable.

On peut donc inverser $1\!\!1 - R_\infty$ par une série de Neumann pour λ assez grand, et on prend $u = E(1-R_\infty)^{-1} f$.

Il reste à estimer la norme de $M(1-K)$.

D'après (5.1) on a :

$$|M(1-K)f|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\ |\lambda|^{16}\ |f|_{L^2(\Gamma_1)} .$$

On a donc démontré la proposition. □

Théorème 5.4 : Notons $\tilde{R}_o^+ = \tilde{G} R_o^+$, $\tilde{R}_o^- = R_o^- \tilde{F}$.
On peut résoudre dans $\mathcal{H} \times \mathbb{C}^a$ *le problème de Grushin*

$$\begin{cases} (1-M)u = \tilde{R}_o^+ c + f \\ \tilde{R}_o^- u = d \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\lambda)\begin{pmatrix} f \\ d \end{pmatrix},$$

(λ) holomorphe en λ *pour* $\lambda \in D$, *et*

$$\| \mathcal{E} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H} \times \mathbb{C}^a, \mathcal{H} \times \mathbb{C}^a)} \leq C |\lambda|^{N_4}.$$

Démonstration : On procède en plusieurs étapes :

1) Soit $k \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1)$ comme dans la Proposition 5.5.
D'après la Proposition 5.5, il existe $u_1 \in \mathcal{H}$ tel que :

(5.5) $u_1 - M(1-K)u_1 = f$ et $|u_1|_{\mathcal{H}} \leq C |\lambda|^{N_1} |f|_{\mathcal{H}}$.

2) Il reste à trouver $(u,c) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}^a$ tels que :

$$\begin{cases} u_2 - M u_2 = \tilde{R}_o^+ c + M K u_1 \quad \text{modulo un reste négligeable} \\ \tilde{R}_o^- u_2 = \tilde{d} \end{cases}$$

avec $\tilde{d} = d - \tilde{R}_o^+ u_1$.

Notons $g = M K u_1$. D'après le théorème 4.11, il existe $(u,c) \in H^p \times \mathbb{C}^a$ tels que :

$$(5.6) \qquad \begin{cases} u - e^{-i\lambda 2d} M_1 u = R_o^+ c + \tilde{F} g \\ R_o^- u = \tilde{d} \end{cases}$$

Ici on a pris $z = e^{-i\lambda 2d}$, pour $\lambda \in V_{K_o}$.

Si on applique $\tilde{G}$ à la 1ère équation de (5.6) il vient :

$$\tilde{G}u - \tilde{G}\tilde{F}H\tilde{G}u = \tilde{R}_o^+ c + \tilde{G}\tilde{F}g$$

on a : $\tilde{G}\tilde{F} = \tilde{K}$, $\tilde{F}\tilde{G} = \tilde{K}'$ où $\tilde{K}$ et $\tilde{K}'$ sont définis dans la section 2.

A cause du support du noyau de H , on a :

$$\tilde{K}\,H = H + R_\infty \quad \text{où} \quad R_\infty \text{ est négligeable.}$$

D'autre part, si supp(k) est assez petit, $\underset{\sim}{WF}(\tilde{F}MKu_1) \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, donc d'après la Proposition 4.14, on a $\underset{\sim}{WF}\, u \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$.

On a donc $R_o^- \tilde{K}'u = R_o^- u + r_\infty u$, où r_∞ est négligeable.

Enfin $\tilde{G}\tilde{F}g = \tilde{K}g = \tilde{K}MK_1u_1 = g + R_\infty u_1$ où R_∞ est négligeable. Donc (5.6) entraîne, si $v = \tilde{G}u$:

$$\begin{cases} v - Hv = \tilde{R}_o^+ c + g + R_\infty(u_1,d) \\ \tilde{R}_o^- v = \tilde{d} + r_\infty(u_1,d) \ . \end{cases}$$

$$(|v|_{\mathcal{H}} + |\tilde{c}|_{\mathbb{C}^a}) \leq C|\lambda|^{N_3} (|u_1|_{\mathcal{H}} + |\tilde{d}|_{\mathbb{C}^a}) \ .$$

D'après la Proposition 2.2 et la Proposition 5.1, on a : $H = MK_1 + R_\infty$ où R_∞ est négligeable. On a donc finalement :

$$(5.7)\begin{cases} v - MK_1 v = \tilde{R}_o^+ c + g + R_\infty(u_1,d) \quad \text{avec } R_\infty, r_\infty \text{ négligeables.} \\ \tilde{R}_o^- v = \tilde{d} + r_\infty(u_1,d) \ . \end{cases}$$

On a vu plus haut que $\underset{\sim}{WF}\, u \subset \{|\xi| \leq \varepsilon\}$, donc si ε est assez petit, (i.e. si supp k est assez petit), $\underset{\sim}{WF}\, M(1-K_1)v$ ne rencontre pas un voisinage de la variété entrante Λ_-.

3) Il reste à trouver $u_3 \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\begin{cases} u_3 - M u_3 = M(1-K_1)v \\ \qquad \tilde{R}_0^- u_3 = r_\infty(v) \qquad \text{où } r_\infty \text{ est négligeable .} \end{cases}$$

Pour cela, on applique la Proposition 5.2 à $f = M(1-K_1)v$. En prenant $u = u_1 + u_2 + u_3 + v$, on a :

$$\begin{cases} u - Mu = f + \tilde{R}_0^+ c + R_\infty(\lambda)(f,d) \\ \quad \tilde{R}_0^- u = d + r_\infty(\lambda)(f,d) \end{cases}$$

avec R_∞, r_∞ négligeables, et $\binom{u}{c} = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda)\binom{f}{d}$ où $\tilde{\mathcal{E}}(\lambda)$ est holomorphe en λ pour $\lambda \in D$. On peut donc résoudre exactement avec une série de Neumann, ce qui donne une solution $\binom{u}{c} = \mathcal{E}(\lambda)\binom{f}{d}$ avec $\mathcal{E}(\lambda)$ holomorphe en λ, pour $\lambda \in D$ et on a les estimations du théorème. $\square$

On aura besoin aussi de la proposition suivante, qui se déduit immédiatement de la preuve du Théorème 5.4.

Proposition 5.5 : On a : $E^{+-}(\lambda) = E_1^{+-}(\lambda) + R_\infty(\lambda)$ où

$$|R_\infty(\lambda)| \in O(|\lambda|^{-\infty}) .$$

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL.

Comme dans la section 3, on va remplacer $e^{-i\lambda 2d}$ par z où z varie dans un petit voisinage V de $\frac{1}{K_o}$.

On commence par étudier la matrice $E_1^{+-}(\lambda)$.
D'après l'appendice A.III, on a :

$$E_1^{+-}(\lambda) = E_o^{+-}(\lambda) + E_o^{-}(\lambda)R(\lambda)(1-E_o(\lambda)R(\lambda))^{-1}\, E_o^{+}(\lambda)$$

où $\mathcal{E}_o = \begin{pmatrix} E_o & E_o^{+} \\ E_o^{-} & E_o^{+-} \end{pmatrix}$ est défini dans la proposition 3.8 ou 3.9, et $R = z(M_1-M_o)$.

Pour étudier $E_1^{+-}(\lambda)$, on introduit deux espaces de symboles :

Définition 6.1 : On note $S^{m,k} = \{u(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m+N} u_j(x,\lambda)\lambda^{m-j}\}$ *avec* $u_j(x,\lambda) \in S^{o}_{c\ell}(\mathbb{R}^n)$, *et* $u_j \in O(|x|^{(k-2j)_+})$, *où* $n_+ = \sup(n,0)$.
$S^{m,k}_{1/2} = \{u(x,\lambda) \mid (\lambda^{-1/2}D_x)^{\alpha} u \in O(|\lambda|^{m}\Phi^{k}) \ \forall\ |\alpha| \geq 0\}$ *avec* $\Phi(x,\lambda) = (|\lambda|^{-1} + |x|^2)^{1/2}$.

On notera de la même façon les espaces $u(x,z,\lambda)$ dépendant de façon holomorphe de $z \in V$.
On a alors $S^{m,k} \subset S^{m,k}_{1/2}$, $\Phi^{k} \in S^{o,k}_{1/2}$ et les éléments de $S^{m,k}_{1/2}$ sont les symboles de la forme $\lambda^{m}\Phi^{k} v$ avec $v \in S^{o,o}_{1/2}$.

On commence par montrer une proposition.

Proposition 6.2 : *Soit* $M : \underset{\sim}{C}^\infty(X) \to \underset{\sim}{C}^\infty(X)$ *donné par* :

$$(6.1)\quad Mu(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-z\cdot\theta)}\, b(x,\theta,z,\lambda)\, u(z,\lambda)dz\, d\theta$$

avec $b \in S^{0,0}(\mathbb{R}^{2n})$, *b à support compact en* (x,θ,z), $\varphi(x,\theta) = A(x,\theta)x\cdot\theta$ *avec* $\det A(0,0) \neq 0$.

Alors M *envoie* $S^{m,k}$ *dans* $S^{m,k}$ *et* $S^{m,k}_{1/2}$ *dans* $S^{m,k}_{1/2}$.

Démonstration : On commence par démontrer la proposition pour $S^{m,k}$. Pour cela, il suffit de prendre $u(z,\lambda) = z^\alpha u_\alpha(z,\lambda)$ avec $u_\alpha(z,\lambda) \in S^0_{c\ell}(\mathbb{R}^n)$. En appliquant les arguments de la proposition 6.3 plus bas et la phase stationnaire en (y,θ), on voit facilement que Mu appartient à $S^{m,k}$.

Pour $S^{m,k}_{1/2}$, on ne peut plus appliquer la phase stationnaire.

Le point critique est donné par $\begin{cases} \theta = 0 \\ z = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(x,0) \end{cases}$.

Soit $X \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on introduit dans (6.1) la troncature $X(|\lambda|(|\theta|^2 + |z-z(x)|^2))$ et on écrit $M = M_1 + M_2$, où M_1, M_2 sont de la forme (6.1), avec les amplitudes $X(|\lambda|(|\theta|^2 + |z-z(x)|^2))b$ et $(1-X)(|\lambda|(|\theta|^2+|z-z(x)|^2))b$

Commençons par étudier M_1 :

On écrit u sous la forme $u = \lambda^m \Phi^k v$, avec $v \in S^{0,0}_{1/2} = S^0_{1/2}(X)$, et on peut supposer que $m = 0$.

La formule de Taylor à l'ordre 1 appliquée à Φ^k donne :

$$(|\lambda|^{-1} + |z|^2)^{k/2} =$$

$$= (|\lambda|^{-1}+|x|^2)^{k/2} + \frac{k}{2}\sum_1^n (z_i-x_i) \times \int_0^1 (x_i + t(z_i-x_i)) \times$$

$$\times (|\lambda|^{-1} + (x+t(z-x))^2)^{k/2-1}\, dt \;.$$

Si on remplace x par le point critique $z(x)$, sur le support de l'amplitude on a $|z-z(x)| \leqq \varepsilon\,|\lambda|^{-1/2}$ donc

$$(z_i-z_i(x)) \in O(|\lambda|^{-1/2})$$

$$|z_i(x)+t(z_i-z_i(x))| \in O((|\lambda|^{-1}+|z_i(x)|^2)^{1/2}) \quad \text{et}$$

$$(|\lambda|^{-1}+(z(x)+t(z-z(x))^2)^{1/2} \in O((|\lambda|^{-1}+|z_i(x)|^2))^{1/2} \;.$$

Donc si $k \geqq 2$, on a, sur le support de l'amplitude :

$$(|\lambda|^{-1}+z^2)^{k/2} = (|\lambda|^{-1}+|z(x)|^2)^{k/2} + O((|\lambda|^{-1}+|z(x)|^2)^{k/2})$$

si $k=1$, on vérifie directement que :

$$(|\lambda|^{-1}+|z|^2)^{1/2} = (|\lambda|^{-1}+|z(x)|^2)^{1/2}+(z-z(x))\psi(x,z,\lambda)$$

avec $|\psi(x,z,\lambda)| \leqq C$.

D'autre part $(|\lambda|^{-1} + |z|^2)^{1/2}$ est équivalent à $(|\lambda|^{-1} + |x|^2)^{1/2}$, et comme on intègre sur un compact de volume $O(|\lambda|^{-n})$, on en déduit que $M_1u \in O(\Phi^k)$.

Regardons maintenant l'estimation des dérivées de M_1u.

Il suffit de regarder les dérivées d'ordre 1 :

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_1 u = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-z\cdot\theta)}\, c(x,z,\theta,\lambda) u(z,\lambda)\,dz\,d\theta$$

avec : $c = -i\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial b_1}{\partial x_i} \in S^{1/2,o}_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^n)$, donc l'amplitude $\frac{\partial b_1}{\partial x_i}$ se traite comme précédemment.

On a : $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,\theta)\theta_j$ et

$$\int e^{i\lambda z\cdot\theta}\, \theta_j\, c(x,\theta,z,\lambda)u(z,\lambda)\,dz = \frac{-i}{\lambda}\int e^{i\lambda z\cdot\theta}\left(\frac{\partial c}{\partial z_j} u + c\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)dz.$$

On est donc à nouveau ramené au cas précédent car $\lambda^{-1/2}\, \frac{\partial c}{\partial z_j} u + c \frac{\partial u}{\partial z_j} \in S^{m,k}_{1/2}$.

Donc M_1 envoie $S^{m,k}_{1/2}$ dans $S^{m,k}_{1/2}$.

Regardons maintenant l'action de M_2 .

On peut maintenant intégrer par parties avec l'opérateur $L = \frac{1}{i\lambda|\nabla_{z,\theta}(\varphi - z\cdot\theta)|^2}\ {}_{z,\theta}(\varphi - z\cdot\theta)\cdot\nabla_{z,\theta} =$

$$= \frac{1}{i\lambda^{1/2}|\nabla_{z,\theta}(\varphi - z\cdot\theta)|^2}\nabla_{z,\theta}(\varphi - z\cdot\theta)\cdot\lambda^{-1/2}\,\nabla_{z,\theta}\ .$$

Comme $b_2 \in S^{o,o}_{1/2\ 1/2}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ et $u \in S^{o,k}_{1/2}$, $\lambda^{-1/2}\nabla_{z,\theta} b_2 u$ vérifie les mêmes estimations que $b_2 u$.

Les coefficients de ${}^tL$ sont majorés par : $\frac{\mathcal{O}(1)}{(1+|\lambda|^{1/2}|\theta|+|\lambda|^{1/2}|z-z(x)|)}$ car sur le support de l'amplitude $|\lambda|^{1/2}|\theta|+|\lambda|^{1/2}|z-z(x)| \geqq \varepsilon$.

Après N intégrations par parties on a :

$$M_2\, u(x,\lambda) \in$$
$$\in \mathcal{O}(1)\,|\lambda|^n \int (1+|\lambda|^{1/2}|\theta|+|\lambda|^{1/2}|z-z(x)|)^{-N}\, \Phi(z,\lambda)^k\, dz\, d\theta$$

en intégrant en θ , on obtient :

$$M_2 u(x,\lambda) \in \mathcal{O}(1)\,|\lambda|^{n/2} \int (1+|\lambda|^{1/2}|z-z(x)|)^{-N}\, \Phi(z,\lambda)^k\, dz.$$

On coupe à nouveau en deux le domaine d'intégration :

- Sur $|z-z(x)| \leqq \varepsilon\, |\lambda|^{-1/2}$, on peut utiliser la même méthode que pour estimer $M_1 u$.
- Sur $|z-z(x)| \geqq \varepsilon\, |\lambda|^{-1/2}$, il est facile de vérifier que $\left|\dfrac{\Phi(z,\lambda)}{\Phi(z(x),\lambda)}\right|^k \leqq C_k\, (1+|\lambda|^{1/2}|z-z(x)|)^k$.

On utilise ici que si $|z-x| \geqq \varepsilon$, on a :

$$(1 + \left|\frac{|z|^2-|x|^2}{1+|z|^2}\right|) \leqq C\, (1 + |x-z|)^2 .$$

Comme $\Phi(z(x),\lambda)$ est équivalent à $\Phi(x,\lambda)$, pour N plus grand que $k+n+1$, on obtient :

$$M_2 u(x,\lambda) \in \mathcal{O}(\Phi(x,\lambda)^k) .$$

Les dérivées de $M_2 u$ s'estiment comme $M_2 u$, en utilisant le même argument que pour $M_1 u$. □

<u>*Proposition 6.3*</u> *: $R(\lambda)$ envoie $S^{m,k}$ dans $S^{m,k+1}$ et $S^{m,k}_{1/2}$ dans $S^{m,k+1}_{1/2} \oplus S^{m+1/2,k+2}_{1/2}$.*

<u>Démonstration</u> : Commençons par regarder le cas de $S^{m,k}$:

Il suffit de regarder l'action de $R(\lambda)$ sur un terme $z^\alpha u_\alpha(z)$, avec $|\alpha| = k$.

On peut tout d'abord, en suivant la preuve de la proposition 4.5, écrire $M_1 = \tilde{M}_1 + R_\infty$, où l'amplitude de $\tilde{M}_1$ ne dépend pas de z , et $|R_\infty|_{\mathcal{L}(H^p,H^p)} \in O(|\lambda|^{-\infty})$. On peut donc négliger R_∞.

Avec les notations de la proposition 4.2, on écrit :

$$\tilde{M}_1 - M_o = I_1 + I_2$$

et :

$$I_1(z^\alpha u_\alpha)(x,\lambda) =$$

$$= (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-z\cdot\theta)} (\sum_1^n x_i\, b_{x_i}(x,\theta,\lambda)+\theta_i\, b_{\theta_i}(x,\theta,\lambda) + b_{-1}) z^\alpha u_\alpha(z,\lambda) dz\, d\theta$$

$$I_2(z^\alpha u_\alpha)(x,\lambda) =$$

$$= (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int_0^1 \int e^{-i\lambda(\psi_t(x,\theta)-z\cdot\theta)}\, i\lambda(\varphi(x,\theta)-A^{-1}x\cdot\theta) b_o z^\alpha u_\alpha(z,\lambda)\, dz\, d\theta\, dt.$$

$\psi_t(x,\theta) = t\,\varphi(x,\theta) + (1-t)A^{-1}x\cdot\theta$ vérifie les hypothèses de la proposition 6.2. On a :

$$\int e^{i\lambda z\cdot\theta} z^\alpha u_\alpha(z,\lambda) dz = (+i\lambda)^{|\alpha|} (\frac{\partial}{\partial\theta})^\alpha (\int e^{i\lambda z\cdot\theta} u_\alpha(z,\lambda) dz)$$

$$(\frac{\partial}{\partial\theta})^{\alpha}\ (e^{-i\lambda\varphi(x,\theta)}\ x_i\, b_{x_i}(x,\theta,\lambda)) =$$

$$= x_i \sum_{\alpha=\beta+\gamma} C_{\alpha}^{\beta}\,(\frac{\partial}{\partial\theta})^{\beta}\, b_{x_i}\ (\frac{\partial}{\partial\theta})^{\gamma}\,(e^{-i\lambda\varphi(x,\theta)}) \ .$$

Comme $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(0,\theta) = 0$, on voit facilement par récurrence, que :

$$(\frac{\partial}{\partial\theta})^{\gamma}\ (e^{-i\lambda\,\varphi(x,\theta)}) = \sum_{|\delta|\leqq|\gamma|} \lambda^{|\delta|}\, u_{\delta}(x,\theta)e^{-i\lambda\varphi(x,\theta)}$$

avec $u_{\delta}(x,\theta) \in O(|x|^{\delta})$, donc :

$$\lambda^{-|\alpha|}\ (\frac{\partial}{\partial\theta})^{\alpha}\ (x_i\, b_{x_i}\ e^{-i\lambda\varphi(x,\theta)}) =$$

$$= e^{-i\lambda\,\varphi(x,\theta)} \sum_{|\beta|\leqq|\alpha|} \lambda^{|\beta|-|\alpha|}\ x_i\, u_{\beta}(x,\theta,\lambda)$$

avec $u_{\beta} \in O(|x|^{\beta})$. En utilisant la proposition 6.2, on obtient une somme de termes qui sont dans $S^{o,k+1}$. Regardons maintenant la forme d'un terme :

$$(\frac{\lambda}{2\pi})^{n} \int e^{-i\lambda(\varphi(x,\theta)-z\cdot\theta)}\ \theta_i\, b_{\theta_i}(x,\theta,\lambda)\, z^{\alpha}\, u_{\alpha}(z,\lambda)\,dz\,d\theta \ .$$

On a : $\theta_i \int e^{\,i\lambda z\cdot\theta}\ z^{\alpha}\, u_{\alpha}\,dz = (-i\lambda)^{-1} \int e^{i\lambda z\cdot\theta}\ \frac{\partial}{\partial z_i}(z^{\alpha}\, u_{\alpha}(z,\lambda))dz$

on est donc ramené au cas précédent, avec $z^{\alpha} u_{\alpha}$ remplacé par $\lambda^{-1} z^{\beta} u_{\beta}$ et $|\beta| = |\alpha|-1$. On obtient donc une somme de termes :

$$\sum_{0\leqq j\leqq k-1} \lambda^{j-k}\ O(|x|^{j}) \ .$$

En posant $k-j=\tilde{j}$, on a une somme $\sum_{\tilde{j}=1}^{k} \lambda^{-\tilde{j}}\ O(|x|^{k-\tilde{j}})$ et si $\tilde{j} \geqq 1$, on a $k-\tilde{j} \geqq k-2\tilde{j}+1$.

Donc on obtient un élément de $S^{o,k+1}$.

Regardons maintenant l'action des termes de I_2 :
Dans l'amplitude, on a un facteur $x^\beta \theta^{\beta'} \lambda$ avec $|\beta+\beta'| = 3$. Comme plus haut, on peut remplacer $z^\alpha u_\alpha$ par $\lambda^{1-|\beta'|} z^\gamma u_\gamma$ avec $u_\gamma \in S^o_{c\ell}(\mathbb{R}^n)$, et $|\gamma|=|\alpha|-|\beta'|$. Comme $\frac{\partial}{\partial\theta} \psi_t(0,\theta) = 0$, on obtient une somme de termes de la forme :

$$\lambda^{-|\beta'|+1} \sum_{0\leq j\leq k-|\beta'|} \lambda^{j-(k-|\beta'|)} \, O(|x|^{j+|\beta|}) \ .$$

En posant $j-k+1=\tilde{j}$, on obtient la somme :

$$\sum_{|\beta'|-1\leq\tilde{j}\leq k-1} \lambda^{-\tilde{j}} \, O(|x|^{k+|\beta|-\tilde{j}-1}) \ .$$

Si $\tilde{j} \geq |\beta'| - 1$, on a : $k-1-\tilde{j}+|\beta| \geq k+1-2\tilde{j}$ car $|\beta+\beta'|=3$. On a donc une somme dans $S^{o,k+1}$, et on a démontré la proposition pour $S^{m,k}$.

Regardons maintenant le cas de $S^{m,k}_{1/2}$:

Les termes provenant d'une amplitude $x_i\, b_{x_i}(x,\theta,\lambda)$ se traitent exactement comme pour $S^{m,k}$, en utilisant la proposition 6.2.

Les termes provenant d'une amplitude $\theta_i\, b_{\theta_i}(x,\theta,\lambda)$ se ramènent au cas précédent avec $u(z,\lambda)$ remplacé par $\lambda^{-1}\frac{\partial u}{\partial z_j}$ qui appartient à $S^{m,k+1}_{1/2}$.

Regardons l'action des termes de I_2 :

On élimine le facteur $\theta^{\beta'}$ en remplaçant u par $\lambda^{1-|\beta'|}\,\partial_z^{\beta'} u$ qui appartient à $S^{m+1-|\beta'|/2,k}_{1/2}$.

On distingue deux cas :

- Si $|\beta'| = 2$, on obtient un terme dans $S^{m,k+1}_{1/2}$ à cause du facteur x^{β} .
- Si $|\beta'| = 1$, on obtient un terme dans $S^{m+1/2,k+2}_{1/2}$.

On a donc démontré la Proposition. □

Proposition 6.4 : $E_o(\lambda)$ envoie $S^{m,k}$ dans $S^{m,k}$ et $S^{m,k}_{1/2}$ dans $S^{m,k}_{1/2}$ pour $k \geqq N$.

Démonstration : Pour $S^{m,k}$, il suffit de regarder l'action de $E_o(\lambda)$ sur un terme $z^{\alpha} u_{\alpha}(z,\lambda)$ avec $u_{\alpha}(z,\lambda) \in S^{o}(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$E_o(\lambda)f=(1-z\,M_o)^{-1}\Big(\sum_{\alpha \notin \mathfrak{J},\,|\alpha|<N} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha}_x f(0)\Big) + (1-z\,M_o)^{-1} f_N .$$

$E_o(\lambda)$ n'agit pas sur les puissances de λ et conserve les ordres d'annulations à l'origine si $\alpha \notin \mathfrak{J}$. Si $\alpha \in \mathfrak{J}$, $E_o(\lambda)$ augmente l'ordre d'annulation. $E_o(\lambda)$ envoie donc bien $S^{m,k}$ dans $S^{m,k}$.

Montrons maintenant la proposition pour $S^{m,k}_{1/2}$.

Si $f \in S^{m,k}_{1/2}$, $\partial^{\alpha}_x f(0)x^{\alpha} \in S^{m,k}_{1/2}$ pour $|\alpha| \leqq k$, donc si $k \geqq N$

$$(1 - z\,M_o)^{-1}\Big(\sum_{\alpha \notin \mathfrak{J},\,|\alpha|<N} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha}_x f(0,\lambda)\Big) \in S^{m,k}_{1/2} .$$

Montrons que la série $\sum (z\,M_o)^j f_N$ converge dans $S^{m,k}_{1/2}$.

On utilise le changement d'échelle introduit dans la

section 3 : $m\lambda u(\tilde{x},\lambda) = u(\tilde{x}\lambda^{-1/2},\lambda)$. $S^{m,k}_{1/2}$ est envoyé par $m\lambda$ sur $\mathcal{J}^{m,k}_{1/2} = \{u \mid D^{\alpha}_{\tilde{x}}u \in O(|\lambda|^{m-k/2}(1+|\tilde{x}|^2)^{k/2})\}$.
Il suffit donc de montrer que si $f_N(\tilde{x},\lambda)$ est le reste du développement de Taylor à l'ordre N de $f(\tilde{x},\lambda)$ la série $\sum (z\mathcal{M}_o)^j f_N$ converge dans $\mathcal{J}^{m,k}_{1/2}$.
$f_N(\tilde{x},\lambda)$ est une somme de termes de la forme : $\tilde{x}^{\alpha} g_N(x,\lambda)$ avec $|\alpha|=N$ et $|g_N(\tilde{x},\lambda)| \leq C_N(|\lambda|^{m-k/2}(1+|\tilde{x}|^2)^{k/2})$.
Avec les notations du §. 3.1, on a :

$$(z\mathcal{M}_o)^j f_N = (zb_o)^j \nu^{-\alpha j} g_N(A^{-j}\tilde{x},\lambda)$$

donc :

$$|(z\mathcal{M}_o)^j f_N| \leq |zb_o|^j \nu_1^{-2Nj} C_N |\lambda|^{m-k/2} (1+|x|^2)^{k/2} .$$

On a les mêmes estimations pour les dérivées, ce qui prouve la convergence de la série.

On a donc montré que $(1-z M_o)^{-1} f_N$ appartient à $S^{m,k}_{1/2}$, ce qui démontre la proposition. □

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

<u>*Proposition 6.5*</u> : *La matrice* $K(z,\lambda) = E^-_o(\lambda)R(\lambda)(1-E_o(\lambda)R(\lambda))^{-1}E^+_o(\lambda)$ *admet un développement asymptotique :*

$$K(z,\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k(z)\, \lambda^{-k/2}$$

avec A_k *holormorphe en* z *pour* $z \in V$.

Si les $|\alpha|$ *pour* $\alpha \in \mathcal{J}$ *ont tous la même parité, les 1/2 puissances disparaissent dans le développement.*

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord que A est diagonalisable : l'élément de matrice $K_{\alpha,\alpha'}$ pour $\alpha,\alpha' \in \mathcal{J}$, est donné par :

$$(6.2) \quad K_{\alpha,\alpha'} = \lambda^{-|\alpha'|/2} D_x^{\alpha'} (R(1-E_0R)^{-1}(\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha))\big|_{x=0} \, .$$

On a :

$$R(1-E_0R)^{-1}(\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha) = \sum_{p=0}^{j} R(E_0R)^p(\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha) + r_j$$

avec $r_j = R(E_0R)^{j+1}(1-E_0R)^{-1}(\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha)$.

$\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha$ appartient à H^p pour $p \geqq p_0$, donc d'après la section 4, on a : $(1-E_0R)^{-1}(\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha) \in H^p \quad \forall\, p \geqq p_0$, et

$$|(1-E_0R)^{-1} \; \lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha|_{H^p} \leqq C_p \, .$$

On en déduit facilement, à l'aide des inégalités de Sobolev, que $v = (1-E_0R)^{-1}(\lambda^{|\alpha|/2}x^\alpha)$ appartient à $S_{1/2}^{N_0+m/2,m} \quad \forall\, m \geqq p_0$.

Prenons $m \geqq N$. D'après les propositions 6.3 et 6.4, $R(E_0R)^{j+1}(v)$ est une somme de termes appartenant à $S_{1/2}^{N_0+m/2+j_1/2,m+2j_1+j_2}$ avec $j_1 + j_2 = j + 2$.

$\lambda^{-|\alpha'|/2} D_x^{\alpha'} v(0)$ est donc majoré par $C|\lambda|^{N_0 - (j_1+j_2)/2}$.

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$ fixé, si $j \geqq 2(N_0+N)$, on a :

$$\lambda^{-|\alpha'|/2} D_x^{\alpha'} r_j \in O(|\lambda|^{-N}) \, .$$

Il suffit donc de regarder les termes de :

$\sum_{p=0}^{j} R(E_o R)^p (\lambda^{|\alpha|/2} x^\alpha)$.

On utilise maintenant que $\lambda^{|\alpha|/2} x^\alpha$ appartient à $S^{|\alpha|/2,|\alpha|}$.

D'après les propositions 6.3 et 6.4, $R(E_o R)^p(\lambda^{|\alpha|/2} x^\alpha)$ est une somme finie de termes du type

$$\lambda^{|\alpha|/2-\ell}\, O(|x|^{(|\alpha|+p+1-2\ell)_+}) .$$

Les seuls termes non nuls de $\lambda^{-|\alpha'|/2} D_x^{\alpha'} R(E_o R)^p$ sont ceux où $|\alpha'| \geqq |\alpha| + p+1 - 2\ell$, et on a alors : $|\alpha|/2-\ell-|\alpha'|/2 \leqq -1/2$. On a donc un développement asymptotique dans $S_{c\ell}^{-1/2}(\mathbb{C})$.

Supposons maintenant que les $|\alpha|$ ont la même parité pour $\alpha \in \mathcal{J}$, alors les puissances $|\alpha|/2-\ell-|\alpha'|/2$ sont toutes entières, ce qui démontre la deuxième partie de la proposition.

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, $K_{\alpha,\alpha'}$ est donné par une fomule de type (6.2) où $\lambda^{|\alpha|/2} x^\alpha$ est remplacé par $\lambda^{|\alpha|/2} p_\alpha(x)$, où p_α est un polynôme homogène et $D_x^{\alpha'}$ par $P^{\alpha'}(D_x)$, où $P^{\alpha'}(D_x)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants, homogène de degré $|\alpha'|$. On peut donc suivre la même démonstration. □

On construit maintenant des valeurs propres asymptotiques de la matrice $K(z,\lambda)$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$K_N(z,t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(z) t^k$, $P_N(\xi,z,t) = \det(K_N(z,t) - \xi \mathbb{1}_a) =$

$\xi^a + \xi^{a-1} a_1^N(z,t) + \ldots + a_a^N(z,t)$. D'après le Th. A.III.1, on peut construire des développements asymptotiques pour les valeurs propres de $K_N(z,t)$ notées $\mu_1(z,t),\ldots,$ $\mu_a(z,t)$ avec multiplicité, et on a :

$$\mu_\ell(z,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\ell}(z)(t^{1/a\ell})^k$$

pour $\ell = 1,\ldots,a$, et $a_\ell \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on rappelle que E_o^{+-} n'est pas diagonale, mais que :

$$E_o^{+-}(\lambda) = (1-zK_o)\,\mathbb{1}_a + S, \text{ où S est nilpotent.}$$

On remplace donc $K_N(z,t) = \sum_1^N A_k(z)t^k$, par $K_N(z,t) = S + \sum_1^N A_k(z)t^k$. On a toujours $P_N(\xi,z,t) = \det(\xi\,\mathbb{1}_a - K_N(z,t))$ qui vérifie $P_N(\xi,0,0) = \xi^a$. On retrouve donc une forme analogue pour les développements asymptotiques des racines de $P_N(\xi,z,t)$, notés encore $\mu_\ell(z,t)$.

Notons $\lambda_j = \Pi j/d - i \log \frac{K_o}{2d}$ pour $j \in \mathbb{Z}$.

On montre maintenant le lemme suivant :

<u>*Lemme 6.6*</u> *: Pour $\ell = 1,\ldots,a$, il existe des développements asymptotiques*

$$\lambda_\ell(j) = \lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\lambda}\,(\lambda_j)^{-k/2a\ell} \tag{6.3}$$

tels que si $\lambda_{\ell,m}(j)$ est la somme des m premiers termes de (6.3) et si $\mu_{\ell,m}(z,t)$ est la somme des m premiers termes de $\mu_\ell(z,t)$, *on a pour* $z = e^{-i\lambda_{\ell,m}(j)2d}$:

$$z\,K_o - 1 + \mu_{\ell,m}(z,(\lambda_{\ell,m}(j))^{-1/2}) \in O(|\lambda_j|^{-(\frac{m+1}{2a\ell})}) .$$

Dans le cas où les $|\alpha|$ *ont tous la même parité, le développement (6.3) ne contient que des puissances entières de* $(\lambda_j)^{1/a\ell}$.

<u>Démonstration</u> : Fixons une valeur propre asymptotique $\mu_\ell(z,t)$ notée $\mu(z,t)$ pour simplifier les notations : On cherche $\lambda(j)$ sous la forme $\lambda_j + z_j$ avec

$$z_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda_j)^{-k/2a\ell} .$$

On a : $e^{-i\lambda_j 2d} K_o = 1$, donc :

$$e^{-i\lambda(j)2d} K_o - 1 = e^{-iz_j 2d} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-i2dz_j)^k .$$

De même on a : $z = \frac{1}{K_o}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-i2dz_j)^k\right)$,

$$\mu_m(\lambda(j)^{-1/2}) = \sum_{k=1}^{m} c_k(z)(\lambda(j))^{-k/2a\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k(z)\lambda_j^{-k/2a\ell}(1 + z_j\lambda_j^{-1})^{-k/2a\ell} .$$

Il est facile de voir qu'on peut déterminer a_k par récurrence :

Pour éliminer le terme $(\lambda_j)^{-k/2a\ell}$, on a à résoudre une équation : $a_k = F_k(a_1,\dots,a_{k-1}, c_1,\dots,c_{k-1})$, où les $a_1,\dots,a_{k-1}$ sont connus. □

On peut maintenant démontrer le théorème principal :

Théorème 6.7 : Soit $\lambda_\ell(j) = \lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\ell}(\lambda_j)^{-k/2a\ell}$ *le développement introduit dans le lemme 6.5 pour* $\ell = 1,\dots,a$.

Soit p_ℓ *la multiplicité de* $\lambda_\ell(j)$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, *il existe* $j_N \in \mathbb{N}$ *et* $c_N \in \mathbb{R}$ *tels que pour* $j \geqq j_N$ *la matrice de scattering pour* Ω *a exactement* p_ℓ *pôles avec multiplicité dans :*

$$|\lambda - \lambda_j - \sum_{k=1}^{m_N} a_{k,\ell}(\lambda_j)^{-k/2a_\ell}| \leqq c_N \, |\lambda_j|^{-N} ,$$

où m_N *est le plus grand* k *tel que* $k/2a_\ell < N$.

Dans le cas où les $|\alpha|$ *ont tous la même parité pour* $\alpha \in \mathcal{Y}$, *les 1/2 puissances disparaissent dans le développement.*

<u>Démonstration</u> : Dans la suite on supposera que $\ell=1$.

On note $p = p_1$ la multiplicité de $\mu_1(z)$ et on a donc :

$$|\mu_j(z)-\mu_1(z)| \geqq C_o|z|^{N_o} \quad \text{pour } j\neq 1, \text{ avec } N_o \in \mathbb{N} .$$

On commence par construire des cercles Γ_j centrés sur les $\lambda_m(j)$ tels que : $\forall\, \lambda \in \Gamma_j$, $C_1|\lambda_j|^{-M_2} \leqq |e^{-i\lambda 2d} K_o - 1 + \mu_m(\lambda^{-1/2})| \leqq C_2|\lambda_j|^{-M_2}$ avec $M_2 \in \mathbb{R}^+$.

On veut de plus que le rayon de Γ_j soit compris entre $C_1'|\lambda_j|^{-M_2}$ et $C_2'|\lambda_j|^{-M_2}$, ce qui est possible car $\frac{\partial}{\partial\lambda}(e^{-i\lambda 2d} K_o - 1 + \mu_m(\lambda^{-1/2})) = -i\lambda 2d\, e^{-i\lambda 2d} K_o - \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}$
$\frac{\partial\mu_m}{\partial z}(\lambda^{-1/2})$ est plus grand que 1/2 pour $|\lambda-\lambda_j| \leqq \varepsilon$,

avec ε assez petit.

Estimons maintenant $E^{+-}(\lambda)^{-1}$ pour $\lambda \in \Gamma_j$.
On a : $E^{+-}(\lambda)^{-1} = (1-e^{-i\lambda 2d}K_o)\mathbb{1} + \sum_o^N A_k \lambda^{-k/2} + R_N(\lambda)$ d'après les propositions 5.7 et 6.5 , avec : $A_o = 0$ si A est diagonalisable, $A_o = S$ si A n'est pas diagonalisable, avec S matrice nilpotente. De plus on a :

$$(6.4) \qquad |R_N(\lambda)| \leqq C_N \; |\lambda|^{-(N+1)/2} .$$

Si $\xi \neq \mu_\ell^N(z)$ pour $\ell = 1,\dots,a$, on a :

$$|(\xi\,\mathbb{1} - K_N(z))^{-1}| \leqq C_N \times \prod_1^a |\xi - \mu_\ell^N(z)|^{-1} .$$

Donc :

$$|((1-e^{-i\lambda 2d}K_o)\mathbb{1} + K_N(\lambda^{-1/2}))^{-1}| \leqq C_N \times \prod_1^a |((1-e^{-i\lambda 2d}K_o) + \mu_\ell^N(\lambda^{-1/2})|^{-1} .$$

Si $\lambda \in \Gamma_j$, on a :

$$|(1-e^{-i\lambda 2d}K_o)\mathbb{1} + \mu_1^N(\lambda^{-1/2})| \geqq C_N \; |\lambda_j|^{-M_2}$$

et : $$|\mu_j^N(\lambda^{-1/2}) - \mu_1^N(\lambda^{-1/2})| \geqq C_N \; |\lambda_j|^{-N_o/2}$$

si N est assez grand.

Donc on a :

$$(6.5) \qquad ((1-e^{-i\lambda 2d}K_o)\mathbb{1} + K_N(\lambda^{-1/2}))^{-1}| \leqq C_N |\lambda_j|^{p M_2 + (p-a)N_o/2}$$
pour $\lambda \in \Gamma_j$.

Notons $E_N^{+-}(\lambda) = (1-e^{-i\lambda 2d} K_o)\mathbb{1} + K_N(\lambda^{-1/2})$. On a :

$$E^{+-}(\lambda) = E_N^{+-}(\lambda)(\mathbb{1} + E_N^{+-}(\lambda)^{-1} R_N(\lambda)) .$$

D'après (6.4) et (6.5), on a :

$$|E_N^{+-}(\lambda)^{-1} R_N(\lambda)| \leq C_N |\lambda_j|^{pM_2+(p-a)N_o/2-(N+1)/2}$$
$$\text{pour } \lambda \in \Gamma_j .$$

Prenons $N > 2pM_2 + (p-a)N_o$. Pour j assez grand, $\mathbb{1} + E_N^{+-}(\lambda)^{-1} R_N(\lambda)$ est inversible pour $\lambda \in \Gamma_j$ par une série de Neumann, et son inverse est borné par une constante.

On peut maintenant démontrer le théorème :

Supposons d'abord que $K_N(z)$ soit diagonalisable pour la valeur propre $\mu_1^N(z)$. On peut alors trouver des vecteurs $f_1,\dots,f_p \in \mathbb{C}^a$ linéairement indépendants tels que :

$$\int_{\Gamma_j} E_N^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda \neq 0 \quad \text{pour } i=1,\dots,p .$$

D'autre part on a $E^{+-}(\lambda)^{-1} = (\mathbb{1} + E_N^{+-}(\lambda)^{-1} R_N(\lambda))^{-1} E_N^{+-}(\lambda)^{-1} = E_N^{+-}(\lambda)^{-1} + S_N(\lambda) E_N^{+-}(\lambda)^{-1}$, avec $|S_N(E_N^{+-})^{-1}| \leq C_N |\lambda|^{-1}$, si on prend N assez grand. Donc on a :

$$\int_{\Gamma_j} E^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda = \int_{\Gamma_j} E_N^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda + \int_{\Gamma_j} S_N(\lambda) E_N^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda .$$

Comme le deuxième terme tend vers 0 quand j tend vers l'infini, on a :

$$\int_{\Gamma_j} E^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda \neq 0 \quad \text{pour } i=1,\dots,p \text{ , pour } j \text{ assez grand.}$$

Comme $E^{+-}(\lambda)$ est une fonction holomorphe de λ pour $\lambda \in D$, d'après le théorème 5.4, ceci entraîne que $E^{+-}(\lambda)^{-1}$ a p pôles comptés avec multiplicité dans Γ_j. D'après la remarque à la fin de A.III.3, ces pôles sont aussi des pôles de $(1-M(\lambda))^{-1}$.

Supposons maintenant que $K_N(z)$ n'est pas diagonalisable pour la valeur propre $\mu_1^N(z)$. On peut alors trouver $f_1,\dots,f_p \in \mathbb{C}^a$ linéairement indépendants tels que :

soit : $\displaystyle\int_{\Gamma_j} E_N^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda \neq 0$

soit : $\displaystyle\int_{\Gamma_j} ((1-e^{-i\lambda 2d_{K_0}})+\mu_1^N(\lambda^{-1/2}))^{k_i} E_N^{+-}(\lambda)^{-1} f_i \, d\lambda \neq 0$

pour un $k_i \leqq p$.

On peut alors faire le même raisonnement que plus haut, qui montre que $(1-M(\lambda))^{-1}$ a p pôles avec multiplicité dans Γ_j.

Pour montrer que la matrice de scattering pour Ω a exactement p_ℓ pôles asymptotiques à $\lambda_\ell(j)$, on va utiliser une formule de trace en suivant une idée dûe à Sjöstrand.

On commence par donner une caractérisation des pôles de la matrice de scattering par la méthode du complex scaling.

On considère la résolvante sortante libre du Laplacien :

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)u = v \\ \quad u \text{ sortante} , \end{cases}$$

définie par : $u = S_0(\lambda)v = \int e^{-i\lambda|x-y|} P_n(|x-y|,\lambda)v(y)dy$

où $P_n(r,\lambda) = C(n)(\frac{1}{r}\partial_r)^{(n-2)/2}(\frac{e^{-i\lambda r}}{r})\, e^{i\lambda r}$.

$P_n(r,\lambda)$ est équivalent à $\frac{C(n,\lambda)}{r^{n/2}}$ à l'infini. Soit $K_0(x,y,\lambda)$ le noyau de $S_0(\lambda)$. On peut étendre K_0 holomorphiquement en (x,y) à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, en étendant $|x-y|$ par $((x-y)^2)^{1/2}$.

Si on restreint maintenant ce noyau à $e^{-i\theta}\,\mathbb{R}^{n+1} \times e^{-i\theta}\mathbb{R}^{n+1}$ pour $\theta > 0$, en écrivant les nouvelles variables sous la forme $(e^{-i\theta}x , e^{-i\theta}y)$, le terme $e^{-i\lambda|x-y|}$ devient $e^{-i\lambda\, e^{-i\theta}|x-y|}$, qui est exponentiellement décroissant pour $\lambda \in D$, $\mathrm{Re}\,\lambda$ assez grand.

Le noyau $K_0(x,y,\lambda)$ restreint à $e^{-i\theta}\,\mathbb{R}^{n+1} \times e^{-i\theta}\,\mathbb{R}^{n+1}$ est donc borné sur $L^2(e^{-i\theta}\,\mathbb{R}^{n+1})$, et aussi sur $L^2(\Gamma)$ où Γ est une déformation de $\mathbb{R}^{n+1}$ égale à $e^{-i\theta}\,\mathbb{R}^{n+1}$ hors d'un voisinage de Ω . (Voir fig. 1).

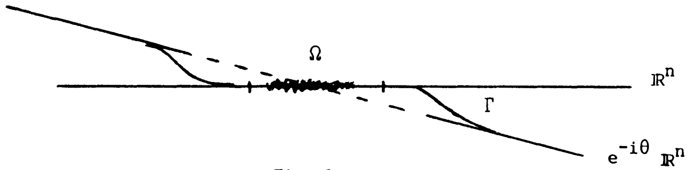

Fig. 1

On peut alors utiliser les potentiels de double couche et la théorie de Fredholm pour résoudre le problème de Dirichlet inhomogène : $\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = v \\ u \quad \text{sortante.} \end{cases}$

Pour celà on écrit la résolvante $H_+(\lambda)$ de ce problème sous la forme : $H_+(\lambda) = S_0 \circ \delta_S \otimes (\mathbb{1} + K(\lambda))$, où δ_S est la dérivée normale de la masse de Dirac sur $\partial\Omega$, et $K(\lambda)$ est un opérateur à noyau C^∞ , méromorphe en λ .

Notons $S(\lambda)$ la résolvante du problème de Dirichlet homogène : $\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u \quad \text{sortante} \end{cases}$

qui est définie sur $L^2(\Gamma)$.

On a : $S(\lambda) = S_0(\lambda) - H_+(\lambda)\gamma\, S_0(\lambda)$, où γ est l'opérateur de trace sur $\partial\Omega$.

Soit c une courbe fermée dans $\mathbb{C}$.

Le nombre de pôles de la résolvante $S(\lambda)$ à l'intérieur de C est égal à $m(c) = \mathrm{tr}\,(\frac{1}{2\pi i} \int_C -2\lambda\, S(\lambda)d\lambda)$ car $\frac{1}{2\pi i} \int_C -2\lambda\, S(\lambda)d\lambda$ est le projecteur spectral associé aux

pôles de $S(\lambda)$ à l'intérieur de c.
On a donc : $m(c) = \mathrm{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_c -2\lambda H_+(\lambda)_\gamma S_o(\lambda) d\lambda.$
D'après ce qu'on a vu plus haut sur la structure de $H_+(\lambda)$, on a :

$$H_+(\lambda) = S_o \circ \delta_S \otimes \mathbb{1} + S_o \circ \delta_S \otimes K(\lambda) = H_s(\lambda) + H_e(\lambda)$$

où $H_S(\lambda)$ est holomorphe à λ, et à cause des estimations sur le noyau de $S_o(\lambda)$ dans $L^2(\Gamma)$, $H_e \gamma S_o(\lambda)$ est à trace sur $L^2(\Gamma)$.

$$m(c) = -\frac{1}{\pi i} \mathrm{tr} \int_c \lambda H_+(\lambda) \gamma S_o(\lambda) d\lambda =$$

$$-\frac{1}{\pi i} \int_c \mathrm{tr}(\lambda H_e \gamma S_o(\lambda)) d\lambda = -\frac{1}{\pi i} \int_c \mathrm{tr}(\gamma S_o H_e) \lambda \, d\lambda .$$

D'autre part, on vérifie que si $(v_1, v_2) \in C^\infty(\partial\Omega_1) \times C^\infty(\partial\Omega_2)$ on a : $H_+(\lambda)(v_1, v_2) = (H_{1,+} - H_{2,+} H_1)(\mathbb{1} - M)^{-1} v_1 + (H_{2,+} - H_{1,+}(\mathbb{1}-M)^{-1} H_2 + H_{2,+} H_1 (\mathbb{1}-M)^{-1} H_2) v_2$.
On en déduit :

$$H_e(\lambda)(v_1, v_2) = (H_{1,+} - H_{2,+} H_1) M(\mathbb{1}-M)^{-1} v_1 + H_{1,e} v_1 +$$

$$(H_{2,e} - H_{1,+}(\mathbb{1}-M)^{-1} H_2 + H_{2,+} H_1 (\mathbb{1}-M)^{-1} H_2) v_2 .$$

On a donc : $\mathrm{tr}\, \gamma S_o H_e = \mathrm{tr}\, \gamma_1 S_o (H_{1,e} + (H_{1,+} - H_{2,+} H_1) M (\mathbb{1} - M)^{-1}) + \mathrm{tr}\, \gamma_2 S_o (H_{2,e} - H_{1,+}(\mathbb{1}-M)^{-1} H_2 + H_{2,+} H_1 (\mathbb{1}-M)^{-1} H_2)$.
Donc $m(c) = -\frac{1}{\pi i} \mathrm{tr} \int_c \gamma_1 S_o H_{1,+} (\mathbb{1}-M)^{-1} - \gamma_1 S_o H_S \lambda \, d\lambda +$
$\frac{1}{\pi i} \mathrm{tr} \int_c \gamma_1 S_o H_{2,+} H_1 (\mathbb{1}-M)^{-1} \lambda \, d\lambda + \frac{1}{\pi i} \mathrm{tr} \int_c \gamma_2 S_o H_{1,+} (\mathbb{1}-M)^{-1}$
$H_2 \lambda \, d\lambda - \frac{1}{\pi i} \mathrm{tr} \int_c \gamma_2 S_o H_{2,+} H_1 (\mathbb{1}-M)^{-1} H_2 \lambda \, d\lambda = I + II + III + IV.$

On note maintenant $n(c)$ le nombre de racines de $\det(E^{+-})$ dans c.

On a : $n(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{d}{d\lambda}(\det E^{+-})(\det E^{+-})^{-1}\, d\lambda =$ $\frac{1}{2\pi i}\int_c \mathrm{tr}\, \dot{E}^{+-}(E^{+-})^{-1}\, d\lambda$ où $\dot{E}^{+-}$ dénote $\frac{d}{d\lambda}E^{+-}$.

Il est facile de voir que $\dot{E}^{+-} = E^{-}\dot{M}E^{+}$. On a donc :

$$n(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \mathrm{tr}\, E^{-}\dot{M}E^{+}(E^{+-})^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_c \mathrm{tr}\, \dot{M}E^{+}(E^{+-})^{-1}E^{-}\, d\lambda.$$

Ici tous les opérateurs sont à trace car E^{-} est de rang fini.

D'autre part $(\mathbb{1}-M)^{-1} = E - E^{+}(E^{+-})^{-1}E^{-}$ donc :

$$n(c) = -\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{tr}\int_c \dot{M}(\mathbb{1}-M)^{-1}\, d\lambda .$$

On a : $\dot{M} = \gamma_1 \dot{H}_{2,+} H_1 + H_2\gamma_2 \dot{H}_{1,+}$, et

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\dot{H}_{j,+} = -2\lambda H_{j,+} \\ \dot{H}_{j,+}\big|_{\gamma_j} = 0 . \end{cases}$$

Donc $\dot{H}_{j,+} = -2\lambda S_{j,+}H_{j,+} = -2\lambda(S_o - H_{j,+}\gamma_j S_o)H_{j,+}$. On en déduit que :

$$\dot{M} = -2\lambda(\gamma_1 S_o H_{2,+}H_1 - H_2\gamma_2 S_o H_{2,+}H_1 + H_2\gamma_2 S_o H_{1,+} - M\gamma_1 S_o H_{1,+}) .$$

Donc
$$\begin{aligned} n(c) &= \frac{1}{\pi i}\mathrm{tr}\int_c \lambda\gamma_1 S_o H_{2,+}H_1(\mathbb{1}-M)^{-1}\, d\lambda \\ &- \frac{1}{\pi i}\mathrm{tr}\int_c \lambda H_2\gamma_2 S_o H_{2,+}H_1(\mathbb{1}-M)^{-1}\, d\lambda \\ &+ \frac{1}{\pi i}\mathrm{tr}\int_c \lambda H_2\gamma_2 S_o H_{1,+}(\mathbb{1}-M)^{-1}\, d\lambda \\ &- \frac{1}{\pi i}\int_c \lambda M\gamma_1 S_o H_{1,+}(\mathbb{1}-M)^{-1}\, d\lambda = a+b+c+d . \end{aligned}$$

On observe maintenant que $a = II$, $b = IV$, $c = III$.

$$d = -\frac{1}{\pi i}\operatorname{tr}\int_c M\gamma_1 S_o H_{1,+} (\mathbb{1}-M)^{-1}\lambda\, d\lambda =$$
$$-\frac{1}{\pi i}\operatorname{tr}\int_c \gamma_1 S_o H_{1,+}(\mathbb{1}-M)^{-1}M\lambda\, d\lambda = -\frac{1}{\pi i}\operatorname{tr}\int_c \gamma_1 S_o H_{1,+}\lambda\, d\lambda$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_c \gamma_1 S_o H_{1,+} (\mathbb{1}-M)^{-1}\lambda\, d\lambda = 0 + I = I.$$

Donc $n(c) = m(c)$.

Il reste à montrer l'équivalence des pôles de $S(\lambda)$ avec les pôles de la matrice de scattering pour Ω. Les pôles de la matrice de scattering sont avec multiplicité les pôles de l'extension méromorphe de la résolvante sortante considérée de $C_o^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\Omega)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\Omega)$. Notons $R(x,y,\lambda)$ le noyau distribution de cette résolvante. On considère le noyau $\Pi_c = \frac{1}{2\pi i}\int_c R(x,y,\lambda)d\lambda$ défini pour $(x,y)\in\Gamma\times\Gamma$ et on veut étudier Π_c pour $(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$\Pi_c = \frac{1}{2\pi i}\int_c H_+(\lambda)\,\gamma\, S_o(\lambda)d\lambda .$$

Le noyau qui est sous le signe somme est de la forme :

$$\int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{\partial K_o}{\partial n_y}(x,y',\lambda)\, k(y',z',\lambda)\, K_o(z',y,\lambda)d S_{y'}\, d S_{z'} .$$

$k(y',z',\lambda)$ est de la forme $\delta(y'-z') + \tilde{k}(y',z',\lambda)$ où $\tilde{k}$ est C^∞ en (y',z'), et K_o est le noyau de S_o. $\Pi_c(x,y)$ est donc holomorphe en (x,y) dans un ouvert connexe de $(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\Omega)\times(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\Omega)$ qui contient

$(\Gamma \setminus \Omega) \times (\Gamma \setminus \Omega)$ et $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)$. Si $\Pi_c(x,y)$ est identiquement nul sur $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)$ il l'est aussi sur $\Gamma \times \Gamma$.

Donc si il y a des pôles de $S(\lambda)$ dans c ; il y a aussi des pôles de la matrice de scattering.

Passons à l'étude de la multiplicité :

Sur $L^2(\Gamma)$, Π_c est une projection, donc $\mathrm{tr}(\Pi_c) = \mathrm{rang}\,\Pi_c$ et $\Pi_c(x,y) = \sum_1^{n(c)} \varphi_j(x)\, \overline{\psi_j(\overline{y})}$, où $\varphi_j(x)$, $\psi_j(y)$ sont holomorphes dans des ouverts contenant $\mathbb{C}\,\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$ et sont dans $L^2(\Gamma)$. Sur le réel, on a donc :

$$\Pi_c(x,y) = \sum_1^{n(c)} \varphi_j(x)\, \overline{\psi_j(\overline{y})} \, .$$

Enfin on vérifie facilement par les mêmes arguments que les φ_j, ψ_j sont toujours indépendantes. Donc la matrice de scattering a exactement $n(c)$ pôles dans c, ce qui termine la démonstration du théorème. $\square$

RÉFÉRENCES.

[H.Sj.] B. HELFFER - J. SJÖSTRAND : *Résonances en limite semi-classique*, Prépublications de l'Université de Nantes 1985.

[Hi] I.I. HIRSCHMAN : *A convexity theorem for certain groups of transformations*, Journal d'Analyse Mathématique vol. 2 (1952-53), 209-218.

[M_1] R.B. MELROSE : *Local Fourier-Airy Integral Operators*, Duke Mathematical Journal, vol. 42 (1975), 583-605.

[M_2] R.B. MELROSE : *Singularities and energy decay in acoustical scattering*, Duke Mathematical Journal, vol. 46 (1979), 43-59.

[T] M.E. TAYLOR : *Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations*, C.P.A.M., vol. 29 (1976), 1-39.

[E] G. ESKIN : *A parametrix for mixed problems for strictly hyperbolic operators of arbitrary order*, C.P.D.E., 1(6), (1976), 521-560.

[L.P] P.D. LAX - R. PHILLIPS : *Scattering theory*, Academic Press.

[I_1] M. IKAWA : *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto. Univ., vol. 23, (1983), 127-194.

[I_2] M. IKAWA : Exposé au Séminaire de Saint-Jean-de-Monts 1985.

[P] V. PETKOV : Exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz 82-83.

[Ch.P] J. CHAZARAIN - A. PIRIOU : *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars.

[B.G.R] C. BARDOS - J.C. GUILLOT - J. RALSTON : *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion*, C.P.D.E. 7(8), (1982), 905-958.

[V] B.R. VAINBERG : *On the analytical properties of the resolvent for a certain class of operators pencils*, Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 6, (1968), 241-273.

[G.S] V. GUILLEMIN - S. STERNBERG : *Geometric asymptotics* , Am. Math. Soc. Surveys, Vol. 14, (1977).

A.I. OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS A GRAND PARAMÈTRE ET ENSEMBLE DE FRÉQUENCE.

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition A.I.1. : *- On note $\underset{\sim}{C}^\infty(X)$ l'espace des fonctions $u(x,\lambda)$ pour $\lambda \geq 1$ telles que $u(x,\lambda) \in C^\infty(X)$ et $p(u(x,\lambda)) \in O(\lambda^{-\infty})$ pour toute semi-norme p sur $C^\infty(X)$.*

- On note $\underset{\sim}{C}^\infty_0(X)$ le sous-ensemble de $\underset{\sim}{C}^\infty(X)$ formé des fonctions à support en x dans un compact indépendant de λ.

- On note $\underset{\sim}{D}'(X)$ l'ensemble des distributions $u(x,\lambda) \in D'(X)$ telles que $\forall X' \subset\subset X$, $\exists N$ tel que $u(x,\lambda)\big|_{X'} \in W^{-N}$ et $|u|_{W^{-N}} \leq C_N \lambda^N$ où W^N est l'espace de Sobolev classique.

Si on pose $\hat{u}(\xi,\lambda) = \int e^{-i\lambda x\cdot\xi} u(x,\lambda)dx$ on a :

$$\underset{\sim}{\tilde{D}}'(X) = \{u(x,\lambda) \mid \forall \chi \in C_0^\infty(X) \mid \exists N \text{ tq } |\chi\hat{u}(\xi,\lambda)| \leq C_N \lambda^N (1+|\xi|)^N\}.$$

A.I.1. Opérateurs pseudodifférentiels à grand paramètre.

On commence par définir des classes de symboles à grand paramètre.

Soient X et Y deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition A.I.2. : *Pour $m, k \in \mathbb{R}$, $\rho, \delta \in \mathbb{R}^+$, on pose :*

$$S^{m,k}_{\rho,\delta}(X\times Y) = \{a(x,y,\xi,\lambda) \in C^\infty(X\times Y\times \mathbb{R}^n) \mid$$

$$\forall K \subset\subset X\times Y\,,\ \forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}^n \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma,K}\ \lambda^{k+\rho|\gamma|+\delta|\alpha+\beta|} \times$$

$$(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}\}\,.$$

On note $S^{m,k}_{\rho,\delta}(X) = S^{m,k}_{\rho,\delta}(X\times X)$.

Si $a \in S^{m,k}_{\rho,\delta}(X\times Y)$, on note $Op(a)$ l'opérateur :

(A.I.1) $\quad Op(a)\,u(x,\lambda) =$

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(x-y)\cdot\theta}\, a(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\, d\theta$$

qui envoie $\underset{\sim}{C}^\infty_0(Y)$ dans $\underset{\sim}{C}^\infty(X)$.

On notera $L^{m,k}_{\rho,\delta}(X) = Op(S^{m,k}_{\rho,\delta}(X))$.

On dit que $Op(a)$ est à support propre si le noyau distribution de $Op(a)$ est à support propre uniformément en λ.

<u>*Proposition A.I.3.*</u> : *Soit* $a \in S^{m,k}_{\rho,\delta}(X)$ *avec* $\rho < 1$. *On a* $Op(a) = Op(b) + R$ *où* R *a un noyau dans* $\underset{\sim}{C}^\infty(X\times X)$ *et* $b \in S^{m,k}_{\rho,\delta}(X)$ *est tel que* $Op(b)$ *est à support propre.*

Il suffit de poser $b = a \times X(x,y)$ où $X(x,y) \in C^\infty(X\times X)$ est à support près de la diagonale, et on vérifie facilement que $Op((1-X)a)$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(X\times X)$. □

<u>*Proposition A.I.4.*</u> : *Soit* $a(x,y,\theta,\lambda) \in S^{m,k}_{\rho,\delta}(X)$ *à support propre. Si* $\rho+\delta<1$, *il existe* $\sigma_A(x,\xi,\lambda)$ *et* $\tilde\sigma_A(y,\xi,\lambda)$ *dans*

$S^{m,k}_{\rho,\delta}(X)$ *tels que :*

$$Op(a)\ u(x,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda x\cdot\xi}\ \sigma_A(x,\xi,\lambda)\ \hat{u}(\xi,\lambda)d\xi$$

$$Op(a)\ u(x,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(x-y)\cdot\xi}\ \tilde{\sigma}_A(y,\xi,\lambda)\ u(y,\lambda)dy\ d\xi\ .$$

Si $A = Op(a)$ *, on appelle* σ_A *(resp.* $\tilde{\sigma}_A$*) le symbole à gauche (resp. à droite) de* A *.*

On a : $\sigma_A(x,\xi,\lambda) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{-|\alpha|} D^\alpha_y \partial^\alpha_\xi\ a(x,y,\xi,\lambda)\Big|_{y = x}$

$$\tilde{\sigma}_A(y,\xi,\lambda) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{-|\alpha|}\ (-D_x)^\alpha\ \partial^\alpha_\xi\ a(x,y,\xi,\lambda)\Big|_{x = y}\ .$$

<u>Démonstration</u> : Elle est identique à la démonstration classique. □

<u>*Proposition A.I.5.*</u> *: Soient* $A_i \in L^{m_i,k_i}_{\rho,\delta}(X)$ *pour* $i=1,2$ *, à support propre de symboles* $\sigma_{A_i}(x,\xi,\lambda)$ *, avec* $\rho + \delta < 1$.

On a : $A_1^* \in L^{m_1,k_1}_{\rho,\delta}(X)$ *et* $\sigma_{A_1^*} \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{-|\alpha|}\ \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x \bar{\sigma}_A(x,\xi,\lambda)$

$$A_1 \circ A_2 \in L^{m_1+m_2,k_1+k_2}_{\rho,\delta}(X)$$

et :
$$\sigma_{A_1 \circ A_2} \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{-|\alpha|}\ \partial^\alpha_\xi\ \sigma_{A_1}\ D^\alpha_x\ \sigma_{A_2}\ .$$

<u>*Proposition A.I.6.*</u> *: Soit* $A \in L^{0,0}_{\rho,\delta}(X)$ *avec* $\rho + \delta < 1$ *,* X *borné et* $|\sigma_A(x,\xi,\lambda)| < M$ *pour* $(x,\xi) \in X \times \mathbb{R}^n$ *. Alors on a*

$$||A||_{\mathcal{L}(L^2(X),L^2(X))} \leq M + K_N\ |\lambda|^{-N}\ \forall\ N \geq 0\ .$$

<u>Démonstration</u> : On suit la démonstration classique en construisant une racine carrée de $M^2 - A^*A$ et en obser-

vant que les opérateurs à noyau dans $\underset{\sim}{C}^{\infty}(X \times X)$ ont une norme dans $\mathcal{L}(L^2(X), L^2(X))$ qui est dans $O(|\lambda|^{-\infty})$. □

On peut étendre ces résultats au cas où λ varie dans une bande de $\mathbb{C}$ de la forme $D = \{\lambda \mid |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq C_0\ ,\ |\mathrm{Re}\,\lambda| \geq C_1\}$. Dans (A.I.1), on peut prendre $a(x,y,\theta,\lambda)$ qui dépend de λ dans D, et remplacer $e^{i\lambda(x-y)\theta}$ par $e^{i\lambda_1(x-y)\theta}$ où $\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda$. On peut même conserver le terme $e^{i\lambda(x-y)\theta}$ si le support en (y,θ) de $a(x,y,\theta,\lambda)$ est borné.

On montre maintenant un résultat sur les sommes asymptotiques de symboles.

<u>*Proposition 1.I.7.*</u> *: Soient $a_j(x,\xi,\lambda) \in S^{m_j,k_j}_{\rho,\delta}(X)$ des symboles holomorphes en λ, pour $\lambda \in D$ avec m_j et k_j qui décroissent vers $-\infty$.*
Il existe $a \in S^{m_o,k_o}_{\rho,\delta}(X)$, holomorphe en λ, tel que $a \sim \sum_j a_j$, au sens que $\forall\, n$, $a - \sum_{j<n} a_j \in S^{m_n,k_n}_{\rho,\delta}(X)$.

<u>Démonstration</u> : On prend d'abord $\tilde{a} \in S^{m_o,k_o}_{\rho,\delta}(X)$ tel que $\tilde{a} \sim \sum_j a_j$. On a donc $\overline{\partial}_\lambda \tilde{a} \in S^{-\infty,-\infty}(X)$. On construit ensuite b tel que $\overline{\partial}_\lambda b = \overline{\partial}_\lambda \tilde{a}$ sous la forme

$$b(x,\xi,\lambda) = C_o \int \frac{e^{-(\lambda-\mu)^2}}{(\lambda-\mu)}\, \overline{\partial}_\lambda \tilde{a}(x,\xi,\mu)\,d\mu$$

et on a $b \in S^{-\infty,-\infty}(X)$ pour $\lambda \in D$.

Alors $a = \tilde{a} - b$ vérifie la proposition. □

On montre maintenant une estimation sur un symbole qui sera utile dans la section 4.

Proposition A.I.8. : Soit $m(x)$ la fonction introduite dans la section 3, et $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\{|t| \geqq 1\}$. Si $\rho < 1/2$,

$$s_1 = \chi(|\xi|\lambda^\rho)\,(m^2(x\,\lambda^{1/2}) + \lambda|\xi|^2)^{-p} \in S^{-2p,(2\rho-1)p}_{\rho,1/2}(X)$$

$$s_2 = \chi(|x|\lambda^\rho)\,(m^2(x\,\lambda^{1/2}) + \lambda|\xi|^2)^{-p} \in S^{-2p,(2\rho-1)p}_{1/2,\rho}(X)\ .$$

Démonstration : On commence par estimer $(m^2(x\,\lambda^{1/2}) + \lambda|\xi|^2)^{-q} = u^q$ pour $|\xi| \geqq \lambda^{-\rho}$.

- Dans $|\xi| \geqq C$, on a : $u^q \leqq \lambda^{-q}\,|\xi|^{-2q} \leqq C\,\lambda^{-q}\,(1+|\xi|)^{-2q}$.
- Dans $\lambda^{-\rho} \leqq |\xi| \leqq C$, on a : $u^q \leqq C\,\lambda^{(2\rho-1)q}$.

Donc $|u^q| \leqq C\,\lambda^{(2\rho-1)q}(1+|\xi|)^{-2q}$ dans $|\xi| \geqq \lambda^{-\rho}$.

Estimons les dérivées en ξ de s_1 : Il suffit d'estimer les dérivées en ξ qui portent sur u^p.

$D^\alpha_\xi(u^p)$ est une somme de termes du type $u^{p+q}\,\lambda^q\,\xi^{2q-|\alpha|}$. Dans $\lambda^{-\rho} \leqq |\xi| \leqq C$ on a :

$$\frac{\lambda^q\,\xi^{2q-|\alpha|}}{(m^2+\lambda\,\xi^2)^q} \leqq C\,\lambda^{\rho|\alpha|}\ .$$

Dans $|\xi| \geqq C$ on a :

$$\frac{\lambda^q\,\xi^{2q-|\alpha|}}{(m^2+\lambda\,\xi^2)^{p+q}} \leqq \lambda^{-p}\,\xi^{-2p-|\alpha|} \leqq C\,\lambda^{-p}\,(1+|\xi|)^{-2p-|\alpha|}\ .$$

Donc $|D^\alpha_\xi\, s_1| \leqq C_\alpha\,\lambda^{p(2\rho-1)+\rho|\alpha|}\,(1+|\xi|)^{-2p-|\alpha|}$.

Estimons maintenant les dérivées en x de s_1 :

$D_x^\alpha(u^p)$ est une somme de termes du type $u^{p+q}\,\lambda^{|\alpha|/2}$ et on a :

$$|D_x^\alpha(s_1)| \leqq C_\alpha\ \lambda^{p(2\rho-1)+|\alpha|/2}\ (1+|\xi|)^{-2p-|\alpha|}\ .$$

Pour démontrer la proposition pour s_2, il suffit d'estimer $\lambda^{|\alpha|/2}\,\partial_x^\alpha\, m^2(x\,\lambda^{1/2})$ pour $|x| \geqq \lambda^{-\rho}$.

Pour $|x| \geqq \lambda^{-\rho}$, on a $\partial_x^\alpha\, m^2(x\,\lambda^{1/2}) = O(\frac{1}{(x\,\lambda^{1/2})^{2+|\alpha|}})$.

Donc : $|\lambda^{|\alpha|/2}\,\partial_x^\alpha\, m^2(x\,\lambda^{1/2})| \leqq C\,\lambda^{\rho|\alpha|+(2\rho-1)}$,

on peut alors suivre l'estimation pour s_1. □

On introduit maintenant des opérateurs intégraux de Fourier à grand paramètre.

Soit $a \in S^{m,k}_{\rho,\delta}(X)$, $\varphi(x,\xi) = A(x,\xi)x\cdot\xi$ avec $A(x,\xi)$ une $n\times n$ matrice inversible appartenant à $C^\infty(X\times \mathbb{R}^n)$. On pose :

$$I_a\varphi(u)(x,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(\varphi(x,\xi)-y\cdot\xi)}\,a(x,y,\xi,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\,d\xi\ .$$

$I_a\varphi$ envoie $\underset{\sim}{C}_0^\infty(X)$ dans $\underset{\sim}{C}^\infty(X)$.

On a la proposition suivante :

Proposition A.I.9. : *Si* $\rho = \delta = m = k = 0$ *on a*

$$\| I_a\varphi \|_{\mathcal{L}(L^2(X),L^2(X))} \leqq C \text{ pour } \lambda \text{ assez grand .}$$

Démonstration : On montre que $(I_a\varphi)^*(I_a\varphi)$ est un opétateur pseudodifférentiel dans $L^{0,0}_{0,0}(X)$, et on utilise la proposition A.I.6.

A.I.2. Ensemble de fréquence.

On va définir maintenant une notion d'ensemble de fréquence pour des distributions de $\underset{\sim}{D}'(X)$ proposée par Sjöstrand.

Soit $\hat{T}^*(X)$ le fibré sur X obtenu en compactifiant chaque fibre de $T^*(X)$ en ajoutant un point à l'infini dans chaque direction.

On peut écrire : $\hat{T}^*(X) = T^*(X) \cup S^*(X)$, où $S^*(X)$ est le fibré cotangent en sphères, avec la topologie naturelle.

Les points de $T^*(X)$ sont appellés finis et ceux de $S^*(X)$ infinis.

Le point infini (x,ξ) pour $\xi \neq 0$ est par définition le rayon $\{(x,t\xi), t > 0\}$ ou de façon équivalente le point $(x, \frac{\xi}{|\xi|})$ de $S^*(X)$.

On peut remarquer que $T^*(X)$ est le support du frequency set de [G.S] et $S^*(X)$ le support du front d'onde usuel.

Définition A.I.10. : Soit $P \in L^{m,k}_{\rho,\delta}(X)$ et $(x_o,\xi_o) \in \hat{T}^*(X)$.
On dit que P est elliptique en (x_o,ξ_o) si :

- *si (x_o,ξ_o) est fini : $|p(x,\xi,\lambda)| \geq C\,\lambda^k$ dans un voisinage de (x_o,ξ_o).*
- *si (x_o,ξ_o) est infini : $|p(x,\xi,\lambda)| \geq C\,\lambda^k(1+|\xi|)^m$ dans un voisinage conique de (x_o,ξ_o) et pour $|\xi| \geq 1/C$.*

Ici p est le symbole de P et les voisinages sont indépendants de λ .

Il est clair que l'ensemble des points elliptiques de P est ouvert dans $\hat{T}^*(X)$.

Définition A.I.11. : Soit $u \in \underset{\sim}{D}'(X)$. *On dit que* $(x_o, \xi_o) \in \hat{T}^*(X)$ *n'appartient pas à* $\underset{\sim}{WF}(u)$, *si il existe* $P \in L^{o,o}_{\rho,\delta}(X)$ *avec* $\rho + \delta < 1$ *proprement supporté, tel que* $Pu \in \underset{\sim}{C}^\infty(X)$ *et* p *est elliptique en* (x_o, ξ_o).

Proposition A.I.12. : Soit $(x_o, \xi_o) \in \hat{T}^*(X)$, *et* $u \in \underset{\sim}{D}'(X)$.

- *Si* (x_o, ξ_o) *est fini,* $(x_o, \xi_o) \notin \underset{\sim}{WF}(u)$ *si et seulement si, il existe* $\chi \in C_o^\infty(X)$ *avec* $\chi(x_o) = 1$, *telle que* $|\widehat{\chi u}(\xi, \lambda)| \geq C_N \lambda^{-N}$ $\forall N$, *pour* ξ *dans un voisinage de* ξ_o *indépendant de* N.
- *Si* (x_o, ξ_o) *est infini,* $(x_o, \xi_o) \notin \underset{\sim}{WF}(u)$, *si et seulement si, il existe* $\chi \in C_o^\infty(X)$ *avec* $\chi(x_o) = 1$, *telle que :* $|\hat{\chi} u(\xi, \lambda)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} \lambda^{-N}$ $\forall N$, *pour* ξ *dans un voisinage conique de* ξ_o *et* $|\xi| \geq C$.

<u>Remarque</u> : On voit que la projection sur $T^*(X)$ de $\underset{\sim}{WF}(u)$ est exactement le frequency set de [G.S].
Par contre, si on fixe λ et si on considère $WFu(x,\lambda)$ comme inclus dans $S^*(X)$ on a : $WFu(x,\lambda) \subset \underset{\sim}{WF}u \cap S^*(X)$, mais l'inclusion inverse est fausse en général.

On va maintenant faire opérer des opérateurs à noyau sur des éléments de $\underset{\sim}{D}'(X)$ sous certaines conditions sur l'ensemble de fréquence du noyau.

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts et A_λ une famille d'opérateurs de $C_o^\infty(Y)$ dans $D'(X)$, qui vérifie les conditions suivantes : $\forall K$ et L ouverts relativement compacts dans Y et X, il existe $C_{K,L}$ et $N \geqq 0$, tels que :

$$A_\lambda u|_L \in W^{-N}(L) \quad \forall u \in C_o^\infty(K)$$

et :

$$|A_\lambda u|_{H^{-N}(L)} \leqq C_{K,L}\, \lambda^N \, |u|_{H^N(K)} .$$

Si K_λ est le noyau distribution de A_λ, on en déduit facilement que $K_\lambda \in \underset{\sim}{D}'(X \times X)$.
On définit alors $\underset{\sim}{WF}'(A_\lambda)$ comme l'image de $\underset{\sim}{WF}(K_\lambda)$ par : $(x,\xi,y,\eta) \to (x,\xi,y,-\eta)$.
On peut maintenant faire opérer A_λ sur une distribution u de $\underset{\sim}{D}'(X)$ si $\underset{\sim}{WF}(u)$ est dans une bonne position.
On note N_X l'ensemble des points infinis engendrés par $(x,0,y,\eta)$, $\eta \neq 0$. $(x,\xi,y,\eta) \to (x,\xi)$ induit alors une application $\Pi_X : \hat{T}^*(X \times Y) \setminus N_X \to \hat{T}^*(X)$.
De même si N_Y est l'ensemble des points infinis engendrés par $(x,\xi,y,0)$, $\xi \neq 0$, $(x,\xi,y,\eta) \to (y,\eta)$ induit une application $\Pi_Y : \hat{T}^*(X \times Y) \setminus N_Y \to \hat{T}^*(Y)$.

Soit maintenant A_λ un opérateur du type considéré plus haut.

On a la proposition suivante :

<u>*Proposition A.I.13.*</u> *: Soit* $u \in \underset{\sim}{\mathcal{E}}'(Y)$ *tel que :*

(A.I.2) $\underset{\sim}{WF}'_Y(A_\lambda) \cap \underset{\sim}{WF}(u) = \emptyset$, *où* $\underset{\sim}{WF}'_Y(A_\lambda) = \Pi_Y(\underset{\sim}{WF}'(A) \cap N_X)$.

On peut alors définir $A_\lambda u \in \underset{\sim}{D}'(X)$ *et on a :*

(A.I.3) $\underset{\sim}{WF}(A_\lambda u) \subset \Pi_X((\underset{\sim}{WF}'(A_\lambda) \cap N_Y) \cup (\underset{\sim}{WF}'(A_\lambda) \cap \Pi_Y^{-1}(\underset{\sim}{WF}(u)))$.

<u>Démonstration</u> : On peut suivre la démonstration usuelle :
On introduit des partitions de l'unité :

$$1 = \sum_{k,k'} \alpha_k(x)\alpha_{k'}(y) \qquad 1 = \sum_{k,k'} \beta_k(x)\beta_{k'}(y)$$

avec : $\beta_k = 1$ sur $\mathrm{supp}(\alpha_k)$.
La condition (A.I.2) entraîne que pour tout λ fixé, on peut définir $A_\lambda u$ comme élément de $D'(X)$, après avoir introduit des partitions de l'unité convenables, et indépendantes de λ .
On obtient :

$$\text{(A.I.4)} \quad \widehat{A_\lambda u}(\xi,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \sum_{k'} \int \widehat{\beta_{k'} u}(\eta,\lambda)\widehat{\alpha_{k'} K}(\xi,-\eta,\lambda)d\eta \ .$$

Considérons un seul terme de cette somme :
Dans $|\eta| \leqq C\,|\xi|$, on a :

$$\int \hat{u}(\eta,\lambda)\hat{K}(\xi,-\eta,\lambda)d\eta \leqq C\,\lambda^{N_o}\,(1+|\xi|)^{N_o} \ .$$

Dans $|\xi| \leqq \varepsilon\,|\eta|$, si $\hat{u}(\eta,\lambda)$ n'est pas à décroissance rapide, c'est $\hat{K}(\xi,-\eta,\lambda)$ qui est à décroissance rapide d'après (A.I.2).

Cette région ne contribue donc pas à (A.I.4), et $A_\lambda u$ appartient bien à $\underset{\sim}{D}'(X)$.

Vérifions maintenant la majoration (A.I.3). On considère toujours un seul terme de (A.I.4).

Soit $(x_o,\xi_o) \in \hat{T}^*(X)$ un point qui n'est pas dans le membre de droite :

- si (x_o,ξ_o) est fini : pour ξ proche de ξ_o, si $(\xi,-\eta) \in \underset{\sim}{WF}(K_\lambda)$ alors $\eta \notin \underset{\sim}{WF}(u)$. On a donc :

$$|\hat{K}_\lambda(\xi,-\eta,\lambda)\ \hat{u}(\eta,\lambda)| \leqq C_N(1+|\eta|)^{-N}\ \lambda^{-N} \quad \forall N \geqq 0 .$$

Donc $(x_o,\xi_o) \notin \underset{\sim}{WF}\, A_\lambda u$.

- Si (x_o,ξ_o) est infini : la démonstration est identique au cas classique.

On a donc démontré la proposition. $\square$

<u>Application</u> : Trace d'une distribution de $\underset{\sim}{D}'(X)$ sur l'hypersurface $x_n=0$. On note $x=(x',x_n)$, $y=\mathbb{R}^{n-1}$. En appliquant la proposition A.I.13, on voit que si $u \in \underset{\sim}{D}'(X)$, et si $\underset{\sim}{WF}\, u$ ne rencontre pas les points infinis du type $(x',0,0,\xi_n)$, $u|_{x_n=0} \in \underset{\sim}{D}'(Y)$ et on a :

$$\underset{\sim}{WF}\, u|_{x_n=0} \subset \{(x',\xi') \mid \exists\ \xi_n \text{ tq } (x',0,\xi',\xi_n) \in \underset{\sim}{WF}\, u\} .$$

A.II.1. <u>Estimation de la résolvante du problème de Dirichlet dans une bande de $\mathbb{C}$ pour un obstacle strictement convexe</u>.

Soit Ω un obstacle strictement convexe à bord C^∞ inclus dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\Gamma = \partial\Omega$. On veut estimer la résolvante du problème aux limites

$$\text{(A.II.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = h \\ u|_\Gamma = 0 \\ u \ \text{sortante} \end{cases}$$

où $h \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)$ et λ varie dans $D = \{z \,|\, |\mathrm{Im}\, z| \leq C_1$ et $|z| \geq C_2\}$ avec C_1 et C_2 assez grands. Notons $u = S_+(\lambda)h$ la résolvante de (A.II.1).

<u>*Proposition A.II.1.*</u> : *Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathrm{supp}\, h \subset \{x \,|\, |x| \leq a\}$.*

Soit $C(x)$ une fonction de troncature à support dans $\{x \,|\, |x| \leq a\}$.

On a : $\forall\, h \in C_0^\infty(\{|x| \leq a\})$:

$$|C\,u|_{W^1} \leq K_{a_1}\, |h|_{L^2}$$

$$\left|C\,\frac{\partial^\alpha u}{\partial \lambda^\alpha}\right|_{W^1} \leq K_{a_1}\, |h|_{L^2} \qquad \alpha = 1, 2\ .$$

W^m désigne l'espace de Sobolev d'ordre m classique.

<u>Démonstration</u> : On utilise les résultats de Melrose [M_2] sur les pôles de la matrice de scattering pour un obstacle strictement convexe, et la caractérisation de la résolvante de (A.II.1) à l'aide du 1/2 groupe de Lax-Phillips.

Rappellons quelques résultats de [L.P] :

On note H l'espace de Hilbert qui est la fermeture de $(C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega))^2$ pour la norme

$$|(f_1, f_2)|_H^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega} |\partial_x f_1|^2 + |f_2|^2\, dx$$

On note A l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ et B^a le générateur infinitésimal du 1/2 groupe $Z(t)$ de Lax-Phillips.
(Voir [L.P] pour la définition de $Z(t)$).
Pour avoir une solution sortante de (A.II.1), on prend la solution sortante de $Af - i\lambda f = (0,h) = g$, et on prend $u = f_1$.
D'après [L.P] (Th. IV.4.2) on a : $f = (i\lambda - B^a)^{-1}_g$ si $|x| \leqq a$ et $\operatorname{supp} h \subset \{x \,\big|\, |x| \leqq a\}$. Notons donc f^a la restriction de f à $\{|x| \leqq a\}$.
D'autre part $(i\lambda - B^a)^{-1} g = \int_0^\infty e^{-i\lambda t} Z(t)\, g\, dt$.
On utilise maintenant le Th. III.5.4 de [L.P], et le fait que $Z(T)$ est compact pour T assez grand. ([M_2]). Si on range les pôles λ_i de la résolvante de (A.II.1) dans l'ordre croissant de leurs parties imaginaires, et si on note P_j la projection propre sur le jème espace propre généralisé de B^a, pour la valeur propre $i\lambda_j$, que l'on notera V_j, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \| Z(t) - \sum_{j=1}^{n} Z(t)P_j \| \leqq C_{n,\varepsilon} \, |e^{(-i\lambda_{n+1}+\varepsilon)t}|$$

où $\| \ \|$ désigne la norme dans $\mathcal{L}(H,H)$.
D'après [M_2], il existe a et $b \in \mathbb{R}^+$ tels que les pôles de la résolvante de (A.1) sont dans $\operatorname{Im} z \geqq a + b \log |z|$.
Donc il existe n tel que $\operatorname{Im} \lambda_{n+1} > C_1$.
Soit $M_n = \bigoplus_1^n V_j$. On décompose g sur M_n et sur un espace

supplémentaire en $g = g_1 + g_2$, avec $g_1 = \sum_1^n P_j(g)$.

On a donc $P_j(g_2) = 0$ pour $1 \leqq j \leqq n$.

On commence par estimer $(i\lambda - B^a)^{-1} g_2 = \int_0^\infty e^{-i\lambda z t} Z(t) g_2 \, dt$.

Comme $P_j(g_2) = 0$ on a :

$$|Z(t) g_2|_H \leqq C_{n,\varepsilon} \, e^{(-\operatorname{Im} \lambda_{n+1} + \varepsilon)t} \, |g_2|_H .$$

Donc on a :

$$\text{(A.II.2)} \quad |(i\lambda - B^a)^{-1} g_2|_H \leqq C \, |g_2|_H \quad \text{pour} \quad \lambda \in D ,$$

et on a les mêmes estimations pour les dérivées par rapport à λ.

Il reste à estimer $(i\lambda - B^a)^{-1} P_j \, g$. On utilise que V_j est invariant par B^a, i.e. $B^a|_{V_j} = i\lambda_j \, \mathbb{1} + K_j$, où K_j est un opérateur nilpotent d'ordre m_j, $m_j \in \mathbb{N}$.

Prenons C_2 assez grand pour que $|\lambda_j| \leqq C_2$ $1 \leqq j \leqq n$. La solution de $i\lambda \, u_j - B^a \, u_j = P_j \, g$ est donnée par :

$$u_j = \sum_{k=0}^{m_j - 1} (K_j)^k \frac{1}{i(\lambda - \lambda_j)^k} P_j \, g .$$

Donc :

$$\text{(A.II.3)} \qquad |(i\lambda - B^a)^{-1} g_1|_H \leqq C \, |g_1|_H \quad \text{pour} \quad \lambda \in D ,$$

et on a les mêmes estimations pour les dérivées en λ.

Les estimations (A.II.2), (A.II.3) donnent :

$$|(i\lambda - B^a)^{-1} g|_H \leq C \, |g|_H \quad \text{pour} \quad \lambda \in D .$$

Si C est une fonction de troncature à support dans $\{x \,|\, |x| \leq a\}$, on a donc :

$$\forall \lambda \in D \quad |\nabla_x (C u)|_{L^2} \leq C_a \, |h|_{L^2}$$

$$|C u|_{L^2} \leq C_a \, |\lambda|^{-1} \, |h|_{L^2} .$$

On a les mêmes estimations pour $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2}$. On a donc démontré la proposition. □

On estime maintenant la résolvante du problème aux limites non homogène :

$$\text{(A.II.5)} \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = 0 \\ u|_\Gamma = v \\ u \text{ sortante} \end{cases} \quad \text{pour} \quad \lambda \in D .$$

Notons $u = H_+(\lambda) v$ cette résolvante.

Proposition A.II.2. : Soit $\mathcal{U}$ un compact de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$.

On a :

$$|H_+(\lambda) v|_{W^1(U)} \leq C_{\mathcal{U}} \, |\lambda|^2 \, |v|_{W^2(\Gamma)} .$$

Démonstration : Soit $e : D'(\Gamma) \to D'(\mathbb{R}^{n+1})$ un opérateur d'extension.

On a $H_+(\lambda) = e - S_+(\lambda)(\Delta + \lambda^2) e$.

Si $v \in W^2(\Gamma)$ on a : $|(\Delta + \lambda^2) e \, v|_{L^2(\mathcal{U})} \leq C \, |\lambda|^2 \, |v|_{W^2(\Gamma)}$

donc d'après la Proposition A.II.1

$$|S_+(\Delta+\lambda^2)ev|_{W^1(\mathcal{U})} \leq C|\lambda|^2 \; |v|_{W^2(\Gamma)} \; .$$

D'autre part $|ev|_{W^1(\mathcal{U})} \leq C\,|v|_{W^2(\Gamma)}$, ce qui démontre la proposition. □

On va maintenant construire une solution asymptotique sortante du problème de Dirichlet (A.II.5) au voisinage de Ω .

Soit $\tilde{\mathcal{U}}$ un voisinage de Ω assez petit et $U = \tilde{U} \setminus \Omega$.

On va construire un opérateur :

$$\hat{H}_+(\lambda) \; : \; \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma) \to \underset{\sim}{C}^\infty(U)$$

tel que :

(A.II.5')
$$\begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\hat{H}_+u = K_\lambda u \\ \quad H_+u\big|_\Gamma = u + R_\lambda u \end{cases}$$

où K_λ et R_λ ont des noyaux dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \times \Gamma)$ et $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$ respectivement.

Rappellons la classification des points de $\hat{T}^*(\Gamma)$ utilisée dans les problèmes aux limites. On note

$\mathcal{H} = \{(y,\eta) \in T^*(\Gamma) \mid |\eta| < 1\}$ appellée zone hyperbolique
$\mathcal{G} = \{(y,\eta) \in T^*(\Gamma) \mid |\eta| = 1\}$ appellé zone glancing
$\mathcal{E} = \{(y,\eta) \in \hat{T}^*(\Gamma) \mid |\eta| > 1\}$ appellée zone elliptique.

A.II.2. Construction dans la zone hyperbolique.

Soit $(y^o,\eta^o) \in T^*(\Gamma)$ avec $|\eta^o| < 1$, et soit $\chi(y,\eta) \in C_o^\infty(T^*(\Gamma))$ une fonction de troncature au voisinage de (y^o,η^o), à support contenu dans $\mathcal{H}$.

On a la proposition suivante :

Proposition A.II.3. : Il existe un opérateur $\hat{H}_{h,+} : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma) \to \underset{\sim}{C}^\infty(U)$ tel que :

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)\hat{H}_{h,+}\, u = K_h\, u \\ \hat{H}_{h,+}\, u|_\Gamma = Op(\chi)\, u \end{cases}$$

où K_h a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \times \Gamma)$ et

(A.II.6)

$$\hat{H}_{h,+}u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(\psi(x,\theta)-y\cdot\theta)}\, a(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\, dy\, d\theta .$$

Démonstration : Si on applique $(\Delta+\lambda^2)$ sous le signe somme de (A.II.6) on obtient :

$$(\Delta+\lambda^2)\hat{H}_{h,+}\, u(x,\lambda) =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(\psi(x,\theta)-y\cdot\theta)}\ \Delta a - i\lambda\, \nabla\psi \cdot \nabla a - i\lambda\, \Delta\psi \cdot a - \lambda^2((\nabla\psi)^2-1)\, u(y,\lambda)\, dy\, d\theta .$$

On prend donc ψ solution de l'équation eikonale :

$$\text{(A.II.7)} \qquad \begin{cases} (\nabla\psi)^2 = 1 \\ \psi|_\Gamma = x \cdot \theta . \end{cases}$$

Cette équation a une solution locale pour (x,θ) proche de (y^o,η^o) qui vérifie $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(y^o,\eta^o) > 0$.

Puis on résoud les équations de transport :

$$\text{(A.II.8)} \qquad \left\{\begin{array}{l} 2i\,\nabla\psi\cdot\nabla a + i\,\Delta\psi\cdot a - \lambda^{-1}\Delta a = O(\lambda^{-\infty}) \\ a|_{\Gamma_1} = \chi(y,\theta)\ . \end{array}\right.$$

En écrivant a comme série asymptotique : $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\theta)\lambda^{-j}$ on obtient des équations :

$$\left\{\begin{array}{l} 2i\,\nabla\psi\cdot\nabla a_j + i\,\Delta\psi\cdot a_j = \Delta a_{j-1} \\ a_j|_{\Gamma_1} = \delta_{j,0}\,\chi(y,\theta) \end{array}\right.$$

et on peut construire comme dans l'appendice I un symbole $a(x,y,\theta,\lambda)$ dans $S^{o,o}(U)$ équivalent à $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\theta)\lambda^{-j}$, en utilisant la Proposition A.I.7.

On a $\widehat{H}_{+,h}(\lambda)u|_\Gamma = Op(\chi)v$, et a est nul en dehors des rayons sortants qui partent de $\mathrm{supp}(\chi)$. On a donc bien: $(\Delta+\lambda^2)\widehat{H}_{h,+} = K_h$, où le noyau de K_h est dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U\setminus\Gamma\times\Gamma)$. $\square$

<u>*Corollaire A.II.4.*</u> *: On a :*

$$WF'\,\widehat{H}_{h,+} \subset \{(x,\xi,y,\eta) \in T^*(U\setminus\Gamma)\times T^*(\Gamma)\,|\,|\xi|^2 = 1\,,$$

(x,ξ) appartient au 1/2 rayon sortant de (y,η), $(y,\eta)\in \mathrm{supp}\,\chi\}$.

<u>Démonstration</u> : Notons $K(x,y,\lambda)$ le noyau de $\widehat{H}_{h,+}$: on a :

$$\hat{K}(\xi,\eta,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{-i\lambda(x\cdot\xi+\psi(x,\theta)-y\cdot\theta+y\cdot\eta)}a(x,y,\theta,\lambda)dyd\theta dx.$$

En utilisant le théorème de la phase non stationnaire, on voit facilement que $\hat{K}(\xi,\eta,\lambda) \in O(|\lambda|^{-\infty})$ si

$$\xi \neq -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\theta) \text{ , ou } y \neq \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(x,\theta) \text{ ou } \theta \neq \eta.$$

Les point finis de $\underset{\sim}{WF}'\widehat{H}_{h,+}$ sont donc bien inclus dans le membre de droite.

Pour traiter le cas des points infinis, on peut par exemple utiliser la phase non stationnaire en x et en y et remarquer que l'on gagne des puissance de $\lambda(1+|\eta|+|\xi|)$ en intégrant par parties.

On a donc démontré le corollaire.

A.II.3. <u>Construction dans la zone glancing</u>.

Soit $(y^o,\eta^o) \in T^*(\Gamma)$ avec $|\eta^o| = 1$, et soit $\chi(y,\eta) \in C_0^\infty(T^*(\Gamma))$ une fonction de troncature égale à 1 sur un petit voisinage de (y^o,η^o).

<u>*Proposition A.II.5.*</u> *: Il existe un opérateur* $\hat{H}_{g,+} : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma) \to \underset{\sim}{C}^\infty(U)$ *tel que* $\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)\hat{H}_{g,+}u = K_g u \\ \hat{H}_{g,+}u|_\Gamma = Op(\chi)u + R_g u \end{cases}$

où K_g *a un noyau dans* $\underset{\sim}{C}^\infty(U\times\Gamma)$, R_g *a un noyau dans* $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$ *et*

$$\hat{H}_{g,+}u(x,\lambda) = \tilde{H}_{g,+} \circ M_g u \quad \textit{avec :}$$

• $\tilde{H}_{g,+}\, v(x,\lambda) =$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(\theta(x,\eta)-\varphi_o(y',\eta))} \left(g_o(x,\eta,\lambda)\, \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho(x,\eta))}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} + \right.$$

$$\left. + i\,\lambda^{-1/3}\, g_1(x,\eta,\lambda)\, \frac{A'_-(\lambda^{2/3}\rho(x,\eta))\right) X_1(\alpha|\lambda|^{\varepsilon})}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\, v(y',\lambda)dy'\, d\eta$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(\tilde{\theta}(x,\eta)-\varphi_o(y',\eta))}\, d(x,\eta,\lambda)(1-X_1)(\alpha|\lambda|^{\varepsilon})v(y',\lambda)dy'\, d\eta.$$

• $M_g \in L^{o,o}_{2/3,\varepsilon}(\Gamma)$ avec $\varepsilon < 2/3$.

<u>Démonstration</u> : On va suivre de près les constructions de [M_1], [T], [E] en les adaptant simplement à notre cadre.

On commence par résoudre l'équation homogène sans s'occuper de la condition au bord.

On cherche donc une solution $v(x,\lambda)$ sous la forme :

$$v(x,\lambda) =$$

$$= \int e^{i\lambda\theta(x,\eta)}\, g_o(x,\eta,\lambda)\, \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho(x,\eta))}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}$$

$$+ i\,\lambda^{-1/3}\, g_1(x,\eta,\lambda)\, \frac{A'_-(\lambda^{2/3}\rho(x,\eta))}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\, w(\eta)\, d\eta$$

avec $\alpha = |\eta| - 1$.

Si on applique $(\Delta+\lambda^2)$ sous l'intégrale on obtient une expression :

$b(x,\eta,\lambda) =$

$$= \lambda^2 g_o \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} (1 + \rho(\nabla\rho)^2 - (\nabla\theta)^2)$$

$$- 2\lambda^2 g_1 \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} \rho \nabla\theta \cdot \nabla\rho + i\lambda^{5/3}(1+\rho(\nabla\rho)^2 - (\nabla\theta)^2) g_1 \frac{A_-'(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}$$

$$+ 2i\lambda^{5/3} (\nabla\theta \cdot \nabla\rho)\rho g_o \frac{A_-'(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} + i\lambda \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} (2\nabla\theta \cdot \nabla g_o$$

$$+ 2\rho \nabla\rho \cdot \nabla g_1 + \Delta\theta\, g_o + \rho\, \Delta\rho\, g_1 + (\nabla\rho)^2 g_1 - i\lambda^{-1} \Delta g_o)$$

$$+ \lambda^{2/3} \frac{A_-'(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} (2\nabla\rho \cdot \nabla g_o - 2\nabla\theta \cdot \nabla g_1 + \Delta\rho\, g_o - \Delta\theta\, g_1 + \lambda^{-1}\Delta g_1).$$

On obtient donc les équations suivantes :

$$\text{(A.II.10)} \qquad \begin{cases} (\nabla\theta)^2 - \rho(\nabla\rho)^2 = 1 \\ \nabla\theta \cdot \nabla\rho = 1 \end{cases}$$

$$\text{(A.II.11)} \begin{cases} 2\nabla\theta \cdot \nabla g_o + 2\rho\nabla\rho \cdot \nabla g_1 + \Delta\theta\, g_o + (\nabla\rho)^2 g_1 + \rho\, \Delta\rho\, g_1 - i\lambda^{-1}\Delta g_o = 0 \\ 2\nabla\rho \cdot \nabla g_o - 2\nabla\theta \cdot \nabla g_1 + \Delta\rho \cdot g_o - \Delta\theta\, g_1 + \lambda^{-1}\Delta g_1 = 0. \end{cases}$$

Faisons un changement de variables local près de y^o, où Γ est donné par $x_1 = 0$ avec $x = (x_1, x')$.
D'après les résultats de [T], on peut trouver ρ et θ fonctions C^∞ telles que :

$$\begin{cases} (\nabla\theta)^2 - \rho(\nabla\rho)^2 = 1 & \text{dans } \rho \leq 0 \text{ et } (x,\eta) \text{ proche de} \\ \nabla\theta \cdot \nabla\rho = 0 & (y^o, \eta^o). \end{cases}$$

avec :

(A.II.12) $$\left|\det \frac{\partial^2\theta}{\partial y \partial \eta}\right| \neq 0 \quad \text{sur} \quad x_1 = 0$$

(A.II.13) $$\rho = \alpha + O(\alpha^\infty) \quad \text{sur} \quad x_1 = 0$$

(A.II.14) $$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} < 0 \quad \text{sur} \quad \rho = 0 \; .$$

On peut aussi résoudre les équations suivantes dans $\rho \leqq 0$:

$$\begin{cases} 2\,\nabla\theta \cdot \nabla g_o + 2\rho\,\nabla\rho \cdot \nabla g_1 + \Delta\theta\, g_o + (\nabla\rho)^2\, g_1 + \rho\,\nabla\rho\, g_1 = F_o \\ 2\,\nabla\rho \cdot \nabla g_o - 2\,\nabla\theta \cdot \nabla g_1 + \Delta\rho\, g_o - \Delta\theta\, g_1 = F_1 \end{cases}$$

pour F_o, F_1 fonctions C^∞ réelles et avec :

$$g_1(y^o,\eta^o) = 0 \quad , \quad g_o(y^o,\eta^o) \neq 0 \; .$$

On peut donc résoudre (A.II.10) et (A.II.11) dans $\rho \leqq 0$, en cherchant g_o et g_1 sous la forme de séries asymptotiques en λ comme dans la Proposition A.II.3.

D'autre part on a l'asymptotique suivante pour la fonction $A_-(s)$:

(A.II.15) $$\begin{cases} A_-(s) = e^{-i\,2/3(-s)^{3/2}}\ \phi_-^1(s) \\ \text{pour} \quad |s| \to +\infty \ \operatorname{Re} s < 0 \ \operatorname{Arg} s \neq \Pi/3 \\ A_-(s) = e^{2/3(s)^{3/2}}\ \phi_-^2(s) \\ \text{pour} \quad |s| \to +\infty \ \operatorname{Re} s > 0 \ \operatorname{Arg} s \neq \Pi/3 \end{cases}$$

avec $\phi_-^i(s) \in S^{-1/4}_{1,0}(\mathbb{C})$ pour $i=1,2$ et où $(s)^{1/2}$ est la branche définie pour $\arg s \neq \pi$. ϕ_+^i sont de plus elliptiques dans $S^{-1/4}_{1,0}(D)$ où D est défini en A.II.

Pour voir que $b(x,\eta,\lambda)$ est une solution asymptotique de $(\Delta+\lambda^2)b = O(|\lambda|^{-\infty})$ il faut estimer la taille des termes $\dfrac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}$ et $\dfrac{A'_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}$, qui a priori peuvent être exponentiellement grands en λ.

On se limite ici à un petit voisinage de $\alpha=0$.

- Dans $\alpha \leqq -C|\lambda|^{-\varepsilon}$ avec $0<\varepsilon<2/3$, $C>0$ on a aussi $\rho(0,x',\eta)=\rho_0 \leqq -C'|\lambda|^{-\varepsilon}$ si $|\alpha|$ reste assez petit, à cause de A.II.13, et donc $\rho \leqq -C'|\lambda|^{-\varepsilon}$ à cause de (A.II.14).

Il est facile de vérifier que dans cette région $\phi^i_-(\lambda^{2/3}\rho)$ et $\phi^i_-(\lambda^{2/3}\alpha)$ appartiennent à $S^{o,-1/6+\varepsilon/4}_{\varepsilon,\varepsilon}(V)$ où V est un petit voisinage de y^o.

Donc dans la région $\alpha \leqq -C|\lambda|^{-\varepsilon}$ on a $(\Delta+\lambda^2)b \in O(|\lambda|^{-\infty})$.

- Dans $|\alpha| \leqq C|\lambda|^{-\varepsilon}$: on a aussi $|\rho_o| \leqq C'|\lambda|^{-\varepsilon}$.

Comme les équations (A.II.10) et (A.II.11) sont vérifiées dans $\rho \leqq 0$, elles sont vérifiées dans $\rho \geqq 0$ modulo une erreur qui est $O(\rho^\infty)$. On a donc :

$$|(\nabla\theta)^2 - \rho(\nabla\rho)^2 - 1| \leqq C_N |\lambda|^{-N\varepsilon} \quad \forall N \geqq 0$$
$$|\nabla\theta \cdot \nabla\rho - 1| \leqq C_N |\lambda|^{-N\varepsilon}$$

et de même pour les seconds membres de (A.II.11).
Il reste donc à estimer la taille des termes contenant les fonctions d'Airy.

Regardons par exemple le terme :

$$\frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} = e^{2/3\,\lambda\,(\rho)^{3/2}-(\alpha)^{3/2}} \times \frac{\phi_-^2(\lambda^{2/3}\rho)}{\phi_-^2(\lambda^{2/3}\alpha)}$$

on a $\rho \leqq \rho_0$ donc il suffit d'estimer

$$e^{2/3\,\lambda\,(\rho_0)^{3/2}-(\alpha)^{3/2}}\ .$$

Comme $\rho_0^{3/2}-\alpha^{3/2} \in O(|\alpha|^{\infty})$ on a :

$$|\lambda(\rho_0^{3/2}-\alpha^{3/2})| \leqq C_1 \quad \text{si} \quad |\alpha| \leqq C\,|\lambda|^{-\varepsilon}\ .$$

Enfin $\phi_-^2(\lambda^{2/3}\rho)$ est certainement borné pour λ dans une bande D et $\dfrac{1}{\phi_-^2(\lambda^{2/3}\alpha)}$ aussi car ϕ_-^2 est elliptique dans D .

Donc dans $|\alpha| \leqq C\,|\lambda|^{-\varepsilon}$ on a $(\Delta+\lambda^2)b \in O(|\lambda|^{-\infty})$.

On veut maintenant étendre la solution dans la région elliptique, c'est-à-dire dans $\alpha \geqq C\,|\lambda|^{-\varepsilon}$.

On commence par résoudre l'équation eikonale à l'ordre 1 sur $x_1=0$.

<u>*Lemme A.II.6*</u> *: Il existe $\tilde{\theta}(x,\eta)$ C^{∞} au voisinage de (y^o,η^o) telle que :*

(A.II.16) $$(\nabla\tilde{\theta})^2 = 1 + x_1\, c_1(x,\eta)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Ecrivons l'équation eikonale dans les coordonnées (x_1,x') où Γ est donné par $x_1=0$. On peut

prendre par exemple des coordonnées cartésiennes $(\alpha_1,\alpha_2 \ldots \alpha_{n+1})$ où $\alpha_1=0$ est l'équation du plan tangent à Γ en (y^o,η^o) et poser $\begin{cases} x_1=\alpha_1-f(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}) \\ x'=(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}) \end{cases}$

si $\alpha_1=f(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1})$ est une équation locale de Γ.

En écrivant (A.II.10) dans les coordonnées (x_1,x') sur $x_1=0$ on obtient : si $f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i'}$

$$\begin{cases} (\frac{\partial\theta}{\partial x_1})^2 (1+\sum\limits_1^n (f_i)^2 - 2\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\sum\limits_1^n f_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i'} + \sum\limits_1^n (\frac{\partial\theta}{\partial x_i'})^2 \\ = 1+\rho(\nabla\rho)^2+O(\rho^\infty) \\ \frac{\partial\rho}{\partial x_1}(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}(1+\sum\limits_1^n (f_i)^2) - \sum\limits_1^n f_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i'}) = \sum\limits_1^n \frac{\partial\theta}{\partial x_1} f_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i'} \\ - \sum\limits_1^n \frac{\partial\theta}{\partial x_i'}\frac{\partial\rho}{\partial x_i'} + O(\rho^\infty)\ . \end{cases}$$

En utilisant que $\rho(0,x',\eta)=\alpha+O(\alpha^\infty)$ et que $\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\neq 0$, on a :

$$\text{(A.II.17)}\quad \begin{cases} (\frac{\partial\theta}{\partial x_1})^2\ (1+\sum\limits_1^n f_i^2) - 2\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\sum\limits_1^n f_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i'} \\ +\sum\limits_1^n (\frac{\partial\theta}{\partial x_i'})^2 = 1+\alpha\, a_2 \quad \text{avec} \quad a_2>0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial x_1}(1+\sum\limits_1^n f_i^2 - \sum\limits_1^n f_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i'}) = \alpha\, a_1 \quad \text{avec} \quad a_1\neq 0. \end{cases}$$

On cherche $\tilde\theta$ sous la forme $\tilde\theta(x,\eta)=\theta(x,\eta)+x_1\,\theta_1(x,\eta)$. Il vient :

$$\text{(A.II.18)} \quad \begin{cases} \theta_1^2 \, (1 + \sum_1^n f_i^2) + 2\,\theta_1 \, (\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} \, (1 + \sum_1^n f_i^2) \\ \\ - \sum_1^n f_i \, \frac{\partial\theta}{\partial x_i'}) \; + \alpha \; a_2 = 0 \; . \end{cases}$$

Le discriminant de cette équation est de la forme $\alpha\, a_3$ avec $a_3 < 0$, à cause de (A.II.17). On prend donc θ_1 solution de (A.II.18) avec

$$\operatorname{Im}\, \theta_1 = \frac{\sqrt{\alpha} \times \sqrt{-a_3}}{1 + \sum_1^n f_i^2} > 0 \; . \qquad \square$$

En suivant [E] on définit la classe $0^{p,q} = \{c(x,\eta,\lambda) \mid c = \sum_{i=0}^{q} c_i(x,\eta,\lambda) x_1^i$ avec $c_i \in S^{p+i}_{1,0}(V)$ et on cherche une solution asymptotique sous la forme :

$$u = (d_o + x_1 \, d_1 + \ldots + x_1 \, d_N) \; e^{i\lambda\tilde{\theta}} \; .$$

On prend $d_o = g_o(x,\eta,\lambda)$. On a, à cause de (A.II.16)

$$(\Delta+\lambda^2)(d_o \; e^{i\lambda\tilde{\theta}}) = \tau_1 \; e^{i\lambda\tilde{\theta}} \quad \text{avec} \quad \tau_1 \in 0^{1,1} \; .$$

Si $d_k \in 0^{p_k,q_k}$ on a :

$$(\Delta+\lambda^2)(x_1 \, d_k \, e^{i\lambda\tilde{\theta}})$$

$$= e^{i\lambda\tilde{\theta}} \, (2i\lambda(d_k + x_1 \frac{\partial d_k}{\partial x_1})(1 + \sum_1^n f_i^2 - \sum_1^n f_i \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x_i'}) \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x_1} + \tau^1_{k+1})$$

avec $\tau^1_{k+1} \in 0^{p_k,q_{k+2}}$.

On a :

$$2(1+\sum_1^n f_i^2 - \sum_1^n f_i \frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_i'}) \frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}$$

$$= 2\alpha\, a_1 + 2\theta_1\, (1+\sum_1^n f_i^2 - \sum_1^n f_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i'}) = 2\alpha\, a_1 + 2\sqrt{\Delta} = \sqrt{\alpha}\, a_4$$

avec $a_4 \neq 0$.

Donc on a :

$$\text{(A.II.19)} \quad 2(1+\sum_1^n f_i^2)\frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_1} - 2\sum_1^n f_i \frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_i'}\frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_1} = \sqrt{\alpha}\, a_4 + y_1\, a_5 \ .$$

On montre le lemme suivant :

<u>Lemme A.II.7.</u> : *Soit* $g \in O^{p,q}$. *Il existe* $d \in O^{p-1+\varepsilon/2,q}$ *tel que*

$$y_1 \frac{\partial d}{\partial y_1} + d = \frac{-\lambda^{-1}}{i\sqrt{\alpha}\, a_4}\, g \quad \textit{dans} \quad \alpha \geqq 1/2\ |\lambda|^{-\varepsilon} \ .$$

<u>Démonstration</u> : On prend d'abord

$$e(x_1,x',\eta,\lambda) = \int_0^{x_1} \frac{-\lambda^{-1} g}{\sqrt{\alpha}\ a_4}(s,x',\eta,\lambda)ds$$

et on vérifie facilement que $e = x_1 d$ avec $d \in O^{p-1+\varepsilon/2,q}$ car $\alpha \geqq 1/2\ |\lambda|^{-\varepsilon}$. d est solution de l'équation du lemme. □

On prend donc pour $k=1$, $d_1 \in O^{\varepsilon/2,1}$ tel que :

$$x_1 \frac{\partial d_1}{\partial x_1} + d_1 = \frac{-i\lambda^{-1}\tau_1}{\sqrt{\alpha}\ a_4}$$

et on a : $(\Delta+\lambda^2)((d_o+x_1\, d_1)e^{i\lambda\tilde\theta}) = \tau_2\, e^{i\lambda\tilde\theta}$ avec $\tau_2 \in O^{\varepsilon/2,3}$.

Pour $k \geq 2$, on suppose donc que :

$$(\Delta+\lambda^2)((d_o + x_1 d_1 + \ldots + x_1 d_{k-1})e^{i\lambda\tilde{\theta}}) = \tau_k \; e^{i\lambda\tilde{\theta}}$$

$$\tau_k \in O^{p_{k-1}, q_{k-1}+2} .$$

On prend $d_k \in O^{p_{k-1}+\varepsilon/2-1, q_{k-1}+2}$, tel que :

$$x_1 \frac{\partial d_k}{\partial x_1} + d_k = \frac{-i\lambda^{-1} \tau k}{\sqrt{\alpha}\; a_4} .$$

On a donc $p_k = p_{k-1} - (1-\varepsilon/2)$, $q_k = q_{k-1}+2$ donc
$p_k = 1 - k(1-\varepsilon/2)$, $q_k = 2k-2$.
Pour $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\Delta+\lambda^2)((d_o+x_1 d_1+\ldots+x_1 d_N)e^{i\lambda\tilde{\theta}}) = (i\lambda\, d_N \sqrt{\alpha}\, a_4 + \tau_{N+1})e^{i\lambda\tilde{\theta}}$$

avec $i\lambda\, d_N \sqrt{\alpha}\, a_4 + \tau_{N+1} \in O^{2-2N(1-\varepsilon/2), 2N}$.

On utilise maintenant que $\tilde{\theta}$ est complexe : $\tilde{\theta} = \theta + y_1 \theta_1$
donc $\operatorname{Im} \tilde{\theta} = \dfrac{y_1 \sqrt{\alpha} \sqrt{-a_3}}{1 + \Sigma f_i^2}$. On a donc :

$$|y_1^k \; e^{i\lambda y_1 \tilde{\theta}}| \leq C_k(\lambda \sqrt{\alpha})^{-k}$$

donc :

$$|(i\lambda\, d_N \sqrt{\alpha}\, a_4 + \tau_{N+1})e^{i\lambda\tilde{\theta}}| \leq C\, |\lambda|^{2-2N(1-\varepsilon/2)} \times |\lambda|^{(-1+\varepsilon/2)N} .$$

Si on note $d(x,\eta,\lambda)$ une fonction qui a le développement asymptotique $d_o + x_1 d_1 + \ldots + x_1 d_N + \ldots$, on a :

$$(\Delta+\lambda^2)(d\; e^{i\lambda\tilde{\theta}}) = O(|\lambda|^{-\infty}) , \text{ dans } \alpha \geq 1/2\, |\lambda|^{-\varepsilon} .$$

Pour résumer on a donc construit une solution de l'équation homogène sous la forme :

$$v(x,\lambda) = \int e^{i\lambda\theta(x,\eta)} \left(g_o(x,\eta,\lambda) \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\right.$$

$$\left. + i\lambda^{-1/3} g_1(x,\eta,\lambda) \frac{A'_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\right) X_1(\alpha|\lambda|^{\varepsilon}) w(\eta)d\eta$$

$$+ \int e^{i\lambda\tilde{\theta}(x,\eta)} d(x,\eta,\lambda)(1-X_1)(\alpha|\lambda|^{\varepsilon}) w(\eta)d\eta$$

avec $X_1(s) = 0$ pour $s \geqq 1$, $X_1(s) = 1$ pour $s \leqq \frac{1}{2}$.

<u>Condition au bord</u> :

On veut maintenant résoudre la condition au bord $v|_{\Gamma_1} = Op(\chi)u$. Soit $\varphi_o(x',\eta)$ la phase égale à $\theta_o - \frac{2}{3}(-\rho_o)^{3/2} + \frac{2}{3}(-\alpha)^{3/2}$ dans $\alpha \leqq 0$ et égale à θ_o dans $\alpha \geqq 0$, avec $\theta_o(x',\eta) = \theta(0,x',\eta)$, $\rho_o(x',\eta) = \rho(0,x',\eta)$. φ_o est C^∞ et paramètre une transformation canonique inversible car $\frac{\partial^2\theta_o}{\partial y'\partial\eta}$ est inversible en (y^o,η^o) d'après (A.II.12).

On cherche alors v sous la forme suivante :

$$v(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(\theta(x,\eta)-\varphi_o(y',\eta))} \left(g_o \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\right.$$

$$\left. + i\lambda^{-1/3} g_1 \frac{A'_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\right) X_1(\alpha|\lambda|^{\varepsilon}) w(y',\lambda)dy'\, d\eta$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(\tilde{\theta}(x,\eta)-\varphi_o(y',\eta))} d(x,\eta,\lambda)(1-X_1)(\alpha|\lambda|^{\varepsilon})$$

$$w(y',\lambda)dy'\, d\eta .$$

On a :

$$v(0,x',\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(\theta_o(x',\eta)-\varphi_o(y',\eta))} (g_o \frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho_o)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}$$

$$+ i\lambda^{-1/3} g_1 \frac{A_-'(\lambda^{2/3}\rho_o)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}) X_1(\alpha|\lambda|^{\varepsilon})\, w(y',\lambda)dy'\, d\eta$$

$$+ (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(\theta_o(x',\eta)-\varphi_o(y',\eta)} d(0,x',\eta,\lambda)(1-X_1)(\alpha|\lambda|^{\varepsilon})$$

$$w(y',\lambda)dy'\, d\eta .$$

Regardons le comportement de l'amplitude de cet opérateur noté H_o :

- <u>Dans $\alpha \leqq -C|\lambda|^{-\varepsilon}$</u> on a :

$$\frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho_o)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} e^{i\,2/3\,\lambda((-\rho_o)^{3/2}-(-\alpha)^{3/2})} \quad \text{appartient à } S^{o,o}_{\varepsilon,\varepsilon}(V).$$

- <u>Dans $|\alpha| \leqq C|\lambda|^{-\varepsilon}$</u> :

$$e^{i\,2/3\,\lambda(-\rho_o)^{3/2}-(-\alpha)^{3/2}} \quad \text{appartient à } S^{o,o}_{o,o}(V) \text{ car } \rho_o=\alpha+0(\alpha^{\infty}).$$

$\dfrac{\phi_-^1(\lambda^{2/3}\rho_o)}{\phi_-^1(\lambda^{2/3}\alpha)}$ appartient à $S^{o,o}_{2/3,0}(V)$ car en dérivant en y', on fait sortir $\lambda^{2/3}\frac{\partial\rho}{\partial y_i'}$ mais $\nabla_{y'}\rho \in O(\alpha^{\infty})$.

- <u>Dans $\alpha \geqq C|\lambda|^{-\varepsilon}$</u> on a :

$d(0,x',\eta,\lambda)$ qui appartient à $S^{o,o}_{o,o}(V)$.

Soit maintenant t_1, t_2, t_3 3 fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ et

$$\operatorname{supp} t_1 \subset]-\infty, -1/2]$$
$$\operatorname{supp} t_2 \subset [-1, 1]$$
$$\operatorname{supp} t_3 \subset [1/2, +\infty[$$

et on note $T_i = Op(t_i(\alpha|\lambda|^{\varepsilon}))$ pour $i=1,2,3$.

On a : $T_1 + T_2 + T_3 = \mathbb{1}$.

$H_o \circ T_1$ est un opérateur intégral de Fourier associé à la la phase $\theta_o(x',\eta) - \theta_o(y',\eta)$ et avec une amplitude dans $S^{o,o}_{\varepsilon,\varepsilon}(V)$. C'est donc un opérateur pseudodifférentiel (par l'astuce de Kuranishi) et $H_o \circ T_1$ est elliptique dans $L^{o,o}_{\varepsilon,\varepsilon}(V)$ microlocalement sur le support de $t_1\chi$ car $g_o(y^o,\eta^o) \neq 0$.

On peut donc trouver $S_1 \in L^{o,o}_{\varepsilon,\varepsilon}(V)$ tel que $H_o \circ T_1 \circ S_1 = T_1 \circ Op(\chi) + R_1$ où R_1 a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$.

De même on voit facilement que $H_o \circ T_2$ et $H_o \circ T_3$ sont des opérateurs pseudodifférentiels microlocalement elliptiques près de (y^o,η^o) dans $L^{o,o}_{2/3,0}(V)$ et $L^{o,o}_{\varepsilon,o}(V)$ respectivement. On peut donc trouver S_i tels que $H_o \circ T_i \circ S_i = T_i \circ Op(\chi) + R_i$ où R_i a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$ pour $i=2,3$.

En prenant $w(y',\lambda) = (S_1 + S_2 + S_3)u$ on a : $v(0,x',\lambda) = Op(\chi)u + R\,u$ où R a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$. On a donc démontré la proposition. $\square$

Regardons maintenant les singularités du noyau de $\widehat{H}_{g,+}$.

Corollaire A.II.8. : On a :

$$\underset{\sim}{WF}'(\widehat{H}_{g,+}) \subset \{(x,\xi,y,\eta) \in T^*(U \setminus \Gamma) \times T^*(\Gamma) \;\Big|\; |\xi|^2 = 1 \,,$$

(x,ξ) appartient au 1/2 rayon de (y,η), $(y,\eta) \in \operatorname{supp}\chi\}$.

Démonstration : Comme M_g est un opérateur pseudodifférentiel, il suffit de regarder les singularités du noyau de $\widetilde{H}_{g,+}$.

On remarque d'abord que le noyau du terme avec la phase $\tilde{\theta}$ est dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma \times \Gamma)$. En effet d'après la démonstration de la Proposition A.II.5 on a :

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\tilde{\theta} \geqq c_1\, x_1 |\lambda|^{-\varepsilon/2} & \text{sur le support de } \chi\,. \\ |\operatorname{Re}\tilde{\theta}| \leqq c_2\,. \end{cases}$$

On a donc si $\lambda \in D$ et $\operatorname{Re}\lambda$ est assez grand, $x_1 > 0$:

$$\operatorname{Im}(i\lambda\tilde{\theta}) \leqq -\, c_1/2\; x_1 |\lambda|^{1-\varepsilon/2} \quad ,$$

ce qui entraîne que le noyau du terme avec la phase $\tilde{\theta}$ est dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma \times \Gamma)$.

Regardons maintenant le noyau du 1er terme noté $K_g(x,y,\lambda)$. En introduisant une fonction de troncature $X_2(\alpha|\lambda|^{-\varepsilon})$ avec $\operatorname{supp} X_2 \subset]-\infty,-1/2]$, on peut écrire K_g sous la forme $K_{g_1} + K_{g_2}$ avec :

$$\widehat{K_{g_1}}(\xi,\zeta,\lambda) =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(x\cdot\xi+y\cdot\zeta-\theta(x,\eta)+\varphi_0(y,\eta)} \left(\frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} g_0\right.$$

$$\left. + i\,\lambda^{-1/3}\, g_1 \frac{A'_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)}\right)(1-X_1)\, X_2(\alpha|\lambda|^{-\varepsilon})X(y,\eta)d\eta\, dy\, dx\ .$$

Dans la région $\alpha \leqq -\frac{1}{2}|\lambda|^{-\varepsilon}$, on utilise l'asymptotique A.II.15 pour écrire :

$$\frac{A_-(\lambda^{2/3}\rho)}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} = e^{i\lambda(2/3(-\alpha)^{3/2}-2/3(-\rho)^{3/2})} \times c(x,\eta,\lambda)$$

avec $c(x,\eta,\lambda) \in S^{o,o}_{\varepsilon,\varepsilon}(V)$.

On obtient donc une phase : $x\cdot\xi+y\cdot\zeta-\theta(x,\eta)+\theta_0(y,\eta)-\frac{2}{3}(-\rho_0(y,\eta))^{3/2}+\frac{2}{3}(-\rho(x,\eta))^{3/2}$. Si x est assez proche de y^o dans $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\Omega$, ρ est strictement négatif et on peut poser $\psi(x,\eta) = \theta(x,\eta) - \frac{2}{3}(-\rho(x,\eta))^{2/3}$.

La phase s'écrit donc : $x\cdot\xi+y\cdot\zeta-\psi(x,\eta)+\psi(0,y,\eta)$.

En utilisant le théorème de la phase non stationnaire on voit que $K_g(\xi,\eta,\lambda) \in O(|\lambda|^{-\infty})$ si $\xi \neq \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\eta)$ ou $\zeta \neq -\frac{\partial\psi}{\partial y}(0,y,\eta)$, ou $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(0,y,\eta) \neq \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,\eta)$, pour x et y proches de y^o, $(y,\eta) \in \operatorname{supp}\chi$.

D'autre part (A.II.10) entraîne que $|\nabla_x\psi|^2 = 1$ et on a $\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(y^o,\eta^o) < 0$. Donc le $\underset{\sim}{WF'}(K_{g_1})$ est bien inclus dans le membre de droite donné dans le corollaire.

Regardons maintenant $\widehat{K_{g_2}}(\xi,\zeta,\lambda)$:

Dans la région $|\alpha| \leqq \frac{1}{2}|\lambda|^{-\varepsilon}$ on distingue trois cas :

1) $\underline{\rho(x,\eta) \leqq -\frac{1}{2}|\lambda|^{-\varepsilon}}$. On a :

$A_-(\lambda^{2/3}\rho) = e^{-i\lambda\, 2/3(-\rho)^{3/2}}\, c_1(x,\eta,\lambda)$ avec $c_1 \in S^{o,-1/6}_{\varepsilon,\varepsilon}(V)$

$$\frac{1}{A_-(\lambda^{2/3}\alpha)} \in S^{o,1/6}_{2/3,o}(V) .$$

On obtient donc une phase :

$$x\cdot\xi+y\cdot\zeta-\theta(x,\eta)+\frac{2}{3}(-\rho(x,\eta))^{3/2}+\varphi_o(y,\eta)$$
$$= x\cdot\xi+y\cdot\zeta-\psi(x,\eta)+\varphi_o(y,\eta)$$

et on a $|\varphi_o(y,\eta) - \psi(0,y,\eta)| \leqq C_N |\lambda|^{-N}\ \forall N$, dans $|\alpha| \leqq |\lambda|^{-\varepsilon}$.

On peut donc faire le même raisonnement que pour le noyau de K_{g_1}.

2) $|\rho(x,\eta)| \leqq \frac{1}{2}|\lambda|^{-\varepsilon}$. On a : $A_-(\lambda^{2/3}\rho) \in S^{o,-1/6}_{2/3,2/3}(V)$.
On obtient une phase :

$$x\cdot\xi+y\cdot\zeta-\theta(x,\eta)+\varphi_o(y,\eta)$$

avec $|\varphi_o(y,\eta)-\theta(0,y,\eta)| \leqq C_N |\lambda|^{-N}\ \forall N$ et $|\nabla_x\theta|^2 = 1 + O(|\lambda|^{-\infty})$ d'après (A.II.10). On peut de nouveau faire le même raisonnement que pour le noyau de K_{g_1}.

3) $\rho(x,\eta) > \frac{1}{2}|\lambda|^{-\varepsilon}$. C'est impossible si x_1 est assez proche de y^o à cause de (A.II.13), (A.II.14).
On a donc montré le corollaire pour les points finis de $T^*(U \setminus \Gamma)$, et comme dans le corollaire A.II.4 on montre

qu'il n'y a pas de points infinis dans $\underset{\sim}{WF}'(\tilde{H}_{e,+})$. □

A.II.4. Construction dans la zone elliptique.

Soit $(y^0,\eta^0) \in T^*(\Gamma)$ avec $|\eta^0| > 1$ et soit $\chi(y,\eta) \in C^\infty(T^*(\Gamma))$ une fonction de troncature à support dans $V \times W$ où V est un voisinage de y^0 et W un voisinage conique de η^0, inclus dans $\{|\eta| > 1 + \varepsilon_0\}$ avec ε_0 petit.

Soit U un petit voisinage de y^0 dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$. On notera $S^m(V \times W)$ l'espace des symboles $a(y,\eta)$ qui sont dans $S^m_{1,0}(V \times W)$ au sens classique.

On a la proposition suivante :

Proposition A.II.9. : Il existe un opérateur $\hat{H}_{e,+}$: $\underset{\sim}{C}^\infty(V) \to \underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma)$ *tel que :*

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)\, \hat{H}_{e,+}\, u = K_e\, u \\ \hat{H}_{e,+}\, u\big|_\Gamma = Op(X)u \end{cases}$$

où K_e *a un noyau dans* $\underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma \times V)$ *et :*

$$\hat{H}_{e,+}\, u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(\tilde{\varphi}(x,\theta) - y\cdot\theta)}\, \tilde{a}(x,\theta,\lambda)\, u(y)dy\, d\theta\ .$$

Démonstration : On va construire $\hat{H}_{e,+}$ comme un opérateur intégral de Fourier à phase complexe.

On commence par se placer dans les coordonnées locales $x = (x_1,x')$ où $\Gamma = \{x_1=0\}$. Avec les notations de A.II.3 l'équation eikonale s'écrit :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 \left(1 + \sum_1^n f_i^2\right) - 2 \sum_1^n f_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i'} + \sum_1^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'}\right)^2 = 1 .$$

On cherche une solution à partie imaginaire positive, on obtient donc l'équation :

$$\text{(A.II.20)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} = g(x, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}) \\ \varphi|_{x_1=0} = x' \cdot \eta \end{cases}$$

avec $g(x,\eta) = \frac{1}{a(x)} \left(\sum_1^n f_i^2 \eta_i + i(a(x)(|\eta|^2-1) - (\sum_1^n f_i \eta_i)^2)^{1/2}\right)$

et $a(x) = 1 + \sum_1^n f_i^2$.

On va résoudre A.II.20 à l'ordre ∞ sur $x_1=0$ et pour cela on introduit la classe de symboles formels $\tilde{S}^m(V \times W)$ qui est l'espace des séries formelles en x_1 à coefficients dans $S^m(V \times W)$.

On a le lemme suivant :

<u>*Lemme A.II.10.*</u> *: On peut résoudre (A.II.20) dans $\tilde{S}^1(V \times W)$, si V est assez petit.*

<u>Démonstration</u> : On remarque tout d'abord que $g(x,\eta) \in S^1(U \times W)$ si U est assez petit.

En effet on a :

$$\text{(A.II.21)} \qquad \left|a(x)(|\eta|^2-1) - (\sum_1^n f_i \eta_i)^2\right|^{1/2} \geqq c(1+|\eta|)$$

si $\eta \in W$ et U est assez petit, car $a(y^o) = 1$, $f_i(y^o) = 0$. (A.II.21) permet d'estimer les dérivées de g.

Montrons maintenant par récurrence que $\partial^k_{x_1}\varphi|_{x_1=0} \in S^1(V\times W)$.

On a : $\varphi|_{x_1=0} = x'\cdot\eta \in S^1(V\times W)$.

Si $\partial^k_{x_1}\varphi|_{x_1=0} \in S^1(V\times W)$ on obtient en dérivant (A.II.20):

$$\partial^{k+1}_{x_1}\varphi|_{x_1=0} = \sum_{\substack{\mu+|\gamma|+\sum_1^N k_i=k \\ N=|\gamma|}} \partial^{\mu}_{x_1}\partial^{\gamma}_{\eta} g(x,\varphi'_{x'})\,\partial^{1+k_1}_{x_1}\varphi'_{x'}\ldots \partial^{1+k_N}_{x_1}\varphi'_{x'}.$$

Chaque terme est bien dans $S^1(V\times W)$. On a donc démontré le lemme. □

On résout maintenant les équations de transport à l'ordre infini sur $x_1=0$. L'équation de transport s'écrit :

$$\text{(A.II.22)}\qquad \begin{cases} \alpha_1 \dfrac{\partial a}{\partial x_1} + \sum_1^n \alpha_i \dfrac{\partial a}{\partial x'_i} + \alpha_o a = \lambda^{-1}\Delta a \\ a|_{x_1=0} = X(x',\eta) \end{cases}$$

où $\alpha_1 = 2i\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\left(1-\sum_1^n f_i^2\right) - \sum_1^n f_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial x'_i}\right)$

$\alpha_i = 2i\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'_i} - f_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$

$\alpha_o = \Delta\varphi$ où Δ est le laplacien dans les coordonnées euclidiennes centrées en y^o.

α_o, α_1, α_i appartiennent à $\tilde{S}^1(V\times W)$, et on vérifie en utilisant (A.II.21) que $\dfrac{1}{\alpha_1}$ appartient à $\tilde{S}^{-1}(V\times W)$

(A.II.22) s'écrit donc :

$$\text{(A.II.23)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x_1} + \sum\limits_1^n \beta_i \dfrac{\partial a}{\partial x_i'} + \beta_o a = \lambda^{-1} \dfrac{\Delta a}{\alpha_1} \\ a\big|_{x_1=0} = X(x',\eta) \end{cases}$$

où $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1} \in \tilde{S}^o(V \times W)$.

<u>Lemme A.II.11.</u> : *On peut résoudre (A.II.23) en séries formelles en x_1 sous la forme $a(x,\eta,\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x,\eta)\lambda^{-j}$ avec $a_j \in \tilde{S}^{-j}(V \times W)$.*

<u>Démonstration</u> : Commençons par chercher $a_o(x,\eta)$: on a $a_o(0,x',\eta) = X(x',\eta) \in S^o(V \times W)$.

En dérivant (A.II.23) on obtient facilement que $\partial^k_{x_1} a_o\big|_{x_1=0} \in S^m(V \times W)$. Pour trouver a_1 on résoud :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} - \sum\limits_1^n \beta_i \dfrac{\partial a_1}{\partial x_i'} + \beta_o a_1 = \dfrac{\Delta a_o}{\alpha_1} \\ a_1\big|_{x_1=0} = 0 \ . \end{cases}$$

On a un second membre dans $\tilde{S}^{-1}(V \times W)$, et on vérifie facilement que $a_1 \in \tilde{S}^{-1}(V \times W)$, puis que l'on obtient des a_j dans $\tilde{S}^{-j}(V \times W)$. $\square$

Soit $r \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ avec : $\begin{cases} r(t)=1 & \text{pour } |t| \leq \frac{1}{2} \\ r(t)=0 & \text{pour } |t| \geq 1. \end{cases}$

On pose :

$$\tilde{\varphi}(x,\eta) = \varphi_o(x',\eta) + x_1\, \varphi_1(x',\eta) + \sum_2^\infty \varphi_j(x',\eta) x_1^j\, r(x_1(1+|\eta|)k_j)$$

où les φ_j sont les coefficients de φ déterminée dans le lemme A.II.10, et k_j une suite qui tend vers l'infini.

Il est facile de voir que $\tilde{\varphi}(x,\eta) \in S^m(U \times W)$ et que l'on peut prendre k_j qui tend vers l'infini assez vite pour avoir : $\begin{cases} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(x,\eta) \geqq c_1 x_1 (1 + |\eta|) \\ |\operatorname{Re} \tilde{\varphi}(x,\eta)| \leqq c_2 (1 + |\eta|) \end{cases}$.

On définit de la même façon $\tilde{a}_j(x,\eta) \in S^{-j}(U \times W)$ qui est égal à $a_j(x,\eta)$ modulo $O(x_1^\infty)$, puis $\tilde{a}(x,\eta,\lambda) \in S^{o,o}_{o,o}(U \times W)$ qui est équivalent à $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j(x,\eta)\lambda^{-j}$.

On a alors $(\Delta+\lambda^2)(\tilde{a}\, e^{i\lambda\tilde{\varphi}}) = b(x,\eta,\lambda)\, e^{i\lambda\tilde{\varphi}} + b_{-\infty}(x,\eta,\lambda) e^{i\lambda\tilde{\varphi}}$ avec $b \in S^{o,o}_{o,o}(U \times W)$ et $b \in O(x_1^\infty)$
$b \in S^{-\infty,-\infty}(U \times W)$.

Si $\widehat{H}_{e,+} u(x,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(\tilde{\varphi}(x,\eta)-y\cdot\eta)} \tilde{a}(x,\eta,\lambda) u(y,\lambda) dy d\eta$ on a : $\widehat{H}_{e,+} u|_{x_1=0} = \mathrm{Op}(X)u$. L'intégrale en η est convergente pour $x_1 > 0$ et $\lambda \in D$ car $\operatorname{Im}\tilde{\varphi} \geqq c_1 x_1(1+|\eta|)$ et $|\operatorname{Re}\tilde{\varphi}| \leqq c_2(1+|\eta|)$.

Enfin $(\Delta+\lambda^2)\widehat{H}_{e,+}$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma \times V)$ car $\operatorname{Im}\tilde{\varphi} \geqq c_1 x_1(1+|\eta|)$, donc le noyau

$$(\frac{\lambda}{2\pi})^n \int e^{i\lambda(\tilde{\varphi}(x,\eta)-y\cdot\eta)}\, b(x,\eta,\lambda)\, d\eta$$

est dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma \times V)$.

Il est facile de voir aussi que le noyau de $\widehat{H}_{e,+}$ est dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U \setminus \Gamma \times V)$. On a donc démontré la proposition. □

A.II.5. <u>Singularités du noyau de $H_+(\lambda)$</u>.

On montre le théorème suivant :

<u>Théorème A.II.12.</u> : Soit $H_+(\lambda)$ la résolvante sortante de (A.II.5). On a :

$$\underset{\sim}{WF}'\, H_+(\lambda) \subset \{(x,\xi)(y,\eta) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\Omega) \times T^*(\Gamma) \;\big|\; |\xi| = 1,\ |\eta| \leq 1,\ (x,\xi) \text{ appartient au } \tfrac{1}{2} \text{ rayon sortant de } (y,\eta)\}.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $V = U \setminus \Omega$ où U un petit voisinage de $\overline{\Omega}$. En utilisant les constructions des paragraphes A.II.2. - A.II.4., et une partition de l'unité pseudo-différentielle, on construit un opérateur $\hat{H}_+(\lambda)$: $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma) \to \underset{\sim}{C}^\infty(V)$ tel que :

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\hat{H}_+(\lambda)u = K_\lambda u \\ \hat{H}_+(\lambda)u\big|_\Gamma = u + R_\lambda u \end{cases}$$

où K_λ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(V\times\Gamma)$, R_λ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$. Si on restreint le noyau de $\hat{H}_+(\lambda)$ à $(V\setminus\Gamma)\times\Gamma$, on a, d'après les Propositions A.II.4, A.II.8 :

$$\underset{\sim}{WF}'(\hat{H}_+(\lambda)) \subset \{(x,\xi,y',\eta') \in T^*(V\setminus\Gamma)\times T^*(\Gamma) \;\big|\; |\xi|=1, |\eta'|\leq 1,$$

$$(x,\xi) \text{ appartient au } \tfrac{1}{2} \text{ rayon sortant de } (y',\eta')\}.$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(V)$ une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de Γ. On a :

$$(\Delta+\lambda^2)(\chi\,\hat{H}_+(\lambda)u) = \chi\,K_\lambda u + [\Delta,\chi]\hat{H}_+(\lambda)u\ .$$

Soit $S_0(\lambda)$ la résolvante sortante du problème libre introduite dans la Proposition A.II.2.
On pose $\tilde{H}_+(\lambda)u = \chi\,\hat{H}_+(\lambda)u - S_0(\lambda)(\chi\,K_\lambda u + [\Delta,\chi]\hat{H}_+(\lambda)u)$.
Il est facile de voir en utilisant la forme de $S_0(\lambda)$ que :

$$\underset{\sim}{WF}'(S_0(\lambda)) \subset \Delta\,\widehat{T^*}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cup \{(x,\xi,y,\eta) \mid |\xi| = |\eta| = 1 \text{ et } (x,\xi) \text{ appartient au } \tfrac{1}{2} \text{ rayon sortant passant par } (y,\eta)\}. \tag{A.II.24}$$

D'autre part $S_0(\lambda)$ a la propriété de transmission, (voir [Ch.P]) donc $S_0(\lambda)$ envoie $\underset{\sim}{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.
D'après les Propositions A.II.4. et A.II.8., et en utilisant (A.II.24) et la remarque après la Proposition A.I.12 on voit que l'opérateur

$$S_1 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma) \to \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma)$$
$$u \to S_0(\lambda)([\Delta,X]\hat{H}_+(\lambda)u)\big|_\Gamma$$

a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$, car $[\Delta,X]\hat{H}_+(\lambda)u$ a des singularités sortantes qui ne peuvent pas retourner sur Γ par l'action de $S_0(\lambda)$.
Donc on a : $\begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\tilde{H}_+(\lambda)u = 0 \\ \tilde{H}_+(\lambda)u\big|_\Gamma = u + \tilde{R}(\lambda)u \end{cases}$

où $\tilde{R}(\lambda)u$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma \times \Gamma)$.
Pour λ assez grand, on peut donc inverser $\mathbb{1} + \tilde{R}(\lambda)$ par une série de Neumann dans $W^s(\Gamma_1)$ et on a :
$H_+(\lambda) = \tilde{H}_+(\lambda)(\mathbb{1} + \tilde{R}(\lambda))^{-1}$, si $\mathrm{Re}\,\lambda$ est assez grand, car

(A.II.5) a alors une solution unique.

Ceci démontre que $H_+(\lambda)$ a les mêmes singularités que $\tilde{H}_+(\lambda)$, ce qui prouve le théorème. □

A.III.1. Développements asymptotiques.

Théorème A.III.1. : Soit $a_j(z) \in C^\infty(\mathbb{C})$, $j=1,\ldots,m$, avec $a_j(z) \sim \sum_1^\infty a_{j,k} z^k$. Alors pour $|z|$ assez petit, les racines de $\xi^m + a_1(z)\xi^{m-1} + \ldots + a_m(z)$ admettent des développements asymptotiques : pour $1 \leqq L \leqq p$

$$\xi_L(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{L,\nu} z^{\nu/a_L} \quad \text{avec} \quad \sum_1^p a_L = m .$$

Démonstration : On rappelle d'abord le théorème de Puiseux : si $b_j(z)$, $j=1,\ldots,m$ sont des fonctions holomorphes près de 0 avec $b_j(0) = 0$, les racines de $\xi^m + b_1(z)\xi^{m-1} + \ldots + b_m(z) = 0$, sont p branches de fonctions algébriques, c'est-à-dire p fonctions holomorphes de z^{1/a_ℓ} pour $\ell = 1,\ldots,p$, avec $\sum_1^p a_\ell = m$.

Soient maintenant $a_j(z) = O(z)$ des fonctions C^∞ , $j=1,\ldots,m$, avec $a_j(z) \sim \sum_1^\infty a_{j,k} z^k$. On pose $p(z,\xi) = \xi^m + a_1(z)\xi^{m-1} + \ldots + a_m(z)$, et $p^M(z,\xi) = \xi^m + a_1^M(z)\xi^{m-1} + \ldots + a_m^M(z)$, où $a_j^M(z) = \sum_1^M a_{j,k} z^k$.

Notons $\xi_j(z)$ les racines de $p(z,\xi)$, $\xi_j^N(z)$ les racines de $p^N(z,\xi)$.

Pour se débarrasser de la dépendance en N des a_ℓ , on écrira :

$$\xi_j^N(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{j,\nu}^N \; z^{\nu/m!}$$

(A.III.1)

où certains $b_{j,\nu}^N$ peuvent être nuls.

On dit que $\xi \underset{N}{\sim} \eta$ si $\xi(z) - \eta(z) \in O(|z|^{N/m})$, quand z tend vers 0. $\underset{N}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\Lambda^M = \{\text{racines de } p^M\}$.

Fixons $\xi_{j_o}^N \in \Lambda^N$. Soit $L \subset \Lambda^N$ la classe de $\xi_{j_o}^N$ pour $\underset{N}{\sim}$, et $m(j_o,N) = \text{Card}(L)$.

Notons $m_o = m(j_o,N)$ pour simplifier les notations et supposons que $\xi \in \mathbb{C}$ vérifie : $|\xi - \xi_{j_o}^N(z)| = \varepsilon\, |z|^{N/m}$

$$p^N(z,\xi) = \prod_1^{m_o} (\xi - \xi_j^N(z)) \times \prod_{m_o+1}^{m} (\xi - \xi_j^N(z))$$

- Si $j \leq m_o$, on a :

$$|\xi_j^N(z) - \xi_{j_o}^N(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, |z|^{N/m} \quad \text{pour} \quad |z| \leq C_\varepsilon$$

- Si $j \geq m_o+1$, il existe $\varepsilon_o > 0$ tq :

$$|(\xi_j^N - \xi_{j_o}^N)(z)| \geq \varepsilon_o\, |z|^{N/m} \quad \text{pour} \quad |z| \leq C_\varepsilon .$$

Donc pour $|z| \leq C_\varepsilon$, on a :

(A.III.2) $C\, \varepsilon^{m_o} |z|^N \leq (\frac{\varepsilon}{2})^{m_o} (\varepsilon_o - \frac{\varepsilon}{2}) |z|^N \leq |p^N(z,\xi)| \leq \frac{1}{C}\, \varepsilon^{m_o} |z|^N.$

Comme $|p^N(z,\xi) - p^M(z,\xi)| \leq C\, |z|^{N+1}$ pour ξ variant dans un compact, on a les mêmes inégalités pour $p^M(z,\xi)$.

Or cette inégalité entraîne que $p^M(z,\lambda)$ a exactement m_o racines dans le disque $|\xi - \xi^N_{j_o}(z)| \leqq \varepsilon\, |z|^{N/m}$ pour $|z|$ assez petit.

En effet si $p^M(z,\lambda)$ a m_1 racines dans ce disque avec $m_1 \neq m_o$, le même raisonnement montre que l'on a une inégalité (A.III.3) avec ε^{m_1} à la place de ε^{m_o}, ce qui est impossible.

On peut faire le même raisonnement pour p ce qui montre que p^M et p ont exactement $m(j_o,N)$ racines ξ avec $\xi \sim \xi^N_{j_o}$.

On a donc des bijections $b = b_N^{N+1} : \Lambda^N \to \Lambda^{N+1}$, telles que $b(\xi) \underset{N}{\sim} \xi$ et $\xi \underset{N}{\sim} \eta$ entraîne $b(\xi) \underset{N}{\sim} b(\eta)$.

Inversement $b(\xi) \underset{N+1}{\sim} b(\eta)$ entraîne $b(\xi) \underset{N}{\sim} b(\eta)$ donc $\xi \underset{N}{\sim} \eta$.

Si on identifie Λ^N et Λ^{N+1} par b_N^{N+1}, le découpage de Λ^{M+1} en classes d'équivalences pour $\underset{N+1}{\sim}$ est plus fin que celui de Λ^N pour $\underset{N}{\sim}$.

Au bout d'un nombre fini de découpages, on arrive à un découpage qui est le plus fin possible, car Λ^M ne contient que m éléments au plus.

Il existe donc N_o, tel que si $N_o \leqq N < M$, on a :

si $\xi,\eta \in \Lambda^N$, on a $\xi \underset{N}{\sim} \eta$ si et seulement si

$b_N^M(\xi) \underset{M}{\sim} b_N^M(\eta)$ où $b_N^M = b_{M-1}^M \circ \dots \circ b_N^{N+1}$.

Deux fonctions du type A.III.1. sont équivalentes pour $\underset{N}{\sim}$ si et seulement si elles ont les mêmes coefficients b_ν pour $\frac{\nu}{m!} \leqq \frac{N}{m}$, ce qui montre que les puissances des développements asymptotiques que l'on va obtenir seront celles du théorème de Puiseux appliqué à $P^{N_o}(x,\xi)$.

• Finalement pour chaque $\underset{N_o}{\sim}$ classe d'équivalence L de Λ^{N_o}, on a un développement asymptotique $\sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{L,\nu} z^{\nu/a_L}$ où a_L fait partie des puissances qui sont données par le Théorème de Puiseux pour P^{N_o} et si $\xi \in b^M_{N_o}(L)$, $\xi - \sum_{\nu/a_L \leqq M/m} b_{L,\nu} z^{\nu/a_L} \in O(|z|^{M/m})$.

• De plus, comme les résultats sur p^M sont aussi valables pour p, on peut trouver exactement $\# L$ racines de p (avec multiplicité), qui forment une classe d'équivalence pour $\underset{N}{\sim}$ pour tout $N \geqq N_o$, et donc qui admettent le développement asymptotique $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{L,\nu} z^{\nu/a_L}$.

On a donc démontré le théorème. □

A.III.2. <u>Calcul de la constante du théorème 2.5.</u>

<u>*Proposition A.III.2.*</u> *: La constante $b_o(0,0,0)$ du Théorème 2.5 est égale à $(\nu_1 \dots \nu_n)^{-1/2}$ où ν_i sont les valeurs propres plus grandes que 1 de $D\chi(0,0)$.*

<u>Démonstration</u> : On remplace les deux obstacles Γ_1 et Γ_2 par leurs paraboloïdes tangents aux extrémités du

rayon périodique. Dans des coordonnées linéaires convenables, Γ_1 et Γ_2 sont donnés par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2} A_1 x' \cdot x' \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} A_2 x' \cdot x' + d \ , \end{cases}$$

avec A_i définies positives.

Notons $\tilde{\Lambda}$ la variété lagrangienne de $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ obtenue en étendant Λ_+ par le flot des rayons sortants réfléchis sur Γ_2. Λ est incluse dans la variété d'énergie $\xi^2 = 1$, qui se sépare près du rayon périodique en deux nappes $\xi_n > 0$ et $\xi_n < 0$.

D'autre part, on peut déduire des résultats de [I] que $\tilde{\Lambda}$ se projette bijectivement sur la base.

On peut donc paramétrer $\tilde{\Lambda}$ par les deux phases :

$$\begin{cases} \varphi = x_n + f(x',x_n) & \text{avec } f,g \in O(|x'|^2) \\ \psi = -x_n + g(x',x_n) \end{cases}$$

f et g sont reliés par des conditions de raccord sur Γ_2 et Γ_1.

f et g vérifient l'équation eikonale :

$$\begin{cases} (1 + \frac{\partial f}{\partial x_n})^2 + (\frac{\partial f}{\partial x'})^2 = 1 \\ (1 - \frac{\partial g}{\partial x_n})^2 + (\frac{\partial g}{\partial x'})^2 = 1 \end{cases}$$

Ecrivons :

$$f(x',x_n) = \frac{1}{2} F(x_n)x' \cdot x' + O(x^3)$$

$$g(x',x_n) = \frac{1}{2} G(x_n)x' \cdot x' + O(x^3) .$$

On obtient : $\frac{\partial F}{\partial x_n} x' \cdot x' + F^2 x' \cdot x' = 0$, donc $\frac{\partial F}{\partial x_n} = - F^2$ et $F(x_n) = F(0)(1\!\!1 + x_n F(0))^{-1}$. D'autre part, comme le hessien de $\varphi|_{\Gamma_2}$ est égal à $F(d) + A_2$, et celui de ψ à $G(d) - A_2$, on a : $G(d) = F(d) + 2 A_2$.

En résolvant de même l'équation eikonale pour g en 1er ordre en $x'=0$, on a de même :

$$G(0) = G(d)(1 + d\, G(d))^{-1}$$

et la condition de raccord sur Γ_1 donne cette fois $F(0) = G(0) + 2 A_1$.

On obtient donc le système de deux équations matricielles:

$$\text{(A.III.3)} \qquad \begin{cases} G(d) = F(0)(1\!\!1 + dF(0))^{-1} + 2 A_2 \\ F(0) = G(d)(1\!\!1 + dG(0))^{-1} + 2 A_1 . \end{cases}$$

Si B est une $n \times n$ matrice, on note $H(B) = B(1\!\!1+dB)^{-1}$. On obtient : $(DH)(B)(\delta B) = (1\!\!1+dB)^{-1} \delta B (1\!\!1+dB)^{-1}$. Si $B \geqq \varepsilon 1\!\!1$, on a : $\|DH(B)\| \leqq (1+\varepsilon)^{-2}$, où la norme utilisée est la norme dans $\mathcal{L}(M(n))$ et $M(n)$ est l'espace des matrices $n \times n$.

Le système (A.III.3) s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ G(d) \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} F(0) \\ G(d) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} F(0) \\ G(d) \end{pmatrix}$$

On cherche une solution dans l'espace des couples $\begin{pmatrix} F(0) \\ G(d) \end{pmatrix}$ avec $F(0) \geqslant 2A_1$, $G(d) \geqq 2A_2$. K conserve cet espace, et on a : $\|DK\| \leqq (1+\varepsilon)^{-2}$ si $2A_i \geqq \varepsilon \mathbb{1}$.
On peut donc appliquer un théorème de point fixe dans cet espace ce qui donne une solution unique à (A.III.3).
On considère maintenant une solution asymptotique $a(x,\lambda)e^{-i\lambda\varphi(x)}$ de $(\Delta+\lambda^2)(a(x,\lambda)e^{-i\lambda\varphi(x)}) = O(\lambda^{-\infty})$ avec $a \sim \sum_0^\infty a_j(x)\lambda^{-j}$.

On obtient l'équation de transport : $2\sum_1^{n+1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial a_o}{\partial x_i} + \Delta\varphi\, a_o = 0$. La restriction au rayon périodique donne :

$$\frac{2d\,a_o}{dx_n} + \mathrm{tr}\, F(x_n)a_o = 0.$$

On a donc : $\frac{da}{dx_n} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(F(0)(1+x_n F(0))^{-1})$ qui a comme solution $a_o(x_n) = a_o(0)\det(1 + x_n F(0))^{-1/2}$.

D'après la section 2, il est clair que $K_1'\tilde{H}_2\tilde{H}_1$ envoie $a_o(0)\,e^{-i\lambda f(x',0)}$ sur $a_o(0)\,e^{-i\lambda(f(x',0)+2d)}\det(1 + d\,F(0))^{-1/2}\det(1 + dG(d))^{-1/2}$ modulo $O(\lambda^{-1})$.
Il reste à exprimer ces constantes à l'aide de $D\chi(0,0)$.
Calculons la différentielle de $D\chi(0,0)$ restreint à la variété lagrangienne sortante Λ_+. Le flot hamiltonien restreint à $\tilde{\Lambda} \cap \{\xi_n > 0\}$ est donné par le champ

$$\sum_1^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_n} + F(x_n)x' \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \quad \text{modulo } O(|x'|^2).$$

L'évolution d'un vecteur tangent $\delta_{x'}(x_n)$ tel que $(\delta_{x'}(0)\ , F(0)\,\delta_{x'}(0)) \in T_{o,o}(\Lambda_+)$ est donné par $\frac{d}{dx_n}\delta_{x'} = F(x_n)\delta_{x'} = F(0)(1 + x_n F(0))^{-1}\,\delta_{x'}(x_n)$.
On obtient $\delta_{x'}(x_n) = (1 + x_n F(0))\,\delta_{x'}(0)$.
Si on paramètre Λ_+ par x', la différentielle de $D\chi(0,0)$ est donnée dans cette paramétrisation par :

$$\delta_{x'} \to (1+dG(d))(1+dF(0))\delta_{x'}$$

on a donc : $\det((1 + d\,G(d))(1 + d\,F(0))) = \nu_1 \ldots \nu_n$.

Dans les nouvelles coordonnées symplectiques où $\Lambda_+ = \{\xi=0\}$, une fonction oscillante associée à Λ_+ est par exemple la fonction $u=1$.
En appliquant la phase stationnaire à $M_1(u)$ on obtient facilement :

$$M_1(1)(0,\lambda) = e^{i\lambda 2d}\, b_o(0,0,0) + O(\lambda^{-1}).$$

Le facteur de transformation est bien sûr le même dans les nouvelles coordonnées, donc $b_o(0,0,0) = (\nu_1\ldots\nu_n)^{-1/2}$, ce qui démontre la proposition. □

A.III.3. Théorie de Fredholm.

On rappelle quelques résultats sur les opérateurs à indice et les problèmes de Grushin (voir [H.Sj]).

Soient A et B des espaces de Banach et $P(\lambda)\ :\ A \to B$ une famille continue d'opérateurs bornés avec $\lambda \in \Omega$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et supposons que $P(\lambda_0)$ est un opérateur de Fredholm d'indice fini. Soit $a_+ = \dim \operatorname{Ker}(P(\lambda_0))$, $a_- = \dim \operatorname{Coker}(P(\lambda_0))$.

On choisit $R^+ : \mathbb{C}^{a_-} \to B$ et $R^- : A \to \mathbb{C}^{a_+}$ bornés de rang maximal tels que $R^+(\mathbb{C}^{a_-})$ est transverse à $\operatorname{Im} P(\lambda_0)$ et $R^-|_{\operatorname{Ker} P(\lambda_0)}$ est bijectif.

On introduit l'opérateur $\mathcal{P}(\lambda) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & R^+ \\ R^- & 0 \end{pmatrix}$: $A \times \mathbb{C}^{a_-} \to B \times \mathbb{C}^{a_+}$. On voit facilement que $\mathcal{P}(\lambda_0)$ est inversible et admet un inverse borné :

$$\mathcal{E}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} E(\lambda_0) & E^+(\lambda_0) \\ E^-(\lambda_0) & E^{+-}(\lambda_0) \end{pmatrix} : B \times \mathbb{C}^{a_+} \to A \times \mathbb{C}^{a_-} .$$

$\mathcal{P}(\lambda)$ pour λ proche de λ_0 admet aussi un inverse borné $\mathcal{E}(\lambda)$.

On regarde maintenant ce qui se passe quand on perturbe $P(\lambda)$.

<u>*Proposition A.III.3.*</u> *: Soit $P_0(\lambda) : A \to B$ un opérateur vérifiant les hypothèses du début du paragraphe, tel que le problème de Grushin : $\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0 & R_0^+ \\ R_0^- & 0 \end{pmatrix}$ est inversible de $A \times \mathbb{C}^{a_-}$ dans $B \times \mathbb{C}^{a_+}$, d'inverse $\mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 & E_0^+ \\ E_0^- & E_0^{+-} \end{pmatrix}$.*

Si $P_1(\lambda) = P_0(\lambda) - R(\lambda)$ et si pour tout $(f,d) \in B \times \mathbb{C}^{a_+}$,

$(1-E_o R)^{-1} E_o f$ et $(1-E_o R)^{-1} E_o^+ d$ existent, alors le problème de Grushin $\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 & R_o^+ \\ R_o^- & 0 \end{pmatrix}$ *est inversible de* $A \times \mathbb{C}^{a_-}$ *dans* $B \times \mathbb{C}^{a_+}$*, d'inverse* $\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} E_1 & E_1^+ \\ E_1^- & E_1^{+-} \end{pmatrix}$ *avec :*

$E_1 = (1-E_o R)^{-1} E_o$,

$$E_1^+ = (1-E_o R)^{-1} E_o^+ \ , \quad E_1^- = E_o^- + E_o^- R(1-E_o R)^{-1} E_o \ ,$$

$$E_1^{+-} = E_o^{+-} + E_o^- R\,(1-E_o R)^{-1} E_o^+ \ .$$

Remarquons enfin que si $E^{+-}(\lambda)$ est inversible, on a :

$$P(\lambda)^{-1} = E(\lambda) - E^+(\lambda)\, E^{+-}(\lambda)^{-1}\, E^-(\lambda) \ .$$