Mémoires de la S. M. F.

H. Delange

Quelques résultats nouveaux sur les fonctions additives

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 45-53
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__45_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 45 à 53

QUELQUES RESULTATS NOUVEAUX SUR LES FONCTIONS ADDITIVES

par

Hubert DELANGE

-:-:-:-

Les questions auxquelles on va s'intéresser ici concernent la distribution des valeurs des fonctions additives réelles (1) .

1. - Indiquons d'abord trois problèmes que l'on peut se poser à propos de cette distribution.

Problème 1 : Etant donné la fonction f , pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire réelle X_n déterminée comme suit :

Sa valeur est celle de $f(m)$, où m est un entier choisi au hasard entre 1 et n , les n nombres possibles étant pris avec la même probabilité $\frac{1}{n}$.

La probabilité pour que $X_n \leq t$ est donc

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n} N \, [m \in \mathbb{N}^* | m \leq n \quad \text{et} \quad f(m) \leq t] \quad {}^{(2)} .$$

La suite des lois de probabilité des X_n tend-elle vers une loi limite ?

Dire que cette suite tend vers une loi limite signifie qu'il existe une fonction σ croissante sur $\mathbb{R}$, tendant vers zéro quand la variable t tend vers $-\infty$ et vers 1 quand t tend vers $+\infty$, et telle que, pour toute valeur de t pour laquelle σ est continue, $\sigma_n(t)$ tend vers $\sigma(t)$.

Si ceci a lieu, on dira que f possède une loi de distribution limite.

Le premier résultat concernant ce problème a été établi par SCHÖENBERG, qui a montré que la fonction égale à $\frac{\varphi(n)}{n}$ possède une loi de distribution limite continue. DAVENPORT a établi ensuite le même résultat pour $\frac{\sigma(n)}{n}$ (où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n).

Il s'agit là de fonctions multiplicatives, mais on peut se ramener à des fonctions additives en prenant les logarithmes.

ERDÖS et WINTNER ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes simples pour qu'une fonction additive réelle possède une loi de distribution limite.

Le problème posé est ainsi complètement résolu.

<u>Problème 2</u> : Supposons maintenant que la fonction additive f prenne ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Soit q un entier > 1 .

Existe-t-il, pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, une limite de

$$\frac{1}{n} N [m \in \mathbb{N}^* | m \leq n \quad \text{et} \quad f(m) \equiv r \pmod q]$$

lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit une densité de l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n) \equiv r \pmod q$?

Cette densité est-elle égale à $\frac{1}{q}$ pour tout r , auquel cas on pourra dire que f est distribuée uniformément modulo q ?

Il est connu que ceci est le cas pour tout q lorsque $f(n)$ est le nombre $\omega(n)$ des diviseurs premiers de n .

<u>Problème 3</u> : Considérons à nouveau une fonction additive réelle quelconque f

La suite $\{f(n)\}$ est-elle équirépartie modulo 1 ? Auquel cas nous dirons que f est uniformément distribuée modulo 1 (u.d. mod 1) .

ERDÖS a indiqué sans démonstration qu'il en est ainsi lorsque $f(n) = \alpha\omega(n)$, où α est une constante irrationnelle quelconque, et il a démontré que c'est aussi le cas si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$f(p)$ tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$ (3) ;

on a

$$\sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty \quad .$$

Sa démonstration de ce dernier résultat est assez difficile.

2. - On va voir que chacun des trois problèmes ci-dessus conduit naturellement à des problèmes concernant les valeurs moyennes de certaines fonctions multiplicatives.

Rappelons que la valeur moyenne d'une fonction arithmétique F est définie comme étant la limite de $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F(m)$ lorsque n tend vers l'infini, si cette limite existe. Lorsque F possède une valeur moyenne, nous désignerons celle-ci par $M(F)$.

On sait que, pour qu'une suite de lois de probabilités tende vers une loi limite, il faut et il suffit que la suite des fonctions caractéristiques converge vers une fonction limite continue pour $t = 0$. Cette fonction limite est d'ailleurs la fonction caractéristique de la loi limite.

La fonction caractéristique de la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est égale, pour chaque t réel, à la valeur moyenne de $\exp(it X)$.

Dans le cas de la variable aléatoire X_n considérée dans le problème 1 , on obtient $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp[it\ f(m)]$.

On voit ainsi que, pour que la fonction additive réelle f possède une loi de distribution limite, il faut et il suffit que, pour chaque t réel, la fonction F_t définie par

$$F_t(n) = \exp[it\ f(n)]$$

possède une valeur moyenne, $M(F_t)$ étant une fonction de t continue pour $t = 0$.

F_t est évidemment une fonction multiplicative complexe de module 1 .

Si maintenant f est une fonction additive à valeurs dans Z , étant donné l'entier $q > 1$, pour que, pour chaque $r \in Z$, l'ensemble $E_{q,r}$ des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q$$

possède une densité, il faut et il suffit que, pour chaque entier j satisfaisant à $1 \leq j \leq q-1$, la fonction $F_{q,j}$ définie comme étant la fonction F_t correspondant à $t = \frac{2\pi j}{q}$ possède une valeur moyenne.

Cela résulte immédiatement de ce que, d'une part, on a pour tout $m \geq 1$

$$\sum_{m=1}^{n} F_{q,j}(n) = \sum_{r=0}^{q-1} [\exp(\frac{2jr\pi i}{q})]\, N[m \in \mathbb{N}^* | m \leq n \quad \text{et} \quad f(m) \equiv r \pmod q] ,$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} N[m \in \mathbb{N}^* | m \leq n \quad &\text{et} \quad f(m) \equiv r \pmod q] \\ &= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \exp\{\frac{2j\pi i}{q} [f(m)-r]\} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} [\exp(- \frac{2jr\pi i}{q})] \sum_{m=1}^{n} F_{q,j}(m) . \end{aligned}$$

On voit que, pour que la densité de l'ensemble $E_{q,r}$ soit égale à $\frac{1}{q}$ pour tout r , il faut et il suffit que

$$M(F_{q,j}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq q-1 .$$

Les fonctions $F_{q,j}$ sont encore des fonctions multiplicatives complexes de module 1 .

Enfin, f étant une fonction additive réelle quelconque, d'après le critère de Weyl, pour que f soit uniformément distribuée modulo 1 , il faut et il suffit que, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_m possède une valeur moyenne nulle.

Ceci conduit à penser que les problèmes indiqués ci-dessus pourraient être résolus grâce à des théorèmes convenables relatifs aux valeurs moyennes des fonctions multiplicatives complexes de module 1.

En fait, on n'augmente pas la difficulté en considérant des fonctions multiplicatives complexes de module ≤ 1. Dans la suite, l'ensemble de ces fonctions sera désigné par $\mathfrak{M}_0$.

3. - L'auteur a obtenu en 1961 des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction F de $\mathfrak{M}_0$ possède une valeur moyenne non nulle. Ces conditions sont les suivantes :

(1) La série $\sum \frac{1-F(p)}{p}$ est convergente (autrement dit $\sum_{p \leq x} \frac{1-F(p)}{p}$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$) ;

(2) On n'a pas $F(2^r) = -1$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Plus précisément, on a les théorèmes suivants :

1. Si $M(F)$ existe et est $\neq 0$, on a les conditions (1) et (2) et on a

$$\sum \frac{1-\Re F(p)}{p} \leq 2 + \log \frac{1}{|M(F)|} .$$

2. Si on a la condition (1), $M(F)$ existe et est égale à

$$\mathcal{C}(F) \exp \left[-\sum \frac{1-F(p)}{p}\right],$$

où $\mathcal{C}$ est une fonction continue sur l'ensemble $\mathfrak{M}_0$ muni de la topologie de la convergence simple, et qui s'annule si, et seulement si, $F(2^r) = -1$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Ces théorèmes permettent de retrouver très simplement le résultat d'ERDÖS et WINTNER.

L'auteur a établi aussi des conditions suffisantes pour qu'une fonction de $\mathfrak{M}_0$ possède une valeur moyenne nulle. Ceci permettait de retrouver très simplement les résultats connus concernant le problème 2 et les résultats d'ERDÖS concernant le problème 3, en ajoutant quelques résultats nouveaux.

Cependant, pour ces deux problèmes, on n'avait en définitive que des résultats très partiels.

4. - Un progrès important a été réalisé après que WIRSING eût établi un théorème général impliquant le résultat qui suit :

Soit $F \in \mathfrak{M}_o$ et ayant la propriété suivante :

Il existe $K > 0$ tel que, pour tout p ,

$$|\mathscr{I}m\, F(p)| \leq K[1-\Re\, F(p)] \ .$$

Alors $M(F)$ existe et, pour que $M(F) = 0$, il faut et il suffit que l'une au moins des conditions suivantes soit satisfaite :

(a) $$\sum \frac{1-\Re\, F(p)}{p} = +\infty \ ;$$

(b) on a $F(2^r) = -1$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

L'auteur a observé que ce résultat entraîne immédiatement que, pour toute fonction additive à valeurs dans $\mathbb{Z}$, quels que soient q entier > 1 et $r \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels

$$f(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité.

On peut aussi obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que, pour un q donné, cette densité soit égale à $\frac{1}{q}$ pour tout r (4) .

Ainsi le problème 2 se trouve complètement résolu.

5. - Pour traiter le problème 3, il manquait encore d'avoir su obtenir des dondi-tions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de $\mathfrak{M}_o$ possède une valeur moyenne nulle.

De telles conditions sont contenues implicitement dans un travail récent de G. HALASZ (5) . Le résultat peut se formuler comme suit :

F étant une fonction de $\mathfrak{M}_o$, pour que $M(F)$ existe et $= 0$, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

(a) On a $\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re\, [F(p)\, p^{-iu}]\} = +\infty$ pour tout u réel ;

(b) Il existe un u_o réel tel que $\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re[F(p)p^{-iu_o}]\} < +\infty$ et on a

$$F(2^r) = -2^{riu_o} \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{N}^*.$$

(HALASZ montre qu'il ne peut exister plus d'un u_o tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1-\Re\, [F(p)p^{-iu_o}]\} < +\infty) \ .$$

Notons que, si F_t est la fonction multiplicative associée à la fonction additive réelle f comme on l'a dit plus haut, on a, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$ et chaque p premier,

$$1 - \mathcal{R}\,[F_m(p)p^{-iu}] = 2\sin^2[m\pi f(p) - \frac{u}{2}\log p]$$
$$= 2\sin^2 m\pi[f(p) - \frac{u}{2m\pi}\log p] .$$

On voit ainsi que, pour que f soit u.d. mod 1 , il faut et il suffit que, p pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

(α) $$\sum \frac{1}{p}\sin^2 m\pi[f(p) - \frac{u}{2m\pi}\log p] = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel ;}$$

(β) il existe un u_o réel tel que

$$\sum \frac{1}{p}\sin^2 m\pi[f(p) - \frac{u_o}{2m\pi}\log p] < +\infty$$

et, pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, on a $\exp[2m\pi i f(2^r)] = -2^{riu_o}$, c'est-à-dire $\exp[2m\pi i f(2^r) - riu_o \log 2] = -1$.

La condition (α) peut s'écrire en remplaçant u par $2m\pi t$:

$$\sum \frac{1}{p}\sin^2 m\pi[f(p) - t\log p] = +\infty \quad \text{pour tout } t \text{ réel .}$$

En posant $u_o = 2m\pi a$, (β) s'écrit :

Il existe un $\underline{a}$ réel tel que $\sum \frac{1}{p}\sin^2 m\pi[f(p) - a\log p] < +\infty$ et, pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, $2m[f(2^r) - r\,a\log 2]$ est un entier impair.

On voit qu'en fait on doit avoir la condition (α) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

En effet, supposons que l'on ait la condition (β) pour $m = m_o$. Alors il existe a_o réel tel que

$$\sum \frac{1}{p}\sin^2 m_o\pi[f(p) - a_o\log p] < +\infty$$

et, pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, $2m_o[f(2^r) - ra_o\log 2]$ est un entier impair. Pour $m = 2m_o$, on n'a plus ni la condition (α) ni la condition (β) car

$$\sum \frac{1}{p}\sin^2 2m_o\pi[f(p) - a_o\log p] < +\infty$$

(puisque, pour tout x réel, $|\sin 2x| \le 2|\sin x|$) et, pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, $4m_o[f(2^r) - ra_o\log 2]$ est un entier pair.

On a donc le théorème suivant :

Pour que la fonction additive réelle f soit u.d. mod 1 , il faut et il suffit que, quels que soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum \frac{1}{p} \sin^2 m\pi[f(p) - t \log p] = +\infty .$$

Un corollaire immédiat est le suivant :

Si f et g sont deux fonctions additives réelles et s'il existe un a réel tel que $f(p) - g(p) = a \log p$ pour tout p , ou bien f et g sont toutes deux u.d. mod 1 , ou bien elles ne le sont ni l'une ni l'autre.

Un autre corollaire est le suivant :

L'ensemble des fonctions additives réelles qui ne sont pas u.d. mod 1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Ceci se voit en utilisant les remarques élémentaires suivantes :

Quels que soient x et y réels, on a

$$|\sin(x+y)| \leq |\sin x| + |\sin y| \qquad (\text{car } \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x).$$

Ceci entraîne que, quels que soient x et y réels,

$$(*) \qquad \sin^2(x+y) \leq 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 y ,$$

et que, quels que soient x réel et $q \in \mathbb{N}^*$,

$$(**) \qquad |\sin qx| \leq q|\sin x| .$$

On voit d'abord que, si f_1 et f_2 ne sont pas u.d. mod 1 , il en est de même de f_1+f_2 .

En effet, il existe m_1 et $m_2 \in \mathbb{N}^*$ et a_1 et a_2 réels tels que

$$\sum \frac{1}{p} \sin^2 m_1\pi[f_1(p) - a_1 \log p] < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \sin^2 m_2\pi[f_2(p) - a_2 \log p] < +\infty ,$$

et, en utilisant $(**)$ et $(*)$, on voit que

$$\sum \frac{1}{p} \sin^2 m_1 m_2\pi[f_1(p) + f_2(p) - (a_1+a_2) \log p] < +\infty .$$

Maintenant, il résulte de là que, quel que soit $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f \text{ non u.d. mod } 1 \Rightarrow qf \text{ non u.d. mod } 1 .$$

Comme, par ailleurs, le critère de Weyl montre que

$$f \text{ u.d. mod } 1 \Rightarrow qf \text{ u.d. mod } 1 ,$$

on voit que

$$f \text{ u.d. mod } 1 \Leftrightarrow qf \text{ u.d. mod } 1 .$$

Le critère de Weyl montrant aussi que

$$f \text{ u.d. mod } 1 \Leftrightarrow -f \text{ u.d. mod } 1 ,$$

on voit que, quel que soit $q \in \mathbb{Z}$ et $\neq 0$,

$$f \text{ u.d. mod } 1 \Leftrightarrow qf \text{ u.d. mod } 1 .$$

Ceci entraîne évidemment que, quel que soit $r \in \mathbb{Q}$ et $\neq 0$,

$$f \text{ u.d. mod } 1 \Leftrightarrow rf \text{ u.d. mod } 1 ,$$

donc que, quel que soit $r \in \mathbb{Q}$,

$$f \text{ non u.d. mod } 1 \Rightarrow rf \text{ non u.d. mod } 1 .$$

On a donc bien le résultat annoncé.

Remarque : ce résultat entraîne immédiatement que :

étant donné la fonction additive réelle f , l'ensemble E_f des x réels tels que la suite $\{x f(n)\}$ ne soit pas équipartie modulo 1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Dans le cas où $f(p) = \log p$ pour tout p , $E_f = \mathbb{R}$.

Si $f = \omega$, ou plus généralement si f prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $f(p) = 1$ pour tout p , $E_f = \mathbb{Q}$.

Si $f(p)$ tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$ et $\sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty$, $E_f = \{0\}$

-:-:-:-

Notes de bas de page

(1) Rappelons qu'une fonction arithmétique réelle ou complexe f , c'est-à-dire une application f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$, est dite "additive" si l'on a

$$f(m\,n) = f(m) + f(n) \quad \text{lorsque } (m,n) = 1$$

et "multiplicative" si l'on a $f(1) = 1$ et

$$f(m\,n) = f(m)\,f(n) \quad \text{lorsque } (m,n) = 1 .$$

Dans les deux cas, la fonction f est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour les puissances des nombres premiers.

(2) Ici et dans tout ce qui suit, N[ ] désigne le nombre des éléments de l'ensemble indiqué entre crochets.

(3) Tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier.

(4) Cf. H. Delange, "On integral-valued additive functions", Journal of Number Theory, Vol. 1 (1969).

(5) Über die Mittelwerte multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen. (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 19 (1968),p. 365-403).

-:-:-:-

Université de Paris
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91 - Orsay (France)