

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. HELFFER

J. SJÖSTRAND

Résonances en limite semi-classique

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 24-25 (1986)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_24-25__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RESONANCES EN LIMITE SEMI-CLASSIQUE

par

B. HELFFER

Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, Chemin de la Houssinière
F - 44072 NANTES, FRANCE.

J. SJÖSTRAND

Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
F - 91405 ORSAY, FRANCE.

0. INTRODUCTION.

Ce travail est partiellement une continuation de [H.S.1-5] et le but au départ était d'étudier des résonances dans la limite $h \rightarrow 0$ pour des opérateurs de Schrödinger $P = -h^2 \Delta + V(x)$ dans des cas où le potentiel présente une "isle" contenant un "puits". Dans les applications le comportement de V pour des grandes valeurs de $|x|$ peut varier beaucoup. Ainsi pour l'effet Stark on a $V(x) \approx x_n$, pour l'étude des formules de Bender-Wu on a $V(x) \approx -|x|^4$ (ou quelque chose de plus général) et pour l'effet Zeeman on a (d'après une réduction que S. Graffi nous a indiqué) $V(x) = |x|^2 (1 - (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2))$ dans \mathbb{R}^4 . Il nous a donc semblé naturel et souhaitable de rechercher la définition des résonances la plus générale possible permettant de "régler les problèmes à l'infini" une fois pour toutes. Le développement de cette théorie générale occupe une grande place dans ce travail et c'est seulement dans les chapitres 9 à 14 que l'on étudie le problème d'un puits dans une isle. La théorie générale est peut-être assez lourde à développer, mais d'une part on peut raisonnablement espérer des simplifications techniques dans l'avenir car les idées de fond sont simples et naturelles, d'autre part elle nous donne un cadre très général pour traiter tous les problèmes mentionnés ci-dessus ainsi que d'autres, pas

Manuscrit reçu le 2 octobre 1985.

nécessairement liés à un puits de potentiel et pas seulement pour l'opérateur de Schrödinger mais pour des opérateurs elliptiques plus généraux. Finalement la théorie générale semble se montrer assez flexible dans les applications et donne un accès direct à l'essentiel du phénomène de la création des résonances.

Pour des gens avec une certaine formation en analyse microlocale et plus particulièrement dans la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe dans ses différentes formes (voir par exemple Melin-Sjöstrand [M.S], Sjöstrand [S.1]), les travaux d'Aguilar-Combes [Ag.C.] Balslev-Combes [B.C.] donnent une idée générale de ce qu'il faut faire pour développer une théorie microlocale des résonances. (Voir aussi Vainberg [V.1], [V.2]). D'un certain point de vue, l'idée de [Ag.C.], [B.C] revient à remplacer l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ par un autre espace de Hilbert H tel que P en tant qu'opérateur non-borné dans H admet seulement du spectre discret près du niveau d'énergie (p.ex. 0) que l'on s'est fixé préalablement. (Les valeurs propres correspondantes sont alors appelées "résonances"). Dans notre présentation, on suppose l'existence d'une certaine "fonction fuite". C'est une fonction C^∞ réelle $G(x, \xi)$, appartenant à une certaine classe de symboles adaptée au potentiel V , telle que en dehors d'un compact dans $p^{-1}(0)$ le crochet de Poisson $H_p(G) = \{p, G\}$ soit positif et elliptique sur $p^{-1}(0)$. Ici $p = \xi^2 + V(x)$ est le symbole principal associé à $P = -\hbar^2 \Delta + V(x)$ et $H_p = \sum_1^n \partial p / \partial \xi_j \partial / \partial x_j - \partial p / \partial x_j \partial / \partial \xi_j$ est le champ hamiltonien de p . Donc, en dehors d'un compact la fonction $G|_{p^{-1}(0)}$ est strictement croissante le long des trajectoires de H_p , ce qui entraîne l'absence de trajectoires captées en dehors d'un compact de $p^{-1}(0)$. (On peut montrer en effet que l'existence d'une fonction fuite équivaut à une certaine condition de "non-capture" formulée à l'aide d'une certaine pseudo-métrique Lorenzienne associée à H_p).

INTRODUCTION

A une fonction fuite $G(x, \xi)$ on associe une variété I-Lagrangienne

$\Lambda_t G : \text{Im } \xi = -t \frac{\partial G(\text{Re}(x, \xi))}{\partial \text{Re } x}$, $\text{Im } x = t \frac{\partial G}{\partial \text{Re } \xi}$ dans \mathbb{C}^{2n} , pour $t > 0$ assez petit. On fait aussi une hypothèse d'analyticité sur V au moins dans un voisinage de l'infini. Alors pour $t > 0$ assez petit et $(x, \xi) \in \Lambda_t G$;

$$(0.1) \quad p(x, \xi) = p(\text{Re}(x, \xi)) - i t \{p, G\}(\text{Re}(x, \xi)) + \mathcal{O}(t^2) ,$$

et en imposant aussi une condition d'ellipticité sur p dans le domaine réel loin de $p^{-1}(0)$, on constate que $p|_{\Lambda_t}$ est un symbole elliptique à l'infini (dans une classe naturelle de symboles).

A $\Lambda_t G$ on associe ensuite un espace de Hilbert $H = H(\Lambda_t G, 1)$ de la manière suivante : d'abord, on introduit une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (F.B.I). On utilise ici la terminologie de [S.1] où sont poursuivis des arguments de Bros et de Iagolnitzer dans l'étude des singularités analytiques microlocales, et techniquement les transformations utilisées ici sont proches de celles utilisées dans [S.1]. Ces transformations sont bien entendu des variantes de la transformation de Bargmann. Grosso modo il s'agit d'un certain opérateur intégral de Fourier $T = T_h$ qui transforme des fonctions $u(x)$ sur \mathbb{R}^n en des fonctions $v = Tu(x, \xi)$ sur \mathbb{R}^{2n} et qui induit une isométrie $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$. L'espace $H(\Lambda_t G, 1)$ est alors grosso modo l'ensemble des $u = u(x)$ tels que $Tu \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$; $e^{-2t \check{G}(t, x, \xi)/h} dx d\xi$). Ici $\check{G}(t, x, \xi)$ est une fonction proche de $G(x, \xi)$. Si $\gamma :]-\infty, +\infty[\ni s \rightarrow \gamma(s) \in p^{-1}(0)$ est une trajectoire de H_p qui évite un certain compact on montre que $G(\gamma(s)) \rightarrow \pm\infty$, $s \rightarrow \pm\infty$ et un élément de $H(\Lambda_t G, 1)$ doit en quelque sorte être à décroissance exponentielle près de $\gamma(s)$ si $-s$ est grand, mais peut en revanche avoir une croissance exponentielle près de $\gamma(s)$ si s est grand.

On introduit ensuite des opérateurs pseudo-différentiels associés à l'espace $H(\Lambda_t G, 1)$. Le symbole principal d'un tel opérateur est alors un symbole sur $\Lambda_t G$. On peut considérer P comme un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal $p|_{\Lambda_t}$. Ce symbole étant elliptique à l'infini, on montre ensuite que le spectre de P comme opérateur non-borné dans $H(\Lambda_t G, 1)$ est discret dans un voisinage de 0 et que ce spectre (c.à.d. les résonances) est essentiellement indépendant du choix de la fonction fuite G et du paramètre $t > 0$ (assez petit). Le cas de Aguilar-Combes correspond à la fonction fuite $G(x, \xi) = x \cdot \xi$. On peut trouver des potentiels admettant des fonctions fuite mais dont aucune ne peut être linéaire en ξ . Pour un tel potentiel il semble impossible de traiter des résonances seulement par déformation de \mathbb{R}^n dans l'espace des configurations, une théorie micro-locale semble alors s'imposer.

On doit rappeler que l'approche d'Aguilar-Combes et Balslev-Combes a été développée par beaucoup d'auteurs : voir B. Simon [Si.1-Si.3], I. Herbst [He.], H. Cycon [Cy.], Combes-Duclos-Seiler [C.D.Se.] ainsi que les références dans ces articles. Combes-Duclos-Seiler [C.D.Se.] étudient un problème unidimensionnel de résonances avec un puits dans une isle par la méthode du " exterior complex scaling ". Bien entendu il est extrêmement probable (mais nous n'avons pas encore vérifié les détails) que notre définition des résonances coïncide avec celles de ces auteurs dans tous les cas où une telle coïncidence est pensable.

Voici le plan de notre travail : Dans la section 1 on introduit certaines fonctions d'échelle et des espaces de symboles associés. Dans la section 2 on fait quelques remarques sur une classe de variétés I-Lagrangiennes, dans la section 3 on étudie certains espaces de Sobolev en préparation de la section 5. Dans la section 4 on introduit d'abord des résolutions de l'iden-

INTRODUCTION

tité et puis des transformations de F.B.I. Dans la section 5 on peut ensuite définir l'espace $H(\Lambda_{tG}, 1)$ ainsi que des variantes de cet espace. Les sections 6 et 7 sont consacrées respectivement aux opérateurs pseudodifférentiels et Fourier intégraux agissant dans les espaces $H(\Lambda_{tG}, m)$ (où m est une fonction d'ordre). Dans la section 8 on peut alors finalement développer la théorie générale des résonances. Les sections 9 et 10 sont consacrées à l'étude des résonances obtenues par un " effet tunnel " d'un puits de potentiel dans une isle de potentiel. Dans la section 9 on obtient des résultats généraux pour un puits quelconque et on y montre qu'il y a une bijection b entre des valeurs propres d'un certain problème de Dirichlet localisé dans l'isle et des résonances, telle que $b(\mu) - \mu = \mathcal{O}\left(e^{(\varepsilon - 2S_0)/h}\right)$, $\varepsilon > 0$, où S_0 est la distance d'Agmon du puits au bord de l'isle. Dans la section 10 on obtient des résultats plus précis sur les parties imaginaires de ces résonances dans le cas où le puits se réduit à un point où $V'' > 0$. On y obtient d'une part des minorations et des majorations sur les parties imaginaires et d'autre part des développements asymptotiques. Dans le chapitre 11, on explicite les résultats dans un cas unidimensionnel et on établit un lien avec un cas multidimensionnel symétrique. Dans les chapitres 12, 13, 14 on étudie des formules de Bender-Wu (multidimensionnelles) notamment pour l'effet Zeeman et pour des exemples étudiés par Banks, Bender et Wu, [Ba.Ben.W.], [Ba.Ben.]. Il s'agit donc de donner des formules pour la suite des coefficients dans une série de perturbations. Les résultats de la section 10 permettent d'obtenir des résultats qui à notre connaissance sont rigoureusement démontrés pour la première fois. On finit par un appendice où on rappelle des arguments de la théorie de Fredholm adaptés à nos besoins. Pour abrégé ce texte déjà un peu long, on a supprimé trois autres appendices : un sur un exemple de potentiel où notre théorie s'applique mais qui n'admet aucune fonction fuite linéaire en ξ , un sur l'équivalence entre

l'existence d'une fonction fuite et une certaine condition de "non-capture" à l'infini, et un troisième (pas encore écrit) sur l'équivalence de notre définition et celle d'Aguilar-Combes dans des cas d'intersection des deux théories.

Les résultats principaux de ce travail sous une forme un peu préliminaire ont été exposés dans le "Workshop and Conference on hyperbolic equations" à Katuda et Kyoto en Août et Septembre 1984. Voir [S.2].

Nous tenons à remercier B. Simon qui nous a signalé l'application possible des résonances aux formules de Bender-Wu, nous sommes reconnaissants à S. Graffi qui nous a indiqué beaucoup de références et qui nous a suggéré la méthode de réduction dans le chapitre 13 pour l'effet Zeeman. Nous remercions finalement Mme Bardot, pour l'excellente dactylographie de ce texte long et pénible.

1. ESPACES DE SYMBOLES.

Notre calcul pseudo-différentiel dans le cas où la variété I-Lagrangienne est réduite à \mathbb{R}^{2n} sera essentiellement connu. Voir R. Beals [Be], L. Hörmander [Hö.2] et N. Dencker [De], ainsi que B. Helffer et D. Robert [H.R] qui traitent aussi la dépendance de la constante de Planck.

On se donne deux fonctions $r, R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$, $R > 0$, vérifiant

$$(1.1) \quad r(x) R(x) \geq 1, \quad r(x) \geq 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$(1.2) \quad |\partial_x^\alpha R(x)| \leq C_\alpha R(x)^{1-|\alpha|}, \quad |\partial_x^\alpha r(x)| \leq C_\alpha r(x) R(x)^{-|\alpha|},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On pose $\tilde{r}(x, \xi) = (r(x)^2 + \xi^2)^{1/2} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Définition 1.1. La fonction $0 < m \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est une fonction d'ordre si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha, \beta} > 0$ tel que

$$(1.3) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta m(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} m(x, \xi) \tilde{r}(x, \xi)^{-|\beta|} R(x)^{-|\alpha|},$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction C^∞ vérifiant $\left| \left(\frac{d}{dt} \right)^k f(t) \right| \leq C_k f(t) t^{-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, et si $m \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est une fonction d'ordre, alors $f \circ m$ est une fonction d'ordre. En particulier si m est une f. o. et $\kappa \in \mathbb{R}$, alors m^κ est une f. o. On observe aussi que le produit de deux fonction d'ordre est une fonction d'ordre.

Définition 1.2. Si m est une fonction d'ordre, on dit que a est un symbole d'ordre m ; $a \in S(m)$, si $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha, \beta} > 0$ tel que

$$(1.4) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} m(x, \xi) \tilde{r}(x, \xi)^{-|\beta|} R(x)^{-|\alpha|},$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Exemple. $R(x)$, $r(x)$, $\tilde{r}(x, \xi)$ sont des fonctions d'ordre ainsi que $\tilde{r}^m R^k$ pour $m, k \in \mathbb{R}$. On pose $S^{n, k} = S(\tilde{r}^m R^k)$.

On fera aussitôt deux extensions de la Définition 1.2. : d'abord on admettra des symboles qui dépendent d'un paramètre $h > 0$ qui varie dans $]0, 1]$ ou dans un sous-ensemble de cet intervalle. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit alors que $a(x, \xi, h) \in S(m h^{-\lambda})$ si $a(\cdot, \dots, h) h^\lambda$ est uniformément dans $S(m)$, c.à.d. si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ on a :

$$(1.5) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h) \right| \leq C_{\alpha, \beta} h^{-\lambda} m(x, \xi) \tilde{r}(x, \xi)^{-|\beta|} R(x)^{-|\alpha|},$$

pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $h \in]0, 1]$.

Deuxièmement, on travaillera souvent avec des symboles $a(y, x, \xi)$, $a(z, y, x, \xi, h)$ et.c. où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et où y et z varient dans \mathbb{R}^n ou dans \mathbb{C}^n . Il est alors sous-entendu que l'on se restreint toujours à un domaine du type $|y-x| \leq \frac{1}{C_0} R(x)$, $|z-x| \leq \frac{1}{C_0} R(x)$, où $C_0 > 0$ est assez grand pour que $\frac{1}{C_0} \leq \frac{R(y)}{R(x)} \leq C_0$ pour $|y-x| \leq \frac{R(x)}{C_0}$. On dit alors par exemple que $a(z, y, x, \xi, h)$ est de classe $S(m h^{-\lambda})$ si

$$(1.6) \quad \left| \partial_{(z, \bar{z})}^\alpha \partial_{(y, \bar{y})}^\beta \partial_x^\gamma \partial_\xi^\rho a \right| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma, \rho} m(x, \xi) h^{-\lambda} \tilde{r}(x, \xi)^{-|\rho|} R(x)^{-|\alpha| - |\beta| - |\gamma|}.$$

Plus tard on étendra aussi (de manière évidente) ces notions de symboles au cas où (x, ξ) varie dans une variété I-Lagrangienne de classe \tilde{S}^1 (définie plus loin).

On remarque que si $a_j \in S(m_j)$, $j = 1, 2$ alors $a_1 a_2 \in S(m_1 m_2)$. Aussi si $a \in S(m)$ et si il existe $C_0 > 0$ t.q. $|a| \geq \frac{1}{C_0} m$, alors $\frac{1}{a} \in S(m^{-1})$.

ESPACES DE SYMBOLES

Remarque 1.3. Les classes de symboles ne changent pas si l'on remplace r, R par \hat{r}, \hat{R} vérifiant aussi (1.1), (1.2) et avec $r \sim \hat{r}$, $R \sim \hat{R}$. (Ici $r \sim \hat{r}$ signifie que $\frac{r}{\hat{r}}, \frac{\hat{r}}{r}$ sont bornées sur \mathbb{R}^n). Dans les applications les fonctions r, R ne sont peut-être pas directement C^∞ , mais seulement continues vérifiant (1.1) et pour $0 \leq c \leq 1 \leq C$:

$$(1.2) \quad \text{Si } |x-y| \leq c R(x), \text{ alors } \frac{R(x)}{R(y)}, \frac{r(x)}{r(y)} \in \left[\frac{1}{C}, C \right].$$

On peut alors régulariser r, R par une sorte de partition C^∞ de la manière suivante : Soit $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j=1,2,\dots$ une suite maximale de points telle que les boules $\overline{B(x_j, \frac{c}{4C^2} R(x_j))}$ sont disjointes. Alors les boules $\overline{B(x_j, \frac{c}{2} R(x_j))}$ recouvrent \mathbb{R}^n . Soit $\chi \in C_0^\infty(B(0,1); [0,1])$ égale à 1 dans $\overline{B(0, \frac{1}{2})}$ et posons $\chi_j(x) = \chi((x-x_j)/cR(x_j))$, à support dans $B(x_j, cR(x_j))$ et égale à 1 dans $B(x_j, \frac{c}{2} R(x_j))$.

$$\text{Si } y \in \bigcap_1^N \overline{B(x_{j_\nu}, cR(x_{j_\nu}))}, \text{ alors pour } 1 \leq \nu, \mu \leq N; \frac{R(x_{j_\nu})}{R(x_{j_\mu})} \in \left[\frac{1}{C^2}, C^2 \right],$$

et puisque les boules $\overline{B(x_j, \frac{1}{4} \frac{c}{C^2} R(x_j))}$ sont disjointes, on constate que $N \leq N_0$, où N ne dépend que de n, c, C . On pose

$$\hat{R}(x) = \sum_1^\infty R(x_j) \chi_j(x), \quad \hat{r}(x) = \sum_1^\infty r(x_j) \chi_j(x),$$

où les sommes sont localement finies avec au plus N_0 termes $\neq 0$. On constate que $\hat{R} \sim R$, $\hat{r} \sim r$ et que \hat{R} et \hat{r} vérifient (1.2). On remarque aussi que $\tilde{\chi}_j = \frac{\chi_j}{\sum_k \chi_k}$ est une partition d'unité avec les propriétés agréables suivantes : 1°) Au plus N_0 des supports des $\tilde{\chi}_j$ peuvent s'entrecouper dans un même point, 2°) $\text{supp } \tilde{\chi}_j \subset B(x_j, cR(x_j))$, 3°) les sommes partielles $\sum_{j \in K} \tilde{\chi}_j$, $K \subset \{1, 2, \dots\}$, forment une famille bornée de $S^{0,0}$, quand K varie.

Fin de Remarque.

Regardons ensuite la structure des fonctions d'ordre :

Définition 1.4. On pose $S^{m,k} = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) : \partial_{\xi_j} a \in S^{m-1,k}, \right.$
 $\left. \partial_{x_j} a \in S^{m,k-1}, j=1, \dots, n \right\}$.

Nous allons utiliser cette notion principalement pour $m=k=1$, mais le cas $m=k=0$ intervient pour les fonctions d'ordre :

Proposition 1.5. Les fonctions d'ordre sont exactement les fonctions de la forme $m = e^n$, où $n \in S^{0,0}$ est à valeurs réelles.

La démonstration est immédiate, et on passe à l'étude de la croissance des fonctions d'ordre. Dans les directions de l'espace on ne peut pas dire grand chose en général, mais pour la croissance en ξ nous avons la

Proposition 1.6. Si $m(x, \xi)$ est une fonction d'ordre, alors $m_0(x) = m(x, 0)$ est une fonction d'ordre, et il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que

$$(1.7) \quad m_0(x) e^{-\tilde{C} \left(\frac{\tilde{r}(x, \xi)}{r(x)} \right)^{-\tilde{C}}} \leq m(x, \xi) \leq m_0(x) e^{\tilde{C} \left(\frac{\tilde{r}(x, \xi)}{r(x)} \right)^{\tilde{C}}}.$$

Démonstration : Soit $n = \log m \in S^{0,0}$. Alors $\left| \frac{\partial}{\partial |\xi|} n \right| \leq \frac{C}{\tilde{r}(x, \xi)}$ et donc :

$$|n(x, \xi) - n(x, 0)| \leq C \int_0^{|\xi|} (r^2 + t^2)^{-1/2} dt \leq \hat{C} \log \left(\frac{r + |\xi|}{r} \right),$$

d'où l'inégalité voulue. ■

Puisque R est une fonction Lipschitzienne d'après (1.2), on a $R(x) \leq \text{const.} (1 + |x|)$. Si g_0 est la métrique $\left(\frac{dx}{R} \right)^2 + \left(\frac{d\xi}{\tilde{r}} \right)^2$ sur \mathbb{R}^{2n} , on a donc

$$g_0 \geq \frac{1}{C_0} \left(\left(\frac{dx}{1+|x|} \right)^2 + \left(\frac{d\xi}{\tilde{r}} \right)^2 \right),$$

ESPACES DE SYMBOLES

et, si d_{g_0} désigne la distance associée à g_0 , on en déduit que toutes les boules $B_{g_0}(\rho, C) = \{\mu \in \mathbb{R}^{2n}; d_{g_0}(\rho, \mu) < C\}$, $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$, $C \in]0, +\infty[$, sont bornées. On introduit aussi la métrique conforme $g = (\tilde{r} R)^2 g_0$ et on remarque que : $\tilde{r} R \leq (\text{const.}) (1 + d_g((0,0), (x, \xi)))$.

Nous allons maintenant développer certaines préparations techniques sur les déformations de fonctions d'ordre et des fonctions de classe $\dot{S}^{1,1}$. On commence par remarquer que si $f \in \dot{S}^{1,1}$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(1.8) \quad |f(\rho) - f(\mu)| \leq C d_g(\rho, \mu).$$

Soit $0 < \chi \in C_0^\infty(\{(x, \xi); |x| < 1, |\xi| < 1\})$ avec $\int \chi dx d\xi = 1$ et posons

$$(1.9) \quad K_\varepsilon((x, \xi), (y, \eta)) = \varepsilon^{-2n} R(x)^{-n} \tilde{r}(x, \xi)^{-n} \chi\left(\frac{(x-y)}{\varepsilon R(x)}, \frac{(\xi-\eta)}{\varepsilon \tilde{r}(x, \xi)}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on pose :

$$(1.10) \quad D_g(x, \xi) = \iint K_\varepsilon((x, \xi), (y, \eta)) d_g((0,0), (y, \eta)) dy d\eta.$$

Alors il est clair que D_g et $1 + d_g((0,0), (x, \xi))$ sont du même ordre de grandeur. De plus $D_g \in \dot{S}^{1,1}$. En effet, pour $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, on a avec $\psi = d_g((0,0), \cdot)$:

$$(1.11) \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta D_g = \iint \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta K_\varepsilon(x, \xi, y, \eta) (\psi(y, \eta) - \psi(x, \xi)) dy d\eta,$$

puisque : $\iint \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta K_\varepsilon dy d\eta = 0$. Utilisant que $\psi(y, \eta) - \psi(x, \xi) = \mathcal{O}(\varepsilon \tilde{r} R)$ pour (y, η) dans la "boite de base" $B((x, \xi), \varepsilon) = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}; |x-y| \leq \varepsilon R(x), |\xi-\eta| \leq \varepsilon \tilde{r}(x, \xi)\}$, et que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta K_\varepsilon(x, \xi, y, \eta)| \leq C_{\alpha, \beta} \varepsilon^{-2n-|\alpha|-|\beta|} R^{-n-|\alpha|} \tilde{r}^{-n-|\beta|},$$

on trouve :

$$(1.12) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta D_g| \leq C_{\alpha, \beta} \epsilon^{1-|\alpha|-|\beta|} R^{1-|\alpha|} \tilde{r}^{1-|\beta|} .$$

De même on montre que :

$$(1.13) \quad |D_g - \psi| \leq C_0 \epsilon \tilde{r} R .$$

On fixe maintenant $\epsilon > 0$ assez petit.

Proposition 1.7. Soient $f, \tilde{g} \in \dot{S}^{1,1}$ deux fonctions réelles. Alors il existe une famille $[1, +\infty[\ni \lambda \rightarrow f_\lambda \in \dot{S}^{1,1}$, continue en λ et uniformément bornée dans $\dot{S}^{1,1}$, telle que $f_1 = f$, t.q. $f_\lambda(x, \xi)$ est compris entre $f(x, \xi)$ et $\tilde{g}(x, \xi)$ et telle que $f_\lambda(x, \xi) = f(x, \xi)$ pour $D_g((x, \xi)) \geq \lambda$, $f_\lambda(x, \xi) = \tilde{g}(x, \xi)$ pour $D_g((x, \xi)) \leq \frac{\lambda}{2}$.

Démonstration : Il suffit de donner la construction de f_λ en dehors d'un compact. Là, on pose :

$$f_\lambda((x, \xi)) = (1 - \chi(\frac{1}{\lambda} D_g))f + \chi(\frac{1}{\lambda} D_g)\tilde{g} ,$$

où $\chi \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ prend ses valeurs dans $[0, 1]$, $\chi(t) = 1$ pour $t \leq \frac{1}{2}$, $\chi(t) = 0$ pour $t \geq 1$. La seule chose qui n'est pas complètement évidente est alors que f_λ soit uniformément bornée dans $\dot{S}^{1,1}$. On a :

$$\partial f_\lambda = (1 - \chi(\frac{1}{\lambda} D_g))\partial f + \chi(\frac{1}{\lambda} D_g)\partial \tilde{g} - \chi'(\frac{1}{\lambda} D_g)\partial D_g \frac{1}{\lambda}(f - \tilde{g}) .$$

Ici ∂ désigne ∂_{x_j} ou ∂_{ξ_j} . On remarque ici que $\partial_{x_j} f, \partial_{x_j} \tilde{g}, \partial_{x_j} D_g \in S^{1,0}$, $\partial_{\xi_j} f, \partial_{\xi_j} \tilde{g}, \partial_{\xi_j} D_g \in S^{0,1}$, et que $\{\chi(\frac{1}{\lambda} D_g)\}_{\lambda \geq 1}, \{\chi'(\frac{1}{\lambda} D_g)\}_{\lambda \geq 1}$ sont des familles bornées dans $S^{0,0}$ (on utilise ici que $D_g \geq \text{const.} \tilde{r} R$). De plus, $\frac{1}{\lambda}(f - \tilde{g})$ est uniformément borné dans $S^{0,0}$ dans la région $D_g(x, \xi) \sim \lambda$, d'où le fait que $f_\lambda \in \dot{S}^{1,1}$ uniformément. ■

ESPACES DE SYMBOLES

La proposition précédente servira pour la déformation des fonctions fuites. Pour la déformation des fonctions d'ordre on utilisera la proposition 1.5 et le résultat suivant :

Proposition 1.8. *La proposition 1.7 reste valable si l'on remplace partout " $\dot{S}^{1,1}$ " par " $\dot{S}^{0,0}$ ".*

Démonstration : C'est essentiellement la même. On construit une régularisée D_{g_0} de $d_{g_0}((0,0), \cdot)$ par (1.10) avec d_g remplacé par d_{g_0} . Alors $D_{g_0} \in \dot{S}^{0,0}$ est du même ordre de grandeur que $1 + d_{g_0}((0,0), \cdot)$. Si $f \in \dot{S}^{0,0}$, on remarque que f est Lipschitzienne pour d_{g_0} . On peut alors reprendre la démonstration précédente avec D_g remplacé par D_{g_0} . ■

Les deux propositions précédentes restent valables si l'on se restreint systématiquement aux symboles qui ne dépendent que de x . On finit cette section par une discussion sur des sommes asymptotiques. On prendra pour se fixer les idées des symboles $a(x, \xi)$ ou $a(x, \xi, h)$, mais les résultats restent valables pour des symboles dépendant de plus de variables.

Proposition 1.9. *Soient m_0 et k_0 des fonctions d'ordre avec $k_0 \geq 1$, et soit $a_j \in S(m_0 k_0^{-j})$ (respectivement dans $S(m_0 (h/k_0)^j)$) $j = 0, 1, 2 \dots$ une suite de symboles. Alors il existe $a \in S(m_0)$ unique modulo $\cap_{j \geq 0} S(m_0 k_0^{-j})$ (respectivement modulo $\cap_{j \geq 0} S(m_0 (h/k_0)^j)$), t.q. pour $N = 0, 1, \dots$ on ait $a - \sum_0^N a_j \in S(m_0 k_0^{-(N+1)})$ (respectivement dans $S(m_0 (h/k_0)^{N+1})$). (On écrira $a \sim \sum_0^\infty a_j$).*

Démonstration : L'unicité est évidente. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, avec $\chi = 1$ près de 0. On pose

$$\tilde{a}_j = a_j (1 - \chi(k_0/\lambda_j)) \quad (\text{respectivement } a_j (1 - \chi(k_0/h \lambda_j)))$$

où $\lambda_j \geq 1$ doit tendre vers $+\infty$ assez vite. Alors $\tilde{a}_j - a_j \in S(m_0 k_0^{-\infty})$ déf $\prod_0^\infty S(m_0 k_0^{-j})$ (respectivement dans $S(m_0 (\frac{h}{k_0})^{+\infty}) = \prod_0^\infty S(m_0 (\frac{h}{k_0})^j)$) et si $p_{j,k}$, $k=0,1,2,\dots$ désigne une suite des semi-normes sur $S(m_0 k_0^{-j})$ (respectivement $S(m_0 (h/k_0)^j)$), on peut s'arranger pour que $p_{\nu,\mu}(\tilde{a}_j) \leq 2^{-j}$ pour $0 \leq \nu, \mu \leq j-1$. On peut alors poser $a = \sum_0^\infty \tilde{a}_j$. ■

Dans la situation de la proposition, on écrira $a \sim \sum_0^\infty a_j$. Dans les applications on aura essentiellement toujours $k_0 = \tilde{r} R$. On a deux critères pratiques pour vérifier la convergence asymptotique que l'on énonce dans le cas des symboles dépendant de h :

Critère 1. Soient $a_j \in S(m_0 (h/k_0)^j)$ comme dans la proposition et soit b une fonction C^∞ t.q. pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$:

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b = \mathcal{O}(m_0(k_0/h)^{N(\alpha,\beta)} \tilde{r}^{-|\beta|} R^{-|\alpha|} ,$$

où $N(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$, et t.q.

$$b - \sum_0^N a_j = \mathcal{O}(m_0(h/k_0)^{\nu(N)}) ,$$

où $\nu(N) \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$. Alors $b \in S(m_0)$ et $b \sim \sum_0^\infty a_j$. Cela se démontre comme dans le cas classique (voir Hörmander [Hör.1]).

Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$, $\varepsilon > 0$, la boîte de base $B(\alpha, \varepsilon)$ est donnée par $|x - \alpha_x| < \varepsilon R(\alpha_x)$, $|\xi - \alpha_\xi| < \varepsilon \tilde{r}(\alpha)$. Soit aussi $B(0, \varepsilon)$ la boîte standard : $|x| < \varepsilon$, $|\xi| < \varepsilon$. (Il n'y a pas de contradiction dans les notations, car rien ne nous empêche de supposer que $R(0) = r(0) = 1$). Introduisons alors aussi $h_\alpha : B(0, \varepsilon) \rightarrow B(\alpha, \varepsilon)$ défini par $h_\alpha(y, \eta) = (\alpha_x + R(\alpha_x)y, \alpha_\xi + \tilde{r}(\alpha)\eta)$. Alors $a \in S(m_0 h^{-\ell})$ ssi la famille $\left\{ \frac{h^\ell}{m_0(\alpha)} a \circ h_\alpha \right\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$, est uniformément bornée dans $S^0(B(0, \varepsilon))$, l'espace des symboles sur $B(0, \varepsilon) \times]0, 1]$, avec

ESPACES DE SYMBOLES

$h/k_0(\alpha)$ comme petit paramètre.

Nous avons alors le :

Critère 2. On a $a \sim \sum_0^\infty a_j$ dans $S(m_0)$ ssi $\frac{1}{m_0(\alpha)} a \circ h_\alpha \sim \sum_0^\infty \frac{1}{m_0(\alpha)} a_j \circ h_\alpha$, dans $S^0(B(0, \varepsilon))$ avec $h/k_0(\alpha)$ comme nouveau petit paramètre, uniformément pour $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$.

2. VARIETES I-LAGRANGIENNES DE CLASSE $\dot{S}^{1,1}$.

Rappelons qu'une variété I-Lagrangienne $\Lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$ est une variété Lagrangienne pour la forme symplectique $-\text{Im} d\xi \wedge dx$. Nous allons considérer ici des variétés I-Lagrangiennes diffeomorphes à \mathbb{R}^{2n} , qui sont de la forme

$$(2.1) \quad \Lambda_G : \text{Im} \xi = -\frac{\partial G}{\partial \text{Re} x} (\text{Re} x, \text{Re} \xi), \quad \text{Im} x = \frac{\partial G}{\partial \text{Re} \xi} (\text{Re} x, \text{Re} \xi),$$

où $G \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^{2n})$. La représentation (2.1) donne une identification entre \mathbb{R}^{2n} et Λ_G , qui permet de manière évidente de définir les classes de symboles $S(mh^{-l})$ sur Λ_G et la notion de fonction d'ordre sur $\Lambda = \Lambda_G$. Puisque Λ est I-Lagrangienne, la forme $-\text{Im} \xi dx|_{\Lambda}$ est fermée et donc exacte. Donc $-\text{Im} \xi dx = dH$, où $H \in C^{\infty}(\Lambda)$ est une fonction réelle (déterminée à une constante près). On trouve en effet :

$$(2.2) \quad H = -\text{Re} \xi \cdot \text{Im} x + G = -\text{Re} \xi \cdot \text{Im} x + G(\text{Re} x, \text{Re} \xi) \in \dot{S}^{1,1}.$$

Un cas particulier est celui où $G = g(x)$, $g \in \dot{S}^{1,1}$. Alors :

$$(2.3) \quad \Lambda_g : \text{Im} \xi = -\frac{\partial g}{\partial x}(x), \quad \text{Im} x = 0,$$

et on trouve $H = g$. Pour des raisons techniques, nous serons obligés de nous restreindre plus loin aux variétés Λ_G proches d'une variété Λ_g , au sens que $g \in \dot{S}^{1,1}$, $g = g(x)$ et $G - g$ est suffisamment petit dans $S(rR)$.

On utilisera aussi plus loin que, si G est assez petit dans $\dot{S}^{1,1}$, alors Λ_G est \mathbb{R} -symplectique, c.à.d. symplectique pour $\text{Re} d\xi \wedge dx$. On notera $d\alpha$ l'élément de volume correspondant ; $d\alpha = \frac{1}{n!} (d\xi \wedge dx) \wedge \dots \wedge (d\xi \wedge dx)|_{\Lambda}$ (n facteurs identiques).

3. ESPACES DE SOBOLEV.

Soit $f \in \dot{S}^{1,1}$, $f = f(x)$, et $m(x)$ une fonction d'ordre. Alors, pour $N \in \mathbb{Z}$, $m(x) \tilde{r}(x, \xi) / r(x)^N$ est aussi une fonction d'ordre. Dans le cas $N \geq 0$, on définit :

$$(3.1) \quad H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) ; \sum_{|\alpha| \leq N} \left\| \left(\frac{1}{\tilde{r}} \tilde{D}_x \right)^\alpha m e^{-f/h} u \right\|_{L^2}^2 < \infty \right\}.$$

Ici $\tilde{D}_x = h D_x$. $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N)$ est un espace de Banach, la définition (3.1) ne change pas, et on obtient une norme équivalente, si l'on permute arbitrairement les facteurs $\frac{1}{\tilde{r}}$, \tilde{D}_x , m , $e^{-f/h}$. On remarque que si $\tilde{m}(x)$ est une

deuxième fonction d'ordre, $M \in \mathbb{N}$, $0 \leq M \leq N$, et si $P = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) \left(\frac{1}{\tilde{r}} \tilde{D}_x \right)^\alpha$

avec $a_\alpha \in S(\tilde{m})$, alors P est borné indépendamment de h : $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N) \rightarrow$

$H(\Lambda_f, \frac{m}{\tilde{m}}(\tilde{r}/r)^{N-M})$. De même, si $\tilde{f}(x) \in \dot{S}^{1,1}$ est réelle, l'opérateur de multiplication par $e^{-\tilde{f}/h}$ est borné de $H(\Lambda_f, m(\frac{\tilde{r}}{r})^N)$ dans $H(\Lambda_{f-\tilde{f}}, m(\frac{\tilde{r}}{r})^N)$.

On remarque aussi que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N)$. En effet, si

$u \in H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N)$, on peut d'abord approcher u en norme par $\chi(\varepsilon x)u(x)$, où

$\varepsilon > 0$ est petit et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi = 1$ près de 0. (Puisque $R(x) \leq \text{const}(1+|x|)$, $\chi(\varepsilon \cdot)$ forment une famille bornée dans $S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$, pour $\varepsilon \in]0, 1[$). On ap-

proche ensuite $\chi(\varepsilon x)u(x)$ arbitrairement près par une fonction C_0^∞ , par une régularisation standard. Le dual de $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N)$ est donc un espace

de distributions. Définissons, pour $0 \leq N \in \mathbb{N}$, $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^{-N})$ par :

$$(3.2) \quad H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^{-N}) \text{ est le dual de } H(\Lambda_{-f}, \frac{1}{m}(\tilde{r}/r)^N).$$

On peut facilement analyser la structure de $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^{-N})$. Par définition, l'application :

$$(3.3) \quad H(\Lambda_{-f}, \frac{1}{m}(\tilde{r}/r)^N) \ni u \rightarrow \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{r}} \tilde{D}_x \right)^\alpha \frac{1}{m} e^{f/h} u \right\}_{|\alpha| \leq N} \in (L^2)^{M(N)},$$

est injective bornée et d'image fermée. Donc par dualité, l'application

$$(3.4) \quad (L^2)^{M(N)} \ni \{v_\alpha\}_{|\alpha| \leq N} \rightarrow \sum_{|\alpha| \leq N} e^{f/h} \frac{1}{m} (\tilde{D}_x \frac{1}{r})^\alpha v_\alpha \in H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^{-N})$$

est surjective et bornée. Si $F \subseteq (L^2)^{M(N)}$ est l'image de l'application (3.3), alors F^\perp est le noyau de l'application (3.4) et cette application restreinte à F est bijective. On trouve alors la :

Proposition 3.1. *L'application (3.4) est surjective et bornée (uniformément p.r. à h). Toute $u \in H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^{-N})$ s'écrit donc :*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{m} e^{f/h} (\tilde{D}_x \frac{1}{r})^\alpha v_\alpha,$$

avec $v_\alpha \in L^2$ et $\|u\|_{H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^{-N})} \sim \sum_{|\alpha| \leq N} \|v_\alpha\|_{L^2}$. On peut choisir

v_α linéairement en fonction de u .

Dans cette proposition on ne change pas la validité (mais seulement le choix des v_α) si pour chaque α on permute arbitrairement les facteurs $\frac{1}{m}$, $e^{f/h}$, \tilde{D}_x , $\frac{1}{r}$. On montre maintenant que, si $P = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) (\frac{1}{r} \tilde{D}_x)^\alpha$, $a_\alpha \in S(\tilde{m})$, $N \in \mathbb{Z}$, alors P est borné indépendamment de h comme opérateur de $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N)$ dans $H(\Lambda_f, \frac{m}{\tilde{m}} (\frac{\tilde{r}}{r})^{N-M})$. Aussi, si $N, \tilde{N} \in \mathbb{Z}$, $N \geq \tilde{N}$ et $m(x)$, $\tilde{m}(x)$ sont des fonctions d'ordre avec $\tilde{m} \leq \text{const.} \cdot m$, $f, \tilde{f} \in S^{1,1}$ avec $f \leq \tilde{f}$, alors $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N) \subseteq H(\Lambda_{\tilde{f}}, \tilde{m}(\tilde{r}/r)^{\tilde{N}})$ et l'inclusion est bornée indépendamment de h .

Proposition 3.2. *Soient $N, \tilde{N} \in \mathbb{Z}$ avec $N > \tilde{N}$, $f, \tilde{f} \in S^{1,1}$, avec $f \leq \tilde{f}$ et $m(x)$, $\tilde{m}(x)$ des fonction d'ordre avec $\tilde{m}/m \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$. Alors l'inclusion $j : H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N) \rightarrow H(\Lambda_{\tilde{f}}, \tilde{m}(\tilde{r}/r)^{\tilde{N}})$ est compacte.*

Démonstration : On se ramène d'abord sans problèmes au cas $\tilde{f} = f$. Si $\tilde{N} \geq 0$, alors j s'approche en norme par les applications $j_\epsilon : u \rightarrow j(\chi(\epsilon \cdot)u)$, $\epsilon > 0$.

ESPACES DE SOBOLEV

(Ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 près de 0). La compacité de chaque j_ϵ se déduit des résultats standard sur les espaces de Sobolev. On a donc démontré la proposition dans le cas $0 \leq \tilde{N} < N$. Supposons ensuite que $\tilde{N} < N \leq 0$. Alors on se ramène au cas précédent par dualité. Si $\tilde{N} \leq 0 < N$ (ou bien si $\tilde{N} < 0 \leq N$), on factorise j en

$$H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N) \rightarrow H(\Lambda_f, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_f, \tilde{m}(\tilde{r}/r)^{\tilde{N}})$$

(ou bien en $H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^N) \rightarrow H(\Lambda_f, m) \rightarrow H(\Lambda_f, \tilde{m}(\tilde{r}/r)^{\tilde{N}})$). La factorisation (dans chaque cas) contient une application compacte, et donc j est compact aussi dans ces cas. ■

4. TRANSFORMATIONS FBI.

On commence par construire une résolution de l'identité adaptée à une variété I-Lagrangienne de classe $S^{1,1}$. On part de l'identité :

$$(4.1) \quad \delta(x-y) = C_n h^{-3n/2} \int e^{\frac{i}{h} ((x-y)\beta_\xi + i(x-\beta_x)^2 + i(y-\beta_x)^2)} d\beta ,$$

et on cherche d'abord un changement de variables complexe, qui transforme la phase en :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, \alpha, \lambda) &= (x-y)\alpha_\xi + i\lambda ((x-\alpha_x)^2 + (y-\alpha_x)^2) = \\ &= (x-y)\alpha_\xi + \frac{i\lambda}{2} (x-y)^2 + 2i\lambda(\alpha_x - \frac{x+y}{2})^2 , \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$.

La phase dans (4.1) s'écrit : $(x-y)\beta_\xi + \frac{i}{2} (x-y)^2 + 2i(\beta_x - \frac{x+y}{2})^2$, et on pose alors

$$(4.2) \quad \begin{cases} \beta_\xi = \alpha_\xi + \frac{i}{2} (\lambda-1)(x-y) \\ \beta_x - \frac{x+y}{2} = \lambda^{1/2} (\alpha_x - \frac{x+y}{2}) , \end{cases}$$

ce qui donne la transformation voulue de la phase. Pour x, y fixés on obtient

$$\begin{aligned} d\beta_{\xi_j} &= d\alpha_{\xi_j} + \frac{i}{2} (x_j - y_j) d\lambda \\ d\beta_{x_j} &= \lambda^{1/2} d\alpha_{x_j} + (\alpha_{x_j} - \frac{x_j+y_j}{2}) \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} d\lambda . \end{aligned}$$

Ainsi on a l'identité entre les formes fermées :

$$(4.3) \quad e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \beta, 1)} d\beta = e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha, \lambda)} \omega .$$

Ici on considère le second membre comme une $2n$ -forme fermée dans $C_\alpha^{2n} \times \mathbb{R}_\lambda$,

TRANSFORMATIONS F.B.I.

ou bien avec $\lambda = \lambda(\alpha)$ une fonction donnée, comme une $2n$ -forme fermée dans \mathbb{C}_α^{2n} . On trouve

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \omega = & \lambda^{n/2} d\alpha + \sum_{j=1}^n \lambda^{n/2} \frac{i}{2} (x_j - y_j) d\alpha_{x_j} \wedge d\alpha_{\xi_1} \wedge \dots \wedge d\lambda \wedge \dots \wedge d\alpha_{\xi_n} + \\ & + \sum_{j=1}^n \lambda^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2} (\alpha_{x_j} - \frac{x_j + y_j}{2}) d\alpha_{x_1} \wedge \dots \wedge d\lambda \wedge \dots \wedge d\alpha_{x_n} \wedge d\alpha_{\xi_j} . \end{aligned}$$

Soit $\Lambda = \Lambda_G$ une variété I-Lagrangienne de classe $S^{1,1}$ comme dans la section 2. Si on écrit la paramétrisation (2.1) sous la forme

$$(4.5) \quad \mathbb{R}^{2n} \ni \gamma + \alpha(\gamma) = (\alpha_x(\gamma), \alpha_\xi(\gamma)) \in \Lambda ,$$

alors $\text{Im } \alpha_x \in S^{0,1}$, $\text{Im } \alpha_\xi \in S^{1,0}$, et on rappelle que, à l'aide de (4.5), on peut définir naturellement les fonctions d'ordre et les espaces $S(m)$ sur Λ .

On choisit maintenant λ de classe $S^{1,-1}$. Ainsi, la nouvelle phase $(x-y)\alpha_\xi + i\lambda((x-\alpha_x)^2 + (y-\alpha_x)^2)$ appartiendra à $S^{1,1}$ dans toute région : $|x-\alpha_x|$, $|y-\alpha_x| \leq \text{const.}$ $R(\alpha_x)$ selon la convention de la section 1. Nous avons :

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_{x_j} \in \sum_k S^{0,0} d\gamma_{x_k} + \sum_k S^{-1,+1} d\gamma_{\xi_k} \\ d\alpha_{\xi_j} \in \sum_k S^{1,-1} d\gamma_{x_k} + \sum_k S^{0,0} d\gamma_{\xi_k} \\ d\lambda \in \sum_k S^{1,-2} d\gamma_{x_k} + \sum_k S^{0,-1} d\gamma_{\xi_k} \end{array} \right.$$

et on trouve donc que

$$(4.7) \quad C_n h^{-\frac{3n}{2}} \omega = j d\alpha|_\Lambda = \tilde{j} d\gamma , \quad j, \tilde{j} \in S^{\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3n}{2}} ,$$

où j et \tilde{j} dépendent linéairement de x, y . Ici

$$d\alpha = d\alpha_{x_1} \wedge \dots \wedge d\alpha_{x_n} \wedge d\alpha_{\xi_1} \wedge \dots \wedge d\alpha_{\xi_n} , \quad d\gamma = d\gamma_{x_1} \wedge \dots \wedge d\gamma_{x_n} \wedge d\gamma_{\xi_1} \wedge \dots \wedge d\gamma_{\xi_n} ,$$

sont les $2n$ -formes sur Λ et \mathbb{R}^{2n} définies de manière intrinsèque sur ces variétés qui sont \mathbb{R} -symplectiques (cf. la section 1).

Formellement, nous avons

$$(4.8) \quad \delta(x-y) = C_n h^{-\frac{3n}{2}} \int_{\alpha \in \Lambda} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x,y,\alpha)} \omega = \int_{\alpha \in \Lambda} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x,y,\alpha)} j(x,y,\alpha,h) da,$$

où $\varphi_0(x,y,\alpha) = \varphi_0(x,y,\alpha,\lambda(\alpha))$.

Soit maintenant $g \in \dot{S}(rR)$, $g = g(x)$. On choisit $\lambda \in S^{1,-1}$ elliptique positif et suffisamment grand pour que

$$(4.9) \quad -g(x) + g(y) + (x-y) \frac{\partial g}{\partial x}(Y_x) - \lambda(Y) ((x-Y_x)^2 + (y-Y_x)^2) \\ \leq -\frac{1}{C_0} \frac{\tilde{r}(Y)}{R(Y_x)} ((x-Y_x)^2 + (y-Y_x)^2),$$

pour x,y réels dans un domaine de la forme $\max(|x-Y_x|, |y-Y_x|) \leq \frac{1}{C_0} R(Y_x)$.

Ici $C_0 > 0$ est une constante. Soit d'autre part, $\chi_Y(x) = \chi(R(Y_x)^{-1}(x-Y_x))$, où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 dans un voisinage de 0, et à support dans un voisinage suffisamment petit pour que le support de $\chi_Y(x) \chi_Y(y)$ soit contenu dans le domaine de validité de (4.9). Pour $\alpha = \alpha(Y) \in \Lambda$, on écrira $\chi_\alpha(x) = \chi_Y(x)$.

Proposition 4.1. Avec g, λ, χ fixés comme ci-dessus, soit $G \in \dot{S}^{1,1}$ telle que $G(x,\xi) - g(x) \in S(rR)$. Il existe alors des constantes $\varepsilon_0 > 0$, et $C_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et un voisinage de 0 dans $S(rR)$ t.q. pour tout G avec $G - g$ dans ce voisinage on ait

$$(4.11) \quad I(x,y,h) = \delta(x-y) + k(x,y,h) e^{(g(x) - g(y))/h},$$

où k est C^∞ à support dans $\bigcup_Y (\text{supp } \chi_Y(x) \chi_Y(y))$ et vérifie

TRANSFORMATIONS F.B.I.

$$(4.12) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k| \leq C_{\alpha, \beta} e^{-\epsilon_0 R r/h} R^{-n-|\alpha|-|\beta|} .$$

Ici $I(x, y, h) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ est défini par l'intégrale oscillante :

$$(4.13) \quad I(x, y, h) = \int_{\alpha \in \Lambda_G} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)} j \chi_\alpha(x) \chi_\alpha(y) d\alpha .$$

Démonstration : Pour $\alpha = \alpha(\gamma) \in \Lambda_G$, on regarde d'abord la taille de :

$$\left| e^{-\frac{1}{h}(g(x) - g(y)) + \frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)} \right|_0 = e^{a/h}$$

où : $a = -(g(x) - g(y)) - (x-y)(\text{Im } \alpha_\xi) - \lambda(\gamma) ((x-\gamma_x)^2 + (y-\gamma_x)^2 - 2(\text{Im } \alpha_x)^2) .$

On utilise ici que : $\text{Im } \alpha_\xi = -\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma_x) + \mathcal{O}(\epsilon)r$, $\text{Im } \alpha_x = \mathcal{O}(\epsilon) \frac{r}{R}$, et, avec (4.9), ceci donne :

$$a \leq -\frac{1}{C_0} \frac{r}{R} ((x-\gamma_x)^2 + (y-\gamma_x)^2) + \mathcal{O}(\epsilon)rR .$$

Ici $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit en fonction du voisinage de 0 dans $S(rR)$ où doit se trouver $G-g$. A l'aide de cette estimation, on vérifie sans peine que l'intégrale oscillante (4.13) est bien définie, de classe C^∞ en dehors de la diagonale, et que, pour tout $\delta > 0$, la restriction de $I(x, y, h)$ à $|x-y| \geq \delta R(y)$, vérifie :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta I| \leq \\ & \leq C_{\alpha, \beta, \delta} e^{(g(x) - g(y))/h} e^{-\frac{1}{C_1} \frac{r}{R} (x-y)^2 + \mathcal{O}(\epsilon)r(x)R(x)/h} R^{-n-|\alpha|-|\beta|} , \end{aligned}$$

où $C_1 > 0$ ne dépend pas de $\delta > 0$.

Etudions ensuite $(x_j - y_j)I$: On remarque d'abord que

$$(4.15) \quad (x_j - y_j) e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \beta, 1)} d\beta = \\ = h d\beta \left(e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \beta, 1)} (-1)^{n+j-1} d\beta_{x_1} \wedge \dots \wedge d\beta_{x_n} \wedge d\beta_{\xi_1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\beta_{\xi_j}} \wedge \dots \wedge d\beta_{\xi_n} \right).$$

Quand on discute les symboles à valeurs dans les formes dans les variables α (où γ) il sera commode d'utiliser les formes "normalisées"

$$\frac{1}{R(\alpha_x)} d\alpha_{x_j} = \widetilde{d\alpha}_{x_j}, \quad \frac{1}{r(\alpha)} d\alpha_{\xi_j} = \widetilde{d\alpha}_{\xi_j}.$$

Ainsi une k -forme de classe $S(m)$ est par définition une combinaison linéaire d'expression

$$a(x, y, \alpha, h) \widetilde{d\alpha}_{x_{j_1}} \wedge \dots \wedge \widetilde{d\alpha}_{x_{j_p}} \wedge \widetilde{d\alpha}_{\xi_{j_{p+1}}} \wedge \dots \wedge \widetilde{d\alpha}_{\xi_{j_n}}$$

avec a de classe $S(m)$. On remarque que la différentielle extérieure d'une k -forme de classe $S(m)$ est une $(k+1)$ -forme de classe $S(m)$. Avec cette terminologie ω dans (4.3) sera une $2n$ -forme de classe $S^{3n/2, n/2, 0}$, et la substitution de (4.2) dans (4.15) donne une $(2n-1)$ -forme ω_{2n-1} de classe $S^{\frac{3n}{2}-1, \frac{n}{2}, -1}$ telle que

$$(4.16) \quad (x_j - y_j) e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)} \omega = d_\alpha \left(e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)} \omega_{2n-1} \right).$$

(On pourra remplacer " d_α " par " d_γ " si l'on veut tout ramener à \mathbb{R}_Y^{2n}).

Multiplions (4.13) par $x_j - y_j$, on obtient alors

$$(4.17) \quad (x_j - y_j) I = -h^{-\frac{3n}{2}} \int_{\alpha \in \Lambda_G} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)} d_\alpha (\chi_\alpha(x) \chi_\alpha(y)) \wedge \omega_{2n-1}.$$

Pour (4.14), on obtient :

$$(4.18) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta ((x_j - y_j) I)| \leq C_{\alpha, \beta} e^{(g(x) - g(y))/h} e^{-\epsilon_0 r R/h} R^{1-n-|\alpha|-|\beta|}.$$

Par un développement de Taylor, on trouve alors :

TRANSFORMATIONS F.B.I.

$$(4.19) \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \frac{1}{h} (g(x) - g(y)) I \right| \leq C_{\alpha, \beta} e^{(g(x)-g(y))/h} e^{-\varepsilon_0 r R/h} R^{-n-|\alpha|-|\beta|} .$$

Nous allons ensuite faire des déformations de Λ, λ en utilisant la formule de Stokes sous la forme suivante :

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^n , I un intervalle et $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application C^∞ . Soit ω une n -forme C^∞ définie dans un voisinage de l'image de f . Alors si $f_t = f(t, \cdot)$, nous avons

$$(4.20) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_t^* \omega = f_t^* \left(\frac{\partial f}{\partial t} \lrcorner d\omega \right) + d \left(f_t^* \left(\frac{\partial f}{\partial t} \lrcorner \omega \right) \right) .$$

(On démontre cette formule classique, en introduisant $\Omega = f^* \omega$ sur $I \times V$. Avec $\Omega_s = \Omega|_{t=s}$, il s'agit alors de vérifier que: $\frac{\partial}{\partial t} \Omega_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner d\Omega \right)_t + d \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \Omega \right)_t$, et il suffit clairement de le faire dans les deux cas particuliers $\Omega = g(t,x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $\Omega = h(t,x) dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$.)

Si $\Lambda = \mathbb{R}^{2n}$, $r, R = \text{const.}$ et $\lambda = \lambda(\alpha_\xi)$, et si l'on définit \tilde{I} comme dans (4.13) mais sans les troncatures, on montre facilement que $\tilde{I} = \delta(x-y)$. (Si l'on relie β_ξ et α_ξ par la première partie de (4.2), on montre d'abord que la n -forme en β_ξ , que l'on obtient de (4.1) en intégrant seulement par rapport à β_x , est égale à la n -forme en α_ξ que l'on obtient par la même procédure sur (4.13). Ensuite la formule de Stokes montre que l'on a bien $\tilde{I} = \delta(x-y)$). Il suffit ensuite de majorer la contribution de $1 - \chi_\alpha(x) \chi_\alpha(y)$ à \tilde{I} , pour en déduire (4.11) et (4.12) dans ce cas particulier.

Pour montrer (4.11), (4.12) dans le cas général on peut se restreindre à une boule de rayon $\sim R(x_0)$ centrée en un point (x_0, x_0) . On peut donc supposer que r et R sont constants et si $\lambda_0(\alpha_\xi) = \lambda(x_0, \alpha_\xi)$, on pose $\lambda_t(\alpha) = (1-t)\lambda_0(\alpha) + t\lambda(\alpha)$, $G_t = tG$ (et $g_t = tg$). Ainsi, en composant (4.2) et (4.5) pour Λ_t, λ_t , ($\Lambda_t = \Lambda_t G$), on obtient une application

$$(4.21) \quad f_t : Y \rightarrow f_t(Y) = \beta(t, \gamma) ,$$

qui dépend aussi de x, y , définie pour $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$, $\gamma_x - x_0$, $x - x_0$, $y - x_0 = \mathcal{O}(\mathbb{R})$, et avec $\beta_x - \frac{x+y}{2} \in S^{1/2, 1/2}$, $\beta_\xi + \frac{i}{2}(x-y) \in S^{1, 0}$, uniformément en t , pour $t \in [0, 1]$, et de même pour les différentes dérivées par rapport à t de ces expressions. Avec $\lambda = \lambda_t$, $\alpha = \alpha_t$, $\tilde{j} = \tilde{j}_t$, on a :

$$e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)/h} \tilde{j} d\gamma = f_t^* \left(C_n h^{-3n/2} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \beta, 1)} d\beta \right)$$

ce qui donne l'image réciproque par f_t^* d'une $2n$ -forme fermée.

Appliquant (4.20), on trouve :

$$(4.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \alpha)/h} \tilde{j} d\gamma \right) = d_\gamma \left(f_t^* \left(C_n h^{-3n/2} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \beta, 1)/h} \frac{\partial f}{\partial t} \lrcorner d\beta \right) \right).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$(4.23) \quad \frac{\partial}{\partial t} I_t = - \int_{\alpha = \alpha(t, \gamma)} d_\gamma (\chi_\gamma(x) \chi_\gamma(y)) \wedge f_t^* \left(C_n h^{-\frac{3n}{2}} e^{\frac{i}{h} \varphi_0(x, y, \beta, 1)/h} \frac{\partial f}{\partial t} \lrcorner d\beta \right).$$

Pour déterminer l'ordre des symboles en γ qui apparaissent ici, on constate que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in \sum S^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \beta_{x_k}} + \sum S^{1, 0} \frac{\partial}{\partial \beta_{\xi_k}} .$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \lrcorner d\beta \in \sum S^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \frac{d\beta}{d\beta_{x_k}} + \sum S^{1, 0} \frac{d\beta}{d\beta_{\xi_k}}$$

où on utilise la notation : $\frac{d\beta}{d\beta_{x_k}} = d\beta_{x_1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\beta_{x_k}} \wedge \dots \wedge d\beta_{x_n} \wedge d\beta_{\xi_1} \wedge \dots \wedge d\beta_{\xi_n}$.

D'autre part,

TRANSFORMATIONS F.B.I.

$$dB_{x_j} \in \sum S^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \widetilde{d\gamma}_{x_k} + \sum S^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \widetilde{d\gamma}_{\varepsilon_k}$$

$$dB_{\varepsilon_j} \in \sum S^{1,0} \widetilde{d\gamma}_{x_k} + \sum S^{1,0} \widetilde{d\gamma}_{\varepsilon_k},$$

et donc $f_t^* (\frac{\partial f}{\partial t} \lrcorner dB)$ est une $(2n-1)$ -forme de classe $S^{\frac{3n}{2}, \frac{n}{2}}$, et (4.23) s'écrit :

$$(4.24) \quad \frac{\partial}{\partial t} I_t = - \int_{\alpha=\alpha(t, \gamma)} e^{\frac{i}{h} \varphi(x, y, \alpha, \lambda_t)} \tilde{k}(x, y, \gamma, t, h) \widetilde{d\gamma},$$

où \tilde{k} est uniformément dans $S^{(\frac{3n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2})}$ et à support dans $|x - \gamma_x| + |y - \gamma_y| \approx R$. Faisant les intégrations en γ on trouve alors

$$(4.25) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \frac{\partial}{\partial t} I_t| \leq C_{\alpha, \beta} e^{t(g(x)-g(y))/h - \varepsilon_0 r R/h} R^{-n-|\alpha|-|\beta|}.$$

Avec (4.19) (valable pour I_t), on trouve

$$(4.26) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \frac{\partial}{\partial t} e^{-t(g(x)-g(y))/h} I_t| \leq C_{\alpha, \beta} e^{-\varepsilon_0 r R/h} R^{-n-|\alpha|-|\beta|},$$

et puisque l'on a déjà établi (4.11), (4.12) pour $t=0$ avec g remplacé par $g=0$, il suffit d'intégrer (4.26) de $t=0$ à $t=1$ pour achever la démonstration de la Proposition. ■

A cause de (4.4), (4.7) et comme $\lambda = \lambda(\alpha)$ et $\alpha = \alpha(\gamma)$ sont indépendants de x et y , on constate que j et \tilde{j} dépendent linéairement de x et y :

$$(4.27) \quad j(x, y, \alpha, h) = j_0(\alpha, h) + \sum_{\nu=1}^n j_\nu(\alpha, h) (x_\nu - \alpha_{x_\nu}) + \sum_{\nu=1}^n j_{n+\nu}(\alpha, h) (y_\nu - \alpha_{x_\nu})$$

et on a une formule analogue pour j . Ici $j_0 \in S^{\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3n}{2}}$,
 $j_\nu \in S^{\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \frac{3n}{2}}$, $\nu \geq 1$.

Soit $\vec{t}(\alpha, y, h)$ un $(n+1)$ -vecteur colonne de symboles de classe $S^{\frac{n}{4}, -\frac{n}{4}, \frac{3n}{4}}$, affine-linéaire en y et tel que $\vec{t}, \frac{\partial \vec{t}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \vec{t}}{\partial y_n}$ sont linéairement indépendants au point $y = \alpha_x$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ (et donc en tout point $(\alpha, y) \in \Lambda \times \mathbb{C}^n$, puisque \vec{t} se modifie par une combinaison linéaire en $\frac{\partial \vec{t}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \vec{t}}{\partial y_n}$ quand on modifie y). Pour être plus précis, on fait l'hypothèse d'ellipticité :

$$\left| \det \left(\vec{t}, \frac{\partial \vec{t}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \vec{t}}{\partial y_n} \right) \right| \sim r^{\nu(n+1)\frac{n}{4}} R^{-\frac{n}{4}-n(\frac{n}{4}+1)} h^{-\frac{3n}{4}(n+1)}.$$

Les transformations de F.B.I. que nous considérons sont de la forme

$$(4.28) \quad Tu(\alpha, h) = \int e^{i\varphi(\alpha, y)/h} \vec{t}(\alpha, y, h) \chi_\alpha(y) u(y) dy,$$

où $\chi_\alpha(y) = \chi((y - \text{Re } \alpha_x) / R(\alpha_x))$, $R(\alpha_x) = R(\text{Re } \alpha_x)$ et,

$$(4.29) \quad \varphi(\alpha, y) = (\alpha_x - y) \alpha_\xi + i \lambda(\alpha) (\alpha_x - y)^2,$$

avec $\lambda \in S^{1, -1}$ positif et elliptique comme ci-dessus. (On pourra aussi traiter le cas où φ est une expression quadratique un peu plus générale dans les variables $\alpha_x - y$).

Montrons que nos transformations ne dépendent pas véritablement de $\Lambda = \Lambda_G$ et montrons en même temps comment à partir d'une telle transformation, associée à une variété Λ_g , $g = g(\alpha_x)$, on en obtient une autre (équivalente), associée à Λ_G , pourvu que $G - g$ soit assez petit dans $S(rR)$.

TRANSFORMATIONS F.B.I.

Soit donc $\varphi_0(\alpha, y) \in C^\infty(\Lambda_g \times \mathbb{C}^n)$, polynomiale de degré 2 en y , de classe $S^{1,1}$ (avec les conventions de la section 1), et telle que :

$$(4.30) \quad \text{pour } \alpha_x = y, \text{ on ait : } \varphi_0 = 0, \quad (\varphi_0)'_y = -\alpha_\xi, \quad \text{Im}(\varphi_0)''_{yy} - g''_{yy} \sim \frac{r}{R}.$$

L'exemple typique d'une telle phase est donné par (4.29) (avec α variant dans Λ_g).

Pour $\alpha \in \Lambda_g$ on définit la variété Lagrangienne $\Lambda_\alpha = \left\{ (y, -\frac{\partial \varphi_0(\alpha, y)}{\partial y}) ; y \in \mathbb{C}^n \right\}$, qui coupe Λ_g au point α . L'intersection des deux variétés en ce point est transversale et c'est le seul point d'intersection dans la boîte de base complexe $B(\alpha, \epsilon_0) = \{ (y, \eta) \in \mathbb{C}^{2n} ; |y - \alpha_x| < \epsilon_0 R(\alpha_x), |\eta - \alpha_\xi| < \epsilon_0 \tilde{r}(\alpha) \}$, pourvu que $\epsilon_0 > 0$ soit assez petit, mais indépendant de α . On le voit bien si l'on considère la configuration "uniformisée" obtenue en prenant l'image réciproque par h_α introduite à la fin de la section 1.

Si maintenant $G \in \dot{S}^{1,1}$ et $G-g$ est assez petit dans $S(rR)$, alors on voit de même que $B(\alpha, \epsilon_0)$ contient un seul point d'intersection $\beta(\alpha)$ de Λ_α et $\Lambda = \Lambda_G$ dans $B(\alpha, \epsilon_0)$. Toujours en passant par des applications h_α , on vérifie que $\beta : \Lambda_g \rightarrow \Lambda_G$ est un difféomorphisme t.q. si $\beta(\alpha) = (\beta_x(\alpha), \beta_\xi(\alpha))$ alors $\beta_x \in \dot{S}^{0,1}$, $\beta_\xi \in S^{1,0}$ et de même pour l'application inverse $\alpha = \alpha(\beta)$. Une fonction m sur Λ_G est une fonction d'ordre sur Λ_G ssi $m \circ \beta$ est une fonction d'ordre sur Λ_g et β induit aussi une bijection entre $S(m)$ et $S(m \circ \beta)$. Puisque toute fonction d'ordre sur Λ_g est uniformément du même ordre de grandeur dans $B(\alpha, \epsilon_0)$, on ne distinguera pas toujours entre $m \circ \beta$ et m .

Nous pouvons maintenant écrire :

$$(4.31) \quad \varphi_0(\alpha, y) = h(\beta) + \varphi(\beta, y),$$

où $\varphi \in C^\infty(\Lambda \times \mathbb{C}^n)$ est de classe $S^{1,1}$, polynomiale de degré 2 en y avec le même hessien en y que $\varphi_0(\alpha, y)$ et tel que :

$$(4.32) \quad \text{pour } y = \beta_x : \varphi = 0, \varphi'_y = -\beta_\xi, \text{Im } \varphi''_{yy} - g''_{yy}(\alpha_x) \sim \frac{\gamma}{R}.$$

Dans la suite il est sous-entendu que l'on ne considère que des transformations de FBI pour des Λ_G avec $G-g$ assez petit dans $S(rR)$ et avec une phase $\varphi(\alpha, y)$, $\alpha \in \Lambda$, obtenue par la procédure ci-dessus. Le plus souvent φ sera de la forme (4.29) (avec $\lambda(\beta(\alpha)) = \lambda(\alpha)$).

Soit $\varphi(\alpha, y)$, $\alpha \in \Lambda$, $y \in \mathbb{C}^n$ comme ci-dessus. On associe à φ une transformation $\kappa = \kappa_\varphi = \kappa_T$:

$$(4.33) \quad \kappa : (y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}) \rightarrow (\alpha, \frac{\partial -\text{Im } \varphi}{\partial \alpha}),$$

où $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ à droite signifie la différentielle sur Λ . On peut aussi exprimer κ entièrement à l'aide de $-\text{Im } \varphi$:

$$(4.34) \quad \kappa : (y, -\frac{2}{i} \frac{\partial (-\text{Im } \varphi)}{\partial y}) \rightarrow (\alpha, \frac{\partial (-\text{Im } \varphi)}{\partial \alpha}).$$

Pour être précis, montrons que κ est un difféomorphisme de $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B(\alpha, \epsilon_0)$ sur un ouvert de $T^*\Lambda$, si $\epsilon_0 > 0$ est assez petit, et ceci de manière uniforme si l'on réduit le tout à des ouverts bornés à l'aide des applications h_α . Alors puisque G est une petite perturbation de g on voit qu'il suffit de le faire quand $G = g(x)$. Dans ce cas, on écrit $\alpha_x = \gamma_x$, $\alpha_\xi = \gamma_\xi - i \frac{\partial g}{\partial g_x}(\gamma_x)$, $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ et :

$$\varphi = (\gamma_x - y)\gamma_\xi - i(\gamma_x - y) \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}(\gamma_x) + \psi(\gamma, \gamma_x - y),$$

où $\psi = \mathcal{O}((\gamma_x - y)^2)$, $\text{Im } \psi''_{yy} - g''_{yy} > 0$.

TRANSFORMATIONS F.B.I.

Alors, avec $\psi = \psi(\gamma, z)$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} &= \gamma_{\xi} - i \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}(\gamma_x) + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(\gamma, \gamma_x - y) \\ &= \gamma_{\xi} + \operatorname{Re} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(\gamma, \gamma_x - y) + i \left(\operatorname{Im} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(\gamma, \gamma_x - y) - \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}(\gamma_x) \right) \end{aligned}$$

et avec $\gamma_x = y$ on trouve pour une variation infinitésimale $\delta \gamma = (\delta \gamma_x, \delta \gamma_{\xi})$ de γ :

$$-\delta \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} = \delta \gamma_{\xi} + \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(\gamma, 0) \cdot \delta \gamma_x + i \left(\operatorname{Im} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(\gamma, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial \gamma_x^2} \right) \delta \gamma_x .$$

On voit donc que $\delta \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} = 0 \Rightarrow \delta \gamma_x = 0, \delta \gamma_{\xi} = 0$, ce qui prouve bien que κ est un difféomorphisme bien défini dans le domaine indiqué.

Montrons ensuite que κ est canonique si l'on munit $T^*\Lambda$ de la forme symplectique standard et \mathbb{C}^{2n} de la forme $-\operatorname{Im} \sum dn_j \wedge dy_j$. Si α^* désigne les coordonnées duales dans $T^*\Lambda$, on calcule sur le graphe de κ :

$$\begin{aligned} \alpha^* d\alpha + \operatorname{Im}(\eta dy) &= -\frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \operatorname{Im} \frac{2}{i} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial y} dy = -\frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial \alpha} d\alpha - 2 \operatorname{Re} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial y} dy = \\ &= -\frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial y} dy - \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = -d \operatorname{Im} \varphi . \end{aligned}$$

Cette forme est donc fermée et $d\alpha^* \wedge d\alpha + \operatorname{Im} d\eta \wedge dy \Big|_{\text{graphe } \kappa} = 0$.

Cherchons ensuite l'image de Λ lui-même par κ . En prenant la différentielle de l'identité $\varphi(\alpha, \alpha_x) = 0$, on trouve pour $y = \alpha_x$:

$$(4.35) \quad d_{\alpha} \varphi + \sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} d\alpha_{x_j} \Big|_{\Lambda} = 0 ,$$

où $d_{\alpha} \varphi$ désigne la différentielle de la fonction $\Lambda \ni \alpha \rightarrow \varphi(\alpha, y)$.

Utilisant la deuxième identité de (4.32), on trouve donc :

$$(4.36) \quad d_\alpha \varphi = \alpha_\xi d\alpha_x \Big|_\Lambda \quad \text{quand } y = \alpha_x .$$

L'image de Λ par κ est donc le graphe dans $T^*\Lambda$ de la 1-forme fermée $-\text{Im} \alpha_\xi d\alpha_x \Big|_\Lambda$. Si $H \in \dot{S}^{1,1}(\Lambda)$ est une primitive (donnée par exemple par (2.2)) de cette 1-forme, on trouve alors

$$(4.37) \quad d_\alpha (-\text{Im} \varphi) = d_\alpha H \quad \text{pour } y = \alpha_x ,$$

d'où la

Proposition 4.2. Soit κ la transformation canonique introduite par (4.33), définie dans $\cup_{\alpha \in \Lambda} B(\alpha, \epsilon_0)$ si $\epsilon_0 > 0$ est assez petit (et si $\Lambda = \Lambda_G$ avec G -g assez petit dans $S(rR)$). Alors $\kappa(\Lambda) \subset T^*\Lambda$ est le graphe $\lambda_H = \{(\alpha, d_\alpha H) \in T^*\Lambda ; \alpha \in \Lambda\}$, où $H \in \dot{S}^{1,1}(\Lambda)$ est une primitive de $-\text{Im} \alpha_\xi d\alpha_x \Big|_\Lambda$.

Si $\kappa = \kappa_T$ est donnée par (4.33), (4.34), nous avons la transformation inverse $\kappa_T^{-1} : T^*\Lambda \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ (ou plutôt définie sur un voisinage de λ_H dans $T^*\Lambda$) donnée par

$$(4.38) \quad \kappa_T^{-1} : \left(\alpha, -\frac{\partial \text{Im} \varphi}{\partial \alpha} \right) \rightarrow \left(\gamma, \frac{2}{i} \frac{\partial \text{Im} \varphi}{\partial \gamma} \right) .$$

Considérons aussi une deuxième variété $\tilde{\Lambda}$ et une deuxième phase associée $\tilde{\varphi}(\alpha, \gamma)$, $\alpha \in \tilde{\Lambda}$ avec les mêmes propriétés que Λ, φ , en particulier que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\tilde{G}}$, avec \tilde{G} -g assez petit dans $S(rR)$. Si $\kappa_{\tilde{T}}$ est la transformation canonique associée : $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow T^*\tilde{\Lambda}$, alors $\kappa_{\tilde{T}} \circ \kappa_T^{-1} : T^*\Lambda \rightarrow T^*\tilde{\Lambda}$ est un difféomorphisme canonique d'un voisinage de λ_H sur un voisinage de $\lambda_{\tilde{H}}$, engendré par la phase $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = -\text{Im} \tilde{\varphi}(\gamma, \alpha) + \text{Im} \varphi(\beta, \gamma)$, où γ est considéré comme variable de fibre. Si Λ' est une troisième variété de classe $\dot{S}^{1,1}$ "proche de Λ_g ", alors $\kappa_T(\Lambda') = \lambda_{F'}$, $\kappa_{\tilde{T}}(\Lambda') = \lambda_{\tilde{F}'}$, où F', \tilde{F}' sont de classe $\dot{S}^{1,1}$ sur

TRANSFORMATIONS F.B.I.

Λ et $\tilde{\Lambda}$ respectivement et reliés par la formule

$$(4.39) \quad \tilde{F}'(\alpha) = v.c._{(\beta, \gamma)} (\phi(\alpha, \beta, \gamma) + F(\beta)) .$$

On sait a priori que le point critique est non-dégénéré. Montrons aussi (bien qu'on ne l'utilisera pas dans la suite) que sa signature est égale à $(2n, 2n)$. Cette signature est manifestement stable par des déformations continues de $\Lambda, \tilde{\Lambda}, \Lambda'$ et g , et par la déformation linéaire la plus simple on se ramène alors au cas où $\Lambda = \tilde{\Lambda} = \Lambda' = \mathbb{R}^{2n}$, $g = 0$. Dans ce cas on écrit :

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \gamma) &= (\alpha_x - \gamma) \alpha_\xi + \psi(\alpha, \alpha_x - \gamma) \\ \tilde{\phi}(\alpha, \gamma) &= (\alpha_x - \gamma) \alpha_\xi + \tilde{\psi}(\alpha, \alpha_x - \gamma) . \end{aligned}$$

Alors α et β sont réels et

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Im } \gamma \cdot (\alpha_\xi - \beta_\xi) - \text{Im } \tilde{\psi}(\alpha, \alpha_x - \gamma) + \text{Im } \psi(\beta, \beta_x - \gamma) .$$

De plus $F' = \tilde{F}' = 0$ et le point critique dans (4.39) est maintenant donné par $\beta = \alpha$, $\gamma = \alpha_x$. Le Hessien de ϕ dans ce point est donné par la forme quadratique

$$(\beta, \gamma) \rightarrow - \text{Im } \gamma \cdot \beta_\xi - (\text{Im } \tilde{\psi})''(-\gamma) + (\text{Im } \psi)''(\beta_x - \gamma) ,$$

où $(\text{Im } \tilde{\psi})''$, $(\text{Im } \psi)''$ désignent les Hessiens des fonctions $\text{Im } \tilde{\psi}$, $\text{Im } \psi$ par rapport au deuxième argument. On considère cette forme dans les $4n$ -variables réelles : $t = \text{Re } \gamma$, $s = \text{Im } \gamma$, $u = \beta_x - \text{Re } \gamma$, $v = \beta_\xi$:

$$K = -s \cdot v - (\text{Im } \tilde{\psi})''(t + i s) + (\text{Im } \psi)''(-u + i s) .$$

Ici $(\text{Im } \tilde{\psi})''$ et $(\text{Im } \psi)''$ sont des formes quadratiques de signature $(n, -n)$ et leurs restrictions à \mathbb{R}^n sont définies positives. Donc

$$q(s) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} (\text{Im } \psi)''(-u + i s) \text{ et } \tilde{q}(s) = \min_{t \in \mathbb{R}^n} (\text{Im } \tilde{\psi})''(t + i s) \text{ sont des formes}$$

quadratiques définies négatives. Donc on pose

$$L(s, v) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \max_{t \in \mathbb{R}^n} K = -sv - \tilde{q}(s) + q(s),$$

et on constate que L est de signature (n, n) , donc K est de signature $(2n, 2n)$.

Notre résultat entraîne que (4.39) peut aussi être exprimé par une formule de max-min en utilisant une fibration locale de Λ en sous-variétés de dimension n , et cette fibration est indépendante du choix de Λ' , donc de F' . Soit alors Λ'' une quatrième variété I-Lagrangienne avec les mêmes propriétés que Λ' . Ecrivons $\kappa_T(\Lambda'') = \lambda_{F''}$, $\kappa_{\tilde{T}}(\Lambda'') = \lambda_{\tilde{F}''}$, où

$$(4.39)' \quad \tilde{F}''(\alpha) = v.c._{(\beta, \gamma)} (\Phi(\alpha, \beta, \gamma) + F''(\beta)).$$

Définition 4.3. On dit que $\Lambda' \leq \Lambda''$ si $F' \leq F''$ partout sur Λ .

Cette définition dépend d'un choix de constantes de normalisation pour F', F'' , mais une fois fixé ce choix, les formules (4.39), (4.39)' donnent des choix des constantes pour \tilde{F}', \tilde{F}'' , et puisque ces formules ont aussi une version max-min, si $F' \geq F''$ alors $\tilde{F}' \geq \tilde{F}''$. Dans la définition précédente il suffit en effet de supposer que $\Lambda' = \Lambda_{G'}$, $\Lambda'' = \Lambda_{G''}$, avec G' et G'' dans un petit voisinage de $g \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^{2n})$ faisant intervenir donc le poids \tilde{r} plutôt que r .

Montrons finalement que la relation $\Lambda' \leq \Lambda''$ se lit directement sur la relation correspondante entre G' et G'' si $\Lambda' = \Lambda_{G'}$, $\Lambda'' = \Lambda_{G''}$. On suppose donc que G', G'' sont dans un petit voisinage dans $\dot{S}(\tilde{r}R)$ de $g = g(x)$ et comme avant on fixe une tf. de FBI T associée à Λ_g . Si $G \in \dot{S}(\tilde{r}R)$ est proche de g alors $\Phi = -\text{Im } x \cdot \text{Re } \xi + G(\text{Re } x, \text{Re } \xi)$ est une fonction phase non-dégénérée au sens de Hörmander [Hö.1]. La variété critique C_Φ correspondante est donnée par $\text{Im } x = \frac{\partial G}{\partial \text{Re } \xi}(\text{Re } x, \text{Re } \xi)$ et on retrouve

TRANSFORMATIONS F.B.I.

$\Lambda_G = \{ (x, \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} (x, \text{Re } \xi)) ; (x, \text{Re } \xi) \in C_\phi \}$. Si $\kappa_T(\Lambda_G) = \lambda_F$ alors un choix de F est donné par :

$$(4.40) \quad F(\alpha) = v.c. (y, \text{Re } \eta) \cdot \text{Im } \varphi(\alpha, y) - \text{Im } y \cdot \text{Re } \eta + G(\text{Re } y, \text{Re } \eta) .$$

(Si \tilde{T} est une deuxième tf. de FBI associée à une deuxième variété I-La-grangienne proche de Λ_G , et si \tilde{F} est donné par une formule analogue, alors on vérifie que F et \tilde{F} sont reliés par (4.39)). Si $G' \leq G''$ alors on obtient $F' \leq F''$ pour les fonctions correspondantes dans (4.40), car cette formule peut s'écrire comme une formule min-max avec une fibration en sous-variétés indépendante de G', G'' . Donc si $G' \leq G''$ on a $\Lambda_{G'} \leq \Lambda_{G''}$ pour le choix naturel de F', F'' par (4.40). Pour voir que inversement, si $F' \leq F''$, alors $G' \leq G''$, on remarque que l'on est dans la situation générale suivante : avec $\beta = (\text{Re } y, \text{Re } \eta)$, $\theta = \text{Im } y$, $\psi(\alpha, \beta, \theta) = -\text{Im } \varphi(\alpha, y) - \text{Im } y \cdot \text{Re } \eta$, on a $F(\alpha) = v.c._{\theta, \beta} (\psi(\alpha, \beta, \theta) + G(\beta))$ et de plus $\psi(\alpha, \beta, \theta)$ est une phase non-dégénérée au sens de Hörmander t.q. $\Lambda'_\psi = \{ (\alpha, \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \beta, -\frac{\partial \psi}{\partial \beta}) : \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \}$ soit le graphe d'une transformation canonique. Alors c'est une simple généralité que l'on récupère G par la formule $G(\beta) = v.c._{(\alpha, \theta)} (-\psi(\alpha, \beta, \theta) + F(\alpha))$. Cette formule a aussi une interprétation min-max qui montre que si $F' \leq F''$ alors $G' \leq G''$. Avec le choix naturel des fonctions F par (4.40) nous avons donc montré que $\Lambda_{G'} \leq \Lambda_{G''}$ si et seulement si $G' \leq G''$.

Revenons maintenant à l'étude des transformations T du type (4.28) avec φ donnée par (4.29). Dans toute la suite on suppose que $\Lambda = \Lambda_G$ avec $G-g(x)$ assez petit dans $S(rR)$. Nous avons déjà spécifié avant que φ doit être définie par G et une phase donnée φ_0 associée à Λ_g . On suppose maintenant la même chose concernant le symbole \vec{t} , à savoir que $\vec{t}(\beta, y, h) = \vec{t}_0(\alpha, y, h)$, où \vec{t}_0 est le symbole d'une tf. de FBI T_0 associée à Λ_g qui a pour phase φ_0 . On suppose aussi que la fonction de troncature χ qui intervient dans

$\chi_\alpha(y) = x \left(\frac{y-x}{R(y,x)} \right)$, ne dépend pas de G et que la paramétrisation $\mathbb{R}^{2n} \ni \gamma \rightarrow \alpha \in \Lambda$ est définie de manière naturelle, soit comme le paramétrage par la partie réelle de $\alpha \in \Lambda$, soit comme le composé d'un paramétrage fixe de Λ_g avec l'application β qui était définie à partir de φ_0 . Ces conventions font que T est définie automatiquement à partir de Λ_G une fois que certaines quantités sont fixées d'avance.

Nous allons maintenant construire un inverse approché de T, à l'aide de la Proposition 4.1. Soit

$$(4.41) \quad \psi(x, \alpha) = (x - \alpha_x) \alpha_\xi + i \lambda(\alpha) (\alpha_x - x)^2 .$$

Pour $v(\alpha, h)$ dans un espace de fonctions sur Λ que l'on précisera plus tard, on pose formellement

$$(4.42) \quad S v(x, h) = \int_{\alpha \in \Lambda} e^{i\psi(x, \alpha)/h} \vec{s}(x, \alpha, h) \chi_\alpha(x) v(\alpha, h) d\alpha .$$

Ici $\vec{s} = (s_0(x, \alpha, h), \dots, s_n(x, \alpha, h))$ de classe $S^{\frac{n}{4}, -\frac{n}{4}, \frac{3n}{4}}$ est un vecteur ligne qui doit être affine linéaire en x . Alors, formellement, on obtient que $S \circ T$ est de noyau $I(x, y, h)$ donné par la Proposition 4.1, si l'on arrive à choisir \vec{s} tel que $\vec{s} \cdot \vec{t} = j$, c.à.d.

$$(4.43) \quad s_0 t_0 + s_1 t_1 + \dots + s_n t_n = j .$$

Ici on rappelle que j est de la forme (4.27), et que t_0, \dots, t_n sont les composantes du vecteur colonne \vec{t} . Après composition à gauche de \vec{t} avec une matrice elliptique $M(\alpha, h)$ de classe $S^{0,0}$, on peut supposer que :

$$t_0 = t_0(\alpha, h) , \quad t_\nu = \frac{t_0(\alpha, h)}{R(y_\nu, x)} (\alpha_{x_\nu} - y_\nu) , \quad \nu \geq 1 .$$

TRANSFORMATIONS F.B.I.

Pour $v \geq 1$ on prend alors $s_v = s_v(\alpha, h) = \frac{j_{n+v}(\gamma, h) R(\gamma_x)}{t_0(\alpha, h)}$ et pour $v=0$, on prend $s_0 = \frac{1}{t_0} (j_0 + \sum_{v=1}^n j_v(x_v - \alpha_{x_v}))$. Donc on a bien un choix de \vec{s} qui convient et formellement on trouve alors que :

$$(4.44) \quad S \circ T = I + e^{g/h} \circ K \circ e^{-g/h},$$

où K est donné par un noyau k comme dans la Proposition 4.1.

Il reste à donner un sens à (4.44). Utilisant que $G-g$ est petit dans $S(rR)$, on trouve pour $\alpha \in \Lambda$, $|y - \gamma_x| \leq \text{const. } R(\gamma_x)$:

$$(4.45) \quad \begin{aligned} & e^{-(g(\gamma_x) - g(y))/h} \int e^{i[(\alpha_x - y)\alpha_\xi + i\lambda(\alpha)(\alpha_x - y)^2]} \\ & = \mathcal{O}(1) \exp \left[\varepsilon rR - C_0 \int_R (\gamma_x - y)^2 \right] / h. \end{aligned}$$

On en tire les majorations très grossières suivantes : Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est d'ordre fini, alors il existe $C(\gamma_x, h) > 0$, continue en γ_x et $N_0 > 0$ t.q. : $|Tu(\alpha, h)| \leq C(\gamma_x, h) \tilde{r}(\alpha)^{N_0}$. Si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout $N > 0$, il existe $C_N(\gamma_x, h)$, continu en γ_x tel que $|Tu(\alpha, h)| \leq C_N(\gamma_x, h) \tilde{r}(\alpha)^{-N}$. Si d'autre part $v(\alpha, h)$ est une fonction continue telle que $|v(\alpha, h)| \leq C_N(\gamma_x, h) \tilde{r}(\alpha)^{-N}$ pour tout $N \geq 0$, alors une estimation semblable à (4.45) montre que $Sv(x, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est définie par une intégrale convergente dans (4.42). Si v vérifie seulement $|v(\alpha, h)| \leq C(\gamma_x, h) \tilde{r}(\alpha)^{N_0}$ pour un N_0 fixé, alors on peut définir $\int Sv(x, h) u(x) dx$ pour tout $u \in C_0^\infty$, et Sv est bien définie comme distribution sur \mathbb{R}^n . Il est maintenant standard de vérifier que (4.44) est valable au sens des opérateurs sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

Proposition 4.4. Dans la situation décrite ci-dessus, on a $S \circ Tu = u + e^{g/h} K e^{-g/h} u$, où K est un opérateur à noyau k comme dans la Proposition 4.1.

Signalons la possibilité d'inverser $I + e^{g/h} K e^{-g/h} = e^{g/h} (I+K) e^{-g/h}$ par une série de Neumann, quand $h > 0$ est assez petit.

Proposition 4.5. *Il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si $G-g$ est assez petit dans $S(rR)$ et $\tilde{g}(x) \in S(rR)$ et $|\nabla \tilde{g}| \leq \epsilon_1 r$ et si $m_0(x)$ est une fonction d'ordre, alors pour $h > 0$ assez petit, $I+K$ est bijectif et d'inverse de norme ≤ 2 comme opérateur $H(\Lambda_{\tilde{g}, m_0}^{\sim} \rightarrow H(\Lambda_{\tilde{g}, m_0})$. L'inverse est de la forme $(I+K)^{-1} = I + L$, où pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$, L est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné $H(\Lambda_{\tilde{g}, m_0(\frac{r}{r})}^{\sim N_0}) \rightarrow H(\Lambda_{\tilde{g}-\epsilon_1 r R, m_0(\frac{r}{r})}^{\sim N_0})$.*

Démonstration : On voit facilement que la norme de K comme opérateur borné dans $H(\Lambda_{\tilde{g}, m_0})$ est $\leq \frac{1}{2}$ si h est assez petit et donc $I+K$ est bijectif d'inverse $(I+K)^{-1} = I + L$ avec $L = -K + K^2 - K^3 + \dots = -K + K(I+K)^{-1} K$. D'autre part K est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné $H(\Lambda_{\tilde{g}, m_0(\frac{r}{r})}^{\sim N_0}) \rightarrow H(\Lambda_{\tilde{g}-\epsilon_1 r R, m_0(\frac{r}{r})}^{\sim N_0})$, et sur la dernière expression de L on voit bien que L a la même propriété. ■

Pour l'invariance des espaces $H(\Lambda, m)$ et pour l'étude des divers opérateurs pseudo-différentiels et intégraux de Fourier dans de tels espaces, il sera important d'étudier des composés $T \circ S$ où T et S sont de la forme générale (4.28) et (4.42). On suppose maintenant seulement que $t = \vec{t}$, $s = \vec{s}$ (scalaires ou vectoriels) sont de la classe $S^{\frac{n}{4}, -\frac{n}{4}, \frac{3n}{4}}$, holomorphes en x, y , que φ et ψ sont de classe $S^{1,1}$, quadratiques en y et x respectivement, que φ vérifie (4.32) (et provient d'une phase semblable associée à Λ_g), et que ψ vérifie la condition analogue :

$$(4.46) \quad \text{Pour } x = \alpha_x : \psi = 0, \psi'_x = \alpha_\xi, \text{Im } \psi''_{xx} + g''_{xx} (\gamma_x) \sim \frac{\tilde{r}}{R}.$$

(On garde comme toujours l'hypothèse que φ, ψ, t, s sont choisis de manière automatique quand G varie dans un petit voisinage de g).

TRANSFORMATIONS F.B.I.

Pour $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\beta \in B(\alpha, \varepsilon_0)$, avec $\varepsilon_0 > 0$ assez petit fixé, la valeur critique $\tilde{\psi}(\alpha, \beta) = v.c._y(\varphi(\alpha, y) + \psi(y, \beta))$ est bien définie car :

$\text{Im} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi(\alpha, y) + \psi(y, \beta)) \sim \frac{\tilde{r}}{R}$, et, pour $\alpha = \beta$, on a comme point critique $y = \alpha_x$.

De plus, pour $\alpha = \beta$, on a $\tilde{\psi} = 0$ et $d_\alpha(-\text{Im} \tilde{\psi}) = d_\alpha H(\alpha)$, $d_\beta(-\text{Im} \tilde{\psi}) = -d_\beta H(\beta)$.

Donc $-\text{Im} \tilde{\psi} - H(\alpha) + H(\beta)$ s'annule à l'ordre 2 sur la diagonale.

Proposition 4.6. *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit (et pour $G=g$ assez petit dans $S(rR)$), on ait :*

$$(4.47) \quad -\text{Im} \tilde{\psi}(\alpha, \beta) - H(\alpha) + H(\beta) \leq -\frac{1}{C_0} \left(\frac{\tilde{r}}{R} |\alpha_x - \beta_x|^2 + \frac{R}{\tilde{r}} |\alpha_\xi - \beta_\xi|^2 \right),$$

pour $\beta \in B(\alpha, \varepsilon_0)$.

Démonstration : Ce résultat est stable pour des petites perturbations de G , et il suffit donc de le montrer pour $G=g$. Dans ce cas $H=g$, α_x, β_x sont réels et on a :

$$(4.48) \quad \text{Im}(\varphi(\alpha, y) + \psi(y, \beta)) + g(\alpha_x) - g(\beta_x) \geq \frac{1}{C_0} \frac{\tilde{r}}{R} (|y - \beta_x|^2 + |y - \alpha_x|^2),$$

pour y réel,

$$|\nabla_y(\varphi + \psi)| \geq \frac{1}{C_0} |\alpha_\xi - \beta_\xi| \quad \text{quand } y = \alpha_x = \beta_x.$$

Si on pose $f(\alpha, \beta, y) = \varphi(\alpha, y) + \psi(y, \beta) + g(\alpha_x) - g(\beta_x)$, on a donc pour y réel :

$$\frac{1}{\tilde{r}R} \text{Im} f + \frac{1}{\tilde{r}^2} |\nabla_y f|^2 \geq \frac{1}{C_0} \left[\frac{1}{R^2} (|y - \beta_x|^2 + |y - \alpha_x|^2) + \frac{1}{\tilde{r}^2} |\alpha_\xi - \beta_\xi|^2 \right].$$

Après normalisation des échelles (à l'aide des " h_α ") il suffit alors d'appliquer une variante du Lemme 2. de [M.S.] :

Lemme. Soit $f(x,y)$ une fonction holomorphe définie dans un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^n$ avec $\text{Im} f|_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n} \geq 0$, $\nabla_y f(0,0) = 0$, $\det \nabla_y^2 f(0,0) \neq 0$.

Alors, il existe une constante $C_0 > 0$ et des voisinages $V \subset \mathbb{R}^k$, $W \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tels que si $F(x) = v.c. \int_y f(x,y)$, alors pour $x \in V$, on a :

$$\text{Im} F(x) \geq \inf_{y \in W} \left(\text{Im} f(x,y) + \frac{1}{C_0} |\nabla_y f(x,y)|^2 \right).$$

La fonction $\tilde{\psi}$ sera étudiée plus en détail dans la section 6.

Etudions maintenant le noyau de TS :

$$(4.49) \quad K(\alpha, \beta, h) = \int e^{i(\varphi(\alpha, y) + \psi(y, \beta)) / h} t(\alpha, y, h) s(y, \beta, h) \chi_\alpha(y) \chi_\beta(y) dy.$$

Cas 1. Pour $\beta \in B(\alpha, \varepsilon_0)$, on peut faire une normalisation des échelles (qui donne $\tilde{h} = \frac{h}{\tilde{r}}$ comme nouveau petit paramètre) et appliquer la méthode de la phase stationnaire (dans la version exposée dans [Sj. Astérisque n°95, chapitre 2]), pour conclure que :

$$(4.50) \quad K(\alpha, \beta, h) = e^{i\tilde{\psi}(\alpha, \beta) / h} \tilde{a}(\alpha, \beta, h),$$

où $\tilde{a} \in S^{0,0,n}$ (avec la définition évidente de cette classe de symboles sur un voisinage de la diagonale dans $\Lambda \times \Lambda$). Dans la section 6, on étudiera plus en détail les propriétés du noyau (4.50).

Cas 2. $|\alpha_x - \beta_x| \leq \varepsilon_0 R(\alpha_x)$, $|\alpha_\xi - \beta_\xi| \geq \varepsilon_0 \tilde{r}(\alpha)$. On peut ici faire une déformation complexe du contour d'intégration (seulement à partir de la région où $\chi_\alpha(y) = \chi_\beta(y) = 1$), et on trouve alors dans cette région :

$$(4.51) \quad \begin{aligned} e^{-(H(\alpha) - H(\beta)) / h} K(\alpha, \beta, h) &= \mathcal{O}(1) e^{-\varepsilon_1 \frac{\tilde{r}_{\max}}{h} \cdot R / h} \frac{n}{\tilde{r}_{\max}^2} \frac{n}{R^2} h^{-\frac{3n}{2}} = \\ &= \mathcal{O}(1) e^{-\varepsilon_2 \frac{\tilde{r}_{\max}}{h} \cdot R / h} h^{-n}, \end{aligned}$$

TRANSFORMATIONS F.B.I.

où $\tilde{r}_{\max} = \max(\tilde{r}(\alpha), \tilde{r}(\beta))$.

Cas 3. $\epsilon_0 R(\alpha_x) \leq |\alpha_x - \beta_x| \leq C_0 R(\alpha_x)$. (Si $|\alpha_x - \beta_x| \geq C_0 R(\alpha_x)$, le noyau s'annule). On distingue deux sous-cas :

3a. On a en plus $||\alpha_\xi| - |\beta_\xi|| \leq \frac{1}{2} \tilde{r}(\alpha)$. On peut alors majorer l'intégrale directement et on trouve encore (4.51) dans ce cas.

3b. On a en plus, $||\alpha_\xi| - |\beta_\xi|| > \frac{1}{2} \tilde{r}(\alpha)$. Une majoration directe donne alors seulement :

$$e^{-(H(\alpha)-H(\beta))/h} K(\alpha, \beta, h) = \mathcal{O}(1) e^{-\epsilon_1 \tilde{r}_{\min} R/h} \tilde{r}_{\max}^{\frac{n}{2}} R^{\frac{n}{2}} h^{-\frac{3n}{2}},$$

où $\tilde{r}_{\min} = \min(\tilde{r}(\alpha), \tilde{r}(\beta))$ ce qui est insuffisant si $\tilde{r}_{\min} \ll \tilde{r}_{\max}$, mais dans ce cas on constate cependant que :

$$|\nabla_y(\varphi(\alpha, y) + \psi(y, \beta))| \geq \frac{1}{C_1} \tilde{r}_{\max},$$

et si on fait d'abord plusieurs intégrations par parties dans (4.49), on trouve pour tout $j \geq -\frac{n}{2}$:

$$(4.52) \quad e^{-(H(\alpha)-H(\beta))/h} K(\alpha, \beta, h) = \mathcal{O}(1) e^{-\epsilon_1 \tilde{r}_{\min} R/h} \tilde{r}_{\max}^{-j} R^{-j} h^{-n+j}.$$

On remarque que (4.51) entraîne (4.52) et cette dernière estimation est donc valable dans les cas 2 et 3.

Proposition 4.7. Si m est une fonction d'ordre, alors TS est de norme $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur $L^2(\Lambda, m) \rightarrow L^2(\Lambda, m)$. Ici on utilise la notation abrégée : $L^2(\Lambda, m) = L^2(\Lambda, m^2 e^{-2H/h} d\alpha)$.

Démonstration : Il s'agit donc de montrer que le noyau

$$\frac{m(\alpha)}{m(\beta)} e^{-(H(\alpha)-H(\beta))/h} K(\alpha, \beta, h) = \tilde{K}(\alpha, \beta, h)$$

décrit un opérateur uniformément borné dans $L^2(\Lambda)$. Dans la région $\beta \in B(\alpha, \varepsilon_0)$, ce noyau se majore par

$$\mathcal{O}(1) h^{-n} \exp - \frac{1}{C_0 h} \left(\frac{\tilde{r}}{R} |\alpha_x - \beta_x|^2 + \frac{R}{\tilde{r}} |\alpha_\xi - \beta_\xi|^2 \right).$$

D'autre part il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{m(\alpha)}{m(\beta)} \leq \text{const.} \left(\frac{\tilde{r}_{\max}}{r} \right)^{N_0}$, et pour (α, β) dans les régions décrites par les cas 2 et 3 ci-dessus, on obtient de (4.52) la majoration :

$$(4.53) \quad \tilde{K}(\alpha, \beta, h) = \mathcal{O}(1) \left(\frac{\tilde{r}_{\max}}{r} \right)^{N_0} \tilde{r}_{\max}^{-j} R^{-j} h^{j-n},$$

pour tout $j \geq -\frac{n}{2}$. Il en résulte que

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} \int |\tilde{K}(\alpha, \beta, h)| d\beta, \quad \sup_{\beta \in \Lambda} \int |\tilde{K}(\alpha, \beta, h)| d\alpha = \mathcal{O}(1), \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Pour terminer cette section, remarquons que :

$$(4.54) \quad \int_{\Lambda} T u(\alpha, h) \overline{T v(\alpha, h)} m(\alpha, h)^2 e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha = \\ = \iiint e^{\frac{i}{h} \Phi(x, y, \alpha)} m(\alpha, h)^2 \overline{t(\alpha, y)} t(\alpha, x) \chi_\alpha(y) \chi_\alpha(x) \overline{u(y)} v(x) dy d\alpha dx,$$

où $\Phi(x, y, \alpha) = -\varphi(\alpha, \bar{x}) + \varphi(\alpha, y) + 2i H(\alpha)$.

$$(4.55) \quad \text{Pour } \bar{x} = y = \alpha_x \text{ on a } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha_\xi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\alpha_\xi, \quad d_\alpha \Phi = 0.$$

On peut aussi exprimer le produit scalaire comme $(Bu|v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, où B est un opérateur intégral de Fourier (formellement auto-adjoint) d'un type qui sera étudié dans la section 7.

5. LES ESPACES $H(\Lambda, m)$.

On fixe $g_0 \in \dot{S}^{1,1}$ et on considère comme avant des transformations de FBI induites de manière naturelle à partir d'une tf. adaptée à Λ_{g_0} . On fait aussitôt une légère extension des résultats de la section 4, en remarquant que tout marche bien si l'on suppose qu'il existe $g = g(x) \in \dot{S}^{1,1}$ telle que $g - g_0$ soit petit dans $\dot{S}^{1,1}$ et que $\Lambda = \Lambda_G$ avec $G(x, \xi) - g(x)$ petit dans $S(rR)$. On étudie d'abord le cas $G = g$ avec $g - g_0$ assez petit dans $\dot{S}^{1,1}$.

Proposition 5.1. Soit $m_0(x)$ une fonction d'ordre et $N \in \mathbb{N}$. On peut alors trouver un symbole elliptique positif (scalaire), $a(\alpha, h) \in S(m_0^2(\frac{\tilde{r}}{r})^{2N})$, défini sur Λ_g et tel que pour tous $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$(5.1) \quad \int_{\Lambda_g} T u(\alpha, h) \cdot \overline{T v(\alpha, h)} a(\alpha, h) e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha = (u|v)_{H(\Lambda_g, m_0(\frac{\tilde{r}}{r})^N)} + \iint r_{-\infty}(x, y, h) (u(y) m_0(y) e^{-g(y)/h}) \cdot (\overline{v(x) m_0(x) e^{-g(x)/h}}) dy dx$$

où $r_{-\infty} \in \cap_0^\infty S^{n-j, -j, n-j}$ est à support dans $|x-y| \leq \text{const. } R(\frac{x+y}{2})$. (Bien entendu, nous avons $H = g$ quand $\Lambda = \Lambda_g$).

Démonstration : On a :

$$(u|v)_{H(\Lambda_g, m_0(\frac{\tilde{r}}{r})^N)} = \sum_{|\alpha| \leq N} \left(\left(\frac{1}{r} \tilde{D}_x \right)^\alpha m_0 e^{-g/h} u \mid \left(\frac{1}{r} \tilde{D}_x \right)^\alpha m_0 e^{-g/h} v \right)_{L^2} = \left(\hat{B} e^{-g/h} u \mid e^{-g/h} v \right)_{L^2} ,$$

où : $\hat{B} = \sum_{|\alpha| \leq N} m_0 (\tilde{D} \frac{1}{r})^\alpha (\frac{1}{r} \tilde{D})^\alpha m_0$ est un opérateur différentiel de symbole dans $S(m_0^2(\frac{\tilde{r}}{r})^{2N})$.

Si l'on introduit la paramétrisation naturelle de Λ_g :

$\alpha_\xi = \gamma_\xi - i \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma_x)$, $\alpha_x = \gamma_x$, et si l'on pose $u = e^{g/h} \tilde{u}$, $v = e^{g/h} \tilde{v}$, on trouve (voir (4.54)) :

$$(5.2) \quad \int_{\Lambda} T u(\alpha, h) \overline{T v(\alpha, h)} a(\alpha, h) e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha = \\ = \iiint_{\alpha=\alpha(\gamma)} e^{i\varphi_g(x, y, \gamma)/h} a(\alpha, h) \overline{t(\alpha, y, h) t(\alpha, x, h)} \chi_\alpha(y) \overline{\chi_\alpha(x)} \tilde{u}(y) \overline{\tilde{v}(x)} dy d\gamma dx,$$

où : $\varphi_g(x, y, \gamma) = (x-y)\gamma_\xi + i\lambda(\gamma) ((x-\gamma_x)^2 + (y-\gamma_x)^2) + i\rho(x, y, \gamma_x)$, et où :

$$\rho(x, y, \gamma_x) = -(g(x) - (g(\gamma_x) + g'(\gamma_x)(x-\gamma_x))) - (g(y) - (g(\gamma_x) + g'(\gamma_x)(y-\gamma_x))) .$$

Donc $\varphi_g \in S^{1,1}$ et les hypothèses faites sur λ assurent que $\text{Im} \varphi_g(x, y, \gamma) \sim \frac{\gamma}{R} ((x-\gamma_x)^2 + (y-\gamma_x)^2)$. On peut alors éliminer l'intégration en γ_x par la phase stationnaire (voir par exemple Melin-Sjöstrand [M.S.]), et on trouve

$$(5.3) \quad \int e^{i\varphi_g/h} a \overline{t} \chi_\gamma \chi_\gamma d\gamma_x = \\ = h^{-n} \left(b(x, y, \gamma_\xi, h) e^{i\psi_g(x, y, \gamma_\xi)/h} + r(x, y, \gamma_\xi, h) \right),$$

où : $\text{supp } b, \text{supp } r \subseteq \{|x-y| \leq \text{const. } R(x)\}$, $b \in S(m^2)$, $r \in \bigcap_{j \geq 0} S(m^2 \gamma^{-j} R^{-j} h^j)$, $\psi_g \in S^{1,1}$ et :

$$(5.4) \quad \psi_g(x, y, \gamma_\xi) = (x-y)\gamma_\xi + \mathcal{O}\left(\frac{\gamma}{R} (x-y)^2\right) .$$

$$(5.5) \quad \text{Im } \psi_g \sim \frac{\gamma}{R} (x-y)^2 .$$

De plus b est donné par un développement asymptotique en fonction de a et on a :

$$(5.6) \quad b(\gamma_x, \gamma_x, \gamma_\xi, h) \equiv \rho(\gamma) a(\alpha, h) \text{ mod. } S(m^2 \gamma^{-1} R^{-1} h) ,$$

où $\rho \in S^{0,0}$ est elliptique positif, et $m = m_0 \left(\frac{\gamma}{r}\right)^N$.

Il est facile de voir que le terme r dans (5.3) donne lieu à une contribution qui rentre dans le dernier terme de (5.1). Il faut maintenant étudier :

$$(5.7) \quad h^{-n} \iiint b(x, y, \theta, h) e^{i \psi_g(x, y, \theta)/h} \tilde{u}(y) \cdot \tilde{v}(x) dy d\theta dx = (B\tilde{u}, \tilde{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où :

$$(5.8) \quad B\tilde{u}(x) = h^{-n} \iint b(x, y, \theta, h) e^{i \psi_g(x, y, \theta)/h} \tilde{u}(y) dy d\theta.$$

Supposons pour commencer que $m_0 = 1$, $N = 0$. On veut alors que B dans (5.8) soit l'identité.

On écrit $\psi_g(x, y, \theta) = (x-y)(\theta + i F(x, y, \theta))$, où $F \in S^{1,0}$, $F|_{x=y} = 0$.

Dans l'identité

$$\delta(x-y) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y)\zeta/h} \chi\left(\frac{x-y}{R\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right) d\zeta,$$

on intègre sur le contour complexe $\zeta = \theta + i F(x, y, \theta)$. Alors (en calculant avec x, y fixés) :

$$d\zeta = (d\theta_1 + i d_\theta F_1) \wedge \dots \wedge (d\theta_n + i d_\theta F_n) = (2\pi)^n c_0(x, y, \theta) d\theta,$$

où $c_0 \in S^{0,0}$ et $c_0|_{x=y} = (2\pi)^{-n}$. Avec ce choix de c_0 nous avons donc

$$(5.9) \quad u(x) = h^{-n} \iint c_0(x, y, \theta, h) e^{i \psi_g(x, y, \theta)/h} u(y) dy d\theta.$$

On construit maintenant a par approximations successives. D'abord on choisit $a = a_0$ tel que pour le b_0 correspondant dans (5.3) on a $b_0(x, x, \theta, h) = c_0(x, x, \theta) \bmod S^{-1, -1, -1}$. Alors $b_0 = c_0 + k + \ell$, où $k \in S^{0,0,0}$ s'annule pour $x=y$ et $\ell \in S^{-1, -1, -1}$. Il faut alors "réduire k " de manière standard ;

On écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} g = (I + i \frac{\partial F}{\partial \theta})(x-y),$$

où $\frac{\partial F}{\partial \theta} \in S^{0,0}$ s'annule pour $x=y$. Quitte à restreindre le support de χ , on peut supposer que $I + i \frac{\partial F}{\partial \theta}$ est inversible avec un inverse de classe $S^{0,0}$. Par la formule de Taylor, on peut écrire : $k = \sum_{j=1}^n k_j \frac{\partial \psi}{\partial \theta_j} g$, $k_j \in S^{0,-1,0}$.

Pour les opérateurs correspondants, on a :

$$K u(x) = h^{-n} \iiint e^{i \psi_g/h} k u dy d\theta = h^{-n} \iiint e^{i \psi_g/h} \tilde{k} u dy d\theta,$$

où : $\tilde{k} = - \sum_{j=1}^n \frac{h}{i} \frac{\partial k_j}{\partial \theta_j} \in S^{-1,-1,-1}$. Avec $a = a_0$, on obtient donc $B = I + Op(\hat{k})$, où $\hat{k} \in S^{-1,-1,-1}$. Continuant ce procédé, on obtient $a \sim a_0 + a_1 + \dots$ dans $S^{0,0,0}$ avec $a_j \in S^{-j,-j,-j}$, tel que $B = I + Op(k_{-\infty})$, où $k_{-\infty} \in \bigcap_{j=0}^{\infty} S^{-j,-j,-j}$.

Pour terminer la démonstration dans le cas $m_0 = 1$, $N = 0$, il suffit alors de remarquer que :

$$h^{-n} \iiint e^{i \psi_g(x,y,\theta)/h} k_{-\infty}(x,y,\theta,h) \tilde{u}(y) \tilde{v}(x) dy d\theta dx = \iiint \tilde{r}_{-\infty}(x,y,h) \tilde{u}(y) \tilde{v}(x) dy dx,$$

où $\tilde{r}_{-\infty} \in \bigcap_0^{\infty} S^{n-j,-j,n-j}$.

Dans le cas général, on compose \hat{B} avec l'identité sous la forme (5.9), et on trouve :

$$(5.10) \quad \hat{B} u(x) = h^{-n} \iiint \tilde{c}_0(x,y,h) e^{i \psi_g(x,y,\theta)/h} u(y) dy d\theta,$$

avec $\tilde{c}_0 \in S(m_0^2 (\frac{\tilde{r}}{r})^{2N})$. On construit alors comme avant un symbole

$a \in S(m_0^2 (\frac{\tilde{r}}{r})^{2N})$, tel que $B = \hat{B} +$ une erreur qui donne un reste comme dans la Proposition. On omet les détails.

■

ESPACES $H(\Lambda, M)$

Le dernier terme de (5.1) se majore, pour tout $M \geq 0$, par :

$$C_M h^M \|m_0 e^{-g/h} u\|_{L^2} \|m_0 e^{-g/h} v\|_{L^2},$$

et on rappelle que :

$$\|m_0 e^{-g/h} u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)},$$

donc (5.1) montre que pour h assez petit :

$$\|Tu\|_{L^2(\Lambda, m_0^2(\tilde{r}/r)^{2N} e^{-2H/h} d\alpha)} \sim \|u\|_{H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)}$$

pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et donc par densité pour $u \in H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)$.

Considérons maintenant le cas où N est un entier < 0 . On se contente alors de montrer :

Proposition 5.2. Si $a(\alpha, h) \in S(m_0^2(\tilde{r}/r)^{2N})$ est un symbole elliptique positif (scalaire), alors pour $h > 0$ suffisamment petit :

$$(5.11) \quad \int |Tu(\alpha, h)|^2 a(\alpha, h) e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha \sim \|u\|_{H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)}^2,$$

uniformément pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (et donc par densité pour tout $u \in H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)$).

Démonstration : On majore d'abord l'intégrale dans (5.11) par une constante fois le second membre. Utilisant la représentation de la Proposition 3.1., nous voyons qu'il suffit de prouver que pour $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $|\beta| \leq -N$:

$$(5.12) \quad \int \left| T \left(\frac{1}{m_0} e^{g/h} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \tilde{D} \right)^\beta v \right) (\alpha, h) \right|^2 a(\alpha, h) e^{-2H/h} d\alpha \leq C \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Comme dans la démonstration de la Proposition 5.1., on voit que l'intégrale

dans (5.12) se réduit à $(Bv|v)_{L^2} + \mathcal{O}(1) \|v\|_{L^2}^2$, où B est un opérateur pseudo-différentiel de phase ψ_g et de symbole $b \in S^{0,0,0}$, à support dans $|x-y| \leq \text{const. } R(\frac{x+y}{2})$. Il suffit alors de montrer qu'un tel opérateur est borné dans L^2 , ce que l'on peut faire à l'aide de la Proposition 5.1. et de sa preuve, qui donnent un symbole $c \in S^{0,0,0}$ tel que :

$$(Bv|v)_{L^2} = \int |T e^{g/h} v(\alpha, h)|^2 c(\alpha, h) e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha + \mathcal{O}(\|v\|_{L^2}^2) = \mathcal{O}(\|v\|_{L^2}^2) .$$

Pour avoir une majoration dans l'autre sens, on utilise le fait que $H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)$ est le dual de $H(\Lambda_g, m_0^{-1}(\tilde{r}/r)^{-N})$, pour le produit scalaire $(|)_{\mathfrak{g}}$ de $L^2(e^{-2g/h} dx)$. Alors, d'après la Proposition 5.1., on a :

$$(5.13) \quad (u|v)_{\mathfrak{g}} = \int T u(\alpha, h) \overline{T v(\alpha, h)} a_0(\alpha, h) e^{-2H/h} d\alpha + \iint r_{-\infty} \tilde{u}(y) \overline{\tilde{v}(x)} dy dx ,$$

où : $a_0 \in S^{0,0,0}$, $\tilde{u} = e^{-g/h} u$, $\tilde{v} = e^{-g/h} v$, $r_{-\infty} \in \prod_0^{\infty} S^{n-j, -j, n-j}$. Utilisant de nouveau la représentation des éléments de $H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)$ de la Proposition 3.1 et des intégrations par parties, on voit facilement que :

$$(5.14) \quad \left| \int r_{-\infty}(x, y, h) \tilde{u}(y) \overline{\tilde{v}(x)} dy dx \right| \leq C_M h^M \|u\|_{H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)} \|v\|_{H(\Lambda_g, m_0^{-1}(\tilde{r}/r)^{-N})} .$$

Avec a comme dans la Proposition, on a aussi :

$$(5.15) \quad \left| \int T u(\alpha, h) \overline{T v(\alpha, h)} a_0(\alpha, h) e^{-2H/h} d\alpha \right| \leq \left(\int |T u(\alpha, h)|^2 a(\alpha, h) e^{-2H/h} d\alpha \right)^{1/2} \left(\int |T v(\alpha, h)|^2 \left| \frac{a_0}{a} \right| e^{-2H/h} d\alpha \right)^{1/2} \leq C' \left(\int |T u(\alpha, h)|^2 a e^{-2H/h} d\alpha \right)^{1/2} \|v\|_{H(\Lambda_g, m_0^{-1}(\tilde{r}/r)^{-N})} .$$

Combinant (5.13)-(5.15), on trouve :

$$\begin{aligned}
 & |(u|v)_g| \\
 & \leq C_0 \left[\left(\int |Tu(\alpha, h)|^2 a e^{-2H/h} d\alpha \right)^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. + C_M h^M \|u\|_{H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)} \right] \cdot \|v\|_{H(\Lambda_g, m_0^{-1}(\tilde{r}/r)^{-N})} ,
 \end{aligned}$$

d'où, pour $h > 0$ assez petit ,

$$\|u\|_{H(\Lambda_g, m_0(\tilde{r}/r)^N)}^2 \leq 2 C_0^2 \int |Tu(\alpha, h)|^2 a e^{-2H/h} d\alpha ,$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 5.2. ■

Comme dernière préparation avant la définition générale nous allons établir la

Proposition 5.3. Avec $g_0 \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ et le choix de tf. FBI fixés, on a : si $f, g \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ sont assez proches de g_0 , alors, pour toutes fonctions d'ordre $m(x), n(x)$ et tous $M, N \in \mathbb{Z}$, on a la conclusion suivante quand $h > 0$ est assez petit : si $u \in H(\Lambda_f, m(\tilde{r}/r)^M)$ et si

$$\int_{\alpha \in \Lambda_g} |Tu(\alpha, h)|^2 n^2(\tilde{r}/r)^{2N} e^{-2g(\alpha)/h} d\alpha < \infty ,$$

alors $u \in H(\Lambda_g, n(\tilde{r}/r)^N)$. (Ici T désigne le choix de tf. FBI associé à Λ_g).

Démonstration : Quitte à augmenter f et diminuer m et M , nous pouvons supposer que $f \succ g$, $m \leq n$, $M \leq N$. Soient alors $f_\lambda \in \dot{S}^{1,1}$ et m_λ les déformations de f en g et m en n données par les Propositions 1.7 et 1.8. On a alors : $m \leq m_\lambda \leq n$, $f \succ f_\lambda \succ g$ et $f_\lambda = f$, $m_\lambda = m$ pour \tilde{r}/r assez grand, $f_\lambda - f$ reste uniformément petit dans $\dot{S}^{1,1}$ et $m_\lambda = e^{\tilde{m}_\lambda}$ avec \tilde{m}_λ uniformément borné dans $S^{0,0}$. D'autre part $f_\lambda = g$ et $m_\lambda = n$ dans un compact

$K_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ avec $K_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ quand $\lambda \rightarrow \infty$. Si T_λ désigne le choix de tf. FBI associé à Λ_{f_λ} (essentiellement équivalent à T), alors la discussion autour de la Définition 4.3 montre (avec la convention de la prop. 4.7) que :

$$\|u\|_{H(\Lambda_{f_\lambda}, m_\lambda(\tilde{r}/r)^M)} \sim \|T_\lambda u\|_{L^2(m_\lambda(\tilde{r}/r)^M)} \leq C \|Tu\|_{L^2(n(\tilde{r}/r)^N)}.$$

En faisant tendre λ vers ∞ on voit alors que $u \in H(\Lambda_g, n(\tilde{r}/r)^M)$.

Il reste seulement à voir comment remplacer M par N dans cette conclusion. Pour ceci, on montre d'abord par une régularisation standard et une induction sur M, que $u \in H_{loc}^N$ (espace de Sobolev local standard). Ensuite si $N \geq 0$, on montre, en reprenant la démonstration de la Proposition 5.1, que l'on a une borne uniforme sur

$$\sum_{|\beta| \leq N} \left\| \chi \left(\frac{1}{\lambda} D_g(x) \right) \left(\frac{1}{\tilde{r}} \tilde{D}_x \right)^\beta n e^{-g/h} u \right\|_{L^2}^2,$$

quand $\lambda \rightarrow \infty$. (Ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vaut 1 près de 0 et D_g est la distance régularisée introduite dans (1.10)). Passant à la limite, on trouve alors que $u \in H(\Lambda_g, n(\tilde{r}/r)^N)$.

Dans le cas $N < 0$, on trouve, en reprenant la démonstration de la Proposition 5.2, que l'on a une majoration uniforme sur

$$\left\| \chi \left(\frac{1}{\lambda} D_g(x) \right) u \right\|_{H(\Lambda_g, n(\tilde{r}/r)^N)}$$

et en faisant tendre λ vers ∞ , on trouve aussi $u \in H(\Lambda_g, n(\tilde{r}/r)^N)$. ■

On garde toujours un choix de $g_0 \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ et un choix "automatique" de tf. FBI associée à Λ_G si $G \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^{2n})$ et $G - g_0$ est assez petit dans $\dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^{2n})$.

Définition 5.4. Soit $f = g_0 + \varepsilon D_g(x)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Soit $\Lambda = \Lambda_G$ avec $G(x, \xi) - g(x)$ assez petit dans $S(rR)$ et $g - g_0$ assez petit dans $\dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. On a alors $\Lambda \leq \Lambda_f$ et si m est une fonction d'ordre sur Λ , on choisit une fonction d'ordre $\tilde{m} = \tilde{m}_0(x) (\tilde{r}/r)^N \leq m$ et, pour $h > 0$ assez petit, on définit $H(\Lambda, m)$ comme l'espace des $u \in H(\Lambda_f, \tilde{m})$ tels que :

$$\int_{\Lambda} |T u(\alpha, h)|^2 m(\alpha)^2 e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha < \infty .$$

La Proposition 5.3 montre que, si on modifie le choix de f ou de \tilde{m} , on obtient le même espace $H(\Lambda, m)$ (pour G assez proche de g_0 dans $\dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n) + S(rR)$ et pour $h > 0$ assez petit).

Proposition 5.5. Avec un autre choix automatique de tf . FBI, si $G - g_0$ est assez petit dans $\dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n) + S(rR)$, si m est une fonction d'ordre sur $\Lambda = \Lambda_G$, alors pour $h > 0$ assez petit, on obtient le même espace $H(\Lambda, m)$, avec une norme équivalente.

Démonstration : Notons provisoirement $H(\Lambda, m, T)$ l'espace $H(\Lambda, m)$ pour souligner la dépendance possible de T . Soit \tilde{T} la tf . de FBI associée à Λ , provenant du deuxième choix automatique. Il s'agit maintenant de montrer que si h est assez petit, alors si $u \in H(\Lambda, m, T)$, on a $u \in H(\Lambda, m, \tilde{T})$. Soit S l'inverse approché de T donné par la Proposition 4.4, (où $g \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ est proche de g_0 et $G - g$ est petit dans $S(rR)$). Alors :

$$(5.16) \quad u = S T u + e^{g/h} K e^{-g/h} u ,$$

où K est donné dans la Proposition 4.4. Soit $m_0(x) = m(x, 0)$ et $N > 0$ assez grand pour que $m_0 (\tilde{r}/r)^{-N} \leq m \leq m_0 (\tilde{r}/r)^N$ (modulo des facteurs constants). Si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit (mais indépendant de G), alors $e^{-g/h} K e^{g/h}$ est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné :

$H(\Lambda_{g-\varepsilon_0}, \mathbb{R}^n, m_0(\tilde{r}/r)^{-N}) \rightarrow H(\Lambda_{g+\varepsilon_0}, \mathbb{R}^n, m_0(\tilde{r}/r)^N)$ et puisque $H(\Lambda, m, T)$ et $H(\Lambda, m, \tilde{T})$ sont intercalés entre ces deux espaces avec des inclusions bornées, on conclut que $e^{-g/h} \kappa e^{g/h}$ est $\mathcal{O}(1)$ de $H(\Lambda, m, T)$ dans $H(\Lambda, m, \tilde{T})$. La Proposition 4.7 appliquée à l'opérateur $\tilde{T}S$ montre d'autre part que ST est aussi $\mathcal{O}(1)$ de $H(\Lambda, m, T)$ dans $H(\Lambda, m, \tilde{T})$. ■

Remarque 5.6. La Proposition 4.7 montre aussi que S est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné : $L^2(\Lambda, m) \rightarrow H(\Lambda, m)$.

Proposition 5.7. Soient Λ, m, T comme dans la Définition 5.4. Alors pour $h > 0$ assez petit :

1° $H(\Lambda, m)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(5.17) \quad (u|v)_{H(\Lambda, m)} = (Tu|Tv)_{L^2(\Lambda, m^2 e^{-2H/h} d\alpha)}$$

2° Si $(\tilde{\Lambda}, \tilde{m})$ est deuxième couple comme dans la Définition 5.4, et $\Lambda \leq \tilde{\Lambda}$, $m \geq \tilde{m}$, alors $H(\Lambda, m) \subseteq H(\tilde{\Lambda}, \tilde{m})$ avec une inclusion bornée uniformément par rapport à h .

3° Si en plus $\frac{m(\alpha)}{\tilde{m}(\alpha)} \rightarrow \infty$, $|\alpha| \rightarrow \infty$, alors l'inclusion est compacte.

Démonstration :

1° Il ne reste qu'à montrer la complétude. Soit $f \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ proche de g_0 et telle que $\Lambda \leq \Lambda_f$. Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $m_0(x) (\tilde{r}/r)^{-N} \leq (\text{const.}) m(x, \xi)$. Alors $H(\Lambda, m) \subseteq H(\Lambda_f, m_0(\tilde{r}/r)^{-N})$ avec une inclusion bornée. Si $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $H(\Lambda, m)$, alors, puisque $H(\Lambda_f, m_0(\tilde{r}/r)^{-N})$ est complet, il existe u tel que $u_j \rightarrow u$ dans cet espace. Pour tout compact $K \subset \subset \Lambda$, on a alors :

$$\int_K |Tu(\alpha, h)|^2 m^2 e^{-2H/h} d\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_K |Tu_j(\alpha, h)|^2 m^2 e^{-2H/h} d\alpha \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{H(\Lambda, m)}^2,$$

ESPACES $H(\Lambda, m)$

donc $u \in H(\Lambda, m)$ et on montre de la même manière que $\|u - u_j\|_{H(\Lambda, m)} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

2° Ceci est évident d'après la discussion géométrique autour de la Définition 4.3. En effet, si T_0 désigne le choix de tf. de FBI adapté à Λ_{g_0} , on peut caractériser $H(\Lambda, m)$ et $H(\tilde{\Lambda}, \tilde{m})$ respectivement par

$$\int |T_0 u(\alpha, h)|^2 m^2 e^{-2F/h} d\alpha < \infty, \quad \int |T_0 u(\alpha, h)|^2 \tilde{m}^2 e^{-2\tilde{F}/h} d\alpha < \infty,$$

et $F \leq \tilde{F}$.

3° Soit $u_j \in H(\Lambda, m)$ une suite bornée. Après passage à une suite extraite on a $u_j \rightarrow u$ dans $H_{loc}^{-N}(\mathbb{R}^n)$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand. Pour tout compact $K \subset \Lambda_{g_0}$, on a

$$(5.18) \quad \int_K |T_0 u(\alpha, h) - T_0 u_j(\alpha, h)|^2 m^2 e^{-2F/h} d\alpha \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

ce qui montre que $u \in H(\Lambda, m) \subseteq H(\tilde{\Lambda}, \tilde{m})$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $K_\epsilon \subset \subset \Lambda_{g_0}$ tel que :

$$\int_{\Lambda_{g_0} \setminus K_\epsilon} |Tu - Tu_j|^2 \tilde{m}^2 e^{-2\tilde{F}/h} d\alpha \leq \epsilon^2,$$

pour tout j , et avec (5.18) il est alors clair que $u_j \rightarrow u$ dans $H(\tilde{\Lambda}, \tilde{m})$. ■

On finit ce chapitre en montrant que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans tous les espaces $H(\Lambda, m)$.

Proposition 5.8. Soit $\Lambda = \Lambda_G$ avec G assez proche de g_0 dans $S(r, R) + S^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Si m est une fonction d'ordre, alors pour $h > 0$ assez petit $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H(\Lambda, m)$.

Démonstration : Si $u \in H(\Lambda, m)$, on rappelle que : $S \circ Tu = u - K_{g_0} u$, $-K_{g_0} = e^{g_0/h} K e^{-g_0/h}$, où K est donné par un noyau k comme dans la Proposition 4.1, et que $T : H(\Lambda, m) \rightarrow L^2(\Lambda, m) (= L^2(\Lambda, (m e^{-H/h})^2 dx))$ admet comme inverse à gauche l'opérateur

$$T^{-1} = \left(\sum_0^{\infty} (K_{g_0})^j \right) S \text{ avec convergence dans } \mathcal{L}(L^2(\Lambda, m), H(\Lambda, m)) .$$

On pose $S_N = \sum_0^N (K_{g_0})^j S$. Alors S_N est uniformément borné dans

$\mathcal{L}(L^2(\Lambda, m), H(\Lambda, m)) = \mathcal{L}$ par rapport à N et à h et $S_N^{-1} \rightarrow 0$ dans cet

espace. Soit χ_M la fonction caractéristique d'un compact K_M avec

$K_M \nearrow \Lambda, M \rightarrow \infty$. Alors $u_{N,M} = S_N \chi_M Tu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, puisque $S \chi_M Tu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $K_{g_0}^j$ est proprement supporté pour tout j ; on a :

$$\begin{aligned} \|u_{N,M} - u\|_{H(\Lambda, m)} &< \|S_N(1-\chi_M)Tu\| + \|(S_N^{-1})Tu\| \\ &< \|S_N\|_{\mathcal{L}} \| (1-\chi_M)Tu \|_{L^2(\Lambda, m)} + \|S_N^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|Tu\|_{L^2(\Lambda, m)} \end{aligned}$$

ce qui devient arbitrairement petit avec M et N assez grands. ■

6. OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS.

Comme dans la section précédente, on fixe $g_0 \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ et on considère une variété I-Lagrangienne $\Lambda = \Lambda_G$ où $G \in \dot{S}^{1,1}$ est proche de g_0 dans $S(rR) + \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Soit alors $\tilde{\varphi}(x,y,\alpha)$, $x,y \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \Lambda$ une phase de classe $S^{1,1}$, polynomiale de $d^0 2$ en x,y (donc holomorphe dans ces variables) et telle que pour $x=y=\alpha_x$:

$$(6.1) \quad \tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\varphi}'_x = -\tilde{\varphi}'_y = \alpha_\xi, \quad \left(\text{Im } \tilde{\varphi} + g_0(x) - g_0(y) \right)'' \sim \frac{\tilde{r}}{R},$$

où $()''$ signifie le Hessien dans les variables x,y évalué dans les directions réelles (et avec $g(x) = g(\text{Re } x)$, $g(y) = g(\text{Re } y)$). En accord avec les conventions précédentes on supposera toujours que φ est donnée par un

"choix automatique", comme par exemple : $\tilde{\varphi}(x,y,\alpha) = (x-y)\alpha_\xi + i\lambda(\text{Re } \alpha) \left((x-\alpha_x)^2 + (y-\alpha_x)^2 \right)$. Les résultats de ce chapitre et du chapitre 7 sont alors valables pour G assez proche de g_0 dans $S(rR) + \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, pour des fonctions d'ordre arbitraires et finalement pour h assez petit. Il sera souvent com-

mode de comptabiliser les formes différentielles en écrivant systématiquement $\tilde{d}\alpha = R^{-n} \tilde{r}^{-n} d\alpha = \left(\frac{d\alpha_{x_1}}{R} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\alpha_{x_n}}{R} \right) \wedge \left(\frac{d\alpha_{\xi_1}}{\tilde{r}} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\alpha_{\xi_n}}{\tilde{r}} \right)$. On introduit aussi les espaces de symboles d'ordre décalé :

$$S_{\text{mod}}(m h^{-\ell}) = S(m \frac{\tilde{r}^{3n/2}}{R^{n/2}} h^{-\ell-3n/2}).$$

Soit finalement $\chi_\alpha(x,y)$ une fonction troncature de classe $S^{0,0}$ à support dans un domaine :

$$(6.2) \quad |x - \text{Re } \alpha_x|^2 + |y - \text{Re } \alpha_x|^2 \leq \left(\frac{1}{C_0} R(\text{Re } \alpha_x) \right)^2$$

avec C_0 assez grand pour que : $\text{Im } \varphi + g_0(x) - g_0(y) \sim \frac{\tilde{r}}{R} (|x - \alpha_x|^2 + |y - \alpha_x|^2)$ dans le cas $G = g_0$.

On suppose que $\chi_\alpha = 1$ sur un domaine plus petit du même type et fidèles à la convention générale, on suppose que χ_α est donné par un "choix automatique" comme par exemple $\chi_\alpha = \chi_{\text{Re } \alpha}$.

Si $a = a(x, y, \alpha, h) \in S_{\text{mod}}(m h^{-\ell})$ est défini et holomorphe dans un domaine de la forme (6.2) contenant $\text{supp } \chi_\alpha$, on peut alors définir l'opérateur pseudodifférentiel d'ordre $m h^{-\ell}$ par :

$$(6.3) \quad \begin{aligned} Au(x, h) &= \text{Op}(\tilde{\varphi}, a) u(x, h) \\ &= \int_{\alpha \in \Lambda} \int e^{i\tilde{\varphi}(x, y, \alpha)/h} a(x, y, \alpha, h) \chi_\alpha(x, y) u(y) dy d\tilde{\alpha} . \end{aligned}$$

On remarque aussitôt que si l'on modifie le choix (automatique) de χ_α , alors (pour $G = g_0$ assez petit) l'opérateur A se modifie par $e^{g_0/h} K e^{-g_0/h}$, où K est un opérateur intégral de noyau $k(x, y, h)$ vérifiant :

$$(6.4) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k| \leq C_{\alpha, \beta, j} e^{-\varepsilon_0 r R/h} m_0 r^{n-j} R^{-|\alpha| - |\beta| - j} h^{j - h - \ell} ,$$

où $m_0(x) = m(x, 0)$. Si \tilde{m} est une fonction d'ordre, on constate alors que $e^{g_0/h} K e^{-g_0/h}$ est $\mathcal{O}(h^{-\ell})$ comme opérateur borné :

$$H(\Lambda_{g+\varepsilon_1 r R}, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_{g-\varepsilon_1 r R}, \frac{\tilde{m}}{m} (\frac{\tilde{r} R}{h})^N) , \quad \forall N \in \mathbb{N} ,$$

pour un $\varepsilon_1 > 0$ fixé et pour tout $g \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ assez proche de g_0 . En particulier K sera $\mathcal{O}(h^{-\ell})$ comme opérateur borné $H(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda, \frac{\tilde{m}}{m} (\frac{\tilde{r} R}{h})^N)$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Un tel opérateur sera appelé : opérateur négligeable d'ordre $m h^{-\ell}$.

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

On commence par étudier l'action d'un opérateur pseudodifférentiel dans les espaces $H(\Lambda, m)$. On complètera ensuite une partie des arguments développés pour aboutir à une caractérisation des opérateurs TAT^{-1} où T est une transformation de FBI et A un opérateur pseudodifférentiel. De cette caractérisation, on déduira que la classe des opérateurs pseudodifférentiels ne dépend pas vraiment du choix de la phase $\tilde{\varphi}$, qu'il y a un symbole principal naturel, et que l'on a le résultat naturel (et habituel) sur la composition de deux opérateurs pseudodifférentiels.

Ayant fixé des choix automatiques des quantités géométriques $\tilde{\varphi}$ et χ_α , on a :

Proposition 6.1. Soit $G-g_0$ assez petit dans $\dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n) + S(r, R)$. Alors si $A = Op(\tilde{\varphi}, a)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m , et si \tilde{m} est une autre fonction d'ordre, alors pour $0 < h < h_0$ avec $h_0 > 0$ assez petit, A est uniformément borné : $H(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda, \tilde{m}/m)$.

Démonstration : On part de l'identité :

$$(6.5) \quad u = S \circ T u + e^{g/h} K e^{-g/h} u$$

donné dans la Proposition 4.4 et on rappelle que le noyau k de K est à support dans $|x-y| \leq \text{const. } R(x)$ et vérifie

$$(6.6) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k| \leq C_{\alpha, \beta} e^{-\epsilon_0 r R/h} r^n R^{-|\alpha| - |\beta|} h^{-n}.$$

On écrit ensuite : $Au = ASTu + A e^{g/h} K e^{-g/h}$, et on commence par étudier $A e^{g/h} K e^{-g/h}$ qui est de noyau $e^{g/h} \int q(x, y, \alpha, h) \tilde{\varphi} e^{-g/h}$, où :

$$(6.7) \quad q(x, y, \alpha, h) = \int e^{\frac{i}{h} (\tilde{\varphi}(x, z, \alpha) + i g(x) - i g(z))} a(x, z, \alpha, h) \chi_\alpha(x, z) k(z, y, h) dz.$$

Une majoration directe donne

$$(6.8) \quad q = \mathcal{O}(1) e^{-\varepsilon_0 r R/h} m_0 \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^{N_0} \frac{3n}{\tilde{r}^2} r^n \frac{3n}{R^2} h^{-\frac{5n}{2}},$$

où $m_0 = m(x, 0)$ et N_0 est assez grand pour que $m \leq m_0 \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^{N_0}$. Si $\tilde{r} \gg r$ on peut d'abord faire des intégrations par parties dans (6.7) avant de faire la majoration directe, et on trouve

$$(6.9) \quad q = \mathcal{O}(1) e^{-\varepsilon_0 r R/h} m_0 \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^{N_0} \frac{5n}{\tilde{r}^2} \frac{3n}{R^2} h^{-\frac{5n}{2}} \left(\frac{h}{R\tilde{r}}\right)^k,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $\tilde{r} \leq \text{const. } r$, (6.8) donne déjà cette majoration, qui est donc générale. Alors

$$\int q \tilde{d}\alpha = \mathcal{O}(1) e^{-\varepsilon_0 r R/h} m_0 r^{\frac{5n}{2}-k} \frac{3n}{R^2-k} h^{-\frac{5n}{2}}, \quad k \geq 0.$$

On trouve la même majoration pour $R^{|\alpha|+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \int q \tilde{d}\alpha$, et on conclut que $A e^{g/h} K e^{-g/h} = \int q \tilde{d}\alpha$ est négligeable d'ordre m et à fortiori $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné : $H(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda, \tilde{m}/m)$.

Il faut ensuite étudier la continuité de AST, ce qui revient à étudier la continuité : $L^2(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow L^2(\Lambda, \tilde{m}/m)$ de TAS. (On utilise encore la notation abrégée $L^2(\Lambda, \tilde{m}) = L^2(\Lambda, \tilde{m}^2 e^{-2H/h} d\alpha)$). Le noyau de cet opérateur est

$$(6.10) \quad K(\alpha, \beta, h) = \int K(\alpha, \beta, \gamma, h) \tilde{d}\gamma,$$

où si φ et φ^* désignent les phases de T et de S :

$$(6.11) \quad K(\alpha, \beta, \gamma, h) = \int e^{\frac{i}{h} (\varphi(\alpha, x) + \tilde{\varphi}(x, y, \gamma) + \varphi^*(y, \beta))} t(\alpha, x, h) a(x, y, \gamma, h) s(y, \beta, h) \chi_\alpha(x, y) \chi_\beta(y) dx dy.$$

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

On note : $K_{\text{red}} = e^{-(H(\alpha)-H(\beta))/h}$ K les noyaux réduits correspondants. En regardant les supports des troncatures, on constate que $K(\alpha, \beta, \gamma, h)$ est à support dans une région, où $|\alpha_x - \gamma_x|$, $|\beta_x - \gamma_x| \leq \text{const. } R(\gamma_x)$.

Si $\alpha, \beta \in B(\gamma, \epsilon_0)$ pour un $\epsilon_0 > 0$ suffisamment petit, on peut évaluer l'intégrale (6.11) à l'aide de la phase stationnaire. Soit :

$$(6.12) \quad \phi(\alpha, \beta, \gamma) = v.c._{(x, y)} (\varphi(\alpha, x) + \tilde{\varphi}(x, y, \gamma) + \varphi^*(y, \beta))$$

la nouvelle phase qui apparait dans le développement de phase stationnaire. On constate que ϕ est de classe $S^{1,1}$ et que

$$(6.13) \quad \begin{aligned} & -H(\alpha) - \text{Im } \phi(\alpha, \beta, \gamma) + H(\beta) \\ & = \mathcal{O}\left(\frac{\gamma}{R} (|\alpha_x - \gamma_x|^2 + |\beta_x - \gamma_x|^2) + \frac{R}{\gamma} (|\alpha_\xi - \gamma_\xi|^2 + |\beta_\xi - \gamma_\xi|^2)\right). \end{aligned}$$

On montre ensuite pour $G = g_0$ et aussi pour tout G assez voisin de g_0 , qu'il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$(6.14) \quad \begin{aligned} & -H(\alpha) - \text{Im } \phi(\alpha, \beta, \gamma) + H(\beta) \\ & \leq -\frac{1}{C_0} \left[\frac{\gamma}{R} (|\alpha_x - \gamma_x|^2 + |\beta_x - \gamma_x|^2) + \frac{R}{\gamma} (|\alpha_\xi - \gamma_\xi|^2 + |\beta_\xi - \gamma_\xi|^2) \right]. \end{aligned}$$

On omet la démonstration détaillée, qui est quasiment la même que celle de la Proposition 4.6.

Donc, pour $\alpha, \beta \in B(\gamma, \epsilon_0)$, on obtient :

$$(6.15) \quad K(\alpha, \beta, \gamma, h) = \tilde{a}(\alpha, \beta, \gamma, h) e^{i\phi(\alpha, \beta, \gamma)/h},$$

où $\tilde{a} \in S(m \gamma^n R^n h^{-2n})$, et donc par (6.14) on trouve :

$$\begin{aligned}
 & K_{\text{red}}(\alpha, \beta, \gamma, h) \\
 (6.16) \quad & = \mathcal{O}(1) m(\gamma) \tilde{r}^n R^n h^{-2n} \exp \left[-\frac{1}{C_0 h} \left[\frac{\tilde{r}}{R} |\alpha_x - \gamma_x|^2 + \frac{\tilde{r}}{R} |\beta_x - \gamma_x|^2 + \frac{R}{\tilde{r}} |\alpha_\xi - \gamma_\xi|^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R}{\tilde{r}} |\beta_\xi - \gamma_\xi|^2 \right] \right]
 \end{aligned}$$

dans cette région.

La contribution correspondante à $K_{\text{red}}(\alpha, \beta, h) = \int K_{\text{red}}(\alpha, \beta, \gamma, h) \tilde{d}\gamma$ est alors

$$(6.17) \quad \mathcal{O}(1) m(\alpha) h^{-n} \exp -\frac{1}{C_0 h} \left(\frac{\tilde{r}}{R} |\alpha_x - \beta_x|^2 + \frac{R}{\tilde{r}} |\alpha_\xi - \beta_\xi|^2 \right) ,$$

et on vérifie immédiatement qu'un noyau à support dans $|\alpha_x - \beta_x| \leq \text{const. } R(\alpha)$, $|\alpha_\xi - \beta_\xi| \leq \text{const. } \tilde{r}(\alpha)$ et vérifiant (6.17) est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné : $L^2(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow L^2(\Lambda, \tilde{m}/m)$.

Regardons ensuite ce qui se passe pour α ou $\beta \notin B(\gamma, \epsilon_0)$:

Cas 1 a. Si $|\alpha_x - \gamma_x|$ ou $|\beta_x - \gamma_x|$ est $> \epsilon_0 R(\gamma_x)$ et $\tilde{r}(\alpha)$, $\tilde{r}(\beta)$, $\tilde{r}(\gamma)$ sont du même ordre de grandeur, on trouve directement à l'aide du comportement gaussien des phases :

$$(6.18) \quad K_{\text{red}}(\alpha, \beta, \gamma, h) = \mathcal{O}(1) e^{-\epsilon_0 \tilde{r} R/h} m(\gamma) \tilde{r}^{2n} R^{2n} h^{-3n} .$$

Cas 1 b. Si $|\alpha_x - \gamma_x|$ ou $|\beta_x - \gamma_x|$ est $> \epsilon_0 R(\gamma_x)$ et par exemple $\tilde{r}(\alpha) \gg \tilde{r}(\beta) + \tilde{r}(\gamma)$, alors on introduit $\tilde{r}_{\text{max}} = \max(\tilde{r}(\alpha), \tilde{r}(\beta), \tilde{r}(\gamma))$ et si on fait des intégrations par parties itérées, on trouve pour tout $N \geq 0$:

$$(6.19) \quad K_{\text{red}}(\alpha, \beta, \gamma, h) = \mathcal{O}(1) e^{-\epsilon_0 \tilde{r} R/h} m(\gamma) \tilde{r}_{\text{max}}^{2n} R^{2n} h^{-3n} \left(\frac{h}{\tilde{r}_{\text{max}} R} \right)^N .$$

Cas 2. Si $|\alpha_x - \gamma_x|$ et $|\beta_x - \gamma_x| \leq \epsilon_0 R(\gamma_x)$, alors $|\alpha_\xi - \gamma_\xi|$ ou $|\beta_\xi - \gamma_\xi|$ est $\geq \epsilon_0 \tilde{r}(\gamma)$.

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

Cas 2. a : Si en plus $\tilde{r}(\alpha)$, $\tilde{r}(\beta)$, $\tilde{r}(\gamma)$ sont du même ordre de grandeur, alors, par une déformation du contour d'intégration, on obtient (6.18).

Cas 2. b : Si par exemple $\tilde{r}(\alpha) \gg \tilde{r}(\beta) + \tilde{r}(\gamma)$, alors par une déformation de contour et des intégrations par parties itérées, on obtient (6.19).

Dans les deux cas, on a (6.19) (puisque (6.18) \Rightarrow (6.19)) et donc la contribution à $K'_{red}(\alpha, \beta, h)$ provenant des cas 1 et 2 est :

$$\begin{aligned}
 (6.20) \quad K'_{red}(\alpha, \beta, h) &= \mathcal{O}(1) h^{N-3n} \int m(\gamma) \tilde{r}(\gamma)^{-n} \frac{\tilde{r}^{2n-N}}{r_{max}} R^{n-N} d\gamma \\
 &= \mathcal{O}(1) m_0(\alpha_x) R^{2n-N} h^{N-3n} \int \left(\frac{\tilde{r}(\gamma)}{r}\right)^{N_0-n} \frac{\tilde{r}^{2n-N}}{r_{max}} \frac{d\gamma_\xi}{r^n},
 \end{aligned}$$

où l'intégration en γ_x porte sur une boule de centre $\frac{1}{2}(\alpha_x + \beta_x)$ et de rayon const. $R(\frac{1}{2}(\alpha_x + \beta_x))$. Ici, on majore l'intégrale par :

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{O}(1) \int \left(1 + \frac{|\xi|}{r}\right)^{N_0-n} (r + |\alpha_\xi| + |\beta_\xi| + |\xi|)^{2n-N} \frac{d\xi}{r^n} \\
 &= \mathcal{O}(1) r^{2n-N} \int (1 + |\eta|)^{N_0-n} \left(1 + \frac{|\alpha_\xi| + |\beta_\xi|}{r} + |\eta|\right)^{2n-N} d\eta \\
 &= \mathcal{O}(1) r^{2n-N} \int \left(1 + \frac{|\alpha_\xi| + |\beta_\xi|}{r} + |\eta|\right)^{N_0+n-N} d\eta \\
 &= \mathcal{O}(1) r^{2n-N} \left(1 + \frac{|\alpha_\xi| + |\beta_\xi|}{r}\right)^{N_0+2n-N} \\
 &= \mathcal{O}(1) \left(1 + \frac{|\alpha_\xi| + |\beta_\xi|}{r}\right)^{N_0} (r + |\alpha_\xi| + |\beta_\xi|)^{2n-N},
 \end{aligned}$$

et donc

$$K'_{red}(\alpha, \beta, h) = \mathcal{O}(1) \left(1 + \frac{|\alpha_\xi| + |\beta_\xi|}{r}\right)^{N_0} (r + |\alpha_\xi| + |\beta_\xi|)^{2n-N} m_0(\alpha_x) R^{2n-N} h^{N-3n}.$$

Montrons que ceci est le noyau d'un opérateur qui est $\mathcal{O}(1)$:

$L^2(\Lambda, \tilde{m}^2 dx) \rightarrow L^2(\Lambda, \frac{\tilde{m}}{m})^2 \left(\frac{\tilde{r}}{h}\right)^{2M_0} dx$, pour tout $M_0 \gg 0$. Ceci revient à étu-

dier la continuité L^2 standard du noyau

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\alpha, \beta, h) &= \frac{\tilde{m}(\alpha)}{\tilde{m}(\beta)} \cdot \frac{1}{m(\alpha)} \left(\frac{\tilde{r}(\alpha)R}{h} \right)^{M_0} K'_{red}(\alpha, \beta, h) = \\ &= \mathcal{O}(1) \left(1 + \frac{|\alpha_\xi| + |\beta_\xi|}{r} \right)^{M_1} (r + |\alpha_\xi| + |\beta_\xi|)^{2n-N+M_0} R^{2n-N+M_0} h^{N-M_0-3n} \end{aligned}$$

Ici $M_1 \geq 0$ ne dépend pas de N . On applique maintenant un critère standard de continuité L^2 et il suffit donc de montrer que $\int |\tilde{K}(\alpha, \beta, h)| d\beta$, $\int |\tilde{K}(\alpha, \beta, h)| d\alpha = \mathcal{O}(1)$. Ces intégrales se majorent de la même façon; ainsi, la première devient pour N assez grand :

$$\begin{aligned} \int |\tilde{K}(\alpha, \beta)| d\beta &= \mathcal{O}(1) R^{3n-N+M_0} h^{N-M_0-3n} r^{-M_1} \int (r + |\alpha_\xi| + |\beta_\xi|)^{M_0+M_1+2n-N} d\beta_\xi \\ &= \mathcal{O}(1) R^{3n-N+M_0} h^{N-M_0-3n} r^{-M_1} (r + |\alpha_\xi|)^{M_0+M_1+3n-N} = \mathcal{O}(1) \left(\frac{h}{rR} \right)^{N-M_0-3n} = \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 6.1. ■

Rappelons que pour h assez petit, T admet un inverse à gauche $T^{-1} = (I+L)S$, où L est négligeable d'ordre 1. D'autre part nous savons aussi d'après la Remarque 5.6, que S est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné $L^2(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda, \tilde{m})$. Donc si A est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m attaché à Λ , on sait que $TAS - TAT^{-1}$ est négligeable d'ordre m au sens évident que cette différence est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné : $L^2(\Lambda, \tilde{m}) \rightarrow L^2(\Lambda, \frac{\tilde{r}R}{m} (\frac{\tilde{r}R}{h})^N)$, pour tout $N \geq 0$ et toute fonction d'ordre \tilde{m} .

La démonstration de la Proposition 6.1 nous montre alors que TAT^{-1} est modulo un opérateur négligeable d'ordre m , de la forme $\int K'(\alpha, \beta, \gamma, h) \tilde{\gamma}$, où K' est de la forme (6.15) avec $\tilde{\alpha} \in S(m \tilde{r}^n R^n h^{-2n})$ à support dans $\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in B(\gamma, \epsilon_0)\}$. Les estimations (6.13), (6.14), le fait que $\frac{\partial}{\partial \gamma} \phi = 0$ pour $\alpha = \beta = \gamma$, et un changement de variables naturel pour réduire les échelles montrent que l'on peut appliquer la version C^∞ de la méthode de

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

la phase stationnaire (voir [Melin-Sj] chapitre 2) avec $\tilde{h} = \frac{h}{rR}$ comme petit paramètre, pour évaluer $\int K' \tilde{d}\gamma$, et on trouve :

Proposition 6.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 6.1., on a la décomposition (pour $h > 0$ assez petit) :*

$$(6.21) \quad T A T^{-1} = \tilde{A} + \tilde{A}_{-\infty},$$

où $\tilde{A}_{-\infty}$ est négligeable d'ordre m et \tilde{A} est un opérateur intégral de noyau

$$(6.22) \quad \tilde{A}(\alpha, \beta, h) = \tilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{i\Phi(\alpha, \beta)/h},$$

où $\tilde{a} \in S(m h^{-n})$ est à support dans $\{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda; \beta \in B(\alpha, \epsilon_0)\}$ et où $\Phi(\alpha, \beta) \in S^{1,1}(\Lambda \times \Lambda)$ est défini (à l'aide d'extensions presque holomorphes) comme

$$(6.23) \quad \Phi(\alpha, \beta) = v.c._\gamma \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = v.c._y \varphi(\alpha, y) + \varphi^*(y, \beta).$$

De même \tilde{a} est donné par un développement asymptotique à partir du symbole a de A et on a en particulier :

$$(6.24) \quad \tilde{a}(\alpha, \alpha, h) \equiv \rho(\alpha, h) a(\alpha_x, \alpha_x, \alpha, h) \text{ mod } (S(m h^{-n}) (\frac{h}{rR}))$$

où ρ est un symbole elliptique de classe $S(\tilde{r}^{-\frac{3n}{2}} R^{-\frac{n}{2}} h^{\frac{n}{2}})$, qui est homogène en h et qui ne s'annule jamais.

Nous allons maintenant caractériser les noyaux \tilde{A} qui peuvent provenir des opérateurs pseudodifférentiels par la formule (6.21), à l'aide d'un "complexe $\bar{\partial}$ pseudodifférentiel". On utilise en effet un point de vue d'opérateurs de Toeplitz, voir [Bo.S.] et [Bo.G.]. Commençons par une discussion géométrique ; dans la plupart de nos arguments on considère des développements de Taylor sur la diagonale $\alpha = \beta$ ou parfois sur d'autres ensembles comme $\{(\alpha, y) : y = \alpha_x\}$ et on pourra assez souvent ignorer les

échelles \tilde{r} et R , car l'effet des échelles s'obtiendra après par des simples changements de variables de type " h_α ".

Soit $T^*\Lambda^{\mathbb{C}}$ le complexifié (fibre par fibre) de $T^*\Lambda$ et soit $\Sigma \subset T^*\Lambda^{\mathbb{C}}$ le graphe de la 1-forme complexe $\omega(\alpha) = d_\alpha \varphi$, $\gamma = \alpha_x$, c.à.d. $\Sigma = \{d_\alpha \varphi; \gamma = \alpha_x\}$. Alors $\omega = \alpha_\xi d\alpha_x \Big|_\Lambda$ et on remarque que $d\omega = d\alpha_\xi \wedge d\alpha_x$ est la forme symplectique réelle sur Λ (qui est à la fois I-Lagrangienne et R-symplectique). D'autre part, nous avons la 2-forme "symplectique" complexe sur $T^*\Lambda^{\mathbb{C}}$: $\sigma = d\alpha^* \wedge d\alpha$, où α^* désigne les variables duales aux α . Alors $\sigma \Big|_\Sigma$ s'identifie avec $d\omega$ par la projection naturelle $\Pi_\alpha : \Sigma \rightarrow \Lambda$ et on obtient :

Proposition 6.3. $\sigma \Big|_\Sigma$ s'identifie avec la forme symplectique réelle sur Λ . On peut écrire $\omega = \omega_1 - i d_\alpha H$, où $d_\alpha \omega_1$ est la forme symplectique réelle sur Λ , et où H est une primitive de $-Im \alpha_\xi d\alpha_x \Big|_\Lambda$.

Nous allons maintenant chercher des conditions de compatibilité (un peu formelles pour commencer) que doivent vérifier les fonctions sur Λ de la forme Tu . Pour cela on va compléter les variables $y = (y_1, \dots, y_n)$ par des variables $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ et étendre T de façon à obtenir un opérateur intégral de Fourier associé à une transformation canonique. Soit donc :

$$(6.25) \quad \phi(\alpha, z) \in S^{1,1}, \quad z = (y, \omega),$$

défini pour $\alpha \in \Lambda$, $(y, \omega) \in \mathbb{C}^{2n}$, $|\omega| \leq \text{const. } \tilde{r}(\alpha)$, quadratique en z , avec

$$(6.26) \quad \phi(\alpha, y, 0) = \varphi(\alpha, y),$$

et

$$(6.27) \quad \det(\phi''_{\alpha, z}) \text{ elliptique de degré maximal et } \neq 0.$$

Ici dans la définition des classes de symboles on donne le même poids à

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

ω et à α_ξ . Puisque $\varphi(\alpha, y) = (\alpha_x - y)\alpha_\xi + i\lambda(\alpha)(\alpha_x - y)^2$, $\lambda \in S^{1,1}$, on peut prendre par exemple

$$\phi(\alpha, z) = \varphi(y, \alpha) + (\alpha_x - y)\omega \quad ,$$

On introduit formellement la transformation

$$\mathcal{T}v(\alpha, h) = \int e^{i\phi(\alpha, z)/h} t(\alpha, y, h) v(z, h) dz \quad ,$$

et pour ne pas trop compliquer la discussion (et surtout les notations), on supposera pour commencer que t et s sont des symboles scalaires. (Ceci n'est pas tout à fait correct et on indiquera plus tard les modifications à apporter pour traiter le cas où t et s sont vectoriels).

Au moins formellement, on remarque que $\mathcal{T}(u \otimes \delta(\omega)) = Tu$ et qu'une distribution $v(y, \omega)$ est de la forme $u(y) \otimes \delta(\omega)$ ssi $\omega_j v = 0$ pour $j=1, \dots, n$. Formellement, on peut donc caractériser l'image de T comme $\text{Ker } Z_1 \cap \dots \cap \text{Ker } Z_n$, où $Z_j = \mathcal{T} \omega_j \mathcal{T}^{-1}$. Pour comprendre mieux la nature des Z_j , on fixe un point $(\alpha_0, \alpha_0^*) \in \Sigma$ et on pose $z_0 = ((\alpha_0)_x, 0)$, $z_0^* = -\frac{\partial \phi}{\partial z}(\alpha_0, z_0)$. Considérons alors dans un voisinage de (α_0, α_0^*) , (z_0, z_0^*) la transformation canonique

$$(6.28) \quad \kappa : \left(z, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \rightarrow \left(\alpha, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \quad ,$$

qui envoie un voisinage de (z_0, z_0^*) sur un voisinage de (α_0, α_0^*) dans $\widetilde{T^*\Lambda}$, le presque complexifié de $T^*\Lambda$, défini après un choix d'extension presque holomorphe par rapport à α . On s'intéresse surtout au comportement de (6.28) pour $\alpha \in \Lambda$. Pour de tels α , puisque ϕ dépend holomorphiquement de z , on constate que $\kappa^{-1}(\alpha, \alpha^*)$ dépend de manière C^∞ de (α, α^*) et de manière holomorphe de α^* . Si $Q(z, \widetilde{D}_z, h)$ est un opérateur pseudodifférentiel classique formel avec un symbole $Q(z, \zeta, h)$ défini dans un voisinage de (z_0, z_0^*) , on peut alors construire un opérateur pseudodifférentiel $P(\alpha, \widetilde{D}_\alpha, h)$ (du même ordre que Q) avec un symbole $P(\alpha, \alpha^*, h)$ défini dans un voisinage de

(α_0, α_0^*) , holomorphe en α^* , tel que au sens des développements asymptotiques en h :

$$(6.30) \quad \left(P(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h) - {}^t Q(z, \tilde{D}_z, h) \right) \left(e^{i\Phi(\alpha, z)/h} t(\alpha, y, h) \right) \sim 0 .$$

(L'action de P à un sens puisque son symbole est holomorphe en α^*). On a bien évidemment la relation classique :

$$(6.31) \quad p \circ \kappa = q ,$$

entre les symboles principaux. On voit que la correspondance $Q \rightarrow P$ respecte la composition formelle des opérateurs pseudodifférentiels, en particulier si $Q_j \rightarrow P_j$, $j = 1, 2$ et $[Q_1, Q_2] = 0$, alors $[P_1, P_2] = 0$.

Prenons maintenant $Q_j = \omega_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, et soient Z_j, \dots, Z_n les opérateurs " P_j " correspondants. Alors les Z_j commutent entre eux et en posant $\omega = 0$ dans (6.30) on obtient

$$(6.32) \quad Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h) (e^{i\varphi(\alpha, y)/h} t(\alpha, y, h)) \sim 0$$

(c.à.d. que formellement $Z_j \circ T = 0$). La construction des Z_j est en effet globale, au sens que les symboles de ces opérateurs sont définis dans un voisinage de Σ dans $T^*\Lambda^{\mathbb{C}}$ (ou bien dans $\widetilde{T^*\Lambda}$ si l'on veut aussi prendre des extensions presque holomorphes en α).

Dans un voisinage de Σ , on définit $\mathcal{J} = \{(\alpha, d_\alpha \varphi(\alpha, y)) ; \alpha \in \Lambda, y \in \mathbb{C}^n, y \text{ proche de } \alpha_x\}$. Alors $\mathcal{J} = \kappa(\{(z, z^*) ; \omega = 0\}) = \{(\alpha, \alpha^*) \in T^*\Lambda^{\mathbb{C}} ; \zeta_j(\alpha, \alpha^*) = \dots = \zeta_n(\alpha, \alpha^*) = 0\}$, où $\zeta_j(\alpha, \alpha^*)$ désigne le symbole principal de Z_j . Puisque $\{\zeta_j, \zeta_k\} = 0$, il est raisonnable de dire que \mathcal{J} est involutif (et plus loin on regardera des extensions presque analytiques en α , ce qui permettra de définir les feuilles bicaractéristiques de \mathcal{J}). Soit \mathcal{J}_α la fibre de \mathcal{J} au dessus d'un point $\alpha \in \Lambda$. On montre facilement que :

(6.33) \mathcal{J}_α est une sous-variété holomorphe de dimension n de $(T_\alpha^* \Lambda)^\mathbb{C}$. (En effet $d_{\alpha^*} \zeta_1, \dots, d_{\alpha^*} \zeta_n$ sont linéairement indépendants, ce que l'on démontre à l'aide de (6.27)).

(6.34) L'application $\mathbb{C}^{2n} \ni (y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}) \rightarrow (\alpha, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}) \in \mathcal{J}$ est un difféomorphisme local.

(6.35) L'application $\mathcal{J} \ni (\alpha, \alpha^*) \rightarrow (\alpha, \text{Im } \alpha^*) \in T^* \Lambda$ est un difféomorphisme local.

Puisque $T_{(\alpha, \alpha^*)} \mathcal{J}_\alpha$ est un espace complexe-linéaire, (6.35) reste valable si l'on remplace "Im" par "Re". On démontre (6.34) et (6.35) simultanément, en utilisant que l'application $\mathbb{C}^{2n} \ni (y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}) \rightarrow (\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha} (-\text{Im } \varphi)) \in T^* \Lambda$ est un difféomorphisme local (voir (4.33)).

Remarque 6.4. Soit $Z(\alpha, \overset{\vee}{D}_\alpha, h)$ un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre k (en $\frac{1}{h}$) avec un symbole holomorphe en α^* , défini soit près d'un point $(\alpha_0, \alpha_0^*) \in \Sigma$, soit dans tout un voisinage de Σ , tel que $Z(e^{i\varphi(\cdot, y)}/h) \tau(\cdot, y, h) \sim 0$. Alors il existe des opérateurs A_1, \dots, A_n d'ordre k , de symboles holomorphes en α^* définis près de (α_0, α_0^*) ou près de Σ respectivement, tels que $Z = \sum_j^n A_j \circ Z_j$. En effet, on constate d'abord que le symbole principal ζ s'annule sur \mathcal{J} et donc $\zeta = \sum a_j \zeta_j$, avec $a_j(\alpha, \alpha^*)$ holomorphes en α^* . On prend alors a_j comme symbole principal d'un opérateur A_j^0 et on répète l'argument pour $Z - \sum_j^n A_j^0 Z_j$, pour trouver les contributions d'ordre inférieur. ■

Toute la discussion ci-dessus s'applique aussi bien à l'opérateur S (que nous supposons aussi scalaire pour l'instant !). On a donc des opérateurs $Z_j^*(\beta, \overset{\vee}{D}_\beta, h)$, $\sigma = 1, \dots, n$ avec les mêmes propriétés générales que Z_j , et tels que

$$(6.36) \quad Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h) \left(e^{i\varphi^*(y, \beta)/h} s(y, \beta, h) \right) \sim 0 .$$

Les symboles principaux ζ_j^* , $j=1, \dots, n$, ont alors comme variété caractéristique commune :

$$(6.37) \quad -\mathcal{J}^* = \left\{ (\beta, d_\beta \varphi^*(y, \beta)) ; y \in \mathbb{C}^n, \beta \in \Lambda, |y - \beta_x| \text{ petit} \right\} ,$$

et on définit \mathcal{J}^* par la relation : $-\mathcal{J}^* = \{(\beta, -\beta^*) ; (\beta, \beta^*) \in \mathcal{J}^*\}$. \mathcal{J}^* admet alors les mêmes propriétés générales que \mathcal{J} et en particulier $\Sigma \subset \mathcal{J}^*$.

Montrons ensuite :

$$(6.38) \quad \text{Pour tout } \alpha \in \Lambda, \text{ on a } \mathcal{J}_\alpha \cap \mathcal{J}_\alpha^* = \{\omega(\alpha)\}, \text{ avec intersection transversale.}$$

En effet, si $(\alpha, \alpha^*) \in \mathcal{J} \cap \mathcal{J}^*$, il existe des points $x, y \in \mathbb{C}^n$ proches de α_x tels que $\alpha^* = d_\alpha \varphi(\alpha, y) = -d_\alpha \varphi^*(x, \alpha)$. Donc, $d_\alpha(\varphi^*(x, \alpha) + \varphi(\alpha, y)) = 0$, mais on montre sans peine (d'abord pour $G = g_0(x)$ et ensuite par un argument de perturbation) que $|d_\alpha(\varphi^*(x, \alpha) + \varphi(\alpha, y))| \sim |x - \alpha_x| + |y - \alpha_x|$, donc on a nécessairement $x = y = \alpha_x$, donc $\alpha^* = \omega(\alpha)$, et en même temps on voit que l'intersection est transversale.

En un point $(\alpha, \omega(\alpha))$, on sait par la propriété (6.35) que $T\mathcal{J}_\alpha$ et $T\mathcal{J}_\alpha^*$ ne contiennent aucun vecteur tangent réel $\neq 0$. De plus, les formes $d_{\alpha^*} \zeta_1, \dots, d_{\alpha^*} \zeta_n$ et $d_{\alpha^*} \zeta_1^*(\alpha, -\alpha^*), \dots, d_{\alpha^*} \zeta_n^*(\alpha, -\alpha^*)$ sont linéairement indépendantes. Considérons alors les champs Hamiltoniens $H_{\zeta_1}, \dots, H_{\zeta_n}$ en $(\alpha, \omega(\alpha))$ et $H_{\zeta_1^*}, \dots, H_{\zeta_n^*}$ en $(\alpha, -\omega(\alpha))$ comme des vecteurs tangents de $\widetilde{T^*\Lambda}$ (c.à.d. que l'on fait maintenant des extensions presque analytiques en α). Alors, si $\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha^* \subseteq T_\alpha(\widetilde{\Lambda})$ (où $\widetilde{\Lambda}$ désigne le presque-complexifié de Λ et donc $\widetilde{T^*\Lambda} = T^*\widetilde{\Lambda}$), sont les espaces engendrés par les projections $\Pi_\alpha H_{\zeta_1}, \dots, \Pi_\alpha H_{\zeta_n}$ et $\Pi_\alpha H_{\zeta_1^*}, \dots, \Pi_\alpha H_{\zeta_n^*}$ respectivement, nous savons que

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{\alpha}^* = n$ et que

$$(6.39) \quad T_{\alpha}(\tilde{\Lambda}) = \Gamma_{\alpha} \oplus \Gamma_{\alpha}^* .$$

On remarque aussi que Γ_{α} et Γ_{α}^* ne contiennent pas de vecteurs réels $\neq 0$. En effet, si par exemple $\Gamma_{\alpha} \cap T_{\alpha}(\Lambda) \neq 0$, on aurait un symbole ζ avec $\zeta|_{\mathcal{J}} = 0$ et $\Pi_{\alpha} H_{\zeta}$ réel $\neq 0$. Alors $T_{(\alpha, \omega(\alpha))}(\mathcal{J}_{\alpha})$ serait contenu dans le complexifié d'un hyperplan réel : $d_{\alpha^*} \zeta = 0$ et ceci est impossible car on sait que $\mathcal{J}_{\alpha} \ni \alpha^* \rightarrow \text{Re } \alpha^*$ est un difféomorphisme local.

Considérons ensuite l'application :

$$(6.40) \quad \begin{aligned} &T_{\alpha}(\tilde{\Lambda}) \times \Gamma_{\alpha} \times \Gamma_{\alpha}^* \rightarrow T_{\alpha}(\tilde{\Lambda}) \times T_{\alpha}(\tilde{\Lambda}) \\ &(\delta, t, s) \rightarrow (\delta+t, \delta+s) = (v, \mu) . \end{aligned}$$

Si $\delta+t = \delta+s = 0$ alors $t=s$ et donc $t=s=0$ puisque $\Gamma_{\alpha} \cap \Gamma_{\alpha}^* = 0$. Alors $\delta=0$ aussi, et il est clair que (6.40) est injective, donc bijective. Aussi, puisque $|\text{Im } t| \sim |t|$, $|\text{Im } s| \sim |s|$ et $|t-s| \sim |t| + |s|$, on trouve $|v-\mu| = |t-s| \sim |\text{Im } t| + |\text{Im } s|$. Ecrivons ensuite, $\text{Im } t = \text{Im } v - \text{Im } \delta$, $\text{Im } s = \text{Im } \mu - \text{Im } \delta$, on trouve,

$$(6.41) \quad |v-\mu| \sim |\text{Im } v - \text{Im } \delta| + |\text{Im } \mu - \text{Im } \delta| .$$

En particulier, si v et μ sont réels : $|v-\mu| \sim |\text{Im } \delta|$. Ces considérations serviront plus loin à la fois pour comprendre la composition de noyaux de la forme (6.22) et les équations eiconales et de transport associées à ces noyaux.

Revenons maintenant à la fonction $\phi(\alpha, \beta)$ de la Proposition 6.2. On vérifie immédiatement que :

$$(6.42) \quad d_{\alpha} \phi \in \mathcal{J}_{\alpha} , \quad d_{\beta} \phi \in -\mathcal{J}_{\beta}^* , \quad \alpha, \beta \in \Lambda ,$$

(6.43) Pour $\alpha = \beta$, on a $\phi = 0$ et $d_\alpha \phi = \omega(\alpha) = -d_\beta \phi$.

Il résultera de la caractérisation de Λ'_ϕ dans la démonstration de la Proposition 6.5 ci-dessous que les propriétés (6.42) et (6.43) caractérisent ϕ modulo un terme $\mathcal{O}(|\alpha - \beta|^\infty)$. Rappelons aussi la propriété (4.47) (où $\tilde{\psi} = \phi$).

Soit maintenant $f(\alpha)$ une fonction C^∞ définie localement sur Λ près d'un point α_0 telle que $d_\alpha f \in \mathcal{J}_\alpha \text{ mod } \mathcal{O}(|\alpha - \alpha_0|^\infty)$, $-\text{Im } f \leq H$, $d_\alpha f(\alpha_0) = \omega(\alpha_0)$, $-\text{Im } f(\alpha_0) = H(\alpha_0)$.

Proposition 6.5. Avec f comme ci-dessus, considérons

$$(6.44) \quad F(\alpha) = v.c. \beta \left(\phi(\alpha, \beta) + f(\beta) \right),$$

défini comme développement de Taylor formel en $\alpha = \alpha_0$, (à l'aide des extensions presque analytiques en β , (voir [Melin-Sj]). Alors on a $F(\alpha) = f(\alpha)$.

Démonstration : On désigne avec les mêmes lettres, $\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \Sigma$ les variétés que l'on obtient dans $\tilde{T}^*\Lambda$ après extensions presque holomorphes en α . Alors $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{J} = \dim \mathcal{J}^* = 3n$, $\dim \Sigma = 2n$, et $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^* = \Sigma$ avec intersection transversale. Si $(\alpha, \alpha^*) \in \Sigma$, soient $\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*} \subset \mathcal{J}$, $\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*}^* \subset \mathcal{J}^*$ les feuilles bicaractéristiques de \mathcal{J} et \mathcal{J}^* respectivement, passant par (α, α^*) . Puisque Σ est symplectique, on sait que $\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*}$ et Σ se coupent transversalement en (α, α^*) comme sous-variétés de \mathcal{J} . On a le même résultat pour $(\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*}^*, \Sigma, \mathcal{J}^*)$. Les projections de $T_{(\alpha, \alpha^*)}(\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*})$ et $T_{(\alpha, \alpha^*)}(\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*}^*)$ sont les espaces Γ_α et Γ_α^* respectivement. De (6.40) on déduit que $\text{diag}(\Sigma \times \Sigma)$ et $\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*} \times \tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*}^*$ se coupent transversalement dans la variété $\mathcal{J} \times \mathcal{J}^*$, involutive pour $\sigma_{\alpha, \alpha^*} - \sigma_{\beta, \beta^*}$ et admettent $\tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*} \times \tilde{\Gamma}_{\alpha, \alpha^*}^*$ comme feuille bicaractéristique. La variété $\Lambda'_\phi = \left\{ \left(\alpha, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \beta, -\frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \right\}$ est Lagrangienne pour cette forme symplectique et

puisque $\text{diag}(\Sigma \times \Sigma) \subseteq \Lambda_\phi^! \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{J}^*$, on a :

$$\Lambda_\phi^! = \bigcup_{(\gamma, \gamma^*) \in \Sigma} \tilde{\Gamma}_{(\gamma, \gamma^*)} \times \tilde{\Gamma}_{(\gamma, \gamma^*)}^*$$

Pour un α donné, soit $\beta(\alpha)$ le point critique dans (6.44). Si $\beta^* = d_\beta f(\beta)$, on a $(\beta, \beta^*) \in \mathcal{J}^* \cap \mathcal{J} = \Sigma$ et donc $\beta^* = \omega(\beta)$, où ω désigne aussi une extension presque holomorphe. Si $\alpha^* = d_\alpha \phi(\alpha, \beta)$, on a $(\alpha, \alpha^*) \in \tilde{\Gamma}_{\beta, \beta^*}$. En effet, d'après la caractérisation de $\Lambda_\phi^!$ ci-dessus il existe un point $(\gamma, \gamma^*) \in \Sigma$ unique, tel que $(\alpha, d_\alpha \phi) \in \tilde{\Gamma}_{\gamma, \gamma^*}$, $(\beta, -d_\beta \phi) \in \tilde{\Gamma}_{\gamma, \gamma^*}^*$, et dans le cas présent nous avons vu que : $(\gamma, \gamma^*) = (\beta, \beta^*)$.

Sachant maintenant que $(\alpha, \alpha^*) \in \tilde{\Gamma}_{\beta, \beta^*}$, il suffit de remarquer que $\tilde{\Gamma}_{\beta, \beta^*} \subseteq \Lambda_\phi(\cdot, \beta) \cap \Lambda_f$, pour conclure que la fonction $\tilde{\alpha} + \phi(\tilde{\alpha}, \beta) - f(\tilde{\alpha}) + f(\beta)$ est constante sur la projection de la feuille $\tilde{\Gamma}_{\beta, \beta^*}$. Donc :

$$\phi(\alpha, \beta) + f(\beta) - f(\alpha) = \phi(\beta, \beta) + f(\beta) - f(\beta) = 0,$$

et nous avons démontré (6.44). ■

Si $\Omega \subset \Lambda$ est un ouvert, on définit $S^k(\Omega \times \Omega)$ comme l'espace des symboles classiques $\tilde{a}(\alpha, \beta, h)$ d'ordre k en $\frac{1}{h}$, et de même on définit $S^k(W)$ si $W \subset \Delta(\Lambda \times \Lambda)$ est un ouvert. On dit que deux symboles dans $S^k(\Omega \times \Omega)$ sont équivalents si leur différence $k(\alpha, \beta, h)$ a la propriété que toutes les dérivées restreintes à $\Delta(\Omega \times \Omega)$ sont de classe $S^{-\infty}$. Le quotient de $S^k(\Omega \times \Omega)$ par cette relation d'équivalence sera noté $S_\Delta^k(\Omega)$.

Proposition 6.6. Si $\tilde{a} \in S_\Delta^k(\Omega)$, alors $Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h)(\tilde{a} e^{i\phi/h})$ et $Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h)(\tilde{a} e^{i\phi/h})$ appartiennent à $S_\Delta^{k-1}(\Omega) e^{i\phi/h}$. Pour tout $b \in S^k(\Delta(\Omega \times \Omega))$ il existe un $\tilde{a} \in S_\Delta^k(\Omega)$ unique avec la propriété que $\tilde{a}|_{\Delta(\Omega \times \Omega)} \equiv b \pmod{S^{-\infty}}$, $Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h)(\tilde{a} e^{i\phi/h}) = 0$, $Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h)(\tilde{a} e^{i\phi/h}) = 0$ pour $j = 1, \dots, n$.

La première partie de la Proposition résulte de (6.42) et la deuxième partie résulte d'une analyse facile des équations de transport, qui font intervenir les projections $\Pi_\alpha H_{\zeta_j}$, $\Pi_\beta H_{\zeta_j}^*$ et où la bijectivité de l'application (6.40) joue un rôle important. On omet les détails.

Proposition 6.7. Soit $\tilde{A} = \tilde{a} e^{i\Phi/h}$ donné par la Proposition 6.2. Si l'on considère \tilde{a} comme un élément de $S_\Delta^n(\Lambda \times \Lambda)$, alors on a

$$(6.45) \quad Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h) (\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0, \quad Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h) (\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0,$$

pour $j = 1, \dots, n$.

Formellement, ce résultat provient de (6.32), (6.36) et le fait que

$$(6.46) \quad \tilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{i\Phi(\alpha, \beta)/h} = \iiint e^{\frac{i}{h}(\varphi(\alpha, x) + \tilde{\varphi}(x, y, \gamma) + \varphi^*(y, \beta))} t(\alpha, x, h) s(y, \beta, h) a(x, y, \gamma, h) dx dy d\gamma$$

(développement de phase stationnaire formel). Or pour démontrer (6.45) en un point (α_0, α_0) , il suffit de le faire à n'importe quel ordre en h et en $((\alpha - \alpha_0), (\beta - \alpha_0))$, donc on peut remplacer $\Lambda, \varphi, \varphi^*, \tilde{\varphi}, t, s, a$ par des développements de Taylor finis en α_0, β_0 . On est alors ramené au cas où toutes les phases et tous les symboles sont analytiques. Dans ce cas l'action de $Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h), Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h)$ se définit, ainsi que l'intégrale (6.46), à l'aide des choix de bons contours et les résultats de [S.1], chapitre 4 permettent d'appliquer Z_j et Z_j^* sous le signe somme dans (6.46). On obtient ainsi la Proposition.

La Proposition 6.7 est un résultat tout à fait provisoire, car d'une part nous avons ignoré les échelles \tilde{r} et R et d'autre part, nous avons supposé (à tort) que T et S sont scalaires. Il faut donc corriger pour tenir compte de ces deux effets.

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

On commence par remettre les échelles (tout en continuant à traiter T et S comme des opérateurs scalaires). Cela revient à analyser de manière uniforme les arguments ci-dessus dans une boîte de base $B(\alpha^0, \epsilon_0)$, quand α^0 varie dans Λ , pendant que ϵ_0 reste fixé assez petit.

On applique alors l'analyse ci-dessus après les changements de variables :

$$(6.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x - \alpha_x^0 = R(\alpha_x^0) \tilde{\alpha}_x \quad , \quad \alpha_\xi - \alpha_\xi^0 = \tilde{r}(\alpha^0) \tilde{\alpha}_\xi \\ y - \alpha_x^0 = R(\alpha_x^0) \tilde{y} \quad , \quad \omega = \tilde{r}(\alpha^0) \tilde{\omega} \\ h = \tilde{r}(\alpha^0) R(\alpha_x^0) \tilde{h} . \end{array} \right.$$

Alors : $\frac{1}{h} \varphi = \frac{1}{\tilde{h}} \hat{\varphi}$, $\frac{1}{h} \varphi^* = \frac{1}{\tilde{h}} \hat{\varphi}^*$, $\frac{1}{h} \tilde{\varphi} = \frac{1}{\tilde{h}} \hat{\tilde{\varphi}}$, $\frac{1}{h} \phi = \frac{1}{\tilde{h}} \hat{\phi}$, où toutes ces nouvelles phases sont bornées quand α^0 varie. Si $\frac{1}{h} g = \frac{1}{\tilde{h}} \hat{g}$, alors $\hat{g} - \hat{g}(0)$ reste aussi uniformément borné quand α^0 varie, et on a : $\text{Im} \hat{\varphi}_{yy}'' - g_{yy}'' \geq \text{const.} I > 0$, $|\det \hat{\varphi}_{\alpha, z}''| \geq \text{const.} > 0$, et c.. De même, la variété $\Lambda = \Lambda_G$ se transforme en $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\tilde{G}}$, où $\tilde{G}(y, \tilde{\eta}) = \frac{1}{\tilde{r}(\alpha^0) R(\alpha_x^0)} G(y, \eta)$, où on pose : $\eta - \alpha_\xi^0 = \tilde{r}(\alpha^0) \tilde{\eta}$.

Avec ces changements de variables (6.46) devient une formule asymptotique en puissances de \tilde{h} . Plus précisément, si on définit $\hat{\tilde{a}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{h}) = \tilde{a}(\alpha, \beta, h)$, alors $m(\alpha_0)^{-1} \hat{\tilde{a}}$ est uniformément borné dans S^n avec \tilde{h} comme petit paramètre, quand α^0 varie, et on a un développement asymptotique où tous les termes et tous les restes sont uniformément bornés dans différents espaces S^k , quand α^0 varie.

De même, les opérateurs Z_j et Z_j^* deviennent $\tilde{r}(\alpha^0) \hat{Z}_j(\tilde{\alpha}, \tilde{D}_{\tilde{\alpha}}, \tilde{h})$, $\tilde{r}(\alpha^0) \hat{Z}_j^*(\tilde{\beta}, \tilde{D}_{\tilde{\beta}}, \tilde{h})$, où \hat{Z}_j et \hat{Z}_j^* sont de manière naturelle uniformément bornés quand α^0 varie.

Si m est une fonction d'ordre sur Λ et $l \in \mathbb{R}$, on dit que deux symboles $a_j(\alpha, \beta, h) \in S(m h^{-l})$, $j = 1, 2$ sont équivalents si la restriction à $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ de

$\hat{a}_1 - \hat{a}_2$ et de toutes ces dérivées est dans $h^{-l} m(\alpha^0) S^{-\infty}$ et ceci uniformément par rapport à α^0 . On a alors une relation d'équivalence dans $S(mh^{-l})$ et on définit $S_{\Delta}(mh^{-l})$ comme l'espace des classes d'équivalence. Toute la discussion précédente s'applique alors après le changement de variables (6.47) avec \tilde{h} comme nouveau petit paramètre et de manière uniforme quand α^0 varie, et on obtient le :

Théorème 6.8.

(a) Si $\tilde{a} \in S_{\Delta}(mh^{-l})$, alors $Z_j(\alpha, \tilde{D}_{\alpha}, h)(\tilde{a} e^{i\Phi/h})$ et $Z_j^*(\beta, \tilde{D}_{\beta}, h)(\tilde{a} e^{i\Phi/h})$ sont bien définis dans $S_{\Delta}(mh^{-l+1}/R)$.

(b) Pour tout b défini sur $\Delta(\Lambda \times \Lambda)$ et de classe

$$S(mh^{-l}) / \prod_{j=0}^{\infty} S(mh^{-l} (h/\tilde{r}R)^j),$$

il existe un $\tilde{a} \in S_{\Delta}(mh^{-l})$ unique avec les propriétés

$$(6.48) \quad Z_j(\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0, \quad Z_j^*(\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0$$

dans $e^{i\Phi/h} S_{\Delta}(mh^{-l+1}/R)$,

$$(6.49) \quad \tilde{a}|_{\alpha=\beta} = b.$$

(c) Un opérateur A s'écrit comme un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m (attaché à Λ) plus un opérateur négligeable d'ordre m si et seulement si $TAT^{-1} = \tilde{A} + \tilde{A}_{-\infty}$, où $\tilde{A}_{-\infty}$ est négligeable d'ordre m et où \tilde{A} est un opérateur intégral de noyau $\tilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{i\Phi(\alpha, \beta)/h}$, où $\tilde{a} \in S(mh^{-n})$ est à support dans $\{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda; |\alpha_x - \beta_x| \leq \varepsilon_0 R(\alpha_x), |\alpha_{\xi} - \beta_{\xi}| \leq \varepsilon_0 \tilde{r}(\alpha)\}$, et où (6.48) est vérifié avec $l=n$.

Démonstration : On a déjà très amplement expliqué pourquoi (a), (b) et la partie directe de (c) sont vrais. Si $\tilde{a} \in S(mh^{-n})$ possède les propriétés

décrites dans (c), on construit par approximations successives un symbole $a(x,y,\alpha,h) \in S_{\text{mod}}(m)$, holomorphe dans un domaine de la forme (6.2) tel que si A est l'opérateur pseudodifférentiel correspondant, alors $TAT^{-1} = \tilde{B} + \tilde{R}_{-\infty}$, où $\tilde{B}_{-\infty}$ est négligeable d'ordre m , $\tilde{B} = \tilde{b}(\alpha,\beta,h) e^{i\phi(\alpha,\beta)/h}$ vérifie (6.48) et $\tilde{b}|_{\alpha=\beta} \equiv \tilde{a}|_{\alpha=\beta} \pmod{\sum_{j=0}^{\infty} S(mh^{-n}(h/\tilde{r}R)^j)}$. Le résultat d'unicité dans (b) montre alors que $\tilde{a} - \tilde{b}$ s'annule en tant qu'élément de $S_{\Delta}(mh^{-n})$. A l'aide des changements de variables en α,β donnés dans (6.47), on voit alors que $(\tilde{a} - \tilde{b}) e^{i\phi/h}$ est le noyau d'un opérateur négligeable d'ordre m . (Voir la démonstration de la Proposition 4.7). ■

Corrections dues au fait que T est vectoriel. On tient maintenant compte du fait que $Tu = (T_0u, \dots, T_nu)$. Comme avant, on complète chaque opérateur T_j en un opérateur \mathcal{T}_j en rajoutant des variables $\omega_1, \dots, \omega_n$ et ceci de telle manière que tous les \mathcal{T}_j ont la même phase. Ecrivons ensuite

$$T_j = T_{j,0}, \mathcal{T}_j = \mathcal{T}_{j,0} \text{ et complétons le vecteur colonne } \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{0,0} \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{n,0} \end{pmatrix} \text{ en une matrice d'OIF}$$

$$\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$$

où tous les $\mathcal{T}_{i,j}$ ont la même phase et sont du même ordre. On peut s'arranger pour que \mathcal{T} soit elliptique. Soient alors $Z_j = \mathcal{T}_{\omega_j} \mathcal{T}^{-1}$, $P = \mathcal{T} \Pi \mathcal{T}^{-1}$, où $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \ni (z_0, \dots, z_n) \rightarrow (0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, et où ω_j désigne la multiplication des $(n+1)$ -vecteurs par la fonction coordonnée ω_j . Z_j est maintenant une $(n+1) \times (n+1)$ -matrice d'opérateurs pseudodifférentiels de symbole principal $\zeta_j = \zeta_j \text{ id}$, et les opérateurs pseudodifférentiels Z_1, \dots, Z_n, P commutent entre-eux. (Formellement, le noyau commun de ces opérateurs est égal à l'image de T). On remarque que si p est le symbole principal de P , alors $\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } \zeta_j \cap \text{Ker } p$ est de dimension 0 en dehors

de \mathcal{J} et de dimension 1 sur \mathcal{J} . Soient Z_1^*, \dots, Z_n^*, P^* les opérateurs analogues associés à S .

Théorème 6.8. (corrigé). Un opérateur A s'écrit comme un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m (attaché à Λ) plus un opérateur négligeable d'ordre m si et seulement si $TAT^{-1} = \tilde{A} + \tilde{A}_{-\infty}$, où $\tilde{A}_{-\infty}$ est négligeable d'ordre m et où \tilde{A} est un opérateur intégral de noyau $\tilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{i\Phi(\alpha, \beta)/h}$, où $\tilde{a} \in S(m h^{-n})$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$ à support dans $\{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda; |\alpha_x - \beta_x| \leq \varepsilon_0 R(\alpha_x), |\alpha_\xi - \beta_\xi| \leq \varepsilon_0 \tilde{r}(\alpha)\}$, et qui vérifie :

$$(6.50) \quad Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h) (\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0, \quad Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h) (\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0$$

dans $S_\Delta(m h^{-n} \tilde{r}) e^{i\Phi/h}$,

$$P(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h) (\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = P^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h) (\tilde{a} e^{i\Phi/h}) = 0$$

dans $S_\Delta(m h^{-n}) e^{i\Phi/h}$.

Démonstration : La vérification de la partie directe ne pose aucune difficulté nouvelle et on se contente ici seulement de remarquer en passant que (6.24) reste valable, où maintenant ρ est une $(n+1) \times (n+1)$ -matrice de classe $S(\tilde{r}^{-3n/2} R^{-n/2} h^{n/2})$ qui, modulo $S(\tilde{r}^{-3n/2} R^{-n/2} h^{n/2} (h/\tilde{r}R))$, est de rang 1 et vérifie $\rho \circ \rho = 0$, $\rho \circ P^* = 0$.

Soit inversement $\tilde{a} \in S(m h^{-n})$ un symbole vérifiant (6.50). On commence par choisir $a_0(x, y, \alpha, h) \in S_{\text{mod}}(m)$ holomorphe en x, y et c. t. q. (6.24) soit vérifiée. Ceci est possible grâce aux dernières équations de (6.50). Soit alors $\tilde{a}_0 \in S(m h^{-n})$ le symbole correspondant produit comme dans la Proposition 6.2. Alors $\tilde{a} - \tilde{a}_0$ vérifie (6.50) et $\tilde{a} - \tilde{a}_0|_{\alpha=\beta} \in S(m h^{-n} \frac{h}{\tilde{r}R})$. Regardons alors les équations de transport qui résultent de la première partie de (6.50) (et qui sont essentiellement scalaires), on en déduit que

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

$\tilde{a} - \tilde{a}_0 \in S_{\Delta}(m h^{-n} \frac{h}{\tilde{r} R})$. Itérant cet argument, on trouve alors $a(x, y, \alpha, h) \in S_{\text{mod}}(m)$, holomorphe en x, y et.c. t.q. si A est l'opérateur pseudodifférentiel correspondant, alors $TAT^{-1} = \tilde{A} + \tilde{A}_{-\infty}$, avec $\tilde{A}_{-\infty}$ négligeable d'ordre m et avec \tilde{A} donné par le noyau $\tilde{a} e^{i\phi/h}$.

La caractérisation des opérateurs pseudodifférentiels donnée par le Théorème 6.8 montre que modulo des opérateurs négligeables d'ordre m , la classe des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m associée à Λ , ne dépend pas du choix de la phase ϕ dans (6.3).

La caractérisation des opérateurs pseudodifférentiels permet aussi de considérer certains opérateurs différentiels comme des opérateurs pseudodifférentiels. Soit par exemple :

$$(6.51) \quad P = \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{|\alpha| \leq N_0} h^k a_{\alpha, k}(x) \tilde{D}^{\alpha},$$

où $a_{\alpha, k} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $C_0 > 0$ et un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tels que les $a_{\alpha, k}$ s'étendent holomorphiquement au domaine $|\text{Im } x| < \frac{1}{C_0} R(x)$, $\text{Re } x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ et y vérifient

$$|a_{\alpha, k}(x)| \leq C_0 m_0(x) r(x)^{-|\alpha|} (r(x) R(x))^{-k}.$$

Ici $m_0(x) = m_0(\text{Re } x)$ est une fonction d'ordre. Soit $m(x, \xi) = m_0(x) (\frac{r}{\tilde{r}})^{N_0}$. Alors $P(x, \xi, h) = \sum \sum h^k a_{\alpha, k}(x) \xi^{\alpha}$ est de classe $S(m)$. Si on suppose que $G(x, \xi)$ est indépendant de ξ pour x dans un voisinage de K , et si G est assez proche de $g_0(x)$ dans $S(rR) + \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, alors Λ_G est contenu dans le domaine de définition de $P(x, \xi, h)$, et on montre que TPT^{-1} a la propriété (6.50). Donc P est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m (modulo un opérateur négligeable d'ordre m) associé à Λ .

Nous pouvons aussi définir un symbole principal. Soit $A = \text{Op}(\varphi, a)$ de la forme (6.3) avec $a \in S_{\text{mod}}(m h^{-l})$. On peut supposer que $\varphi = \varphi_0$ où φ_0 est donnée par (4.3) et si j est le symbole correspondant de l'identité, donnée par (4.8) (et la Proposition 4.1), $j \in S(\tilde{r}^{n/2} R^{-n/2} h^{-3n/2})$, alors on définit le symbole principal $\sigma_A \in S(m h^{-l}) / S(m h^{-l} \tilde{h})$ sur Λ , par

$$(6.52) \quad \sigma_A = \frac{a}{j} \frac{d\tilde{\alpha}}{d\alpha} \quad \text{sur } x = y = \alpha_x .$$

Cette définition ne dépend pas du choix de φ_0 et si l'on note $\text{Op}(\Lambda, S(m h^{-l}))$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre $m h^{-l}$ attachés à Λ modulo les opérateurs négligeables d'ordre $m h^{-l}$, alors le symbole principal donne une bijection

$$(6.53) \quad \text{Op}(\Lambda, S(m h^{-l})) / \text{Op}(\Lambda, S(m h^{-l} \tilde{h})) \rightarrow S(m h^{-l}) / S(m h^{-l} \tilde{h}) .$$

Terminons cette section par la composition des opérateurs pseudodifférentiels.

Théorème 6.9. Soient A_1, A_2 deux opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m_1 et m_2 respectivement et attachés à la même variété I-Lagrangienne Λ . Alors modulo un opérateur négligeable d'ordre $m_1 m_2$, l'opérateur $A_1 \circ A_2$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $m_1 m_2$ attaché à Λ . De plus, on a la relation habituelle $\sigma_{A_1 \circ A_2} = \sigma_{A_1} \circ \sigma_{A_2}$ entre les symboles principaux.

Démonstration : D'après le Théorème 6.8 (corrigé), on a $T A_j T^{-1} = \tilde{A}_j + \tilde{A}_{j, -\infty}$, $j = 1, 2$, où $\tilde{A}_j(\alpha, \beta, h) = \tilde{a}_j(\alpha, \beta, h) e^{i\Phi(\alpha, \beta)/h}$ et $\tilde{A}_{j, -\infty}$ possèdent toutes les propriétés de ce théorème (avec m remplacé par m_j). Vu la propriété (4.47) avec $\Phi = \tilde{\psi}$, on peut calculer le noyau composé $\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2(\alpha, \beta) = \int \tilde{A}_1(\alpha, \gamma) \tilde{A}_2(\gamma, \beta) d\gamma$ à l'aide de la méthode de la phase stationnaire C^∞ complexe (voir [Melin-Sj], section 2). Vu la Proposition 6.5, on trouve

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

alors modulo un noyau négligeable d'ordre $m_1 m_2$:

$$(6.54) \quad (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2)(\alpha, \beta, h) \equiv b(\alpha, \beta, h) e^{i\phi(\alpha, \beta)/h} ,$$

où $b \in S(m_1 m_2 h^{-n})$. Il est aussi formellement évident que ce noyau vérifie (6.50) (avec m remplacé par $m_1 m_2$). Si on passe à des développements limités en un point $\alpha^0 \in \Lambda$ (qui parcourt ensuite Λ) on peut se ramener au cas analytique où les opérateurs Z_j, Z_j^*, P, P^* peuvent être défini à l'aide de contours et on justifie ainsi la validité de (6.50) pour $b e^{i\phi/h}$. La partie réciproque du Théorème 6.8 (corrigé) montre alors que $A_1 \circ A_2$ est bien un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $m_1 m_2$ (modulo négligeable d'ordre $m_1 m_2$).

En ce qui concerne la relation entre les symboles principaux on constate d'abord que $\sigma_{A_1 \circ A_2} = c \sigma_{A_1} \sigma_{A_2}$, où $c \in S(1) / S(\hbar)$ ne dépend pas de A_1 et A_2 et en prenant $A_1 = A_2 = I$ il est clair que $c = 1$. ■

Dans la suite on notera $Op_\Lambda(a)$ un opérateur pseudodifférentiel associé à Λ de symbole principal a .

7. UNE CLASSE D'OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER.

Soient $g_0(x), g_1(x) \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ réels et considérons les variétés I-Lagrangiennes $\Lambda_{G_j}, \Lambda_{g_j}, j=0,1$, où $G_j - g_j$ est assez petit dans $S(rR) + \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Entre Λ_{g_0} et Λ_{g_1} on a la transformation R-canonique naturelle $\kappa_0 : \Lambda_{g_0} \ni (\alpha_x, \alpha_\xi) \rightarrow (\alpha_x, \alpha_\xi - i \frac{\partial(g_1 - g_0)}{\partial \alpha_x}) \in \Lambda_{g_1}$ et comme nous allons voir, on peut trouver une transformation R-canonique κ (non-unique) "de classe" $\dot{S}^{1,1}$ proche de κ_0 qui envoie Λ_{G_0} sur Λ_{G_1} . L'un des buts de notre discussion sera de montrer que l'on peut identifier les espaces $H(\Lambda_0, m)$ et $H(\Lambda_1, m)$ à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique associé à une transformation R-canonique κ ci-dessus.

On commence par une discussion géométrique pour établir l'existence d'une transformation canonique qui convient : Nous avons le résultat local suivant :

Proposition 7.1. Soit $\Lambda_t, t \in [0,1]$ une famille lisse de variétés I-Lagrangiennes et R-symplectiques et soit $v_t \in C^\infty(\Lambda_t; \int T\Lambda_t)$ le représentant "orthogonal" du champ de déplacement, où \int désigne la multiplication des vecteurs tangents par i . Si $\Omega_0 \subset\subset \Lambda_0$ et si $t_0 > 0$ est assez petit, on peut alors définir $\kappa_t : \Omega_0 + \Lambda_t, 0 \leq t \leq t_0$ par intégration de $v_s, 0 \leq s \leq t$, et le résultat est que ces applications sont R-symplectiques.

Démonstration : Rappelons qu'une variété I-Lagrangienne est R-symplectique ssi $\int T\Lambda_t$ est transverse à $T\Lambda_t$ en tout point.

Soit ensuite L_t une famille lisse de variétés Lagrangiennes réelles dans \mathbb{R}^{2n} et soit $v_t \in C^\infty(L_t, N(L_t))$ (section du fibré normal) le champ de déplacement. Alors il existe $p_t \in C^\infty(L_t)$ unique (car nous travaillons localement) à une constante C_t près, tel que $v_t = [H_{p_t}]$, où \tilde{p}_t désigne

une extension C^∞ de p_t et $[\]$ l'image dans le fibré normal d'un vecteur tangent. En effet l'unicité est évidente et pour l'existence on représente Λ_t en coordonnées symplectiques convenables, par $\xi = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}$. On peut alors prendre $\tilde{p}_t(x, \xi) = \tilde{p}_t(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)$.

Revenons maintenant aux Λ_t qui sont à la fois I-Lagrangiennes et R-symplectiques. Soit alors $p_t \in C^\infty(\Lambda_t)$ (défini localement) réel tel que $[v_t] = \left[H_{\tilde{p}_t}^{Im \sigma} \right]$, où \tilde{p}_t est une extension C^∞ de p_t . On choisit $\tilde{p}_t = Re r_t$, où r_t est une extension presque holomorphe de p_t . Soit alors $\tilde{q}_t = Im r_t$ (s'annulant sur Λ). Alors sur Λ_t :

$$(7.1) \quad H_{\tilde{p}_t}^{Im \sigma} = \int H_{\tilde{q}_t}^{Im \sigma} = H_{\tilde{q}_t}^{Re \sigma} \quad (\text{voir [S.1], chapitre 11}) .$$

La première partie de (7.1) montre que $v_t = H_{\tilde{p}_t}^{Im \sigma}$ et la deuxième partie de (7.1) montre alors que les applications κ_t vérifient $\kappa_t^*(Re \sigma|_{\Lambda_t}) = Re \sigma|_{\Lambda_0}$.

■

Soient maintenant G_0, G_1 comme au début de cette section et posons $\Lambda_t = \Lambda_{G_t}$, où $G_t = (1-t)G_0 + tG_1$. Le lemme nous donne alors une transformation R-canonique $\kappa : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$. A l'aide des réductions des échelles on voit bien que κ est de classe $\dot{S}^{1,1}$ ou plus précisément que si $\kappa(y, \eta) = (x, \xi)$, alors $x-y \in S^{0,1}$, $\xi \in S^{1,0}$. Dans le cas $G_0 = g_0, G_1 = g_1$ l'application κ se réduit à κ_0 et donc dans le cas général il est clair que κ est proche de κ_0 . Dans la suite on supposera toujours que les différentes phases et transformations canoniques sont données par des choix automatiques.

Fixons maintenant un triplet $(\Lambda_0, \Lambda_1, \kappa)$ comme ci-dessus. Avec $\beta = \kappa(\alpha)$, on cherche une phase $\varphi(x, y, \alpha)$ quadratique en x, y , définie sur $\mathbb{C}^{2n} \times \Lambda_0$ telle que

$$(7.2) \quad \text{Pour } x = \beta_x, y = \alpha_x, \text{ on a : } \varphi'_x = \beta_\xi, \varphi'_y = -\alpha_\xi, \varphi'_\alpha = 0 ;$$

Après passage à une extension presque holomorphe en α , on peut raisonner (à l'ordre infini pour $\alpha \in \Lambda_0$), comme si φ était holomorphe dans toutes les variables. On peut écrire

$$(7.3) \quad \varphi(x, y, \alpha) = \beta_\xi(x - \beta_x) - \alpha_\xi(y - \alpha_x) + \psi(x, y, \alpha) + h(\alpha) ,$$

où $\psi = \mathcal{O}(|x - \beta_x|^2 + |y - \alpha_x|^2)$. Alors les deux premières équations de (7.2) sont satisfaites et la troisième devient :

$$(7.4) \quad -(\beta_\xi d\beta_x - \alpha_\xi d\alpha_x) \Big|_{\text{graphe } \kappa} + dh = 0 .$$

Puisque Λ_0 et Λ_1 sont I-Lagrangiennes, on sait déjà que $-\text{Im}(\beta_\xi d\beta_x) \Big|_{\Lambda_1} = d_B H_1$, $-\text{Im}(\alpha_\xi d\alpha_x) \Big|_{\Lambda_0} = d_\alpha H_0$, et donc il est clair que l'on doit prendre

$$(7.5) \quad -\text{Im } h = (H_1(\beta) - H_0(\alpha)) \Big|_{\text{graphe}(\kappa)} .$$

La partie réelle de h doit vérifier

$$(7.6) \quad d \text{Re } h = (\text{Re}(\beta_\xi d\beta_x) - \text{Re}(\alpha_\xi d\alpha_x)) \Big|_{\text{graphe } \kappa} ,$$

ce qui est résoluble puisque le second membre est fermé (donc exacte puisque $\text{graphe } \kappa$ est difféomorphe à \mathbb{R}^{2n}), étant donné que κ est \mathbb{R} -canonique.

Nous allons toujours prendre ψ et h de classe $\dot{S}^{1,1}$, avec ψ quadratique en $(x - \beta_x), (y - \alpha_x)$ et tel que

$$(7.7) \quad (\text{Im } \varphi + g_1(x) - g_0(y)) \Big|_{(x,y), (x,y)} \underset{\mathbb{R}}{\sim} .$$

On procède maintenant exactement comme pour les opérateurs pseudodifférentiels : Si $a(x, y, \alpha, h) \in S(m \underset{\mathbb{R}}{\sim} h^{3n/2} \mathbb{R}^{n/2} h^{-3n/2})$ ($\alpha \in \Lambda_0$) est holomorphe en x, y dans une région $|x - \beta_x| + |y - \alpha_x| \leq \text{Const. } R(\alpha_x)$, et $\chi(x, y, \alpha)$ est une troncature naturelle adaptée à une telle région, on définit l'opérateur intégral

de Fourier d'ordre m par l'intégrale oscillante :

$$(7.8) \quad Au(x, h) = \int_{\alpha \in \Lambda_0} e^{i\varphi(x, y, \alpha)/h} a(x, y, \alpha, h) \chi(x, y, \alpha) u(y) \widetilde{d\alpha} .$$

Si T_0, T_1 sont des transformations de F.B.I. associées à Λ_0 et Λ_1 respectivement et si S_0, S_1 sont leurs inverses approchés, on montre comme dans la section 6 à l'aide de la phase stationnaire (d'abord en x, y et puis en $\gamma \in \Lambda_0$), que :

$$(7.9) \quad T_1 A S_0 = \widetilde{A} + \widetilde{A}_{-\infty} ,$$

où $\widetilde{A}_{-\infty}$ est négligeable d'ordre m (c.à.d. $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné $L^2(\Lambda_0, \widetilde{m}) \rightarrow L^2(\Lambda_1, \frac{\widetilde{m}}{h} (\frac{R}{h})^N)$ pour toute fonction d'ordre \widetilde{m} et tout $N \geq 0$), et où \widetilde{A} est un opérateur intégral de noyau

$$(7.10) \quad \widetilde{A}(\alpha, \beta, h) = \widetilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{i\phi(\alpha, \beta)/h} ,$$

où $\widetilde{a}(\alpha, \beta, h) \in S(m h^{-n})$ est à support dans $\{(\alpha, \beta) ; \alpha \in B(\kappa(\beta), \epsilon_0)\}$, pour un $\epsilon_0 > 0$ assez petit et où $\phi \in S^{1,1}$ vérifie

$$(7.11) \quad \begin{aligned} & -H_1(\alpha) - \text{Im } \phi(\alpha, \beta) + H_0(\beta) \\ & \leq -\text{Const.} \left(\frac{\widetilde{r}}{R} |\alpha_x - \kappa(\beta)_x|^2 + \frac{R}{\widetilde{r}} |\alpha_\xi - \kappa(\beta)_\xi|^2 \right) . \end{aligned}$$

Comme dans le cas pseudodifférentiel on peut préciser les propriétés de \widetilde{a} et ϕ . On a :

$$(7.12) \quad \phi(\alpha, \beta) = v.c. \cdot_{x, y, \gamma} \varphi_1(\alpha, x) + \varphi(x, y, \gamma) + \varphi_0^*(y, \beta) ,$$

où φ_1 est la phase associée à T_1 et φ_0^* celle de S_0 .

Deuxièmement, si $Z_1(\alpha, \widetilde{D}_\alpha, h), \dots, Z_n(\alpha, \widetilde{D}_\alpha, h), P(\alpha, \widetilde{D}_\alpha, h)$ et $Z_1^*(\beta, \widetilde{D}_\beta, h), \dots, Z_n^*(\beta, \widetilde{D}_\beta, h), P^*(\beta, \widetilde{D}_\beta, h)$ sont comme dans la section précédente, mais associés respectivement à T_1 et à S_0 , alors ϕ est caractérisée à l'ordre ∞ sur $\alpha = \kappa(\beta)$, par les propriétés :

$$(7.13) \quad \phi = h(\beta) \text{ pour } \alpha = \kappa(\beta) ,$$

$$(7.14) \quad \zeta_j^*(\beta, \frac{\partial \phi}{\partial \beta}) = 0 , \zeta_j(\alpha, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}) = 0 \text{ à l'ordre infini sur } \alpha = \kappa(\beta) .$$

Rajoutant aussi les conditions (6.50)' définis comme (6.50) mais avec les espaces $S_{\Delta}(m h^{-\ell})$ généralisés de manière évidente en $S_{\text{graphe}(\kappa)}(m h^{-\ell})$, on obtient une caractérisation des opérateurs intégraux de Fourier (variables pour $G_j - g_j$ assez petit dans $S(rR) + \dot{S}^{1,1}(R^n)$ et pour κ assez proche de κ_0) :

Théorème 7.2. *Un opérateur A est de la forme : " opérateur intégral de Fourier d'ordre m associé à κ plus un opérateur négligeable d'ordre m entre $H(\Lambda_0, \cdot)$ et $H(\Lambda_1, \cdot)$ " si et seulement si $T_1 A T_0^{-1} = \tilde{A} + \tilde{A}_{-\infty}$, où $\tilde{A}_{-\infty}$ est négligeable d'ordre m, et où \tilde{A} est donné par un noyau $\tilde{A}(\alpha, \beta, h)$ vérifiant (7.10)-(7.14) et (6.50)'.*

La démonstration est la même que dans le cas pseudodifférentiel. A l'aide de cette caractérisation on montre comme dans le cas pseudodifférentiel que :

- 1° Un opérateur intégral de Fourier d'ordre m est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné : $H(\Lambda_0, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_1, \tilde{m}/m)$, pour toute fonction d'ordre \tilde{m} .
- 2° Si A est un OIF d'ordre m associé à $\kappa : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$, et B un OIF d'ordre k associé à la tf. $\gamma : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$, alors modulo un opérateur négligeable d'ordre mk : $H(\Lambda_0, \cdot) \rightarrow H(\Lambda_2, \cdot)$, $B \circ A$ est un OIF d'ordre mk associé à $\gamma \circ \kappa$.
- 3° Si $\Lambda_0 = \Lambda_1$ et $\kappa = \text{id}$, on retrouve les opérateurs pseudodifférentiels.

Soit $\Lambda = \Lambda_G$ avec $G - g(x)$ assez petit dans $S(rR)$. Si m est une fonction d'ordre sur Λ , nous allons construire le projecteur orthogonal Π :

OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER

$L^2(\Lambda, m) \rightarrow TH(\Lambda, m)$ (où T désigne une tf. de F.B.I. adaptée à Λ). Puisque

$$(7.15) \quad T : H(\Lambda, m) \rightarrow L^2(\Lambda, m) ,$$

et une isométrie par la définition même de $H(\Lambda, m)$, on sait que

$$(7.16) \quad \Pi = T T^\bullet ,$$

où $T^\bullet : L^2(\Lambda, m) \rightarrow H(\Lambda, m)$ est l'adjoint de (7.15). Soit T^* l'adjoint standard de T vérifiant $(Tu | w)_{L^2(\Lambda, m)} = (u | T^*w)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$w \in C_0^\infty(\Lambda)$. Alors

$$T^*w(y, h) = \int e^{-i\varphi(\alpha, \bar{y})/h} \overline{t(\alpha, \bar{y}, h)^*} w(\alpha) m(\alpha)^2 e^{-2H(\alpha)/h} d\alpha ,$$

où φ est la phase de T et t son amplitude.

On rappelle de (4.54) que :

$$(7.17) \quad (u | v)_{H(\Lambda, m)} = (Bu | v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} ,$$

où B est un opérateur formellement auto-adjoint pour le produit scalaire L^2 standard, de la forme :

$$(7.18) \quad Bu(x, h) = \iint_{\gamma \in \Lambda} e^{\frac{i}{h} \Phi(x, y, \gamma)} b(x, y, \gamma, h) \chi_\gamma(x) \chi_\gamma(y) u(y) dy \tilde{d}\gamma ,$$

où $b \in S(m^2 \gamma^{3n/2} R^{n/2} h^{-3n/2})$ est holomorphe en x, y et où $\Phi \in S^{1,1}$ est quadratique en x, y et vérifie :

$$(7.19) \quad \text{Pour } \gamma \in \Lambda, \bar{x} = y = \gamma_x, \text{ on a : } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \bar{\gamma}_x, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\gamma_x, d_\gamma \Phi = 0, \\ \Phi = 2i H(\gamma), (\Phi(x, y, \gamma) + g(x) - g(y))_{(x, y), (x, y)} \sim \frac{\gamma}{R} .$$

Donc B est un opérateur intégral de Fourier elliptique d'ordre m^2 associé à la transformation canonique $\Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$ donnée par $(y, \eta) \rightarrow \overline{(y, \eta)}$. Pour h

assez petit on peut donc affirmer que B est bijectif $H(\Lambda, m) \rightarrow H(\bar{\Lambda}, \frac{1}{m})$ et que B^{-1} coïncide modulo un opérateur négligeable d'ordre m^2 avec un OIF de la forme

$$(7.20) \quad \tilde{B}u(x, h) = \iint_{\gamma \in \bar{\Lambda}} e^{\frac{i}{h} \tilde{\phi}(x, y, \gamma)} \tilde{b}(x, y, \gamma, h) \chi_\gamma(x) \chi_\gamma(y) u(y) dy d\tilde{\gamma}$$

où $\tilde{\phi} \in S^{1,1}$, $\tilde{b} \in S(m^{-2} \frac{y^{3n/2}}{r^{3n/2}} \frac{R^{n/2}}{h^{-3n/2}})$ ont les propriétés habituelles et en particulier :

$$(7.21) \quad \text{Pour } \gamma \in \bar{\Lambda}, \bar{x} = y = \gamma_x : \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \bar{x}} = \bar{\gamma}_\xi, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \bar{y}} = -\gamma_\xi, d_\gamma \tilde{\phi} = 0, \\ \tilde{\phi} = -2iH(\bar{\gamma}), (\tilde{\phi} - g(x) + g(y))'' \sim \frac{\tilde{\gamma}}{R}.$$

(On reviendra plus loin sur la dualité entre $H(\Lambda, m)$ et $H(\bar{\Lambda}, 1/m)$ pour le produit scalaire L^2).

On montre par ailleurs que T^* est $\mathcal{O}(1)$ comme opérateur borné $L^2(\Lambda, m) \rightarrow H(\bar{\Lambda}, m)$. On peut alors calculer T^{\odot} ; pour $u \in H(\Lambda, m)$, $v \in L^2(\Lambda, m)$, on a :

$$(u | T^{\odot} v)_{H(\Lambda, m)} = (T u | v)_{L^2(\Lambda, m)} = (u | T^* v)_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

c.à.d.

$$(B u | T^{\odot} v)_{L^2} = (u | T^* v)_{L^2},$$

$$(7.22) \quad T^{\odot} = B^{-1} T^*,$$

et donc

$$(7.23) \quad \Pi = T B^{-1} T^* = T \tilde{B} T^* + \Pi_{-\infty},$$

où $\Pi_{-\infty}$ est L^2 -négligeable d'ordre 0. L'opérateur $T \tilde{B} T^*$ s'analyse à l'aide de la phase stationnaire et on trouve (avec un nouvel opérateur $\Pi_{-\infty}$ et pour

OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER

le formalisme simplifié où on considère T comme un opérateur scalaire) :

$\Pi = \tilde{\Pi} + \Pi_{-\infty}$, où $\tilde{\Pi}$ est un opérateur intégral de noyau :

$$(7.24) \quad \tilde{\Pi}(\alpha, \beta, h) = p(\alpha, \beta, h) e^{\frac{i}{h} \psi(\alpha, \beta)}$$

(pour la densité $m^2 e^{-2H/h} d\alpha$).

Ici,

$$(7.25) \quad \psi(\alpha, \beta) = \text{v.c.}_{(x, y, \gamma)} (\varphi(\alpha, x) + \tilde{\varphi}(x, y, \gamma) - \overline{\varphi(\beta, \bar{y})})$$

vérifie :

$$(7.26) \quad -\text{Im} \psi(\alpha, \beta) - H(\alpha) - H(\beta) \sim -\text{const.} \left[\frac{\tilde{r}}{R} |\alpha_x - \beta_x|^2 + \frac{R}{\tilde{r}} |\alpha_\xi - \beta_\xi|^2 \right],$$

$$(7.27) \quad \overline{\psi(\alpha, \beta)} = -\psi(\beta, \alpha),$$

et $p \in S(m^{-2} h^{-n})$ est à support dans $\alpha \in B(\beta, \epsilon_0)$ et vérifie :

$$(7.28) \quad \overline{p(\alpha, \beta, h)} = p(\beta, \alpha, h).$$

Si Z_1, \dots, Z_n sont des opérateurs pseudodifférentiels associés à T (on présente le formalisme simplifié comme si T était scalaire) et si l'on définit $Z_j^*(\alpha, \alpha^*, h) = \overline{Z_j(\alpha, -\alpha^*, h)}$, alors

$$(7.29) \quad Z_j(\alpha, \tilde{D}_\alpha, h) (p e^{i\psi/h}) = Z_j^*(\beta, \tilde{D}_\beta, h) (p e^{i\psi/h}) = 0 \text{ dans } e^{i\psi/h} S_\Delta(m^{-2} h^{-n}).$$

On rappelle que ces relations déterminent p et ψ à l'ordre infini sur $\alpha = \beta$ (au sens convenable) si l'on connaît p et ψ sur $\alpha \neq \beta$.

Si A est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m_A , alors par la phase stationnaire et en utilisant les résultats de la section 6, on trouve que l'opérateur "de Toeplitz" $\Gamma A T^{-1} \Pi = \Pi T A T^{-1} \Pi = T A T^{\otimes}$ est donné, modulo

un opérateur L^2 -négligeable d'ordre m_A , par un noyau $\tilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{\frac{i}{h}\psi(\alpha, \beta)}$ (relativement à la mesure $m^2 e^{-2H/h}$) où $\tilde{a} \in S(m_A m^{-2} h^{-n})$ est à support près de la diagonale au sens habituel et vérifie (7.29) (avec p remplacé par \tilde{a} et m^{-2} par $m_A m^{-2}$). Si l'on considère d'autre part les opérateurs $\Pi b \Pi$, où b désigne (multiplication par) un symbole d'ordre m_A , on trouve la même classe d'opérateurs :

Proposition 7.3. Les classes $\{\Pi b \Pi; b \in S(\tilde{m})\}$ et $\{T A T^{-1} \Pi; A \text{ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre } \tilde{m}\}$ et $\{\text{les opérateurs de noyau } \tilde{a}(\alpha, \beta, h) e^{i\psi/h} \text{ avec les propriétés ci-dessus}\}$, coïncident modulo des opérateurs négligeables d'ordre \tilde{m} .

On obtient alors comme corollaire :

Proposition 7.4. Soit A un opérateur pseudodifférentiel d'ordre \tilde{m} associé à Λ . Alors l'adjoint A^* de A pour le produit scalaire de $H(\Lambda, m)$ est aussi (modulo un opérateur négligeable d'ordre \tilde{m}) un opérateur pseudodifférentiel d'ordre \tilde{m} . Nous avons la relation $\sigma_{A^*} = \overline{\sigma_A}$ entre les symboles principaux.

Démonstration : On a

$$(Au|v)_{H(\Lambda, m)} = (T A T^{-1} \Pi Tu|Tv)_{L^2(\Lambda, m)} = (\Pi b \Pi Tu|Tv)_{L^2(\Lambda, m)} + (R_{-\infty} Tu|Tv)_{L^2(\Lambda, m)},$$

où $R_{-\infty}$ est L^2 -négligeable d'ordre \tilde{m} . Alors $R_{-\infty}^*$ est aussi L^2 -négligeable d'ordre \tilde{m} et on obtient :

$$(Au|v)_{H(\Lambda, m)} = (Tu|\Pi \overline{b} \Pi Tv)_{L^2(\Lambda, m)} + (Tu|R_{-\infty}^* Tv)_{L^2(\Lambda, m)}.$$

Soit B un opérateur pseudodifférentiel d'ordre \tilde{m} tel que $T B T^{-1} = \Pi \overline{b} \Pi - K_{-\infty}$ où $K_{-\infty}$ est L^2 -négligeable d'ordre \tilde{m} . Alors

OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER

$$\begin{aligned} (Au|v)_{H(\Lambda, m)} &= (Tu|TBT^{\odot}Tv)_{L^2(\Lambda, m)} + (Tu|(K_{-\infty} + R_{-\infty}^*)Tv)_{L^2(\Lambda, m)} \\ &= (u|Bv)_{H(\Lambda, m)} + (u|T^{\odot}(K_{-\infty} + R_{-\infty}^*)Tv)_{H(\Lambda, m)}. \end{aligned}$$

Donc

$$A^* = B + T^{\odot}(K_{-\infty} + R_{-\infty}^*)T,$$

et ici le dernier terme est négligeable d'ordre \tilde{m} . On obtient facilement la relation entre les symboles principaux. ■

On finit cette section en précisant une partie de la démonstration précédente dans le cas où Λ dépend d'un paramètre réel : $t \in [0, 1]$. Supposons que $\Lambda = \Lambda_t$ soit donnée par $G(t, x, \xi)$, où $G(0, x, \xi) = 0$ et $\frac{\partial G}{\partial t}$ est continue et bornée dans $S(rR) + \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Toute la discussion qui suit est valable pour t dans un voisinage de 0 (indépendant de h et des choix de fonctions d'ordre). Soit $F_t : H(\Lambda_t, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_0, \tilde{m})$ une famille d'opérateurs intégraux de Fourier elliptiques d'ordre $1 = r^0 R^0$ du type précédent, avec $F_0 = \text{id}$ et de phase $\phi_t(x, y, \alpha)$ (indexée par $\alpha \in \Lambda_0$ plutôt que par $\alpha \in \Lambda_t$) telle que $\partial \phi_t / \partial t$ soit continue et uniformément bornée dans $\dot{S}^{1,1}$. Si $a_t(x, y, \alpha, h)$ est l'amplitude de F_t , on suppose aussi que $\partial a_t / \partial t$ soit continue et uniformément borné dans $S(\tilde{r}^{3n/2} R^{n/2} h^{-3n/2})$. On fait aussi une hypothèse d'ellipticité uniforme qui entraîne que F_t est uniformément inversible pour h assez petit (en fonction de \tilde{m}). L'inverse $G_t : H(\Lambda_0, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m})$ est alors un opérateur intégral de Fourier d'ordre 1 modulo un opérateur négligeable d'ordre 1.

Etudions ensuite la dérivabilité de F_t et de G_t par rapport à t . Puisque F_t est proprement supporté on montre que $t \rightarrow F_t$ est continu à valeur dans $\mathcal{L}(H_{1\text{loc}}^{\tilde{N}}, H_{1\text{loc}}^{\tilde{N}})$ pour tout \tilde{N} et que la même fonction est de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{L}(H_{1\text{loc}}^{\tilde{N}}, H_{1\text{loc}}^{\tilde{N}-1})$. Ici $H_{1\text{loc}}^{\tilde{N}}$ désigne l'espace de Sobolev

standard sur \mathbb{R}^n . De plus, la dérivée \dot{F}_t est un O.I.F. d'ordre $\frac{\tilde{r}R}{h}$.

Soit G_t^0 un O.I.F. d'ordre 1, proprement supporté associé à la même tf. canonique que G_t avec une phase et une amplitude ayant les mêmes propriétés de dérivabilité par rapport à t que ceux de F_t , et tel que $F_t G_t^0 = I + K_t$, où K_t est un opérateur pseudodifférentiel (+ négligeable) d'ordre $\frac{h}{\tilde{r}R}$. Alors \dot{G}_t^0 est bien défini au même sens que \dot{F}_t donc aussi \dot{K}_t et on a $\dot{K}_t = \dot{F}_t G_t^0 + F_t \dot{G}_t^0$. Donc \dot{K}_t est un opérateur ψ -diff. (+ négligeable) d'ordre $\tilde{r}R/h$ (et même très certainement d'ordre $h/\tilde{r}R$). On en déduit par un argument de densité que $t \rightarrow K_t$ est de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{L}(H(\Lambda_0, \tilde{m}), H(\Lambda_0, \tilde{m} \tilde{r}R/h))$. On montre ensuite que pour tout $k \in \mathbb{N}$, K_t^k est de classe C^1 à valeurs dans le même espace et que

$$(\dot{K}_t^k)^\circ = \dot{K}_t K_t^{n-1} + K_t \dot{K}_t K_t^{n-2} + \dots + K_t^{n-1} \dot{K}_t.$$

La norme de cet opérateur se majore par $k C_0^k h^{k-1}$ où C_0 dépend de \tilde{m} . Alors pour h assez petit, $(I + K_t)^{-1} = I - K_t + K_t^2 - \dots$ est de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{L}(H(\Lambda_0, \tilde{m}), H(\Lambda_0, \tilde{m} \tilde{r}R/h))$. Puisque $G_t = G_t^0 (I + K_t)^{-1}$, on en déduit que G_t est de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{L}(H(\Lambda_0, \tilde{m}), H_{10c}^{N-1})$ si $\tilde{m} = \tilde{m}_0(x) (\tilde{r}/r)^N$, $N \in \mathbb{N}$. On peut ensuite dériver la relation $F_t G_t = I$ pour trouver $\dot{G}_t = -G_t \dot{F}_t G_t$.

Soit P un opérateur différentiel du type (6.51) et avec les propriétés générales décrites après cette équation. On suppose qu'il existe un voisinage W de K tel que $G(t, x, \xi) = 0$ pour $x \in W$. On peut alors représenter P comme opérateur pseudodifférentiel (+ négligeable) d'ordre $m = m_0(x) (\tilde{r}/r)^{N_0} : H(\Lambda_t, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m}/m)$, $0 \leq t \leq \epsilon_0$, et pour $h > 0$ assez petit il existe un opérateur P_t pseudodifférentiel (+ négligeable) d'ordre m , tel que :

OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER

$$(7.30) \quad P_t F_t = F_t P, \quad P_t = F_t P G_t : H(\Lambda_0, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_0, \tilde{m}/m).$$

La discussion sur F_t et G_t montre d'abord que P_t est de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{L}(H(\Lambda_0, \tilde{m}), H_{loc}^{\tilde{N}-N_0-1})$ et que :

$$(7.31) \quad \dot{P}_t = (\dot{F}_t P - P_t \dot{F}_t) G_t.$$

Ici on rappelle que \dot{F}_t est un O.I.F. d'ordre $\tilde{r}R/h$ et donc a priori \dot{P}_t est un opérateur pseudodifférentiel (+ négligeable) d'ordre $m \tilde{r}R/h$. Vu le lien entre les symboles principaux de P et de P_t , imposé par la relation (7.30), on constate néanmoins que $\dot{F}_t P - P_t \dot{F}_t$ et donc \dot{P}_t est d'ordre m . Ensuite, par un argument de densité, on constate que P_t est de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{L}(H(\Lambda_0, \tilde{m}), H(\Lambda_0, \tilde{m}/m))$, pour toute fonction d'ordre \tilde{m} .

Soit T_0 une transformation FBI adaptée à Λ_0 . Alors pour $v, u \in H(\Lambda_0, m^{1/2})$:

$$(7.32) \quad (\dot{P}_t u | v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \dot{p}_t(T_0 u)(T_0 v)^* a_0 d\alpha + (\dot{R}_t u | v)_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où $a_0 > 0$ est elliptique d'ordre 1, \dot{p}_t est uniformément borné dans $S(m)$ et \dot{R}_t est uniformément négligeable d'ordre m . On a le même résultat pour P_t à la place de \dot{P}_t et si p_t et R_t sont les objets correspondants, on peut s'arranger pour que $\frac{d}{dt} P_t = \dot{P}_t$, $\frac{d}{dt} R_t = \dot{R}_t$.

Supposons maintenant en plus que P soit formellement auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et définissons une norme sur $H(\Lambda_t, 1)$ par $\|F_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Cette norme est équivalente à toute norme naturelle sur $H(\Lambda_t, 1)$. Considérons pour $u \in H(\Lambda_t, m^{1/2})$:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Im}(Pu|u)_{H(\Lambda_t, 1)} = \operatorname{Im}(F_t P u | F_t u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
 (7.33) \quad & = \left(\frac{1}{2i} (P_t - P_t^*) F_t u | F_t u \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
 & = \int \operatorname{Im} p_t \cdot |T_0 F_t u|^2 a_0 \, d\alpha + \left(\frac{1}{2i} (R_t - R_t^*) F_t u | F_t u \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} .
 \end{aligned}$$

Puisque $P = P_0$ est formellement auto-adjoint, on peut s'arranger pour que $\operatorname{Im} p_0 = 0$, et alors automatiquement $R_0 = R_0^*$. Avec $-q_t = \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Im} \dot{p}_s \, ds$, $-\tilde{R}_t = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2i} (\dot{R}_s - \dot{R}_s^*) \, ds$, on obtient alors :

$$(7.34) \quad - \operatorname{Im}(Pu|u)_{H(\Lambda_t, 1)} = t [u|u]_t ,$$

où

$$(7.35) \quad [u|u]_t = \int q_t |T_0 F_t u|^2 a_0 \, d\alpha + (\tilde{R}_t F_t u | F_t u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Ici q_t est réel et uniformément borné dans $S(m)$ pendant que \tilde{R}_t est uniformément négligeable d'ordre m . Dans (7.35) on doit considérer $T_0 F_t$ comme une transformation de F.B.I. associée à Λ_t .

RÉSONANCES

8. RESONANCES.

Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ un potentiel tel qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que V admet une extension holomorphe dans :

$$(8.1) \quad |\operatorname{Im} x| < \frac{1}{C_0} R(\operatorname{Re} x) \quad , \quad \operatorname{Re} x \in \mathbb{R}^n \setminus K \quad ,$$

et y vérifie :

$$(8.2) \quad |V(x)| \leq C_0 r(x)^2 \quad (r(x) = r(\operatorname{Re} x)) \quad .$$

Ici $C_0 > 0$ est une constante positive. On s'intéresse à

$$(8.3) \quad P = -h^2 \Delta + V(x)$$

de symbole principal $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$ et, par les inégalités de Cauchy, on déduit de (8.1) et (8.2) que :

$$(8.4) \quad p \in S^{2,0}$$

et ceci reste vrai pour x dans un domaine de la forme (8.1) (si l'on augmente K et C_0).

Il se trouve que notre théorie s'applique aussi à des opérateurs un peu plus généraux de la forme

$$(8.5) \quad P = \sum_{\substack{|\alpha| \leq N_0 \\ k \in \mathbb{N}, k \leq k_0}} h^k a_{\alpha, k}(x) (D)^{\tilde{\alpha}} \quad , \quad a_{\alpha, k} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad .$$

On suppose alors :

$$(8.6) \quad P \text{ est formellement auto-adjoint .}$$

(8.7) Il existe $C_0 > 0$ et un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tels que les $a_{\alpha,k}$ s'étendent holomorphiquement au domaine (8.1) et y vérifient : $|a_{\alpha,k}(x)| \leq C_0 m_0(x) r(x)^{-|\alpha|} (r(x) R(x))^{-k}$.

Ici m_0 est une fonction d'ordre sur \mathbb{R}^n vérifiant :

$$(8.8) \quad m_0(x) \geq 1 .$$

On fait l'hypothèse d'ellipticité :

$$(8.9) \quad p_{\text{Class}}(x, \xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|\alpha|=N_0} a_{\alpha,0}(x) \xi^\alpha \geq \frac{1}{C_0} m_0(x) (|\xi|/r)^{N_0}$$

valable pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on définit le symbole principal :

$$(8.10) \quad p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N_0} a_{\alpha,0}(x) \xi^\alpha ,$$

et on déduit de (8.7) et des inégalités de Cauchy que :

$$(8.11) \quad p \in S(m) , \text{ où } m(x, \xi) = m_0(x) (\tilde{r}/r)^{N_0} .$$

Cette conclusion reste valable (au sens naturel) dans un domaine de la forme (8.1) (avec K et C_0 légèrement augmentés).

Soit $\Sigma_p = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}; p(x, \xi) = 0\}$ et remarquons que :

$$(8.12) \quad |\xi| \leq \text{const. } r(x) \text{ sur } \Sigma_p .$$

On fait ensuite une hypothèse de "non-trapping" près de l'infini :

$$(8.13) \quad \text{Il existe une fonction réelle } G(x, \xi) \in S^{1,1}(\mathbb{R}^{2n}) \text{ et } C_0 > 0 \text{ et } K \subset \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ tels que } H_p(G) \geq \frac{1}{C_0} m_0 \text{ sur } \Sigma_p \setminus K .$$

On appellera alors G une fonction fuite. On remarque ici que si $p_1 \in S(m_1)$, $p_2 \in S(m_2)$, alors $H_{p_1}(p_2) \in S(m_1 m_2 / \tilde{r} R)$; on a donc aussi une majoration

RÉSONANCES

$H_p(G) \leq C_0 m_0$ sur Σ_p . L'hypothèse (8.13) entraîne :

(8.14) Avec une nouvelle constante $C_0 > 0$, on a sur $\Sigma_p \setminus K$:

$$\gamma \left| \frac{\partial p}{\partial \xi} \right| + R \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \geq m_0 / C_0.$$

Cette propriété exprime en quelque sorte que p est de type principal à l'infini. On fait aussi une hypothèse sur le comportement de p "loin" de Σ_p :

(8.15) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \epsilon_0 > 0 \text{ il existe une constante } C_0 > 0 \\ \text{telle que si } (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } B((x, \xi), \epsilon_0) \cap \Sigma_p = \emptyset \\ \text{alors } |p(x, \xi)| \geq \frac{1}{C_0} m(x, \xi), \text{ où } m(x, \xi) = m_0(x) (\gamma^2/r)^{N_0}. \end{array} \right.$

Sans modifier G dans un voisinage de Σ_p on peut remplacer G par

$$\begin{aligned} &G(x, \xi) \chi(|\xi| / C_0 r(x)) + G(x, 0) (1 - \chi(|\xi| / C_0 r(x))) \\ &= \chi(|\xi| / C_0 r(x)) (G(x, \xi) - G(x, 0)) + G(x, 0) \end{aligned}$$

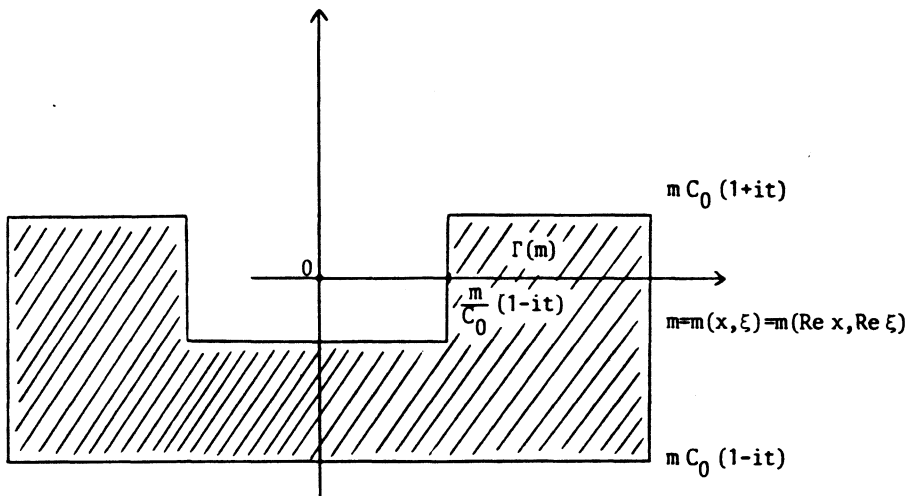
où χ est une troncature standard. Alors la nouvelle fonction G appartient à $S^{1,1}(\mathbb{R}^n) + S(rR)$.

Considérons maintenant les variétés I-Lagrangiennes $\Lambda_t = \Lambda_t G$ où G est une fonction de fuite (modifiée) et $t \geq 0$ est assez petit. Si on suppose que $G=0$ (ou $G=g(x)$) pour x dans un compact assez grand, alors il est facile de voir que Λ_t est contenue dans le domaine de définition de p et même de $P(x, \xi, h)$. Pour $(x, \xi) \in \Lambda_t$ on obtient

$$(8.16) \quad p(x, \xi) = p(\operatorname{Re} x, \operatorname{Re} \xi) - i t H_p(G)(\operatorname{Re} x, \operatorname{Re} \xi) + \mathcal{O}(t^2 m).$$

Proposition 8.1. Soit G une fonction fuite comme ci-dessus. Alors il existe un compact $K \subset \subset \mathbb{R}^{2n}$ et des constantes $t_0 > 0$, $C_0 > 0$ telles que pour $0 < t \leq t_0$, $(x, \xi) \in \Lambda_t$, $\operatorname{Re}(x, \xi) \notin K$ on ait $p(x, \xi)$ dans l'ensemble

fermé symétrique autour de l'axe imaginaire :



Démonstration : Il est clair d'abord simplement par (8.16) et du fait que p et G sont réels de classe $S(m)$ et $\dot{S}^{1,1}$ respectivement que l'on a $|\operatorname{Re} p(x, \xi)| \leq m C_0$ et $|\operatorname{Im} p(x, \xi)| \leq m C_0 t$. Si $\operatorname{Re}(x, \xi) \in B((x_0, \xi_0), \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0 > 0$ assez petit et $(x_0, \xi_0) \in \Sigma_p \setminus K$, nous avons d'après (8.13) et (8.16) : $\operatorname{Im} p(x, \xi) \leq -m t / C_0$. Si $\operatorname{Re}(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus K$ n'est dans aucune boîte de ce type, (8.15) et (8.16) montrent d'autre part que $|\operatorname{Re} p(x, \xi)| \geq m / C_0$. ■

Avec C_0 comme dans la Proposition 8.1, on choisit $C_1 > C_0$, $T_0 > 1$ et on définit $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re} z| < 1/C_1, -t/C_1 < \operatorname{Im} z < T_0\}$. Puisque $m \geq 1$ il est clair que la distance entre Ω_t et l'ensemble dessiné dans la Proposition 8.1 : $\Gamma(m)$ est plus grande ou égale à une constante fois mt . On a donc :

Proposition 8.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 8.1, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour $0 < t \leq t_0$, $(x, \xi) \in \Lambda_t$, $\operatorname{Re}(x, \xi) \notin K$, $z \in \Omega_t$:*

$$(8.17) \quad |p(x, \xi) - z| \geq t m(x, \xi) / C_2 .$$

RÉSONANCES

Ici $m(x, \xi) = m(\operatorname{Re} x, \operatorname{Re} \xi)$ et t_0, K sont comme dans la Proposition 8.1.

Pour $0 < t \leq t_0$ fixé, (8.17) exprime que $p|_{\Lambda_t} - z \in S(m)$ est elliptique à l'infini et donc que son inverse peut être défini sur Λ_t en dehors d'un compact et que cet inverse est de classe $S(m^{-1})$.

Théorème 8.3. Soient $P, \Lambda_t = \Lambda_t G, \Omega_t$ comme ci-dessus. Il existe alors $t_1 > 0$ tel que si $0 < t \leq t_1$ et si \tilde{m} est une fonction d'ordre sur Λ_t alors il existe $h_0 > 0$ tel que pour $0 < h \leq h_0$ on ait : il existe un ensemble discret $\Gamma(h) = \Gamma(h, t, \tilde{m}) \subset \Omega_t$ tel que $(P-z) : H(\Lambda_t, m \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m})$ soit bijectif d'inverse borné pour $z \in \Omega_t \setminus \Gamma(h)$, pendant que pour $z \in \Gamma(h)$ cet opérateur soit Fredholm d'indice 0 se décomposant en somme directe : $F_z \oplus (G_z \cap H(\Lambda_t, m \tilde{m})) \rightarrow F_z \oplus G_z$, où $F_z \neq 0$ est de dimension finie $N_0(z)$, G_z fermé, $(P-z)|_{F_z}$ est nilpotent et $(P-z) : G_z \cap H(\Lambda_t, m \tilde{m}) \rightarrow G_z$ est bijectif d'inverse borné.

Démonstration : On fixe des choix automatiques de phases et de troncatures pour les opérateurs pseudodifférentiels associés aux Λ_t et on fixe $t_1 > 0$ assez petit pour que les résultats sur les opérateurs pseudodifférentiels de la section 6 soient valables pour Λ_t avec $0 \leq t \leq t_1$. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Alors si $t_1 > 0$ est assez petit, $0 < t \leq t_1$, $z \in \Omega_t \cap \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq \varepsilon_0\}$, il est clair que $(p|_{\Lambda_t} - z)^{-1}$ est bien défini partout sur Λ_t et pas seulement dans un voisinage de l'infini. On a alors $(p|_{\Lambda_t} - z)^{-1} \in S(m^{-1})$. Soit $Q(\Lambda_t, z) = \operatorname{Op}_{\Lambda_t}((p-z)^{-1})$ un opérateur pseudodifférentiel correspondant (dépendant de manière holomorphe de z). Alors

$$(8.18) \quad (P-z) \circ Q(z) = I + R_{-1}(z) \quad ,$$

où R_{-1} est la somme d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $\frac{h}{\Gamma R}$ (attaché à Λ_t) et d'un opérateur négligeable d'ordre $\frac{h}{\Gamma R}$. En particulier

$R_{-1}(z)$ est de norme $\mathcal{O}(h)$ dans $H(\Lambda_t, \tilde{m})$. On a aussi

$$(8.19) \quad Q(z) \circ (P-z) = I + L_{-1}(z) ,$$

où $L_{-1}(z)$ a les mêmes propriétés, et en particulier $L_{-1}(z)$ est de norme $\mathcal{O}(h)$ dans $H(\Lambda_t, \tilde{m})$. Pour h assez petit on peut donc affirmer que $(P-z) : H(\Lambda_t, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m})$ est bijectif avec un inverse uniformément borné quand $z \in \Omega_t \cap \{\text{Im } z \geq \varepsilon_0\}$.

Regardons ensuite ce qui se passe dans la partie inférieure de Ω_t . Soit $K \subset \Lambda_t$ un compact assez grand et $\chi \in C_0^\infty(\Lambda_t)$ égale à 1 sur K . Alors $(p-z)^{-1}(1-\chi)$ est bien défini de classe $S(m^{-1})$ pour $z \in \Omega_t$. Soit z_0 un point fixé dans $\Omega_t \cap \{\text{Im } z \geq \varepsilon_0\}$. Pour $z \in \Omega_t$ on pose

$$(8.20) \quad \tilde{Q}(z) = \text{Op}_{\Lambda_t}((p-z_0)^{-1}\chi + (p-z)^{-1}(1-\chi)) ,$$

de telle manière que $\tilde{Q}(z)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m^{-1} dépendant holomorphiquement de z et avec $\tilde{Q}(z_0) = Q(z_0)$. Alors

$$(8.21) \quad (P-z) \circ \tilde{Q}(z) = I + K(z) + \tilde{R}_{-1}(z) ,$$

où $\tilde{R}_{-1}(z)$ a les mêmes propriétés que $R_{-1}(z)$, $K = \text{Op}_{\Lambda_t}(k)$ avec $k = \left(\frac{p-z}{p-z_0} - 1\right)\chi \in S^{0,0,0}$ à support compact. De plus K et \tilde{R}_{-1} dépendent holomorphiquement de z et $K(z_0) = 0$, $\tilde{R}_{-1}(z_0) = R_{-1}(z_0)$. De même

$$(8.22) \quad \tilde{Q}(z) \circ (P-z) = I + K'(z) + \tilde{L}_{-1}(z) ,$$

où (K', \tilde{L}_{-1}) a les mêmes propriétés que (K, \tilde{R}_{-1}) .

Pour h assez petit on sait donc que $I + \tilde{R}_{-1}(z) : H(\Lambda_t, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m})$ et $I + \tilde{L}_{-1}(z) : H(\Lambda_t, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m})$ sont uniformément inversibles pour $z \in \Omega_t$. De plus K et K' sont $\mathcal{O}(1)$ et compacts dans ces espaces. On écrit $I + K + \tilde{R}_{-1} = (I + \tilde{R}_{-1})(I + (I + \tilde{R}_{-1})^{-1}K)$, et de même pour $I + K' + \tilde{L}_{-1}$, on

RÉSONANCES

obtient par la théorie de Fredholm classique pour $I + (I + \tilde{R}_{-1})^{-1} K$ et $I + (I + \tilde{L}_{-1})^{-1} K'$, que $(P-z) : H(\Lambda_t, \tilde{m}) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{m})$ est bijectif pour $z \in \Omega_t \setminus \Gamma(h)$, où $\Gamma(h)$ est discret et que $P-z$ est Fredholm d'indice 0 pour $z \in \Gamma(h)$. Les résultats classiques de l'Appendice A permettent alors de conclure. ■

Nous allons maintenant préciser dans quel sens $\Gamma(h, t, \tilde{m})$ est indépendant du choix de G, \tilde{m} et t . Changer t revient à changer G donc il suffira de faire varier G et \tilde{m} . L'indépendance de \tilde{m} est la plus simple :

Proposition 8.4. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 8.3, soit \hat{m} une deuxième fonction d'ordre sur Λ_t . Alors pour $h > 0$ assez petit on a $\Gamma(h, t, \tilde{m}) = \Gamma(h, t, \hat{m})$ et de plus les ensembles $F_z(\tilde{m})$ et $F_z(\hat{m})$ coïncident pour tout $z \in \Gamma(h, t, \tilde{m})$.*

Démonstration : Pour $h > 0$ assez petit, on a, pour tout $z \in \Omega_t$:

$$I = -(I + \tilde{L}_{-1})^{-1} \tilde{Q} (P-z) - (I + \tilde{L}_{-1})^{-1} K'$$

où $(I + \tilde{L}_{-1})^{-1}$ est bien défini et borné à la fois dans $H(\Lambda_t, \hat{m})$ et $H(\Lambda_t, \tilde{m})$. De plus K' est $\mathcal{O}(1)$ dans $\mathcal{L}(H(\Lambda_t, \tilde{m}), H(\Lambda_t, \hat{m}))$. On obtient alors l'énoncé :

- (*) Pour h assez petit, si $z \in \Omega_t$ et si $u \in H(\Lambda_t, \tilde{m})$,
 $(P-z)u \in H(\Lambda_t, \hat{m})$, alors $u \in H(\Lambda_t, \hat{m})$.

On en déduit que si h est assez petit, alors pour tout $z \in \Omega_t : F_z(\tilde{m}) \subseteq F_z(\hat{m})$, en convenant que $F_z(\tilde{m}) = 0$ si $z \notin \Gamma(h, t, \tilde{m})$. Donc on a aussi $\Gamma(h, t, \tilde{m}) \subseteq \Gamma(h, t, \hat{m})$. On obtient de même les inclusions opposées. ■

Regardons ensuite l'effet d'une modification de la fonction fuite.

Soit donc \tilde{G} une deuxième fonction fuite. Alors $G_s = (1-s)G + s\tilde{G}$ est une

fonction fuite pour $s \in [0,1]$ et on pose $\Lambda_{t,s} = \Lambda_t G_s$. Il est alors clair que l'on peut trouver $t_0 > 0$, $C_0 > 0$ et un compact $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ tels que la conclusion de la Proposition 8.1 soit valable pour $0 < t \leq t_0$, $(x, \xi) \in \Lambda_{t,s}$, $0 \leq s \leq 1$, $\text{Re}(x, \xi) \notin K$. Avec cette nouvelle constante $C_0 > 0$ on fixe $C_1 > C_0$ et on définit Ω_t comme ci-dessus.

Théorème 8.5. Soient $P, \Lambda_t, \Lambda_{t,s}, \Omega_t$ comme ci-dessus et posons $\tilde{\Lambda}_t = \Lambda_{t,1} = \Lambda_t \tilde{G}$. Il existe alors $t_1 > 0$ tel que si $0 < t \leq t_1$ et si \tilde{m} est une fonction d'ordre (définie simultanément sur $\Lambda_{t,s}$), alors il existe $h_0 > 0$ tel que pour $0 < h \leq h_0$ on ait $\Gamma(h, t, \tilde{m}, G) = \Gamma(h, t, \tilde{m}, \tilde{G})$. (Ici le dernier argument G et \tilde{G} respectivement indique que Γ est défini comme dans le Théorème 8.3 avec $\Lambda_{t,G}$ et $\Lambda_{t,\tilde{G}}$ respectivement). De plus les espaces F_z correspondants coïncident pour $z \in \Gamma(h, t, \tilde{m}, G) = \Gamma(h, t, \tilde{m}, \tilde{G})$.

Démonstration : Il suffit de montrer l'énoncé suivant (ainsi que son image par permutation de G et \tilde{G}) :

$$(8.23) \quad \text{Il existe } t_1 > 0 \text{ tel que si } 0 < t \leq t_1 \text{ et si } h \leq h_0 \text{ où } h_0 = h_0(t) \text{ est assez petit, alors, si } u \in H(\Lambda_{t,\tilde{m}}, \tilde{m}), z \in \Omega_t \text{ et } (P-z)u \in \bigcap_{0 \leq s \leq 1} H(\Lambda_{t,s}, \tilde{m}), \text{ alors } u \in \bigcap_{0 \leq s \leq 1} H(\Lambda_{t,s}, \tilde{m}m).$$

Pour montrer (8.23), on choisit $t \leq t_1$ et $h \leq h_0$ assez petits pour que le calcul pseudodifférentiel soit valable. Soit $s_0 \in [0,1[$ tel que $u \in H(\Lambda_{t,s_0}, \tilde{m}m)$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ petit et $s \in]s_0, s_0 + \varepsilon_0]$. On applique la Proposition 1.7 avec $f = G_{s_0}$, $g = G_s$. Si $\Lambda(\lambda) = \Lambda_t f_\lambda$ où f_λ est donné par cette Proposition, alors $u \in H(\Lambda(\lambda), \tilde{m}m)$, $(P-z)u \in H(\Lambda(\lambda), m)$ pour $\lambda \in [1, +\infty[$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \| (P-z)u \|_{H(\Lambda(\lambda), m)} < +\infty$. Si $\varepsilon_0 > 0$ est petit alors les variétés $\Lambda(\lambda)$ sont uniformément très proches de Λ_{t,s_0} et $(P-z)|_{\Lambda(\lambda)}$ est alors elliptique à l'infini de manière uniforme. Comme dans la démonstration du Théorème 8.3 on peut alors obtenir une inégalité a priori :

RÉSONANCES

$$(8.24) \quad \|u\|_{H(\Lambda(\lambda), \tilde{m}, m)} \leq C \left(\| (P-z)u \|_{H(\Lambda(\lambda), \tilde{m}, m)} + \| K(\lambda)u \|_{H(\Lambda(\lambda), \tilde{m}, m)} \right),$$

où $K(\lambda) = Op_{\Lambda(\lambda)}(k(\lambda))$ avec $k(\lambda) \in S^{0,0,0}$ uniformément borné et uniformément à support compact. La constante C dépend de t , mais pas de h , s_0 et surtout pas de λ . Il est alors clair que $\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \|K(\lambda)u\|_{H(\Lambda(\lambda), \tilde{m}, m)} < \infty$, donc $\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \|u\|_{H(\Lambda(\lambda), \tilde{m}, m)} < \infty$ et on en déduit que $u \in H(\Lambda_{t,s}, \tilde{m}, m)$. Dans cet argument $\varepsilon_0 > 0$ est petit mais indépendant de s_0 et on arrive donc à couvrir $[0,1]$ en un nombre fini de pas. ■

Les éléments de $\Gamma(h) = \Gamma(h, t, \tilde{m}, G)$ seront appelés des résonances.

On se propose maintenant de montrer qu'il n'y a pas de résonances avec $\text{Im } z > 0$, et pour cela on va utiliser la discussion de la fin de la section 7, avec $\Lambda_t = \Lambda_{t,G}$, G fonction fuite. Notre point de départ sera les identités (7.34), (7.35) valables pour $u \in H(\Lambda_t, m^{1/2})$. Ici $q_t a_0$ est uniformément dans $S(m)$ et puisque G est une fonction fuite on sait aussi que $q_t a_0$ est elliptique > 0 sur un voisinage "convenable" V de $\Sigma_p \setminus K$, où K est compact. Plus précisément $V = \bigcup_{(x_0, \xi_0) \in \Sigma_p \setminus K} B((x_0, \xi_0), \varepsilon_0)$. Pour $\text{Im } z \geq 0$, $u \in H(\Lambda_t, m^{1/2})$, on obtient alors :

$$(8.25) \quad t[u|u]_t + (\text{Im } z)(u|u)_{H(\Lambda_t, 1)} = - \text{Im}((P-z)u|u)_{H(\Lambda_t, 1)},$$

d'où

$$(8.26) \quad t[u|u]_t \leq C \| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})} \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})}.$$

A cause de (7.35) et des propriétés de $q_t a_0$, on obtient alors :

$$(8.27) \quad \begin{aligned} t \| u \|^2_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} &\leq C \left(\| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})} \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \right. \\ &\left. + t \| \hat{R}_t u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})} \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} + t \int r_t |T_0 F_t u|^2 a_0 d\alpha \right) \end{aligned}$$

où \hat{R}_t est uniformément (en t, h) négligeable d'ordre m et où $0 \leq r_t \in S(m)$ et $\text{supp } r_t \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus V$. On majore le dernier terme de (8.27) par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(8.28) \quad \begin{aligned} &\int r_t |T_0 F_t u|^2 a_0 d\alpha \\ &\leq \left(\int (r_t \cdot m^{-\frac{1}{2}} |T_0 F_t u|)^2 a_0 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (m^{\frac{1}{2}} |T_0 F_t u|)^2 a_0 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ici le dernier facteur est $\sim \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})}$. Pour le premier facteur on remarque qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel A_t d'ordre $m^{1/2}$ attaché à Λ_t tel que :

$$(8.29) \quad \int (r_t m^{-1/2} |T_0 F_t u|)^2 a_0 d\alpha = \| A_t u \|_{H(\Lambda_t, 1)}^2 + (R_t^{(1)} u | u)_{H(\Lambda_t, 1)}.$$

Ici $R_t^{(1)}$ est un opérateur pseudodifférentiel (+ négligeable) d'ordre $m h / \sqrt{R}$ et de plus, le symbole complet de A_t est à support (p.r. à α) dans $\kappa_t^{-1}(\mathbb{R}^{2n} \setminus V)$, où $\kappa_t : \Lambda_t \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est la transformation R -canonique associée à F_t . En dehors d'un compact le symbole de A_t est donc à support dans une région où $P-z$ est elliptique et on peut écrire $A_t = B_t(P-z) + C_t$, où B_t, C_t sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre $m^{-1/2}$ et $m^{1/2}$ respectivement. De plus le symbole de C_t est à support compact (en α). On obtient alors :

$$\| A_t u \|_{H(\Lambda_t, 1)}^2 \leq C \left(\| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})}^2 + \| C_t u \|_{H(\Lambda_t, 1)}^2 \right).$$

Revenant à (8.29), on obtient pour tout $N \geq 0$:

RÉSONANCES

$$\left(\int (r_t m^{-1/2} |T_0 F_t u|)^2 a_0 \, d\alpha \right)^{1/2} \leq C \left[\| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})} + \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2} (h/\tilde{r}R)^{1/2})} + \| K_t u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \right],$$

où K_t est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole en α est à support compact. Maintenant on obtient de (8.28) :

$$\int r_t |T_0 F_t u|^2 a_0 \, d\alpha \leq C \left[\| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} + \| u \|_{H(\Lambda_t, (m h/\tilde{r}R)^{1/2})} + \| K_t u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \right] \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})}.$$

Revenant à (8.27), on trouve alors :

$$(8.30) \quad t \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \leq C \left[\| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})} + t \| u \|_{H(\Lambda_t, (m h/\tilde{r}R)^{1/2})} + t \| K_t u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \right].$$

Donc, pour $0 < t \leq t_0$, $0 < h \leq h_0$ avec t_0, h_0 assez petits et pour $u \in H(\Lambda_t, m^{1/2})$:

$$(8.31) \quad t \| u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \leq C \left[\| (P-z)u \|_{H(\Lambda_t, m^{-1/2})} + t \| K_t u \|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \right].$$

Théorème 8.6. On fait les mêmes hypothèses que dans le Théorème 8.3.

Alors il existe $t_1 > 0$ tel que pour tout $0 < t \leq t_1$ et toute fonction d'ordre \tilde{m} sur Λ_t il existe $h_0 > 0$ tel que pour $0 < h \leq h_0$, $\Gamma(h, t, \tilde{m})$ ne rencontre pas $\{z \in \mathcal{C}; \text{Im } z > 0\}$.

Démonstration : D'après la Proposition 8.4, on pourra supposer que $\tilde{m} = 1$.

Pour $0 < t \leq t_0$, $0 < h \leq h_0$ avec t_0 et h_0 assez petits, soit $z \in \Omega_t$, $\text{Im } z > 0$, $u \in H(\Lambda_t, m)$ avec $(P-z)u = 0$. Il suffit alors de montrer que : ou bien $\text{Im } z = 0$ ou bien $u = 0$. La substitution dans (8.31) donne :

$$(8.32) \quad \|u\|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} \leq \|K_t u\|_{H(\Lambda_t, m^{1/2})} .$$

Puisque le symbole de K_t est à support compact en α , uniformément par rapport à t , on sait que $\lim_{s \rightarrow 0} \|K_s u\|_{H(\Lambda_s, m^{1/2})} < \infty$. Pour $\epsilon_0 > 0$ très petit, soit f_λ donné par la Proposition 1.7, avec $f = G$, $g = (1 - \epsilon_0)G$. On peut alors reprendre la discussion ci-dessus, menant à (8.31) et (8.32), de manière uniforme par rapport à λ (et à t), pour Λ_t remplacé par $\Lambda_{t, \lambda} = \Lambda_t f_\lambda$. Si $K_t(\lambda)$ est l'opérateur correspondant dans (8.32), on sait en plus que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|K_t(\lambda)u\|_{H(\Lambda_{t, \lambda}, m^{1/2})} < \infty$ et par passage à la limite, on obtient $u \in H(\Lambda_{(1-\epsilon_0)t}, m^{1/2})$. Par itération, on obtient $u \in \bigcap_{0 < s \leq t} H(\Lambda_s, m^{1/2})$ et de nouveau par (8.32), que $\lim_{s \rightarrow 0} \|u\|_{H(\Lambda_s, m^{1/2})} < \infty$, et donc que $u \in H(\Lambda_0, m^{\frac{1}{2}})$. Il en résulte que $\lim_{s \rightarrow 0} [u]_s < \infty$ et, en faisant tendre $t (= "s") \rightarrow 0$ dans (8.25), on obtient $(\text{Im } z) \|u\|_{H(\Lambda_0, 1)}^2 = 0$, et donc, ou bien $\text{Im } z = 0$, ou bien $u = 0$. ■

On montre ensuite qu'il n'y a pas de vecteurs propres généralisés associés aux résonances réelles. D'après la Proposition 8.4, il suffit de traiter le cas $\tilde{m} = 1$.

Théorème 8.7. *On fait les mêmes hypothèses que dans le Théorème 8.3, et, dans le cas $n=1$, on suppose aussi que N_0 est pair. Il existe alors $t_1 > 0$ tel que si $0 < t \leq t_1$ alors pour $0 < h \leq h_0$ avec $h_0 > 0$ assez petit, si $x \in \Omega_t \cap \mathbb{R}$, et $u \in H(\Lambda_t, m)$, $(P-x)u \in H(\Lambda_t, m)$, $(P-x)^2 u = 0$, alors $(P-x)u = 0$.*

Démonstration : On travaille donc avec $0 < t \leq t_1$, $0 < h \leq h_0(t)$ où t_1 et $h_0(t)$ sont assez petits pour que le calcul pseudodifférentiel soit valable. Appliquant (8.31) et la Proposition 1.7 comme précédemment, on montre d'abord que $(P-x)u \in H(\Lambda_s, m^{1/2})$ et que $\|(P-x)u\|_{H(\Lambda_s, m^{1/2})} = \mathcal{O}_h(1)$ pour

RÉSONANCES

$0 < s \leq t$, puis, par un passage à la limite, que : $(P-x)u \in H(\Lambda_0, m^{1/2})$. Réappliquant ensuite le même argument, on montre que : $u \in H(\Lambda_s, m^{1/2})$ et que :

$$(8.33) \quad \|u\|_{H(\Lambda_s, m^{1/2})} \leq \frac{C(h)}{s},$$

pour $0 < s \leq t$.

Soit $0 \leq g \in \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ avec $g(x) \geq G(x, \xi)$, et posons $\tilde{\Lambda}_s = \Lambda_{s g}$. Alors on a :

$$(8.34) \quad \|(P-x)u\|_{H(\tilde{\Lambda}_s, m^{1/2})} = \mathcal{O}_h(1), \quad \|u\|_{H(\tilde{\Lambda}_s, m^{1/2})} = \mathcal{O}_h\left(\frac{1}{s}\right),$$

pour $0 < s \leq t$. On part maintenant de l'identité

$$(8.35) \quad 0 = (u | (P-x)^2 u)_{L^2(e^{-2sg} dx)}.$$

L'adjoint de P pour ce produit scalaire est égal à $e^{2sg/h} P e^{-2sg/h} = P - s Q_s$, où Q_s est à symbole uniformément borné dans $S(m)$. Alors (8.35) donne

$$(8.36) \quad \|(P-x)u\|_{L^2(e^{-2sg/h} dx)}^2 = (s Q_s u | (P-x)u)_{L^2(e^{-2sg/h} dx)}.$$

Soit $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in]0, 1]$ une famille bornée de $S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ avec $\chi_\varepsilon = 1$ sur K_ε où $K_\varepsilon \subset\subset \mathbb{R}^n$ et $K_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Découpons alors le second membre de (8.36) en

$$(8.37) \quad (\chi_\varepsilon s Q_s u | (P-x)u)_{L^2(e^{-2sg/h} dx)} + (s Q_s u | (1-\chi_\varepsilon)(P-x)u)_{L^2(e^{-2sg/h} dx)}.$$

Ici on voit que le premier terme tend vers 0 quand $s \rightarrow 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé. Pour le deuxième terme, on remarque d'après (8.33) que :

$$\|s Q_s u\|_{H(\tilde{\Lambda}_s, m^{-1/2})} = \mathcal{O}_h(1), \quad s \rightarrow 0. \text{ On peut alors écrire :}$$

$$e^{-sg/h} s Q_s u = \sum_{|\alpha| \leq N_0/2} m_0^{1/2} \left(\frac{1}{r} \tilde{D}\right)^\alpha v_{\alpha,s}$$

avec $v_{\alpha,s} = \mathcal{O}_h(1)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le deuxième terme de (8.37) devient alors :

$$(8.38) \quad \sum_{|\alpha| \leq N_0/2} \left(v_{\alpha,s} \mid \left(\tilde{D} \frac{1}{r}\right)^\alpha m_0^{1/2} e^{-sg/h} (1-\chi_\varepsilon)(P-x)u \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Sachant que $(P-x)u \in H(\Lambda_0, m^{1/2})$, on voit que $\left(\tilde{D} \frac{1}{r}\right)^\alpha m_0^{1/2} e^{-sg/h} (1-\chi_\varepsilon)(P-x)u \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément par rapport à s . Donc en choisissant d'abord $\varepsilon > 0$ assez petit on peut rendre le deuxième terme de (8.37) arbitrairement petit uniformément par rapport à s . Faisant tendre $s \rightarrow 0$, le premier terme tend vers 0. On en déduit que : $\| (P-x)u \|_{L^2(e^{-2sg/h} dx)} \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$, et donc : $(P-x)u = 0$. ■

On finit cette section par une étude des projecteurs spectraux associés aux résonances.

Soit $G \in S(rR) + \dot{S}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ réelle, $\Lambda_t = \Lambda_t G$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $|t|$ assez petit, définissons $F_t : H(\Lambda_t, \hat{m}) \rightarrow H(\Lambda_0, \hat{m})$ comme avant. Si F_t^* est l'adjoint formel de F_t au sens de $L^2(\mathbb{R}^n)$ alors F_t^* est un O.I.F. elliptique d'ordre $\frac{1}{r} R^0$ qui pour h assez petit donne une bijection $H(\Lambda_0, \hat{m}) \rightarrow H(\bar{\Lambda}_t, \hat{m})$. Ici $\bar{\Lambda}_t = \Lambda_{-t}$. Quitte à modifier la définition de F_t pour $t < 0$, on peut supposer que $F_{-t} = (F_t^*)^{-1}$, et, comme avant, on définit la norme sur $H(\Lambda_t, 1)$ de façon à rendre $F_t : H(\Lambda_t, 1) \rightarrow H(\Lambda_0, 1)$ unitaire. Rappelons aussi que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans tous les espaces $H(\Lambda_t, m)$.

Proposition 8.8. *Le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ s'étend en une forme bilinéaire sur $H(\Lambda_t, 1) \times H(\Lambda_{-t}, 1)$ vérifiant*

$$\left| (u \mid v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right| \leq \| u \|_{H(\Lambda_t, 1)} \| v \|_{H(\bar{\Lambda}_t, 1)}, \quad u \in H(\Lambda_t, 1), \quad v \in H(\Lambda_{-t}, 1).$$

De plus, toute forme linéaire bornée ℓ sur $H(\Lambda_t, 1)$ s'écrit de manière unique

RÉSONANCES

$\mathfrak{L}(u) = (u|v)$, $v \in H(\overline{\Lambda}_t, 1)$. L'application $H(\Lambda_t, 1)^* \ni \mathfrak{L} \rightarrow v \in H(\overline{\Lambda}_t, 1)$ est bi-jectif d'inverse borné.

Démonstration : Pour $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $(u|v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (F_t^{-1} F_t u | v)_{L^2} = (F_t u | F_{-t} v)_{L^2}$, ce qui montre le premier énoncé. Les autres parties de la proposition se démontrent ensuite facilement en utilisant les opérateurs F_t, F_{-t} . ■

Proposition 8.9. Si G est une fonction fuite et $t > 0$ (ou bien < 0) alors l'adjoint de l'opérateur non-borné $P : H(\Lambda_t, 1) \rightarrow H(\Lambda_t, 1)$ de domaine $H(\Lambda_t, m)$, $m = m_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^N$ est donné par $P : H(\Lambda_{-t}, 1) \rightarrow H(\Lambda_{-t}, 1)$ de domaine $H(\Lambda_{-t}, m)$.

Démonstration : Puisque $H(\Lambda_t, m)$ est dense dans $H(\Lambda_t, 1)$, on sait que $P^* : H(\Lambda_{-t}, 1) \rightarrow H(\Lambda_{-t}, 1)$ existe en tant qu'opérateur non-borné. Si $v, w \in H(\Lambda_{-t}, 1)$ et $P^* v = w$, alors, pour tout $u \in H(\Lambda_t, m)$, on a : $(u|w) = (P u | v)$. Prenant ici $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on trouve que $P v = w$ au sens des distributions (on utilise ici que P est formellement auto-adjoint). Puisque P est un opérateur pseudodifférentiel elliptique à l'infini sur Λ_{-t} , et que : $P v = w$ dans $H(\Lambda_{-t}, 1/m)$, on en déduit que $v \in H(\Lambda_{-t}, m)$.

Inversement, si $v \in H(\Lambda_{-t}, m)$ alors $w = P v \in H(\Lambda_{-t}, 1)$ et on obtient $(u|P v) = (P u | v)$ d'abord pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et puis par densité, pour tout $u \in H(\Lambda_t, m)$ (et même pour tout $u \in H(\Lambda_t, 1)$). ■

Soit maintenant aussi G une fonction fuite. Pour $z \in \mathbb{C}$ on montre ensuite que $(z-P)^{-1}$ est bien défini dans $H(\Lambda_t, 1)$ ssi $(\overline{z}-P)^{-1}$ est bien défini dans $H(\Lambda_{-t}, 1)$ et dans ce cas $((\overline{z}-P)^{-1})^* = (z-P)^{-1}$. La discussion des résonances que l'on a fait pour $P : H(\Lambda_t, m) \rightarrow H(\Lambda_t, 1)$, $t > 0$ s'applique aussi bien pour $P : H(\Lambda_{-t}, m) \rightarrow H(\Lambda_{-t}, 1)$ avec la seule différence que les nouvelles résonances vont vivre dans le demi-plan supérieur. Soit $\mu(h)$ une

résonance de P ou un ensemble fini de résonances. Soit $F_{\mu}(h)$ l'espace spectral associé et soit

$$\Pi_{\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z-P)^{-1} dz$$

le projecteur associé. Ici $\gamma = \gamma(h)$ est un lacet simple autour de μ qui laisse toutes les autres résonances à l'extérieur. Alors :

$$\Pi_{\mu}^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} (z-P)^{-1} dz ,$$

où $(z-P)^{-1}$ est maintenant considéré comme opérateur borné dans $H(\Lambda_{-t}, 1)$ et $\bar{\gamma}$ est orienté dans le sens direct. Π_{μ}^* est donc le projecteur spectral $\tilde{\Pi}_{\mu}$ correspondant à la résonance (ou ensemble de résonances) $\bar{\mu}$ de P dans $H(\Lambda_{-t}, 1)$. Notons \tilde{F}_{μ} l'espace correspondant.

Proposition 8.11. On a $F_{\mu} \perp \tilde{F}_{\lambda}$ si $\mu \cap \bar{\lambda} = \emptyset$. De plus $\dim F_{\mu} = \dim \tilde{F}_{\mu}$ et, si $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$ est une base dans F_{μ} , il existe une base $\psi_1, \dots, \psi_{N_0}$ dans \tilde{F}_{μ} telle que $(\varphi_j | \psi_k) = \delta_{j,k}$. Π_{μ} prend alors la forme $\Pi_{\mu} u = \sum_j (u | \varphi_j) \varphi_j$ et la matrice de $P|_{F_{\mu}}$ devient $((P \varphi_k | \psi_j))$.

Démonstration : Si $\mu \cap \bar{\lambda} = \emptyset$ alors $\Pi_{\mu} \Pi_{\lambda} = \Pi_{\lambda} \Pi_{\mu} = 0$. Pour $u \in F_{\mu}$, $v \in \tilde{F}_{\lambda}$ on a $\Pi_{\mu} u = u$, $\tilde{\Pi}_{\lambda} v = v$. Donc $(u | v) = (\Pi_{\mu} u | \tilde{\Pi}_{\lambda} v) = (\Pi_{\lambda} \Pi_{\mu} u | v) = 0$, puisque $\tilde{\Pi}_{\lambda}^* = \Pi_{\lambda}$ et nous avons montré que $F_{\mu} \perp \tilde{F}_{\lambda}$.

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$ une base dans F_{μ} . D'après la Proposition 8.8. il existe des vecteurs uniques $\psi_1, \dots, \psi_{N_0} \in H(\Lambda_{-t}, 1)$ tel que $\Pi_{\mu} u = \sum_j (u | \varphi_j) \varphi_j$ et si on prend ici $u = \varphi_k$, on trouve $(\varphi_j | \psi_k) = \delta_{j,k}$, puisque $\Pi_{\mu} \varphi_k = \varphi_k$. On constate ensuite que $\tilde{\Pi}_{\mu} v = \Pi_{\mu}^* v = \sum_j (v | \varphi_j) \psi_j$ et en particulier, on a $\psi_j \in \tilde{F}_{\mu}$, $\forall j$. $\psi_1, \dots, \psi_{N_0}$ est donc une base duale dans \tilde{F}_{μ} à la base

RÉSONANCES

$\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$ dans F_μ .

Finalement si $(p_{j,k})$ est la matrice de $P|_{F_\mu}$ on a $P\varphi_k = \sum_j p_{j,k} \varphi_j$,
et puisque $\psi_1, \dots, \psi_{N_0}$ est une base duale on obtient $p_{j,k} = (P\varphi_k | \psi_j)$.

■

9. LE CAS D'UN Puits DANS UNE ISLE EN GENERAL.

On suppose désormais que $P = -h^2 \Delta + V(x)$ et on garde toutes les hypothèses de la section 8. On suppose dans la suite que V est analytique partout sur \mathbb{R}^n , mais on pourrait très certainement traiter aussi le cas où V est analytique en dehors d'un compact quitte à restreindre alors l'analyse des résonances à une bande $0 \gg \text{Im } z \gg -C h \log \frac{1}{h}$ avec $C > 0$ arbitrairement grand. Soit $\ddot{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et U un compact dans \ddot{O} avec les propriétés suivantes :

$$(9.1) \quad V(x) \leq 0 \text{ sur } U, V > 0 \text{ sur } \ddot{O} \setminus U, V = 0 \text{ sur } \partial \ddot{O}.$$

(Les résultats de cette section restent vrais sans modification si l'on suppose que V est analytique seulement en dehors d'un compact de \ddot{O} . Sur $\overline{\ddot{O}}$ on introduit alors la métrique d'Agmon, $\max(V, 0) dx^2$ et on note $d(x, y)$ la distance associée. On suppose que :

$$(9.2) \quad \text{Le diamètre de } U \text{ pour } d \text{ est égal à } 0.$$

On renforce aussi l'hypothèse d'existence d'une fonction fuite :

$$(9.3) \quad \text{Il existe une fonction réelle } G(x, \xi) \in \dot{S}^{1,1} \text{ et une constante } C_0 > 0 \text{ telles que } H_p G \geq \frac{1}{C_0} r^2 \text{ sur } \Sigma_p \Big|_{\overline{\ddot{O}}}.$$

Il résulte de (9.3) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla V(x)| \geq r^2 / CR$ pour tout $x \in \partial \ddot{O}$. Quitte à augmenter C on obtient la même minoration dans $B(\partial \ddot{O}, \varepsilon_0) = \bigcup_{x \in \partial \ddot{O}} B(x, \varepsilon_0)$, si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit. Ici $B(x, \varepsilon_0) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y-x| \leq \varepsilon_0 R(x)\}$. Si l'on se place dans $B(\partial \ddot{O}, \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, alors les familles $B(\partial \ddot{O}, \varepsilon) \cap \overline{\ddot{O}}$ et $C(\varepsilon) = \{x \in \overline{\ddot{O}} \cap B(\partial \ddot{O}, \varepsilon_0); \underset{\text{def}}{V(x) / r(x)^2} = f(x) < \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_0$ sont équivalentes au sens qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $C \left(\frac{\varepsilon}{C}\right) \subset B(\partial \ddot{O}, \varepsilon) \cap \overline{\ddot{O}} \subset C(\varepsilon C)$.

PUITS DANS UNE ISLE

Nous avons la conséquence suivante de (8.15) :

(9.4) Pour tout $\varepsilon_0 > 0$ et tout voisinage $W \subset \bar{\bar{O}}$ de U , il existe une constante $\delta > 0$ telle que $f(x) \geq \delta$ pour tout $x \in \bar{\bar{O}} \setminus (W \cup B(\partial \bar{\bar{O}}, \varepsilon_0))$.

Inversement, si on fait toutes les hypothèses sauf (8.15) et si de plus $V(x) \leq 0$ dans $C \bar{\bar{O}}$, alors (9.4) entraîne (8.15). La condition (9.4) est automatiquement vérifiée si $\bar{\bar{O}}$ est compact. Si l'on fixe un petit voisinage relativement compact W de U , il existe alors $\varepsilon_1 > 0$ tel que $f(x) \geq \varepsilon$ dans $\bar{\bar{O}} \setminus (W \cup C(\varepsilon))$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$.

Rappelons que modulo une reparamétrisation les géodésiques minimales dans $\bar{\bar{O}} \setminus U$ pour la métrique d'Agmon coïncident avec les projections des bicaractéristiques de $q(x, \xi) = \xi^2 - V(x)$ au dessus de $\bar{\bar{O}} \setminus U$. Une telle bicaractéristique $t \rightarrow (x(t), \xi(t))$ vérifie

$$(9.5) \quad \dot{x}(t) = 2\xi(t) \quad , \quad \dot{\xi}(t) = \nabla V(x(t)) \quad , \quad |\xi(t)|^2 = V(x(t)) \quad .$$

Pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, considérons l'évolution de la fonction $f(x(t))$, pour un segment bicaractéristique avec $x(t) \in \bar{\bar{O}} \cap B(\partial \bar{\bar{O}}, \varepsilon_0)$, $a < t < b$. (Par abus de langage on écrira parfois $f(t) = f(x(t))$). On obtient alors, en utilisant que $f(x) \in S^{0,0}$:

$$(9.6) \quad \dot{f} = \nabla f \cdot \dot{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R} |V|^{1/2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{r}{R} f^{1/2}\right) \quad ,$$

et

$$(9.7) \quad \ddot{f} = \frac{2}{r^2} |\nabla V|^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r^2}{R^2} f\right) \geq \frac{1}{C} \frac{r^2}{R^2} \quad ,$$

grâce à notre minoration de $|\nabla V|$ dans $B(\partial \bar{\bar{O}}, \varepsilon_0)$. On observe aussi que

$\dot{x} = \mathcal{O}(r f^{1/2})$, donc si $|t-s| \leq \frac{1}{\text{const.}} \varepsilon_0^{1/2} \frac{R(s)}{r(s)}$, on a :

$$|x(t) - x(s)| \leq \text{const. } r(s) \varepsilon_0^{1/2} |t-s| \leq \varepsilon_0 R(s) \text{ et } R(t)/R(s) \sim r(t)/r(s) \sim 1.$$

Lemme 9.1. On suppose $\varepsilon_0 > 0$ assez petit. Considérons un segment bica-
ractéristique $(x(t), \xi(t))$ avec $x(0) \in B(\partial\bar{0}, \varepsilon_0/2)$. Alors, (après avoir
étendu l'intervalle de définition si nécessaire), on a $x(t) \in B(\partial\bar{0}, \varepsilon_0)$ et
 $|x(t) - x(0)| \leq \varepsilon_0 R(x(0))$ pour $|t| < T(\varepsilon_0)$ où $T(\varepsilon_0) = \frac{1}{\text{const.}} \varepsilon_0^{1/2} \frac{R(x(0))}{r(x(0))}$.
On restreint maintenant t à $] -T(\varepsilon_0), T(\varepsilon_0)[$. Pour $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{C_0} \varepsilon_0$ avec C_0
assez grand mais indépendant de ε_0 , nous avons :

- (a) Si $x(0) \in \overline{C(\varepsilon_1)}$ il existe un intervalle fermé $I(\varepsilon_1)$ de longueur
 $\leq (\text{const.}) \varepsilon_1^{1/2} R(x(0)) / r(x(0))$ tel que $x(t) \in \overline{C(\varepsilon_1)}$ ssi $t \in I$.
- (b) Si en plus $x(0) \in C(\varepsilon_1/2)$ alors la longueur de $I(\varepsilon_1)$ est du même
ordre de grandeur que $\varepsilon_1^{1/2} R(x(0)) / r(x(0))$ et la longueur d'Agmon
du segment $I(\varepsilon_1) \ni t \rightarrow x(t)$ est du même ordre de grandeur que
 $\varepsilon_1^{3/2} r(x(0)) R(x(0))$.
- (c) La conclusion de (b) reste valable si l'on remplace $I(\varepsilon_1)$ par
 $I(\varepsilon_1) \cap \{t \in \mathbb{R}; t \leq 0\}$ ou par $I(\varepsilon_1) \cap \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$.

Démonstration : La première partie du lemme résulte de l'estimation
 $\dot{x} = \mathcal{O}(r f^{1/2})$. Si $x(0) \in \overline{C(\varepsilon_1)}$ alors $\dot{f}(x(0)) = \mathcal{O}(\frac{r}{R} \varepsilon_1^{1/2})$, et donc, d'après
(9.7), il existe t_0 avec $|t_0| = \mathcal{O}(\frac{R}{r} \varepsilon_1^{1/2})$ tel que $\dot{f}(t_0) = 0$. Alors par
(9.7) on obtient :

$$f(t) - f(t_0) \sim \frac{r^2}{R^2} |t-t_0|^2, \quad \dot{f}(t) \sim \frac{r^2}{R^2} (t-t_0),$$

d'où l'existence d'un intervalle $I(\varepsilon_1)$ avec les propriétés de (a). Si
 $x(0) \in C(\varepsilon_1/2)$ on voit alors que la longueur de $I(\varepsilon_1)$ (et aussi de
 $I(\varepsilon_1) \cap \overline{\mathbb{R}}_+$ et de $I(\varepsilon_1) \cap \overline{\mathbb{R}}_-$) est du même ordre de grandeur que $\varepsilon_1^{1/2} R/r$.

La longueur d'Agmon du segment $I(\varepsilon_1) \ni t \rightarrow x(t)$ est de l'ordre de :

$$\int_{I(\varepsilon_1)} f(t)^{1/2} r(x(t)) |\dot{x}(t)| dt \sim r^2 \int_{I(\varepsilon_1)} f(t) dt$$

(et de même avec $I(\varepsilon_1)$ remplacé par $I(\varepsilon_1) \cap \overline{R_{\pm}}$). On voit facilement que l'ordre de grandeur de cette intégrale est $\varepsilon_1^{3/2} R r$. ■

A l'aide de ce lemme nous allons montrer :

Proposition 9.2. Soit $S_0 > 0$ la distance d'Agmon de U à $\partial\bar{O}$ et soit $B_d(U, S_0) = \{y \in \bar{O}; d(U, y) < S_0\}$. Alors $B_d(U, S_0)$ est relativement compact.

Démonstration : Supposons que $B_d(U, S_0)$ ne soit pas relativement compact et considérons $\mathcal{J} = \{r \in]0, S_0[; B_d(U, r) \text{ est relativement compact}\}$. On voit facilement alors que $\mathcal{J} =]0, r_0[$ avec $0 < r_0 < S_0$. En effet, si $B_d(U, r)$ est relativement compact, il est facile de voir qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(U, r+\varepsilon)$ est aussi relativement compact. Si $y \in B_d(U, r)$, $0 < r < r_0$, alors grâce à la compacité relative de $B_d(U, \rho)$, $\rho < r$, on voit qu'il existe une géodésique minimale pour la métrique d'Agmon qui relie U à y et qui est de longueur $d(U, y)$. Si $y \in B_d(U, r_0)$, on a alors la même conclusion puisque $B_d(U, r_0) = \bigcup_{r < r_0} B_d(U, r)$. Soit donc $\gamma :]T_-, T] \ni t \rightarrow x(t) \in \bar{O}$ une telle géodésique paramétré comme une courbe bicaractéristique et avec $\lim_{t \rightarrow T_-} x(t) \in U$,

$x(T) = y$. Soit $\gamma|_{[t_1, T]}$ la restriction de γ à $\bar{O} \setminus W$, où $W = B_d(U, \delta)$ et $\delta \in]0, r_0[$ est fixé. W est alors relativement compact. Soit $\varepsilon_1 > 0$ assez petit pour que le Lemme 9.1 soit applicable. Soient $I_1, \dots, I_N \subset]t_1, T]$ les intervalles fermés maximaux avec $\overline{\gamma(I_j)} \subset C(\varepsilon_1)$, $\gamma(I_j) \cap C(\varepsilon_1/2) \neq \emptyset$. Alors la longueur de $\gamma(I_j)$ pour la métrique d'Agmon est de l'ordre de $\varepsilon_1^{3/2} r_j R_j$, où $r_j = r(x(t_j))$, $R_j = R(x(t_j))$, $t_j \in I_j$. Si $r = d(U, y) < r_0$ on trouve donc

$$\sum_1^N \varepsilon_1^{3/2} r_j R_j \leq C_0 r$$

où C_0 est indépendant de r et de N . D'autre part, la longueur euclidienne de $\gamma(I_j)$ est de l'ordre de $\varepsilon_1 R_j$.

Soient J_1, \dots, J_M les intervalles complémentaires tels que $[t_1, T]$ soit la réunion disjointe des J_j et I_k . Alors : $V(x(t)) \geq \frac{1}{C_0^2} r(x(t))^2 \geq \frac{1}{C_0^2}$ pour $t \in \cup J_j$, ce qui montre que la longueur euclidienne de $\cup_1^M \gamma(J_j)$ est au plus égale à C_0 fois la longueur d'Agmon correspondante. Donc la longueur euclidienne de $\cup_1^M \gamma(J_j)$ est $\leq C_0 r$ et la longueur euclidienne de $\gamma([t_1, T])$ se majore par :

$$C_0 \left(r + \sum_1^N \varepsilon_1 R_j \right) \leq C_0 \left(r + \varepsilon_1^{-1/2} \sum_1^N \varepsilon_1^{3/2} r_j R_j \right) \leq \tilde{C}_0 \left(1 + C_0 \varepsilon_1^{-1/2} \right) S_0 .$$

Cette majoration indépendante de r , nous montre que $B_d(U, r_0)$ est borné et donc $B_d(U, r_0 + \varepsilon)$ est borné pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Ceci contredit la définition de r_0 . ■

Pour $\eta > 0$ très petit, on pose $M_0 = \overline{B(U, S_0 - \eta)}$ et on désigne par $P_0 = P_{M_0}$ la réalisation de Dirichlet correspondante de l'opérateur P . Soit $J \subset]0, 1[$ avec $0 \in \bar{J}$ et soit $I(h)$, $h \in J$, une famille d'intervalles compacts avec $I(h) \ni \{0\}$, $h > 0$; supposons qu'il existe une fonction $a(h) > 0$, $h \in J$ qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ telle que :

$$(9.8) \quad a(h) \geq \frac{1}{C_\varepsilon} e^{-\varepsilon/h} \text{ pour tout } \varepsilon > 0 ,$$

$$(9.9) \quad \text{Sp}(P_0) \cap \left[(I(h) + [-2a(h), 2a(h)]) \setminus I(h) \right] = \emptyset .$$

On rappelle de [Helffer-Sj I, II] que ces hypothèses restent essentiellement inchangées si l'on diminue encore η et que les valeurs propres de P_0 dans $I(h)$ se modifient seulement par $\mathcal{O}_\varepsilon \left(e^{2(\varepsilon + \eta - S_0)/h} \right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ si l'on remplace η par une valeur plus petite.

Dans cette section on se propose de montrer que les résonances de P proches de $I(h)$ s'obtiennent à partir de $Sp(P_0) \cap I(h)$ par une perturbation du même ordre de grandeur. Nous allons pour cela passer par un " problème de Grushin " associé à $P_0 - z$, comme dans l'Appendice A, et qui sera facile à perturber, car tout à fait inversible, et on obtiendra ainsi la solution d'un problème de Grushin associé à $P - z$.

On commence par construire le Problème de Grushin associé à P_0 . Soient $\mu_1, \dots, \mu_m \in I(h)$ les valeurs propres de P_0 dans $I(h)$ répétées avec leur multiplicité et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L^2(M_0)$ une famille orthonormale associée de fonctions propres. Ici $m = m(h)$ dépend de h , mais il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(h) = \mathcal{O}(h^{-N_0})$. Pour $u \in L^2(M_0)$ on définit $R_0^+ u \in \mathbb{C}^m$ par $(R_0^+ u)_j = (u | \varphi_j)$, où $(|)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(M_0)$. Pour $u^- = (u_j^-)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{C}^m$, on pose $R_0^- u^- = \sum_1^m u_j^- \varphi_j \in H^2(M_0) \cap H_0^1(M_0)$. C'est donc l'adjoint formel de R_0^+ . (On suppose ici que ∂M_0 est C^∞ ce qui peut toujours être obtenu après une petite perturbation de M_0).

Soit $\Omega(h) = \{z \in \mathbb{C} ; \text{dist}(\text{Re } z, I(h)) < a(h), |\text{Im } z| < b(h)\}$, où $b(h) \geq a(h)$, $b(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. Pour $z \in \Omega(h)$, on considère alors le problème de Grushin :

$$(9.10) \quad \begin{cases} (P_0 - z)u + R_0^- u^- = v \\ R_0^+ u = v^+ \end{cases},$$

avec $(v, v^+) \in L^2(M_0) \times \mathbb{C}^m$, $(u, u^-) \in (H^2(M_0) \cap H_0^1(M_0)) \times \mathbb{C}^m$. Soit $E'' \subset L^2(M_0)$ l'espace engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ et $E' = (E'')^\perp$. On introduit les décompositions correspondantes $v = v' + v''$ et $u = u' + u''$. Alors (9.10) devient :

$$(9.11) \quad \begin{cases} (P_0 - z)u' = v' & , \quad (\mu_j - z)u_j'' + u_j^- = v_j'' & , \quad j = 1, \dots, m \\ u_j'' = v_j^+ & , \quad j = 1, \dots, m & , \end{cases}$$

où $u'' = \sum_1^m u_j'' \varphi_j$, $v'' = \sum_1^m v_j'' \varphi_j$ et où P_0' désigne la restriction de P_0 à E' .

Pour $z \in \Omega(h)$, il est clair que $(P_0' - z)^{-1}$ existe et $\|(P_0' - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq$

$\frac{1}{a(h)}$. Ensuite, par des inégalités a priori standard, on trouve :

$$\|(P_0' - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, H^2)} \leq \frac{C}{a(h)h^2}.$$

La solution unique du problème (9.10) est alors donnée par :

$$(9.12) \quad \begin{cases} u' = (P_0' - z)^{-1} v' & , \quad u_j' = v_j^+ \\ u_j^- = v_j'' + (z - \mu_j) v_j^+ & . \end{cases}$$

On écrit la solution sous la forme :

$$(9.13) \quad \begin{cases} u = E_0(z)v + E_0^+(z)v^+ \\ u^- = E_0^-(z)v + E_0^{*-}(z)v^+ & , \end{cases}$$

avec

$$(9.14) \quad \begin{aligned} E_0(z)v &= (P_0' - z)^{-1} v' & , \quad E_0^+(z)v^+ &= \sum_1^m v_j^+ \varphi_j \quad (= R_0^- v^+) \\ (E_0^-(z)v)_j &= v_j'' & , \quad (E_0^- = R_0^+) & , \quad E_0^{*-}(z) &= \text{diag} (z - \mu_j) . \end{aligned}$$

Proposition 9.3. Nous avons $K_{E_0}(x, y) = \check{O}(e^{-d(x, y)/h})$, $K_{E_0^+}(x) = \check{O}(e^{-d(x)/h})$, $K_{E_0^-}(y) = \check{O}(e^{-d(y)/h})$, où $d(x) = d(U, x)$ et où le sens précis est le suivant :

(9.15) Pour tout $(x_0, y_0) \in M_0 \times M_0$ et tout $\varepsilon_0 > 0$ il existe des voisinages $U \ni x_0$, $V \ni y_0$ tels que $\|E_0 u\|_{H^2(U)} \leq \check{O}(e^{-(d(x_0, y_0) - \varepsilon_0)/h}) \|u\|_{L^2(V)}$, uniformément pour $u \in L^2(M_0)$ à support dans V et $z \in \Omega(h)$.

PUITS DANS UNE ISLE

(9.16) Pour tout $x_0 \in M_0$ (respectivement $y_0 \in M_0$) et tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe un voisinage $U \ni x_0$ (respectivement $V \ni y_0$) tel que uniformément pour $z \in \Omega(h)$: $\|E_0^+ v^+\|_{H^2(U)} \leq \tilde{O}(e^{-(d(x_0)-\varepsilon_0)/h}) \|v^+\|_{C^m}$, $\forall v^+ \in C^m$ (respectivement $\|E_0^- v\|_{C^m} \leq \tilde{O}(e^{-(d(y_0)-\varepsilon_0)/h}) \|v\|_{L^2(V)}$ pour tout $v \in L^2(M_0)$ à support dans V).

On utilise ici la notation de [H.S.2] : $\tilde{O}(a(h))$ signifie $O(e^{\varepsilon(h)/h} a(h))$, $h \rightarrow 0$ pour tout $\eta > 0$ assez petit, où $\varepsilon(\eta) > 0$ tend vers 0 quand $\eta \rightarrow 0$. (Dans la Proposition 9.3 cette notation est en fait superflue car on peut prendre $\varepsilon(\eta) = 0$, mais elle deviendra utile plus loin. Dans la définition de \check{O} nous avons utilisé " H^2 " plutôt que " H^1 " comme dans [H.S.2]. Grâce à des inégalités a priori simples pour le Laplacien il suffira de montrer (9.15), (9.16) avec " H^1 " à la place de " H^2 ").

Démonstration : (9.16) résulte immédiatement des estimations sur les fonctions propres de [H.S.1,2]. Pour montrer (9.15), on remarque que :

$$(9.17) \quad E_0(z) = - \oint (w-z)^{-1} (w-p_0)^{-1} dw ,$$

où on intègre sur le bord du rectangle $\text{dist}(\text{Re } z, I(h)) < \frac{3}{2} a(h)$, $|\text{Im } z| < \frac{3}{2} b(h)$. Alors $(w-p_0)^{-1}$ vérifie (9.15) uniformément en w d'après les résultats de [H.S.2] et (9.15) s'obtient donc directement de (9.17). ■

Abordons maintenant le problème des résonances. Soit $\chi \in C_0^\infty(M_0)$ avec $\chi = 1$ dans $B_d(U, S_0 - 2\eta)$ et soit $\check{V} = V + W$, où $W \geq 0$ est une fonction C^∞ à support dans $B_d(U, \eta)$ et avec $V + W > 0$ sur U . Quitte à modifier un peu notre fonction fuite on pourra supposer que la fonction G de (9.3) vérifie aussi :

$$(9.18) \quad G(x, \xi) = 0 \quad \text{si } x \in M_0 .$$

On fait aussi la modification de G prescrite dans la section 8, et on introduit $\Lambda_t = \Lambda_t G$, $t > 0$. Pour deux valeurs de $t > 0$ assez petites, nous savons alors que les résonances de P dans $\Omega(h)$ associées aux deux espaces $H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$ coïncident, si h est assez petit (et de même si l'on compare $H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$ et $H(\Lambda_t, m \tilde{r}^2)$ si m est une fonction d'ordre).

Grâce à (9.3) on sait que $p|_{\Lambda_t}$ est elliptique et partout $\neq 0$ sauf au-dessus de U . Si $\tilde{P} = P + W = -h^2 \Delta + \tilde{V}$, et si $\tilde{p} = \xi^2 + \tilde{V}$ alors $\tilde{p}|_{\Lambda_t}$ est elliptique et $\neq 0$ partout sur Λ_t . D'après les résultats de la section 6, pour tout $t > 0$ assez petit, il existe une constante $C_t > 0$ telle que $\tilde{P} - z : H(\Lambda_t, \tilde{r}^2) \rightarrow H(\Lambda_t, 1)$ soit bijectif pour $|z| < \frac{1}{C_t}$, quand $0 < h \leq h(t) > 0$ et avec un inverse majoré en norme par C_t . En particulier $(\tilde{P} - z)^{-1}$ existe pour $z \in \Omega(h)$ si h est assez petit en fonction de t et

$$\| (\tilde{P} - z)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H(\Lambda_t, 1), H(\Lambda_t, \tilde{r}^2))} \leq C_t .$$

Lemme 9.4. Pour $t > 0$ assez petit, nous avons :

$$(9.19) \quad K_{(\tilde{P} - z)^{-1}}(x, y) = \tilde{O}(e^{-\tilde{d}(x, y)/h}) , \quad x, y \in M_0 ,$$

uniformément pour $z \in \Omega(h)$ si h est assez petit en fonction de t . Ici $\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), d(x, \partial M_0) + d(\partial M_0, y))$.

Démonstration : Une manière de démontrer le lemme est d'observer que $(\tilde{P} - z)|_{\Lambda}$ est $\neq 0$ et elliptique, si $\Lambda = \Lambda_{\tilde{G}}$, où $\tilde{G} = tG$ en dehors d'un petit voisinage de M_0 , $\tilde{G} = g(x)$ dans un voisinage de M_0 , où $g = \text{const.}$ dans un voisinage de ∂M_0 et $|g'(x)|^2 < \tilde{V}(x)$ dans M_0 . (On choisit g en fonction de x_0, y_0).

PUITS DANS UNE ISLE

On donne une variante qui utilise moins de calcul pseudodifférentiel général. Quitte à augmenter un peu M_0 et $\text{supp } \chi$, on peut se restreindre à démontrer (9.19) pour x, y dans un compact à l'intérieur de l'ensemble où χ vaut 1. Soit alors y_0 dans cet ensemble et soit $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ à support dans un petit voisinage V de y_0 . Soit $u = (\tilde{P}-z)^{-1} v$ et remarquons que l'on peut écrire :

$$(9.20) \quad u = \chi (\tilde{P}_{M_0} - z)^{-1} v - (\tilde{P} - z)^{-1} [P, \chi] (\tilde{P}_{M_0} - z)^{-1} v .$$

Puisque le noyau de $(\tilde{P}_{M_0} - z)^{-1}$ est $\tilde{O}(e^{-d(x,y)/h})$, il suffit de regarder le dernier terme dans (9.20). Si on le note w , alors :

$$(9.21) \quad (\tilde{P} - z)w = [P, \chi] (\tilde{P}_{M_0} - z)^{-1} v .$$

Ici le second membre est à support dans $M_0 \setminus B(U, S_0 - 2\eta)$ et il est

$\tilde{O}(e^{-d(y_0, \partial M_0)/h})$ dans $L^2(M_0)$ et donc aussi dans $H(\Lambda_t, 1)$. Donc $w =$

$\tilde{O}(e^{-d(y_0, \partial M_0)/h})$ dans $H(\Lambda_t, \tau^2)$ et en particulier $w|_{M_0} =$

$\tilde{O}(e^{-d(y_0, \partial M_0)/h})$. On peut alors appliquer des inégalités d'énergie à

(9.21) (comme dans [H.S.1.2]) et déduire que si $x_0 \in M_0$ alors pour tout $\epsilon_0 > 0$ il existe un voisinage $U \ni x_0$ indépendant de v tel que $e^{-\epsilon_0/h} w =$

$\tilde{O}(e^{-(d(x_0, \partial M) + d(\partial M, y_0))/h})$ dans $H^2(U)$. Toutes ces estimations sont uniformes par rapport à v si $\|v\|_{L^2} = 1$ et on obtient donc (9.19). ■

On pose maintenant :

$$\mathcal{P}_0(z) = \begin{pmatrix} P_0 - z & R_0^- \\ R_0^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_0(z) = \begin{pmatrix} E_0(z) & E^+(z) \\ E_0^-(z) & E_0^{-+}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{P}_0(z)^{-1},$$

et on se propose d'étudier :

$$\mathcal{P}(z) = \begin{pmatrix} (P-z) & R^- \\ R^+ & 0 \end{pmatrix} : H(\Lambda_t, \tilde{r}^2) \times \mathbb{C}^m + H(\Lambda_t, 1) \times \mathbb{C}^m ,$$

où $R^+ = R_0^+$, $R^- = \chi R_0^-$.

Soit $\psi \in C_0^\infty(\overset{\circ}{M}_0)$ à support dans $B(U, \frac{1}{2}(S_0+\eta))$ et égale à 1 dans $B(U, \frac{1}{2}(S_0-\eta))$. On pose alors comme inverse approché de $\mathcal{P}(z)$:

$$(9.22) \quad \mathcal{F}(z) = \begin{pmatrix} F & F^+ \\ F^- & F^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi E_0(z) \psi + (\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) & \chi E_0^+(z) \\ E_0^-(z) \psi & E_0^{--}(z) \end{pmatrix} .$$

Un calcul direct montre alors que :

$$(9.23) \quad \mathcal{P}(z) \mathcal{F}(z) = I + \mathcal{K}(z) ,$$

où

$$(9.24) \quad \mathcal{K}(z) = (\mathcal{K}_{ij}(z))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} [P, \chi] E_0 \psi - W(\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) & [P, \chi] E_0^+ \\ R_0^+(\chi-1) E_0 \psi + R_0^+(\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) & R_0^+(\chi-1) E_0^+ \end{pmatrix} .$$

Ici on utilise la Proposition 9.3 et le Lemme 9.4 pour conclure que la norme de $\mathcal{K}(z)$ dans $H(\Lambda_t, 1) \times \mathbb{C}^m$ est $\tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/2h})$ et que plus précisément,

$$(9.25) \quad \mathcal{K}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/2h}) & \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/h}) \\ \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/2h}) & \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h}) \end{pmatrix}$$

(majoration des normes des $\mathcal{K}_{ij}(z)$). Ici le Lemme 9.4 ne s'applique pas tout à fait directement; on introduit $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(B_d(U, \frac{1}{2}(S_0-\eta)))$ égale à 1 sur $B_d(U, \frac{1}{2} S_0-\eta)$ et on remarque que $(\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) = (1-\tilde{\psi})(\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) + (\tilde{P}-z)^{-1}[P, \tilde{\psi}](\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi)$. On pourrait aussi procéder directement par des

PUITS DANS UNE ISLE

déformations de tG , comme indiqué au début de la démonstration du Lemme 9.4.

Si l'on pose :

$$(9.26) \quad G(z) = \begin{pmatrix} \psi E_0 + (1-\psi) (\tilde{P}-z)^{-1} & \chi E_0^+ \\ E_0^- & E_0^+ \end{pmatrix},$$

on vérifie de même que $G(z) \mathcal{P}(z) = I + \tilde{\mathcal{K}}(z)$, où $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/2h})$ comme opérateur borné dans $H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$. Donc, pour résumer, on a la :

Proposition 9.5. Soit $0 < t \leq t_0$ avec t_0 assez petit. Alors pour $h(t) > 0$ assez petit l'opérateur $\mathcal{P}(z) : H(\Lambda_t, \tilde{r}^2) \times \ell^m + H(\Lambda_t, 1) \times \ell^m$ est bijectif avec un inverse uniformément borné pour $z \in \Omega(h)$, $0 < h \leq h(t)$. Cet inverse est donné par $\mathcal{G}(z) = \mathcal{F}(z)(I - \mathcal{K}(z) + \mathcal{K}(z)^2 - \dots)$, et dépend holomorphiquement de z .

Ecrivons $\mathcal{G}(z) = \begin{pmatrix} E(z) & E^+(z) \\ E^-(z) & E^{-+}(z) \end{pmatrix}$. A priori $E^{-+}(z) = E_0^{-+}(z) + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/2h})$ mais avec un peu de travail sérieux on obtient mieux ; d'après (9.24), on a :

$$\mathcal{K}(z)^2 = \begin{pmatrix} -[P, \chi] E_0 W (\tilde{P}-z)^{-1} (1-\psi) - W (\tilde{P}-z)^{-1} [P, \chi] E_0 \psi & -W (\tilde{P}-z)^{-1} [P, \chi] E_0^+ \\ +[P, \chi] E_0^+ R_0^+ [(\chi-1) E_0 \psi + (\tilde{P}-z)^{-1} (1-\psi)] & +[P, \chi] E_0^+ R_0^+ (\chi-1) E_0^+ \\ \hline -R_0^+ (\chi-1) E_0 W (\tilde{P}-z)^{-1} (1-\psi) + R_0^+ (\tilde{P}-z)^{-1} [P, \chi] E_0 \psi & R_0^+ (\tilde{P}-z)^{-1} [P, \chi] E_0^+ \\ +R_0^+ (\chi-1) E_0^+ R_0^+ [(\chi-1) E_0 \psi + (\tilde{P}-z)^{-1} (1-\psi)] & +R_0^+ (\chi-1) E_0^+ R_0^+ (\chi-1) E_0^+ \end{pmatrix}$$

et en majorant la norme des différents termes on trouve :

$$(9.27) \quad \mathcal{K}(z)^2 = \left(\begin{array}{c|c} -[P, \chi]E_0 W(\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) - W(\tilde{P}-z)^{-1}[P, \chi]E_0 \psi & -W(\tilde{P}-z)^{-1}[P, \chi]E_0^+ \\ +[P, \chi]E_0^+ R_0^+ (\tilde{P}-z)^{-1}(1-\psi) & \\ \hline R_0^+ (\tilde{P}-z)^{-1}[P, \chi]E_0 \psi & R_0^+ (\tilde{P}-z)^{-1}[P, \chi]E_0^+ \end{array} \right)$$

$$+ \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-5 S_0/2h}\right) = \left(\begin{array}{cc} \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-3 S_0/2h}\right) & \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2 S_0/h}\right) \\ \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-3 S_0/2h}\right) & \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2 S_0/h}\right) \end{array} \right).$$

Alors avec (9.25) :

$$(9.28) \quad \mathcal{K}(z)^3 = \left(\begin{array}{cc} \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2 S_0/h}\right) & \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-5 S_0/2h}\right) \\ \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2 S_0/h}\right) & \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-5 S_0/2h}\right) \end{array} \right),$$

et (9.27) donne

$$(9.29) \quad \mathcal{K}(z)^4 = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-3 S_0/h}\right).$$

Donc

$$(9.30) \quad \mathcal{E}(z) = \mathcal{F}(z) - \mathcal{F}(z) \mathcal{K}(z) + \mathcal{F}(z) \mathcal{K}(z)^2 - \mathcal{F}(z) \mathcal{K}(z)^3 + \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-5 S_0/2h}\right),$$

et en analysant cette formule on trouve en écrivant $\mathcal{K}(z)^k = (\mathcal{K}_{ij}^{(k)}(z))_{1 \leq j, k \leq 2}$:

$$(9.31) \quad E^{-+}(z) = E_0^{-+}(z) - F^{-}(z) \mathcal{K}_{1,2}^{(1)} - F^{-+}(z) \mathcal{K}_{2,2}^{(1)}(z) + F^{-}(z) \mathcal{K}_{1,2}^{(2)}(z) + F^{-+}(z) \mathcal{K}_{2,2}^{(2)}(z) + \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-5 S_0/2h}\right) = E_0^{-+}(z) + \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2 S_0/h}\right).$$

En explicitant la première partie de cette formule, on trouve :

PUITS DANS UNE ISLE

$$(9.32) \quad E^{-+}(z) = E_0^{-+}(z) - E_0^{-+}(z) R_0^+ (X-1) E_0^+ - E_0^-(z) W (\tilde{P}-z)^{-1} [P, X] E_0^+ \\ + E_0^{-+}(z) R_0^+ (\tilde{P}-z)^{-1} [P, X] E_0^+ + \tilde{O}\left(e^{-5 S_0/2h}\right).$$

Puisque $E_0^{-+}(z)$ est une matrice diagonale avec les valeurs propres $z - \mu_j$, $j = 1, \dots, m$ et $E^{-+} - E_0^{-+} = \tilde{O}\left(e^{-2 S_0/h}\right)$, on voit que $E^{-+}(z)^{-1}$ existe si $\epsilon_0 > 0$ et $\min_j |z - \mu_j| > \exp(\epsilon_0 - 2 S_0)/h$ (et si $\eta > 0$ est assez petit). Déformant alors E_0^{-+} en E^{-+} par $E_t^{-+} = (1-t)E_0^{-+} + tE^{-+}$, on obtient la :

Proposition 9.6. Pour $0 < t \leq t_0$, $0 < h \leq h(t)$ avec t_0 et $h(t)$ assez petits, soit $\tilde{\Gamma}(t, h) = \{z \in \Omega(h) ; \det E^{-+}(z) = 0\}$, où on compte les éléments de $\tilde{\Gamma}(t, h)$ avec leur multiplicité. Alors il existe une bijection $b : \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \rightarrow \tilde{\Gamma}(t, h)$ avec la propriété que $b(\mu) - \mu = \tilde{O}\left(e^{-2 S_0/h}\right)$.

Cette proposition donne une partie du résultat principal de cette section :

Théorème 9.7. On fait les hypothèses générales du début de cette section et on introduit M_0 , $\Omega(h)$, $I(h)$, μ_1, \dots, μ_m (comptés avec leur multiplicité) ainsi que les hypothèses (9.8), (9.9) comme après la démonstration de la Proposition 9.2. Pour $0 < t \leq t_0$, $0 < h \leq h(t)$ avec $t_0 > 0$ et $h(t) > 0$ assez petits, soit $\Gamma(t, h)$ (essentiellement indépendant de t) les résonances de P dans $\Omega(h)$ relativement à l'espace $H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$. On définit la multiplicité d'un élément $z \in \Gamma(t, h)$ comme la dimension de l'espace F_z correspondant (voir la section 8). Alors $\Gamma(t, h) = \tilde{\Gamma}(t, h)$ même si l'on compte les éléments de Γ et $\tilde{\Gamma}$ avec leur multiplicité.

Démonstration : On reprend les arguments de l'Appendice A. Utilisant le fait que $E^-(z)$ est surjectif et $E^+(z)$ est injectif, on constate que $(P-z) :$

$H(\Lambda_t, \tilde{\Gamma}^2) \rightarrow H(\Lambda_t, 1)$ est bijectif ssi $E^{-+}(z)$ est bijectif et qu'alors on a l'expression (A.9) pour $(P-z)^{-1}$. Ceci montre que $\Gamma(t, h) = \tilde{\Gamma}(t, h)$ si l'on ne cherche pas à identifier les multiplicités.

Soit alors $z_0 \in \Gamma(t, h)$ et $N = \dim F_{z_0}$ la multiplicité correspondante. On choisit une base dans F_{z_0} pour laquelle $P|_{F_{z_0}}$ est réduite à sa forme de Jordan et pour cette base, soit $B : F_{z_0} \rightarrow F_{z_0}$ donné par une matrice diagonale avec toutes ces valeurs propres distinctes. On étend B à $H(\Lambda_t, 1)$ en posant $B=0$ sur G_{z_0} et on pose $P_\epsilon = P + \epsilon B$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, P_ϵ aura exactement m valeurs propres près de z_0 qui en plus sont simples: $z_1(\epsilon), \dots, z_m(\epsilon)$. Soit $\mathcal{P}(\epsilon, z)$ la matrice de Grushin correspondante, obtenue de $\mathcal{P}(z)$ en remplaçant P par P_ϵ et $\mathcal{G}(\epsilon, z) = \begin{pmatrix} E(\epsilon, z) & E^+(\epsilon, z) \\ E^-(\epsilon, z) & E^{-+}(\epsilon, z) \end{pmatrix}$ l'inverse correspondant, qui existe pour ϵ assez petit (en fonction aussi de h et de t). Alors $E^{-+}(\epsilon, z)$ est holomorphe en (ϵ, z) et $\det(E^{-+}(\epsilon, z)) = 0$ pour z dans un voisinage (indépendant de ϵ) de z_0 ssi $z = z_j(\epsilon)$. La racine z_0 de $z \rightarrow \det(E^{-+}(z))$ est donc éclatée en N racines distinctes (mais peut-être pas nécessairement simples) par la perturbation analytique $\epsilon \rightarrow \det(E^{-+}(z))$. Il est alors clair que la multiplicité de z_0 comme zéro de $\det(E^{-+}(z))$ est au moins égale à N .

Puisque la somme des multiplicités des éléments de $\tilde{\Gamma}(t, h)$ est m , il suffit maintenant de montrer que la somme S des multiplicités des éléments de $\Gamma(t, h)$ est aussi égale à m . Soit γ le bord orienté de $\Omega(h)$. Alors la discussion de l'Appendice A et en particulier (A.19), montre que le projecteur spectral sur la somme directe des F_z avec $z \in \Gamma(t, h)$ est donné par

$$(9.33) \quad \Pi = \oint_{\gamma} (z-P)^{-1} dz = - \oint_{\gamma} E^+(z) E^{-+}(z)^{-1} E^-(z) dz .$$

Ici Π , $E^+(z)$, $E^{-+}(z)$, $E^-(z)$ sont des opérateurs de rang fini, donc nucléaires et on a

$$(9.34) \quad \begin{aligned} S = \text{tr } \Pi &= - \oint_{\gamma} \text{tr} (E^+(z) E^{-+}(z)^{-1} E^-(z)) dz \\ &= - \oint_{\gamma} \text{tr} (E^{-+}(z)^{-1} E^-(z) E^+(z)) dz . \end{aligned}$$

Le même argument donne aussi

$$(9.35) \quad m = - \oint_{\gamma} \text{tr} (E_0^{-+}(z)^{-1} E_0^-(z) E_0^+(z)) dz .$$

Nous avons $E^{-+} - E_0^{-+} = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2S_0/h}\right)$ sur $\overline{\Omega(h)}$ et de même sur le domaine légèrement plus grand du même type obtenu en remplaçant a, b par $\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}b$. Puisque $\frac{d}{dz} E^{-+} = E^- E^+$ et de même pour E_0^{-+} , les inégalités de Cauchy montrent que $E^- E^+ - E_0^- E_0^+ = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2S_0/h}\right)$ sur $\overline{\Omega(h)}$. Aussi pour $z \in \gamma$, $(E^{-+})^{-1} - (E_0^{-+})^{-1} = - (E^{-+})^{-1} (E^{-+} - E_0^{-+}) (E_0^{-+})^{-1} = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2S_0/h}\right)$ car $(E_0^{-+})^{-1}$ et $(E^{-+})^{-1}$ sont $\tilde{\mathcal{O}}(1)$ sur γ . Donc, $(E^{-+}(z))^{-1} E^-(z) E^+(z) - (E_0^{-+}(z))^{-1} E_0^-(z) E_0^+(z) = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2S_0/h}\right)$ uniformément pour $z \in \gamma$ et, par (9.34) et (9.35), on obtient $S - m = \tilde{\mathcal{O}}\left(e^{-2S_0/h}\right)$. Puisque S et m sont des entiers, on a $S = m$ pour h assez petit. ■

On s'intéresse maintenant au comportement des fonctions dans F_z , si z est une résonance, et on garde les hypothèses et les notations du Théorème 9.7. Pour $j = 1, \dots, m$, on pose $\psi_j = X \varphi_j$. Si $F = \bigoplus_{z \in \Omega(h)} F_z$ et $\Pi = \Pi_F = \sum_{z \in \Omega(h)} \Pi_{F_z}$ est le projecteur correspondant, on s'intéresse à :

$$(9.36) \quad v_j = \Pi \psi_j = \oint_{\gamma} (z-P)^{-1} \psi_j dz \quad , \quad \gamma = \partial\Omega(h) .$$

On remarque ici que le même argument de déformation que dans la démonstration du Théorème 8.5, montre que $(z-P)^{-1} w$, $z \in \partial\Omega(h)$ et donc Πw ne dé-

pendant pas de t, G pour h assez petit (ou plus précisément que deux choix différents de (t, G) donnant les mêmes fonctions $(z-P)^{-1}w$ et Πw pour h assez petit), pourvu que w soit à support compact. En particulier les fonctions v_j ne dépendent pas de t, G et on peut surtout choisir t arbitrairement petit. (On rappelle cependant que ψ_j et v_j dépendent de $\eta > 0$ qui intervient dans la définition de M_0).

Puisque $(P-\mu_j)\varphi_j = 0$, on a : $(P-\mu_j)\psi_j = [P, X]\varphi_j = r_j$, où $r_j = \mathcal{O}_\varepsilon(\exp(-d(U, x) - \varepsilon)/h)$ uniformément pour tout $\varepsilon > 0$ (et de même pour toutes les dérivées), et aussi $r_j = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/h})$. Donc $(P-z)\psi_j = (\mu_j - z)\psi_j + r_j$, $(z-P)^{-1}\psi_j = (z-\mu_j)^{-1}\psi_j + (z-P)^{-1}(z-\mu_j)^{-1}r_j$ et la substitution dans (9.36) donne

$$(9.37) \quad \Pi \psi_j - \psi_j = \oint_{\gamma} (z-P)^{-1} (z-\mu_j)^{-1} r_j dz .$$

Si $\Gamma(h) \subset \Omega(h)$ vérifie $\text{dist}(\Gamma(h), \{\mu_1, \dots, \mu_m\}) \geq C_\varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon/h)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et si $z \in \Gamma(h)$, on peut construire $(P-z)^{-1} = R(z)$ de la manière suivante ; avec $\psi \in C_0^\infty(\overset{\circ}{M}_0)$ comme dans l'étude de $\mathcal{G}(z)$ ci-dessus, on pose :

$$(9.38) \quad R_0(z) = \chi(P_{M_0} - z)^{-1} \psi + (\tilde{P} - z)^{-1} (1 - \psi) .$$

Alors

$$(9.39) \quad (P-z) R_0(z) = I + K(z) ,$$

$$(9.40) \quad K(z) = [P, X](P_{M_0} - z)^{-1} \psi + (V - \tilde{V})(\tilde{P} - z)^{-1} (1 - \psi) .$$

PUITS DANS UNE ISLE

Proposition 9.8. Soit $\Gamma(h) \subset \Omega(h)$ avec $\text{dist}(\Gamma(h), \{\mu_1, \dots, \mu_m\}) \geq C_\epsilon^{-1} \exp(-\epsilon/h)$ pour tout $\epsilon > 0$, et soit G une fonction fuite vérifiant (9.3) et (9.18). Alors pour tout $t > 0$ assez petit, $0 < h \leq h(t)$ avec $h(t) > 0$ assez petit et $z \in \Gamma(h)$, $\epsilon > 0$ la norme de $(P-z)^{-1} : H(\Lambda_t, 1) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$ se majore par $C(\epsilon, t) \exp(\epsilon/h)$. De plus, pour les mêmes valeurs de t et de h , on a :

$$(9.41) \quad K_{(P-z)^{-1}}(x, y) = \check{O}(\exp(-\check{d}(x, y)/h)) \quad , \quad x, y \in B_d(U, S_0) \quad ,$$

uniformément pour $z \in \Gamma(h)$. Ici $\check{d}(x, y) = \min(d(x, y), 2S_0 - d(U, x) - d(U, y))$.

Démonstration : On constate que les normes de $R_0(z) : H(\Lambda_t, 1) \rightarrow H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$ et $K(z) : H(\Lambda_t, 1) \rightarrow H(\Lambda_t, 1)$ se majorent respectivement par $C(\epsilon, t) \exp(\epsilon/h)$ et par $\check{O}(C_t e^{-S_0/2h})$. Alors $(P-z)^{-1} = R_0(z)(I - K(z) + K(z)^2 - \dots)$ avec convergence en norme et on obtient la première partie de la Proposition. Pour montrer (9.41), il suffit alors de montrer (9.41) avec $(P-z)^{-1}$ remplacé par $R_0(z) K(z)^j$, $1 \leq j \leq 4$. Or, $K_{(P_{M_0}-z)^{-1}} = \check{O}(e^{-\check{d}(x, y)/h})$, $x, y \in M_0$ et, puisque le Lemme 9.4 est valable pour $\eta > 0$ arbitrairement petit, on obtient $K_{(P-z)^{-1}}(x, y) = \check{O}(e^{-\check{d}(x, y)/h})$, $x, y \in B_d(U, S_0)$ aussi pour la nouvelle définition de \check{d} . On a alors $K_{R_0(z)}(x, y) = \check{O}(e^{-\check{d}(x, y)/h})$ et au sens modifié avec H^2 remplacé par L^2 on a aussi $K_{K(z)}(x, y) = \check{O}(e^{-\check{d}(x, y)/h})$. Puisque $\text{supp } K(z) \cup \subseteq \text{supp } \chi \subset \subset B_d(U, S_0)$, on obtient alors (9.41) pour $(P-z)^{-1}$ remplacé par $R_0 K^j$ comme souhaité. ■

Revenant aux formules (9.36), (9.37), nous allons montrer :

Théorème 9.9. Avec $v_j = \Pi \psi_j$, $\psi_j = \chi \varphi_j$ définis comme avant la Proposition 9.8, on a :

$$(9.42) \quad v_j - \psi_j = \check{O}(\exp(-(2S_0 - d(U, x))/h)) \quad \text{uniformément dans } M_0 \quad .$$

De plus, si l'on pose $s(x) = d(U, x)$ pour $x \in B_d(U, S_0)$ et $s(x) = S_0$ pour x en dehors de cet ensemble, alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(9.43) \quad v_j = \mathcal{O}(\exp(-(s(x) - \varepsilon)/h)) \quad , \quad x \in K \quad ,$$

uniformément quand $h \rightarrow 0$ (et de même pour toutes les dérivées).

On remarque ici que (9.42) dépend de η tandis que la majoration dans (9.43) contient un exposant qui ne dépend pas de η .

Démonstration du Théorème 9.9. : La majoration (9.42) résulte de la deuxième partie de la Proposition 9.8 et de (9.37).

De même la majoration (9.43) sur tout compact de $B_d(U, S_0)$ résulte de (9.36). Soit $0 < \tilde{\eta} < \eta$, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(B_d(U, S_0))$ égale à 1 sur $B_d(U, S_0^{-\tilde{\eta}})$. Alors on écrit :

$$(9.44) \quad (P-z)^{-1} \psi_j = \tilde{\chi} (P-z)^{-1} \psi_j - (P-z)^{-1} [P, \tilde{\chi}] (P-z)^{-1} \psi_j \quad ,$$

où le premier terme à droite se majore sans problème. Pour le deuxième terme on remarque que $[P, \tilde{\chi}] (P-z)^{-1} \psi_j = \mathcal{O}(e^{-(S_0 - \varepsilon(\tilde{\eta}))/h})$ dans $L^2(B_d(U, S_0))$ et donc $\mathcal{O}(\exp(-(S_0 - \varepsilon(\tilde{\eta}) - \delta(t))/h))$ dans $H(\Lambda_t, 1)$. Ici $\varepsilon(\tilde{\eta}) \rightarrow 0$, $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ et $\delta(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$. Donc $(P-z)^{-1} [P, \tilde{\chi}] (P-z)^{-1} \psi_j = \mathcal{O}(\exp(-(S_0 - \varepsilon(\tilde{\eta}) - \delta(t))/h))$ dans $H(\Lambda_t, \tilde{\chi}^2)$ (quitte à augmenter $\varepsilon(\tilde{\eta})$ où $\delta(t)$ un peu). Si $K \subset \subset \mathbb{R}^n$ on en déduit que le deuxième terme de (9.44) est $\mathcal{O}(\exp(-(S_0 - \varepsilon(\tilde{\eta}) - \tilde{\delta}(t))/h))$ dans $H^2(K)$, où $\tilde{\delta}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$. Puisque nous pouvons choisir $\tilde{\eta}$ et t arbitrairement petits, on obtient bien (9.43). ■

Corollaire 9.10. Les fonctions v_1, \dots, v_m forment une base dans F et la matrice de $P|_F$ pour cette base est de la forme $\text{diag}(v_j) + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})$.

PUITS DANS UNE ISLE

Démonstration : On se place dans $L^2(M_0)$. Alors d'après (9.42), $(v_j | v_k) \equiv (\psi_j | \psi_k) \equiv \delta_{j,k} \pmod{\tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})}$. Donc $V = ((v_j | v_k))$ est inversible et son inverse vérifie $V = I + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})$. Puisque $\dim F = m = \mathcal{O}(h^{-N_0})$ il est clair que $\{v_1, \dots, v_m\}$ est une base dans F . La matrice A de P dans cette base est donnée par :

$${}^t A = \left((P v_j | v_k) \right) V^{-1}$$

et, puisque $(P v_j | v_k) = \mu_j \delta_{j,k} + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})$, on obtient le corollaire. ■

Pour terminer cette section, nous allons maintenant montrer que $e^{S_0/h} v_j$ est exponentiellement petit localement dans $\overline{\tilde{\mathcal{O}} \setminus B_d(U, S_0)}$. Pour cela, on remarque d'abord que, d'après le Corollaire 9.10 et le Théorème 9.9, on a uniformément sur tout compact K :

$$(9.45) \quad (P - \mu_j) v_j = \mathcal{O}\left(e^{-(2S_0 + s(x) - \varepsilon(\eta))/h}\right), \quad x \in K$$

(et de même pour toutes les dérivées). En particulier, on a donc :

$$(9.46) \quad (P - \mu_j) v_j = \mathcal{O}\left(e^{-(3S_0 - \varepsilon(\eta))/h}\right), \quad x \in K \setminus B_d(U, S_0) .$$

En utilisant des inégalités L^2 à poids, on obtient alors :

Proposition 9.11. *Pour tout compact $K \subset \overline{\tilde{\mathcal{O}} \setminus B_d(U, S_0)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $v_j = \mathcal{O}\left(e^{-(S_0 + \varepsilon_0)/h}\right)$ uniformément sur K (et de même pour toutes les dérivées).*

Un point x de $\tilde{\mathcal{O}}$ sera dit de type 1 si $x \in \overline{B_d(U, S_0)}$ et les points de $\tilde{\mathcal{O}} \setminus B_d(U, S_0)$ seront appelés de type 2.

On se place maintenant près d'un point x_2 de type 2. Soit $\gamma(s) = (x(s), \xi(s))$ la trajectoire pour H_p avec $\gamma(0) = (x_2, 0)$. Alors $x(s) = x(-s)$. De plus, $x(s) \notin \partial \bar{0}$ pour tout $s \neq 0$, car si $s_0 \neq 0$ et $x(s_0) \in \partial \bar{0}$ alors on a aussi $x(s_0+s) = x(s_0-s)$ et en particulier $x(2s_0) = x(0)$ d'où $\gamma(2s_0) = \gamma(0) = (x_2, 0)$. Cette périodicité signifie que $\gamma(s)$ reste dans un compact pour tout $s \in \mathbb{R}$ en contradiction avec l'hypothèse (9.3). En particulier $x(t)$ évite tous les points de type 1 et $e^{S_0/h} (P-\mu_j)v_j$ est à décroissance exponentielle, uniformément sur tout compact dans un voisinage de $\Pi_x \gamma(I)$, où $I =]T_-, T_+[$ est l'intervalle maximal de définition pour $\gamma(s)$.

Soit G la fonction fuite (adaptée à η) vérifiant (9.3) et (9.18). On constate que $G(\gamma(s)) \rightarrow \pm \infty$ quand $s \rightarrow T_{\pm}$. En effet, puisque $\dot{x}(s) = \mathcal{O}(r)$, $\frac{d}{ds} G(\gamma(s)) \sim r^2$ il faut au moins un temps $\sim \frac{R}{r}$ à $x(s_0+s)$ pour sortir d'une boule de rayon $\epsilon_0 R(x(s_0))$ et pendant ce temps $G(\gamma(s_0+s))$ croît par une quantité $\geq Rr \geq 1$. Puisque $R(x) \leq 1 + |x|$, la trajectoire va traverser une infinité de telles boules (disjointes) avant d'atteindre ∞ par $t = T_{\pm}$. Cet argument montre aussi qu'il existe C_0 et s_0 tels que

$$(9.47) \quad \pm G(\gamma(s)) \geq \frac{1}{C_0} r(x(s)) R(x(s)) \text{ pour } \pm s \geq s_0 .$$

On choisit maintenant de représenter les espaces $H(\Lambda_t, \cdot)$ à l'aide d'une tf. F.B.I. : T adaptée à $\Lambda_0 = \mathbb{R}^{2n}$. Etudions alors la fonction poids associée à Λ_t . Cette variété est engendrée par la phase $\psi(x, \theta) = -(\text{Im } x)\theta + t G(\text{Re } x, \theta)$ de classe $\dot{S}^{1,1}$. Plus précisément $\Lambda_t = \left\{ (x, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \theta)) ; \psi'_\theta = 0 \right\}$. Il est alors clair que la fonction poids associée à $H(\Lambda_t, \cdot)$ est donnée par

$$(9.48) \quad \tilde{G}_t(\alpha) = \text{v.c.}_{(y, \theta)} (\varphi_1(\alpha, y) - \text{Im } y \cdot \theta + t G(\text{Re } y, \theta)) \quad , \quad \alpha \in \Lambda_0 \quad ,$$

PUITS DANS UNE ISLE

où $\varphi_1 = -\text{Im}\varphi$ et $\varphi(\alpha, y)$ est la phase de T . Ici, pour $t > 0$ assez petit, on a un unique point critique (non-dégénéré) dans $B(\alpha, \varepsilon_0)$; $(y(\alpha), \theta(\alpha))$ qui vérifie $(y - \alpha_x) = \mathcal{O}(t R(\alpha_x))$, $(\theta - \alpha_\tau) = \mathcal{O}(t \tilde{r}(\alpha_x))$. Bien entendu, $\tilde{G}_0 = 0$ et (9.48) entraînent :

$$(9.49) \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_t(\alpha) = G(\text{Re } y(\alpha), \theta(\alpha)) = G(\alpha) + \mathcal{O}(t \tilde{r} R) \quad ,$$

donc,

$$(9.50) \quad \tilde{G}_t(\alpha) = t G(\alpha) + \mathcal{O}(t^2 \tilde{r} R) \quad .$$

Pour $s \ll -s_0$, on obtient alors :

$$(9.51) \quad \tilde{G}_t(Y(s)) \leq t(1 + \mathcal{O}(t)) G(Y(s)) \leq \frac{t}{2} G(Y(s)) < 0 \quad ,$$

si $t > 0$ est assez petit, mais indépendant de s .

La méthode de démonstration du Théorème 9.9 montre aussi que $(1-X)v_j = \mathcal{O}_t(\exp(-(S_0 - \varepsilon(\eta))/h))$ dans $H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$ pour $t > 0$ assez petit. (Ici $\varepsilon(\eta) \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$ mais on ne va pas s'en servir. C'est d'ailleurs difficile car le domaine de validité de cette majoration en t risque de diminuer avec η). On fixe $t > 0$ assez petit. Si $\alpha > 0$, on peut trouver $s_1 \geq s_0$ tel que :

$$(9.52) \quad \tilde{G}_t(Y(-s_1)) \leq -(\varepsilon(\eta) + \alpha) \quad .$$

Soient maintenant $\bar{\Omega}_0 \subset \subset \bar{\Omega}_1$ deux voisinages de $\Pi_X \gamma([-s_1, 0])$ où $v_j = \mathcal{O}_\varepsilon(e^{-(S_0 - \varepsilon)/h})$ uniformément pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\bar{\Omega}_1)$ t.q. $\chi_0 = 1$ sur $\bar{\Omega}_0$. Alors :

$$(9.53) \quad \chi_0 v_j = \mathcal{O}_\varepsilon(e^{-(S_0 - \varepsilon)/h}) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \quad ,$$

et il existe $\beta > 0$ tel que :

$$(9.54) \quad TX_0 v_j = \mathcal{O}\left(e^{-(S_0+B)/h}\right)$$

uniformément dans un voisinage de $\Upsilon(-s_1)$. (Ceci est vrai au moins si l'on prend la précaution de choisir s_1 , puis Ω_0 et Ω_1 , assez grands pour que : $TX_0 v_j = Tv_j$ près de $\Upsilon(-s_1)$).

On rappelle ici également (9.46), qui donne :

$$(9.55) \quad (P-\mu_j)X_0 v_j = [P, X_0]v_j + \mathcal{O}_\varepsilon\left(e^{-2S_0/h}\right)$$

si $\eta > 0$ est assez petit. On est alors dans une situation entièrement semblable à celle du théorème sur la propagation des singularités analytiques le long des bicaractéristiques pour un opérateur de type principal réel. Concrètement, à l'aide d'une déformation de la fonction poids (comme dans [S.1]), on trouve un nombre $\Upsilon > 0$ et un voisinage Ω_2 de x_2 tels que

$$(9.56) \quad v_j = \mathcal{O}\left(e^{-(S_0+\Upsilon)/h}\right) \text{ uniformément dans } \Omega_2,$$

et de même pour toutes les dérivées de v_j .

Combinant ce résultat avec la Proposition 9.11, on obtient :

Proposition 9.12. *On suppose que $\eta > 0$ dans la définition de M_0 est assez petit. Alors tout compact dans $\overline{\tilde{0}} \setminus \mathcal{B}_d(U, S_0)$ admet un voisinage Ω dans \mathbb{R}^n et un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tels que : $v_j = \mathcal{O}(\exp(-(S_0 + \varepsilon_0)/h))$ uniformément sur Ω et de même avec v_j remplacé par $\partial_x^\alpha v_j$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

10. LE CAS D'UN PUITTS PONCTUEL NON-DEGENERE DANS UNE ISLE.

Dans cette section, on garde toutes les hypothèses de la section 9 et on suppose en plus :

$$(10.1) \quad U = \{x_0\} \quad \text{et} \quad V''(x_0) > 0 .$$

Alors pour $I(h)$ de la forme $[C_1 h, C_2 h]$ (ou plus petit) l'essentiel du travail sera de construire des fonctions propres asymptotiques sortantes définies dans un domaine ouvert convenable qui contient x_0 et tous les points du type 1. Une petite difficulté sera posée par l'apparition de caustiques près du bord, mais il se trouve que ces caustiques sont du type "pli" le plus simple et on s'en sort à l'aide d'une intégrale oscillante "du type d'Airy". On termine la section par une comparaison entre les fonctions asymptotiques et des générateurs des espaces F_z , et on en déduit des développements asymptotiques pour $e^{2S_0/h} \operatorname{Im} z(h)$ quand $z(h)$ est une résonance ainsi que des minoration et de majorations de cette quantité.

Commençons par étudier le comportement des phases. Nous avons constaté dans [H.S.1] que la fonction $f(x) = d(U, x) - S_0$ est analytique dans un voisinage de $x = x_0$, que :

$$(10.2) \quad q(x, f'_x) = 0$$

dans ce voisinage (où $q = \xi^2 - V(x)$) et que la variété réelle $\Lambda_f : \xi = f'(x)$ définie au-dessus d'un voisinage de 0 est en fait la variété stable sortante de dimension n , associée au champ de vecteurs H_q qui a un point critique en $(x_0, 0)$.

Soit $x_1 \in \partial\bar{0}$ un point de type 1. Soit $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots \in B_d(U, S_0)$ une suite qui converge vers x_1 . Pour chaque $x^{(v)}$ soit $\gamma^{(v)} :]-\infty, 0] \rightarrow B_d(U, S_0)$ une géodésique minimale de U à $x^{(v)}$ paramétrée comme la projection d'une bicaractéristique $\tilde{\gamma}^{(v)}$ pour q . Si $\tilde{\gamma}^{(v)}(0) = (x^{(v)}, \xi^{(v)})$ on a $\xi^{(v)} \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ et on en déduit que $\tilde{\gamma}^{(v)}$ converge uniformément vers l'unique bicaractéristique $\tilde{\gamma} :]-\infty, 0] \rightarrow (x(t), \xi(t))$ de $(U, 0)$ à $(x_1, 0)$. La projection $\gamma(t) = x(t)$ de $\tilde{\gamma}$ est (à reparamétrisation près) l'unique géodésique minimale de U à x_1 dans $\bar{0} \cup \{x_1\}$. On écrira souvent $\gamma(-\infty) = x_0, \tilde{\gamma}(-\infty) = (x_0, 0)$.

Dans [H.S.1], (section 6), nous avons fait une remarque (classique) qui dit ici qu'il existe un voisinage Ω de $\gamma([-\infty, 0[)$ où $f = d(x_0, x) - S_0$ est une fonction analytique. Au-dessus de Ω , la variété Lagrangienne Λ_f est donc bien définie. Puisque H_q ne s'annule pas dans un voisinage de $(x_1, 0)$ il est clair (avec un choix convenable de Ω) que Λ_f se prolonge en une variété H_q -invariante $\Lambda \subset q^{-1}(0)$, fermée dans un voisinage ouvert de $\tilde{\gamma}([-\infty, 0])$. Bien entendu, $\tilde{\gamma}(t) \in \Lambda, \forall t \in]-\infty, 0]$ et la projection naturelle $\Pi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ est à différentielle bijective en tout point $\tilde{\gamma}(t)$ avec $t < 0$. Puisque $\Pi(\Lambda) \subset \bar{0}$, $d\Pi$ ne peut pas être bijective en $\tilde{\gamma}(0) = (x_1, 0)$, et par ailleurs $\text{Ker } d\Pi(x_1, 0)$ contient le vecteur non nul H_q .

Lemme 10.1. $d\Pi(x_1, 0)$ est de rang $n-1$.

Démonstration : Soit $g(x) = -d(x, \partial\bar{0})$. Dans un voisinage de x_1 dans $\bar{0}$, on a : $g(x) = G(x, (-V(x))^{1/2})$, où G est une fonction analytique près de $(x_1, 0)$ et $G(x, s) \sim -s^3$. (Cela résulte facilement de l'étude des bicaractéristiques de q partant des points au-dessus de $\partial\bar{0}$. Voir aussi plus loin).

Par un développement de Taylor, on obtient d'abord : $|x(t) - x_1| = \mathcal{O}(t^2)$ et ensuite : $\ddot{x}(t) = 2\nabla V(x_1) + \mathcal{O}(t^2)$, d'où : $\dot{x}(t) = 2t \nabla V(x_1) + \mathcal{O}(t^3)$,

$x(t) = x_1 + t^2 \nabla V(x_1) + \mathcal{O}(t^4)$. On constate alors facilement que la restriction de la matrice $g''(x(t))$ à $(\dot{x}(t))^\perp$ reste bornée quand $t \nearrow 0$. Ici $(\dot{x}(t))^\perp$ désigne l'espace orthogonal de $\dot{x}(t)$ pour le produit scalaire standard de \mathbb{R}^n . Pour établir le lemme, il suffit de montrer que la restriction correspondante de $f''(x(t))$ à $(\dot{x}(t))^\perp$ reste bornée quand $t \nearrow 0$, car alors on obtient : $d\pi(T_{(x_1,0)}(\Lambda)) \supset \lim_{t \rightarrow 0} (\dot{x}(t))^\perp = T_{x_1}(\partial\bar{0})$.

Par la définition de S_0 , f , g , on obtient :

$$(10.3) \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad ,$$

où $h(x) \geq 0$ est analytique dans un voisinage de $\gamma([- \varepsilon_0, 0[)$, si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit. Pour avoir le contrôle voulu sur $f''(x(t)) \Big|_{(\dot{x}(t))^\perp}$, il suffit alors de montrer que :

$$(10.4) \quad h''(x(t)) \text{ reste borné pour } -\varepsilon_0 \leq t < 0 \quad .$$

On peut ici considérer $h''(x(t)) \geq 0$ comme une forme quadratique. Puisque $h \geq 0$ s'annule sur γ , il suffit de trouver une famille d'hyperplans

$H_t \subset T_{x(t)}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$(10.5) \quad \text{dist}(H_t, (\dot{x}(t))^\perp) \rightarrow 0 \quad ,$$

telle que $h'' \Big|_{H_t}$ reste borné quand $t \rightarrow 0$.

Si y est voisin de x_1 et t est voisin de 0, on définit $\kappa_t(y)$ comme la projection dans \mathbb{R}_x^n de $\exp(tH_q)(y,0)$. Alors $\kappa_t(y)$ dépend de manière C^∞ (et même analytique) de (t,y) , $\kappa_0 = \text{id}$ et $\Gamma_t = \kappa_t(\partial\bar{0})$ est donc une famille C^∞ d'hypersurfaces lisses avec $x(t) = \kappa_t(x_1) \in \Gamma_t$, et on a bien (10.5) avec $H_t = T_{x(t)}(\Gamma_t)$. On considère l'application C^∞ $F :]-\varepsilon_0, 0] \times \partial\bar{0} \ni (t,y) \rightarrow \kappa_t(y) \in \bar{0}$ qui permet d'identifier naturellement (et de

manière C^∞ par rapport à t) Γ_t à $\partial\bar{0}$. Alors $h|_{\Gamma_t} = h(\kappa_t(y))$ devient une fonction C^∞ $\tilde{h}(t,y)$ définie dans un voisinage ouvert de $[-\epsilon_0, 0[\times \{x_1\}$ dans $[-\epsilon_0, 0[\times \partial\bar{0}$ et il suffit de montrer que $\tilde{h}''_{\gamma\gamma}(t,x_1)$ est borné pour $t \in [-\epsilon_0, 0[$. On sait déjà que ce hessien est ≥ 0 .

Comparant les deux équations eiconales : $(f')^2 = V$ et $(g')^2 = V$, on trouve : $2g' \cdot h' = -(h')^2$, ce qui donne : $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{h} = -(h')^2 \leq 0$. Donc $t \rightarrow \tilde{h}''_{\gamma\gamma}(t,x_1)$ est une fonction décroissante quand $t \rightarrow 0$ et puisqu'elle est déjà minorée, elle est bien bornée quand $t \rightarrow 0$. ■

Nous avons déjà observé que $H_q \in \text{Ker } d\Pi(x_1, 0)$, et le Lemme 10.1 montre alors que

$$(10.6) \quad \text{Ker } d\Pi(x_1, 0) = (H_q) .$$

On va analyser la singularité en x_1 plus en détail et on commence par choisir des coordonnées euclidiennes centrées en x_1 telles que $T_{x_1}(\partial\bar{0})$ soit de la forme $x_n = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_n}$ soit la normale extérieure de $\bar{0}$ dans ce point. Alors

$$(10.7) \quad V(x) = -C_0 x_n + W(x) ,$$

où $C_0 > 0$ et $W(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$. Alors $H_q(x_1, 0) = -C_0 \frac{\partial}{\partial \xi_n}$ et la projection $\Lambda \ni (x, \xi) \rightarrow (x', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local près de $(0, 0)$ qui dans un voisinage de ce point Λ se représente par :

$$(10.8) \quad -x_n = \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) , \quad \xi' = \frac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi_n) ,$$

où g est analytique près de 0 , $g(0) = 0$, $dg(0) = 0$. De plus nous avons l'équation eiconale :

$$(10.9) \quad q(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}, \frac{\partial g}{\partial x'}, \xi_n) = 0 ,$$

où on substitue (10.7) :

$$(10.10) \quad -C_0 \frac{\partial g}{\partial \xi_n} + \xi_n^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)^2 - W(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}) = 0 \quad .$$

Soit $h(x') = g(x', 0) = \mathcal{O}(|x'|^2)$. On obtient alors de (10.10) :

$$(10.11) \quad \left. \frac{\partial g}{\partial \xi_n} \right|_{\xi_n=0} = \mathcal{O}(|x'|^2) \quad , \quad \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x' \partial \xi_n} \right|_{\xi_n=0} = \mathcal{O}(|x'|) \quad .$$

Dérivons ensuite (10.10) par rapport à ξ_n :

$$\begin{aligned} -C_0 \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} + 2 \xi_n + 2 \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n \partial x'} + \frac{\partial W}{\partial x'}(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}) \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} &= 0 \quad , \\ -C_0 \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} + 2 \xi_n + \mathcal{O}((|x'| + |\xi_n|)^2) + \mathcal{O}(|x'| + |\xi_n|) \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} &= 0 \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$(10.12) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = \frac{2}{C_0} \xi_n + \mathcal{O}(|(x', \xi_n)|^2) \quad ,$$

$$(10.13) \quad \frac{\partial^3 g}{\partial \xi_n^3} = \frac{2}{C_0} + \mathcal{O}(|(x', \xi_n)|) \quad .$$

On voit donc que $\Pi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ devient singulière exactement sur l'hypersurface $H \subset \Lambda$ donnée par :

$$(10.14) \quad H : \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_n = \xi_n^C(x') \quad ,$$

où $\xi_n^C(x') = \mathcal{O}(|x'|^2)$ est analytique en x' . Puisque $H_q(0,0)$ est transverse à H , $d\Pi|_H$ est de rang maximal $n-1$ et $C = \Pi(H)$ est une hypersurface analytique contenue dans $\bar{0}$ et tangente à $\partial \bar{0}$ en x_1 .

Dans un voisinage de $\Upsilon([-\varepsilon_0, 0[)$, on peut représenter f par la formule :

$$(10.15) \quad f(x) = v.c. \xi_n (x_n \xi_n + g(x', \xi_n)) \quad ,$$

où il faut seulement bien déterminer le choix du point critique. Ecrivons les développements de Taylor en $(\xi_n - \xi_n^C(x'))$:

$$(10.16) \quad g(x', \xi_n) = a(x') + b(x') (\xi_n - \xi_n^C(x')) + \frac{1}{3} c(x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^C(x'))^3 \quad ,$$

$$(10.17) \quad \frac{\partial g}{\partial \xi_n} = b(x') + c'(x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^C(x'))^2 \quad ,$$

$$(10.18) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = 2 c''(x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^C(x')) \quad ,$$

où $c, c', c'' > 0$ coïncident pour $\xi_n = \xi_n^C(x')$ et $b(x') = \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n^C(x')) = \mathcal{O}(|x'|^2)$ d'après (10.11) et le fait que : $\xi_n^C(x') = \mathcal{O}(|x'|^2)$.

L'hypersurface caustique C est donnée par :

$$(10.19) \quad x_n + b(x') = 0 \quad .$$

" Calculons " maintenant f à l'aide de (10.15) ; le point critique est donné par :

$$(10.20) \quad x_n + b(x') + c'(x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^C(x'))^2 = 0 \quad ,$$

donc $\xi_n - \xi_n^C(x')$ est une fonction analytique de x' , $(-x_n + b(x'))^{1/2}$, et on peut réécrire (10.20) comme :

$$(10.21) \quad \xi_n - \xi_n^C(x') = \pm \left(-\frac{1}{c'} (x_n + b) \right)^{1/2} \quad .$$

Pour $x_n + b(x') < 0$, on a donc deux racines réelles et puisque f doit être croissante sur γ quand x_n augmente, on voit facilement qu'il faut choisir le signe + dans (10.21) pour récupérer f dans (10.15) et que :

$$f(x) = a(x') + x_n \xi_n^C(x') + (x_n + b) (\xi_n - \xi_n^C(x')) + \frac{1}{3} c(x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^C(x'))^3$$

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

où il faut donc substituer (10.21) avec le signe + :

$$(10.22) \quad f(x) - (a(x') + x_n \xi_n^C(x')) = - \frac{2}{3c^{1/2}} (-x_n + b)^{3/2} .$$

Ici $\tilde{c} > 0$ est une fonction analytique de x , $(-x_n + b)^{1/2}$ égale à $c(x', \xi_n^C(x'))$ pour $x_n + b = 0$. Donc :

$$(10.23) \quad f(x) = a(x') + x_n \xi_n^C(x') + G(x, (-x_n + b)^{1/2})$$

où $G(x, s)$ est une fonction analytique avec $G = \mathcal{O}(s^3)$.

Près de $x_n = 0$, on voit donc que f se prolonge analytiquement au domaine $x_n + b < 0$ et de manière C^1 dans $x_n + b \leq 0$ et que : $\tilde{f} = f/C = a(x') + x_n \xi_n^C(x')$ est de nouveau analytique. Pour ce prolongement, on a : $f(x) \geq d(U, x) - S_0$.

En un point de $H (= \Pi^{-1}(C))$ on sait que $d\Pi(H_q)$ est tangent à C . D'autre part, par l'équation eiconale pour f (qui reste valable pour $x_n + b \leq 0$), cette projection vaut $2 \nabla f(x)$ et donc :

$$(10.24) \quad \nabla f(x) \in T_x C \quad \text{pour } \forall x \in C .$$

Si on munit C de la métrique euclidienne induite, il est alors clair que :

$$(10.25) \quad \|\nabla \tilde{f}\| = \|\nabla f\| \quad , \quad (\nabla \tilde{f})^2 = V \quad \text{sur } C .$$

Puisque la distance d'Agmon d'un point $x \in C$ à $\partial\Omega$ est de l'ordre de grandeur $V(x)^{3/2}$, l'inégalité triangulaire montre qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

$$S_0 + \tilde{f}(x) + C_0 V(x)^{5/2} \geq S_0 \quad , \quad \forall x \in C \quad ,$$

$$(10.26) \quad \tilde{f}(x) \geq -C_0 (V(x))^{3/2} \quad , \quad \forall x \in C .$$

Lemme 10.2. Il existe un voisinage U de x_1 dans C et une constante $C > 0$ tels que $\tilde{f}(x) \geq CV(x)$, $x \in U$.

Démonstration : On travaille sur C près de x_1 où V est une fonction ≥ 0 et analytique. Si $\epsilon_0 > 0$ est assez petit et si $|y| \leq \epsilon_0 V(x)^{1/2}$, alors $V(x), V(x-y)$ sont du même ordre de grandeur (uniformément quand x et y varient). Si on applique un développement de Taylor à $f(x-y)$, on obtient à l'aide de (10.26) et de l'observation ci-dessus :

$$\tilde{f}(x) - \nabla \tilde{f}(x) \cdot y + C_1((V(x))^{3/2} + y^2) \geq 0 .$$

Avec $y = \epsilon \nabla \tilde{f}(x)$, on trouve à l'aide de l'équation eiconale dans (10.25) :

$$\tilde{f}(x) - \epsilon V(x) + C_1((V(x))^{3/2} + \epsilon^2 V(x)) \geq 0 ,$$

ce qui donne l'inégalité voulue si on est assez près de x_1 , où V est aussi petit que l'on veut, et si l'on choisit $\epsilon > 0$ assez petit. ■

Remarque 10.3. Supposons que (près de x_1) $C \cap \partial \bar{0} = \Gamma$ soit une sous-variété lisse. Par une analyse facile et directe de l'équation eiconale (10.25) et en utilisant aussi le lemme précédent, on voit que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(*) C a un contact d'ordre 2 exactement avec $\partial \bar{0}$ le long de Γ ,
c.à.d. : $V|_C(x) \sim \text{dist}(x, \Gamma)^2$.

(**) $\tilde{f} = f|_C$ s'annule à l'ordre 2 exactement sur Γ , c.à.d.
 $\tilde{f}(x) \sim \text{dist}(x, \Gamma)^2$. D'autre part, (**) entraîne que Γ est une sous-variété pas seulement C^∞ , mais analytique.

On peut prolonger f au travers de C à l'aide de (10.15), mais le prolongement n'est pas unique, car il n'y a pas de choix canonique parmi les deux points critiques qui sont maintenant complexes. Bien entendu, les

deux extensions de f sont aussi données par (10.23), où il faut maintenant choisir une branche de la racine carrée. Pour $x_n + b \geq 0$, on obtient $f = f_1 + i f_2$ où f_1, f_2 sont réels et analytiques en $(x, (x_n + b(x'))^{1/2})$, $f_1|_C = \tilde{f}$, $f_2|_C = 0$. De plus,

$$(10.27) \quad f_2(x) \sim (x_n + b(x'))^{3/2},$$

pendant que f_1 est analytique dans $x_n + b \geq 0$. Evidemment, les deux extensions de f peuvent aussi s'obtenir par prolongement holomorphe de f , où il s'agit simplement de contourner le complexifié de C dans un sens ou dans l'autre. Il est alors clair que l'équation eiconale $(f')^2 = V$ reste vérifiée dans $x_n + b \geq 0$ et on obtient donc :

$$(10.28) \quad \nabla_{f_2}(f_1) = 0, \quad (\nabla f_1)^2 = (\nabla f_2)^2 + V(x).$$

Si l'on pose $\tilde{g} = x_n + b$, il résulte de (10.27) que ∇_{f_2} est un champ de vecteurs à coefficients analytiques en $x, \tilde{g}^{1/2}$ de la forme $\nabla_{f_2} = \mathcal{O}(\tilde{g}) + a(x, \tilde{g}^{1/2}) \tilde{g}^{1/2} \nabla_{\tilde{g}}$ avec $a > 0$. En coordonnées locales $y = (y', y_n)$ t.q. C soit donnée par $y_n = 0$ et $\nabla_{\tilde{g}} = \frac{\partial}{\partial y_n}$, on trouve alors :

$$(10.29) \quad \nabla_{f_2} = \sum_1^n a_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad a_j(y) = \mathcal{O}(y_n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ a_n(y) \sim y_n^{1/2},$$

où de plus a_j est une fonction analytique de $(y', y_n^{1/2})$. On peut alors désingulariser ∇_{f_2} à l'aide du changement de variables : $z' = y'$, $z_n = y_n^{1/2}$ qui donne :

$$(10.30) \quad \nabla_{f_2} = \sum_1^n b_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad b_j(z) = \mathcal{O}(z_n^2), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ b_n(z) \sim 1.$$

Le changement de variables $x \rightarrow z$ est un difféomorphisme analytique local de $x_n + b > 0$ sur $z_n > 0$, et la première équation de (10.28) et le Lemme 10.2 montrent que :

$$(10.31) \quad f_1 \geq 0 ,$$

et on a égalité exactement pour les points x t.q., pour un $t < 0$ convenable, on ait : $\exp t \nabla_{f_2}(x) \in \{y \in C; \tilde{f}(y) = 0\} = \{l'ensemble des points du type 1\} \subseteq C \cap \partial \tilde{0}$.

Remarque 10.4. Faisons les hypothèses de la Remarque 10.3, y compris (*) et donc (**). Dans ce cas, Γ est l'ensemble des points du type 1 et l'ensemble G des x avec $x_n + b(x') > 0$, tels que $\exp(t \nabla_{f_2})(x) \in \Gamma$ pour un $t = t(x) < 0$ convenable, est une sous-variété analytique avec $\text{codim}_{\mathbb{R}^n} G = \text{codim}_{\mathbb{C}} \Gamma$, d'après le changement de variables $x + z$ ci-dessus. De plus, $f_1(x) \sim \text{dist}(x, G)^2$ uniformément dans $x_n + b(x') \geq 0$.

Près de x_1 , nous allons maintenant étudier des fonctions oscillantes de la forme

$$(10.32) \quad u(x, h) = I(a)(x, h) = h^{-\frac{1}{2}} \int_{\gamma(x)} a(x', \xi_n, h) e^{-i(x_n \xi_n + g(x', \xi_n))/h} d\xi_n ,$$

où $a(x', \xi_n, h)$ est une réalisation (voir [S.1] pour la terminologie utilisée) d'un symbole (semi)-classique analytique défini dans un voisinage de $x' = 0$, $\xi_n = 0$:

$$(10.33) \quad a(x', \xi_n, h) \sim h^{-m} \sum_{j \in \frac{1}{2} \mathbb{N}} a_j(x', \xi_n) h^j .$$

Ici tous les a_j sont définis et holomorphes dans le même voisinage de 0 et vérifient la condition de croissance habituelle :

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

$$(10.34) \quad |a_j(x', \xi_n)| \leq C^{j+1} j^j .$$

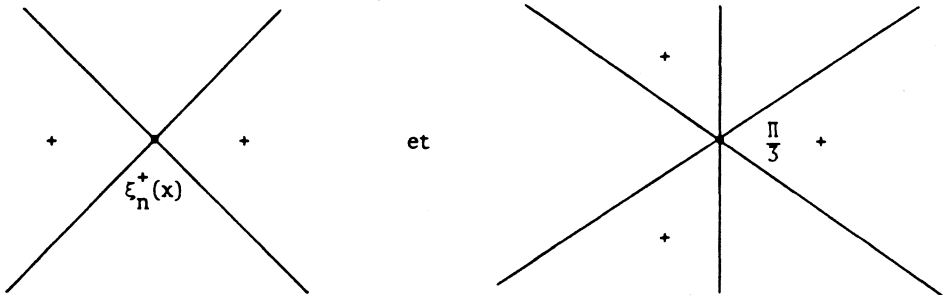
Le mot "semi" se réfère aux demi-puissances de h qui apparaissent mais qui ne causent aucune différence essentielle par rapport au cas des symboles classiques.

Il faut bien entendu spécifier le choix de $\gamma(x)$ dont les extrémités seront fixées. On cherche à rendre $\text{Re}(x_n \xi_n + g(x', \xi_n))$ aussi grand que possible sur γ :

I. Pour $x_n + b(x') < 0$, on a deux points critiques réels en $\xi_n : \xi_n^\pm(x)$ avec $\xi_n^-(x) < \xi_n^c(x') < \xi_n^+(x)$. La fonction $\mathbb{R} \ni \xi_n \rightarrow x_n \xi_n + g(x', \xi_n)$ a un maximum en ξ_n^- et un minimum en ξ_n^+ . A l'intérieur de $\bar{0}$ on cherche plutôt à avoir la solution (10.32) qui est exponentiellement grande et on va donc faire passer $\gamma(x)$ par ξ_n^+ . On a d'après (10.18) et du fait que $\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_n^3} > 0$:

$$(10.35) \quad x_n \xi_n + g(x', \xi_n) = f(x) + \varepsilon(x) (\xi_n - \xi_n^+)^2 + \check{c}(x) (\xi_n - \xi_n^+)^3 + \dots$$

où $\varepsilon(x) > 0$, en effet $\varepsilon(x) = c''(x', \xi_n^+) (\xi_n^+ - \xi_n^c) \sim -(x^n + b)^{1/2}$ et $\check{c}(x) > 0$ reste uniformément minoré par une constante > 0 dans tout un voisinage de 0. On dessine alors les régions, où $\text{Re} \varepsilon(x) (\xi_n - \xi_n^+)^2 > 0$ et $\text{Re} \check{c}(x) (\xi_n - \xi_n^+)^3 > 0$ qui sont respectivement :



On choisit alors γ près de $\xi_n = \xi_n^+$ de la forme :

$$\gamma(x)(t) = \xi_n^+(x) + t e^{i\theta(\text{in})t} \quad -\epsilon_0 \leq t \leq 0$$

$$\gamma(x)(t) = \xi_n^+(x) + t e^{i\theta(\text{out})t} \quad 0 \leq t \leq \epsilon_0$$

où $\theta(\text{out}) \in]0, \pi/6[$, $\theta(\text{in}) \in]\pi/6, \pi/4[$. Alors, sur cette partie de $\gamma(x)$, on obtient :

$$(10.36) \quad \text{Re}(x_n \xi_n + g) \geq f(x) + C_0 |\xi_n - \xi_n^+|^3,$$

où $C_0 > 0$ ne dépend pas de x .

II. Pour $x_n + b = 0$, la discussion précédente s'applique avec $\epsilon = 0$, et on fait le même choix de $\gamma(x) \Big|_{[-\epsilon_0, \epsilon_0]}$.

III. Pour $x_n + b > 0$, on a deux points critiques conjugués ξ_n' et ξ_n'' avec $\text{Im} \xi_n' < 0$. Des considérations géométriques (voir la Remarque 10.6, 10.42) montrent que si l'on veut construire des solutions asymptotiquement sortantes au sens de (10.41) et (10.43), alors il faut définir $f(x)$ comme la valeur critique : $x_n \xi_n' + g(x', \xi_n')$. Il faut donc faire passer γ par ξ_n' . On a

$$x_n \xi_n + g(x', \xi_n) = f(x) - i \epsilon(x) (\xi_n - \xi_n')^2 + \check{c}(x) (\xi_n - \xi_n')^3 + \dots,$$

où $\epsilon(x) = \alpha(x)(1 + i o(1))$, $\check{c}(x) = \hat{c}(x)(1 + i o(1))$, quand $x_n + b \rightarrow 0$, où $\alpha(x) > 0$, $\hat{c}(x) \geq \text{const.} > 0$. Le terme cubique a donc le même comportement qu'avant, tandis que $\text{Re}(-i \epsilon (\xi_n - \xi_n')^2)$ est > 0 grosso-modo pour $\arg(\xi_n - \xi_n') \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$. On peut alors choisir $\gamma(x) \Big|_{[-\epsilon_0, \epsilon_0]}$ essentiellement de la même façon avec les mêmes valeurs de $\theta(\text{in})$, $\theta(\text{out})$:

$$\gamma(x)(t) = \xi_n'(x) + t e^{i\theta(\text{in})t}, \quad -\epsilon_0 \leq t \leq 0,$$

$$\gamma(x)(t) = \xi_n'(x) + t e^{i\theta(\text{out})t}, \quad 0 \leq t \leq \epsilon_0,$$

et, sur cette partie de $\gamma(x)$, on a encore (10.36), quitte à remplacer ξ_n^+ par ξ_n^+ et f par $\text{Re } f$. (Pour obtenir la solution asymptotiquement rentrante c.à.d. celle avec f remplacée par \bar{f} dans la zone III, il suffit de remplacer $\gamma(x)$ par son image par conjugaison complexe ; $\overline{\gamma(x)}$. Par déformation de contours on voit alors que, dans la zone I, la solution sortante et la solution rentrante coïncident modulo une erreur exponentiellement petite par rapport à $e^{-f(x)/h}$).

Pour x assez voisin de x_1 , on peut maintenant facilement étendre la définition de $\gamma(x)$ à $[-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$ de telle manière que

- 1°) $\gamma(x) ([-2\varepsilon_0, -\varepsilon_0] \cup [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0])$ reste uniformément éloigné de ξ_n^+ et ξ_n^+ respectivement ,
- 2°) $\gamma(x) (\pm 2\varepsilon_0)$ ne dépend pas de x ,
- 3°) (10.36) reste valable sur l'image de $\gamma(x)$ (avec les modifications " $\xi_n^+ \rightarrow \xi_n^+$ " , " $f \rightarrow \text{Re } f$ " pour $x_n + b > 0$).

Soit x_3 assez proche de x_1 , dans la région $x_n + b(x') < 0$ et soit \tilde{U} un petit voisinage complexe de x_3 . Alors, pour $x \in \tilde{U}$, l'intégrale (10.32) peut être "calculée" à l'aide de la méthode du col (voir par exemple [Sj, Astérisque n° 95], section 2) et on trouve

$$(10.37) \quad I(a)(x, h) = \tilde{a}(x, h) e^{-f(x)/h} ,$$

où \tilde{a} est aussi la réalisation d'un symbole semi-classique analytique d'ordre m . Pour connaître le développement asymptotique de \tilde{a} dans \tilde{U} , il suffit de connaître celui de a dans $U = \{(x', \xi_n^+(x)) ; x \in \tilde{U}\}$.

On a donc une application des symboles analytiques semi-classiques formels d'ordre m définis dans U dans la même classe vis-à-vis de \tilde{U} , qui est donnée via un opérateur intégral de Fourier elliptique au sens de [S.1], section 4, et on sait donc aussi que cette application est bijective.

Il faut maintenant analyser l'action de $P = -h^2 \Delta + V$ sur $I(a)$.

Proposition 10.5. Soit a comme dans (10.32). Alors il existe un voisinage U de x_1 et un nombre $\epsilon_1 > 0$ tels que :

$$(10.38) \quad \begin{aligned} P(x, \tilde{D}_x)(I(a)(\cdot, h)) - h^{-\frac{1}{2}} \int_{\gamma(x)} e^{-x_n \xi_n / h} \tilde{P}(x', \xi_n, \tilde{D}_x, \tilde{\partial}_{\xi_n}, h) (e^{-g/h} a) d\xi_n \\ = \mathcal{O}(e^{-(\text{Re } f(x) + \epsilon_1)/h}) \end{aligned}$$

uniformément pour $x \in U$. Ici $\tilde{P} = \tilde{D}_x^2 - \xi_n^2 + V(x', \tilde{\partial}_{\xi_n})$, où $\tilde{D} = hD$, $\tilde{\partial} = h\partial$ et où $V(x', \tilde{\partial}_{\xi_n})$ est considéré comme un opérateur pseudodifférentiel dont l'action sur $e^{-g/h} a$ est définie soit par le développement asymptotique standard, soit à l'aide d'un contour d'intégration dans l'espace ξ_n, θ où θ indique la variable duale de ξ_n . (Voir [S.1], section 4).

Démonstration : L'action de $-h^2 \Delta$ sur $I(a)$ est facile à calculer et donne lieu à l'opérateur $\tilde{D}_x^2 - \xi_n^2$ sur $e^{-g/h} a$. Il s'agit donc seulement de transformer la multiplication par $V(x)$. On peut ici traiter x', x_n comme des paramètres, par rapport auxquels il faut travailler uniformément. Alors si $\phi(x', \xi_n) = -\text{Re}(x_n \xi_n + g)$, on a (dans un assez grand voisinage de $(0,0)$) :

$$(10.39) \quad \begin{aligned} e^{-x_n \xi_n} V(x', \tilde{\partial}_{\xi_n}) (e^{-g(x', \xi_n)/h} a(x', \xi_n, h)) = \\ = V(x', x_n + \tilde{\partial}_{\xi_n}) (e^{-(x_n \xi_n + g(x', \xi_n))/h} a(x', \xi_n, h)) + \mathcal{O}(e^{(\phi - \epsilon_1)/h}) \end{aligned}$$

D'autre part : $V(x', x_n + \tilde{\partial}_{\xi_n}) = V(x) + \tilde{\partial}_{\xi_n} \circ F(x, \tilde{\partial}_{\xi_n})$, où F est un opérateur pseudodifférentiel en ∂_{ξ_n} . Modulo des erreurs exponentiellement petites par rapport à $e^{\phi/h}$, on obtient alors :

$$(10.40) \quad \begin{aligned} V(x', \xi_n + \tilde{\partial}_{\xi_n}) (e^{-(x_n \xi_n + g)/h} a) \\ = V(x) (e^{-x_n \xi_n + g/h} a) + \tilde{\partial}_{\xi_n} (e^{-(x_n \xi_n + g)/h} c) \end{aligned}$$

où c est le symbole analytique (semi-classique) qui apparaît dans :

$$F(x, \tilde{\partial}_{\xi_n}) (e^{-\frac{(x_n \xi_n + g)}{h}})_a = e^{-\frac{(x_n \xi_n + g)}{h}} c(x', \xi_n, h) .$$

Il suffit alors de constater que :

$$\int_Y \tilde{\partial}_{\xi_n} (e^{-\frac{(x_n \xi_n + g)}{h}})_c d\xi_n = \left[h e^{-\frac{(x_n \xi_n + g)}{h}} \right]_{\gamma(-2 \varepsilon_0)}^{\gamma(2 \varepsilon_0)} = \mathcal{O}(e^{-(\operatorname{Re} f + \varepsilon_1)/h}) ,$$

où $\varepsilon_1 > 0$. ■

Remarque 10.6. Soit x_4 assez proche de x_1 dans la région $x_n + b > 0$. Alors l'intégrale (10.32) se "calcule" aussi par la méthode de col dans un voisinage de x_4 , et on a encore (10.37) que l'on préfère maintenant écrire comme :

$$(10.41) \quad I(a)(x, h) = \tilde{a}(x, h) e^{i(\operatorname{if})(x)/h} ,$$

où \tilde{a} est comme après (10.37). Le choix du point critique ξ'_n plutôt que ξ''_n détermine un choix de branche de f , et on rappelle (c.f. (10.31)) que :

$$(10.42) \quad \operatorname{Im} i f(x) \geq 0 .$$

Si on pose alors $\Lambda_{i f} = \{(x, i f'_x(x))\}$ où x varie dans un petit voisinage complexe de l'ensemble des points x réels (et proches de x_1) tels que $x_n + b(x') > 0$, et $\Lambda_{i f, \mathbf{R}} = \{(x, i f'_x(x)) ; x \text{ est réel et } \operatorname{Im} i f(x) = 0\}$, alors (localement) :

$$(10.43) \quad \Lambda_{i f} \subset p^{-1}(0) , \quad \Lambda_{i f, \mathbf{R}} = \{ \exp(t H_p)(x, 0) ; t > 0 , x \in \partial \bar{0} \cap B_d(U, S_0) \} .$$

Le fait que l'on a ici " $t > 0$ " plutôt que " $t < 0$ " signifie que $I(a)$ est asymptotiquement sortant.

Rappelons maintenant les constructions BKW de [HS.I]. Soit $-\Delta_y + \frac{1}{2} \langle V''(x_0)y, y \rangle$ l'oscillateur harmonique localisé associé à P, U . C'est un opérateur auto-adjoint semi-borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec un spectre discret et dont les valeurs propres sont de la forme $\sum_j^{\infty} (\alpha_j + \frac{1}{2}) \mu_j$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Ici $\mu_j > 0$ et $\pm \mu_1, \dots, \pm \mu_n$ sont les valeurs propres du linéarisé du champ hamiltonien en $(U, 0)$; cette description donne aussi la multiplicité des valeurs propres de manière naturelle. Soit E_0 une valeur propre de multiplicité N_0 et $\epsilon_0 > 0$ assez petit pour que $[E_0 - \epsilon_0, E_0 + \epsilon_0]$ ne rencontre pas d'autres valeurs propres. On pose alors $I_0(h) = [h(E_0 - \epsilon_0), h(E_0 + \epsilon_0)]$ et on rappelle le :

Théorème 10.7. ([H.S.1], Le résultat correspondant dans le cas C^∞ est essentiellement dû à B. Simon [Si.2]).

Si $h > 0$ est assez petit, alors $I_0(h)$ contient exactement N_0 valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) ; μ_1, \dots, μ_{N_0} . Ici chaque valeur propre est la réalisation d'un symbole analytique (semi)-classique

$$(10.44) \quad \mu_j(h) \sim h \sum_{k \in \frac{1}{2} \mathbb{N}} E_{j,k} h^k, \quad E_{j,0} = E_0$$

(où donc plus précisément, pour chaque $C > 0$ assez grand, il existe un $\epsilon > 0$ tel que :

$$|\mu_j - h \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{C} h} E_{j,k} h^k| = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h}), \quad h \rightarrow 0).$$

On dit que μ_{j_0} a la multiplicité asymptotique N_1 , si il y a exactement N_1 des μ_j avec le même développement asymptotique que μ_{j_0} . La vraie multiplicité de μ_{j_0} est donc (pour $h > 0$ assez petit) inférieure ou égale à N_1 .

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

Théorème 10.8. ([H.S.1]). Soit μ_1 une des valeurs propres du théorème précédent et soit N_1 sa multiplicité asymptotique. Soit E l'espace engendré par les vecteurs propres correspondants. Alors il existe une base O.N. $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_1}$ dans E telle que, dans un voisinage $\tilde{\Omega} \subset \overset{\circ}{M}_0$ (convenable) de U , on ait :

$$(10.45) \quad \varphi_j(x, h) = h^{-n/4} a_j(x, h) \exp -d(U, x)/h .$$

Ici a_j est une réalisation d'un symbole analytique (semi)-classique :

$$(10.46) \quad a_j(x, h) \sim \sum_{-\infty}^{2m_j} a_{j, \nu}(x) h^{-\nu/2} ,$$

où les $a_{j, \nu}$ sont holomorphes dans un ouvert $\tilde{\Omega} \subset \mathcal{C}^n$ avec $\tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ et $a_{j, \nu} = \mathcal{O}(|x-x_0|^\nu)$ pour $\nu > 0$.

Dans la suite on se place toujours sous les hypothèses du Théorème 10.8. Avec $N_2 > 0$ assez grand et $I(h) = [\mu_1(h) - h^{N_2}, \mu_1(h) + h^{N_2}]$, on pourra appliquer les résultats de la section 9 (en remarquant toutefois que les φ_j ne sont pas nécessairement des fonctions propres mais qu'il existe une matrice orthogonale $(\omega_{j,k}(h))$ telle que les fonctions $\tilde{\varphi}_j = \sum \omega_{j,k} \varphi_k$ le sont). Il s'agit donc d'étudier N_1 résonances (comptées avec leur multiplicité) et en particulier leurs parties imaginaires.

La première étape (déjà en grande partie achevée) est de prolonger les solutions BKW dans (10.45) comme solutions approchées convenables de l'équation : $(P - hE(h))\varphi \sim 0$. Ici on écrit : $\mu_1(h) = hE(h)$, $E(h) \sim \sum_{\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} E_\nu h^\nu$.

Soit $\tilde{\Omega}$ un petit voisinage ouvert de $\gamma([-\infty, 0])$ que l'on diminuera un nombre fini de fois dans la suite. On pose $\tilde{\Omega}_+ = \{x \in \tilde{\Omega}; x_n + b(x') > 0\}$, $\tilde{\Omega}_- = \tilde{\Omega} \setminus (\tilde{\Omega}_+ \cup C)$. Alors comme nous l'avons déjà constaté, $S_0 + f(x) (\geq d(U, x))$ sera une fonction analytique dans $\tilde{\Omega}_-$. Pour alléger les notations, on se

concentre sur $\varphi = \varphi_1$ et on écrira a à la place de a_j . On peut alors facilement étendre la définition de $a(x, h)$ à $\tilde{\Omega}_-$ comme symbole analytique formel, en résolvant successivement les équations de transport imposées sur les différents termes dans le développement asymptotique de a par l'équation formelle :

$$(10.47) \quad e^{f(x)/h} (P - hE(h)) (e^{-f(x)/h} a) \sim 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_-.$$

Près de C , f et a développent des singularités, donc dans un voisinage de $\gamma(-\epsilon)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit on représente $a e^{-f/h}$ formellement comme $I(c)(x, h)$ où c est un symbole analytique semi-classique formel du même ordre que a . A priori $c(x', \xi_n, h)$ sera défini seulement dans un petit voisinage de $(x'(-\epsilon), \xi_n(-\epsilon))$, où $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), \xi(t)) = (\gamma(t), \xi(t))$ est la bicaractéristique de $q = \xi^2 - V$ qui se projette sur γ . Or, la correspondance $c \rightarrow a$ est une bijection et donc d'après la Proposition 10.5, on sait que formellement :

$$(10.48) \quad e^{g/h} (\tilde{P} - hE(h)) (e^{-g/h} c) \sim 0.$$

Cela même à des équations de transport pour c qui font intervenir un opérateur de transport dont la partie différentielle est un champ de vecteurs dont $t \rightarrow (x'(t), \xi_n(t))$ est une des courbes intégrales. On a donc une manière de prolonger la définition de c à tout un voisinage de $\{(x'(t), \xi_n(t)); |t| \leq \epsilon\}$ de telle manière que (10.48) reste valable.

Si l'on choisit une réalisation de c , on peut alors définir $I(c)(x, h)$ dans tout un voisinage de x_1 vérifiant :

$$(10.49) \quad I(c)(x, h) = \mathcal{O}(h^{m_1 - 1/2}) e^{-\text{Re } f/h}$$

$$(P - \mu_1)(I(c))(x, h) = \mathcal{O}(e^{-(\text{Re } f + \epsilon_1)/h})$$

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

uniformément, où $\varepsilon_1 > 0$. Dans un voisinage de $\gamma(-\varepsilon)$, on a aussi :

$$(10.50) \quad I(c) - a e^{-f/h} = \mathcal{O}(e^{-(\text{Re } f + \varepsilon_1)/h}) ,$$

si a dénote aussi une réalisation.

Quitte à diminuer $\tilde{\Omega}$ on peut maintenant recoller $I(c)$ et $a e^{-f/h}$ à l'aide d'une troncature C^∞ standard, et on obtient :

Proposition 10.9. *Sous les hypothèses du Théorème 10.8., il existe un voisinage ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\gamma([-\infty, 0])$, des fonctions $u_1(x, h), \dots, u_{N_1}(x, h) \in C^\infty(\tilde{\Omega})$, des symboles analytiques formels $a_1(x, h), \dots, a_{N_1}(x, h)$ définis dans $\tilde{\Omega} \setminus C$ et prolongeant ceux du Théorème 10.8, ainsi qu'un nombre $\varepsilon_1 > 0$, tels que :*

$$(10.51) \quad h^{n/4+m_j+1/2} u_j, e^{\varepsilon_1/h} (P - \mu_1) u_j = \mathcal{O}(e^{-(S_0 + \text{Re } f)/h}) ,$$

uniformément dans $\tilde{\Omega}$,

$$(10.52) \quad \text{Sur tout compact dans } \tilde{\Omega} \setminus C ; e^{(S_0 + f)/h} u_j \text{ est une réalisation (au sens des symboles analytiques) de } h^{-n/4} a_j .$$

On rappelle encore une fois que $S_0 + \text{Re } f = S_0 + f \geq d(x_0, x)$ dans $\tilde{\Omega}_- \cup C$ et que $\text{Re } f \geq 0$ dans $\tilde{\Omega}_+ \cup C$, avec égalité seulement sur les courbes bicaractéristiques de p issues de $\partial\tilde{\Omega} \cap B_d(U, S_0)$.

Comme à la fin de la section 9, on introduit les fonctions $v_j = \Pi_F \psi_j$, où $F = \bigoplus F_{z_j}$, $\psi_j = \chi \varphi_j$, et il s'agit maintenant de comparer v_j et u_j . On a le :

Théorème 10.10. *On fait les mêmes hypothèses que dans le Théorème 10.8 et on introduit u_j et v_j comme ci-dessus. Alors, quitte à diminuer l'ouvert $\tilde{\Omega}$ autour de $\gamma([-\infty, 0])$, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que :*

$$(10.53) \quad u_j - v_j = \mathcal{O}(1) e^{-(s(x) + \varepsilon_2)/h}$$

uniformément sur $\tilde{\Omega}$. Ici on a posé $s(x) = d(U, x)$ dans $\overline{B_d(U, S_0)}$, $s(x) = S_0$ dans le complémentaire.

Démonstration : On pose : $w = w_j = u_j - v_j$. Puisqu'il existe une matrice orthogonale $(\omega_{j,k})$ telle que $\tilde{\varphi}_j = \sum \omega_{j,k} \varphi_k$, nous pouvons appliquer le Théorème 9.9 avec $\tilde{\psi}_j = \chi \tilde{\varphi}_j$, $\tilde{v}_j = \Pi_F \tilde{\psi}_j$, et, puisque l'on récupère v_j à partir des \tilde{v}_j en inversant la matrice $(\omega_{j,k})$, on en déduit que :

$$(10.54) \quad \text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ on a : } w = \mathcal{O}(e^{(\varepsilon - s(x))/h}) \\ \text{uniformément sur } \tilde{\Omega}.$$

On montre facilement à partir de (9.43) et (9.46) pour les \tilde{v}_j que les v_j vérifient aussi (9.43) et qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(10.55) \quad (P - \mu_1)w = \mathcal{O}(e^{-(\varepsilon_0 + s(x))/h}) \text{ uniformément sur } \tilde{\Omega}.$$

Toujours en inversant la matrice $(\omega_{j,k})$, on montre que $v_j - \psi_j$ vérifie (9.42) et alors le Théorème 10.8 et la Proposition 10.9 montrent qu'il existe un voisinage Ω de U et un $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

$$(10.56) \quad w = \mathcal{O}(e^{-(\varepsilon_0 + s(x))/h}) \text{ uniformément sur } \Omega.$$

Pour $x \in \tilde{\Omega}_-$, on pose :

$$(10.57) \quad k(x) = \min(\varepsilon_0 + s(x), \inf_{y \in \partial \tilde{\Omega}_-} d(U, y) + d(y, x)).$$

Alors :

$$(10.58) \quad k(x) \geq S_0, \text{ pour } x \in \tilde{\Omega}_- \text{ dans un voisinage de } x_1, \\ k(x) > d(U, x) \text{ pour } x \in \Upsilon([-\infty, 0[),$$

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

et en multipliant w par une fonction dans $C_0^\infty(\tilde{\Omega}_-)$ qui vaut 1 sauf dans un petit voisinage de la frontière, on montre à l'aide des inégalités L^2 à poids comme par exemple dans [H.S.1,2], que :

$$(10.59) \quad w = \mathcal{O}(e^{(\varepsilon-k(x))/h}) \text{ uniformément dans } \tilde{\Omega}_-,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Puisque l'on s'accorde le droit de diminuer $\tilde{\Omega}_-$, il suffit maintenant de montrer que $e^{S_0/h} w = \hat{w}$ est uniformément à décroissance exponentielle dans un voisinage de x_1 . Si Ω_1 est un petit voisinage de x_1 , on sait que

$$(10.60) \quad \hat{w} = \mathcal{O}(e^{\varepsilon/h}) \text{ dans } \Omega_1 \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

$$(10.61) \quad (P - \mu_1)\hat{w} = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h}) \text{ dans } \Omega_1 \text{ pour un } \varepsilon_0 > 0.$$

Ici (10.60) résulte de (10.54), (10.58), (10.59) et nous permet d'étudier \hat{w} microlocalement près de $(x_1, 0)$ de la même manière que l'on avait fait pour v_j au-dessus d'un point de type 2 à la fin de la section 9. Soit donc T comme à la fin de la section 9 et $\hat{\gamma}$ la bicaractéristique de P passant par $(x_1, 0)$ à l'instant 0.

Les arguments menant à la Proposition 9.12 montrent aussi que si $s > 0$ est assez petit et si $\chi_s \in C_0^\infty(\Omega_1 \setminus \tilde{\Omega}_-)$ vaut 1 près de $\Pi_x \hat{\gamma}(-s)$, (où Π_x est la projection naturelle sur l'espace des x), alors $e^{S_0/h} T\chi_s v_j$ est à décroissance exponentielle uniforme dans un voisinage de $\hat{\gamma}(-s)$. D'autre part, la Remarque 10.6 et une application simple de la méthode de la phase stationnaire permettent de tirer la même conclusion concernant $e^{S_0/h} T\chi_s u_j$. Si $\chi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ vaut 1 près de x_1 , on trouve alors à l'aide de (10.60) que $T\chi_1 \hat{w}$ est à décroissance exponentielle uniforme près de chaque point $\hat{\gamma}(-s)$ pour chaque $s > 0$ assez petit. Utilisant alors (10.61) ainsi qu'un argument de déformation standard (déjà évoqué à la fin de la

section 9), on trouve alors que :

$$(10.62) \quad T\chi_1 \hat{w} \text{ est à décroissance exponentielle uniforme} \\ \text{dans un voisinage de } \hat{\gamma}(0) = (x_1, 0).$$

Puisque $(x_1, 0)$ est le seul point "non-elliptique" pour $P - \mu_1$ au-dessus de x_1 , on montre facilement à partir de (10.60)-(10.62), par exemple en utilisant le calcul pseudo-différentiel de la section 6, que \hat{w} est à décroissance exponentielle uniforme dans un voisinage de x_1 . ■

On peut maintenant étudier la partie imaginaire des résonances. Soit $z(h)$ une résonance associée à F et soit $v \in F$ de la forme $v = \sum_{j=1}^{N_1} \eta_j v_j$, $\vec{\eta} \in \mathbb{C}^{N_1}$, $\|\vec{\eta}\| = 1$, avec :

$$(10.63) \quad P v = z(h) v .$$

Nous allons appliquer la formule de Green à un domaine ouvert $W \subset \subset \mathbb{R}^n$ de bord C^∞ par morceaux, qui contient $\overline{B_d(U, S_0)}$. Plus exactement, soit $W_0 \subset \subset \mathbb{R}^n$ à bord C^∞ et contenant $\overline{B_d(U, S_0)}$. Alors, pour $\epsilon > 0$ très petit, on pose :

$$(10.64) \quad W = \{x \in W_0 ; V(x) > -\epsilon\} .$$

Alors, dans un voisinage de $\overline{B_d(U, S_0)} \cap \partial \bar{0}$, le bord ∂W est donné par $V(x) = -\epsilon$ et les Théorème 10.10 et la Proposition 9.12 montrent que, pour un point de ∂W , ou bien on est proche d'un point de type 1 et alors les fonctions v_j (mais pas nécessairement v , car les η_j peuvent dépendre de h de manière incontrôlé) sont de la forme BKW (10.41) modulo une erreur exponentiellement petite devant $e^{-S_0/h}$, ou bien on est loin de tout point de type 1 et alors $e^{S_0/h} v_j$ est exponentiellement petit.

Si $(|)$ et $\| \|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme dans $L^2(W)$, la formule de Green appliquée à :

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

$$0 = ((P - z(h))v | v) - (v | (P - z(h))v)$$

donne :

$$(10.65) \quad \operatorname{Im} z(h) \cdot \|v\|^2 = -h^2 \operatorname{Im} \int_{\partial W} \frac{\partial v}{\partial n} \bar{v} \, dS,$$

où dS est la mesure de surface sur ∂W et n désigne la normale unitaire extérieure.

Ici $\|v\|^2 - 1$ est exponentiellement petit puisque v_1, \dots, v_{N_1} est, modulo une erreur exponentiellement petite, une famille orthonormée dans $L^2(W)$. De plus $e^{S_0/h} v|_{\partial W}$ est exponentiellement petit en dehors d'un petit voisinage Ω_I des points de type 1. Donc il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que :

$$(10.66) \quad \operatorname{Im} z(h) = -h^2 \operatorname{Im} \int_{\partial W \cap \Omega_I} \frac{\partial v}{\partial n} \bar{v} \, ds + \mathcal{O}(e^{-(2S_0 + \epsilon_0)/h}),$$

et de plus les v_j sont modulo $\mathcal{O}(e^{-(S_0 + \epsilon_0)/h})$ de la forme BKW (10.41) dans $\partial W \cap \Omega_I = \{x \in \Omega_I; V(x) = -\epsilon\}$. On peut donc aussi dans (10.66) remplacer les v_j par leur forme BKW.

Nous allons tirer plusieurs conclusions de (10.66) et de la forme BKW des v_j . La première est une majoration sur $-\operatorname{Im} z(h)$.

Théorème 10.11. *On fait les mêmes hypothèses que dans le Théorème*

10.10. Alors il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$(10.67) \quad 0 \leq -\operatorname{Im} z(h) \leq C_0 h^{1-n/2-2 \max(m_j)} e^{-2S_0/h}.$$

Ici m_1, \dots, m_{N_1} sont donnés par la Proposition 10.9.

Ici on rappelle de [H.S.1] que $\max(m_j)$ peut être majoré explicitement à l'aide de E_0 et des valeurs propres du linéarisé du champ hamiltonien de $q = \xi^2 - V$ en $(U, 0)$. Quand E_0 est la plus petite valeur propre de

l'oscillateur harmonique localisé en U , alors $N_0 = N_1$ et $m_1 = 0$. Comme le fait A. Martinez [Ma] dans le cas du splitting pour un potentiel symétrique à deux puits, on peut probablement majorer le dernier membre de (10.67) par $C h^{-C_0} \exp(-2S(E_0)/h)$, où $S(E_0) = S(E_0, h)$ désigne la distance d'Agmon relativement à la métrique $\max(V - hE_0, 0) dx^2$ du puits modifié $\tilde{U} = \{x \in \tilde{0}; x \text{ est voisin de } U \text{ et } V(x) - hE_0 < 0\}$ à la "mer" modifiée de la même façon. Ici C_0 est une constante qui ne dépend pas de E_0 .

La démonstration du Théorème 10.11 est immédiate, compte tenu de (10.66) et du fait que l'on peut en plus y remplacer les v_j par leur expression BKW correspondantes. On remarque aussi que si les points de type 1 forment une sous-variété lisse de codimension d dans $\partial\tilde{0}$ et si C a un contact d'ordre 2 exactement, alors, compte tenu de la Remarque 10.4, on peut améliorer la majoration (10.67) :

$$(10.68) \quad -\operatorname{Im} z(h) \leq C h^{1-n/2+d/2-2 \max(m_j)} e^{-2S_0/h}.$$

Regardons ensuite les développements asymptotiques :

Théorème 10.12. *On fait les hypothèses du Théorème 10.8 et on suppose en plus que $N_1 = 1$, que les points de type 1 forment une sous-variété lisse de codimension d et que C a un contact d'ordre 2 exactement avec $\partial\tilde{0}$ le long de cette sous-variété. Soit alors $z(h)$ la résonance (unique et simple) correspondante. Alors*

$$(10.69) \quad -\operatorname{Im} z(h) = h^{1-n/2+d/2-2m_1} f(h) e^{-2S_0/h},$$

où f est une réalisation d'un symbole analytique (semi)-classique d'ordre 0. Si E_0 est une valeur propre simple de l'oscillateur harmonique localisé (et donc $N_0 = N_1 = 1$), alors le développement asymptotique de f ne contient que des puissances entières de h . Si E_0 est la plus petite valeur propre

de l'oscillateur harmonique localisé, alors f est un symbole elliptique positif d'ordre 0 (et $m_1 = 0$).

Démonstration : Dans ce cas, nous avons $v = v_1$ dans (10.66) et il suffit alors d'utiliser la forme BKW de v_1 et la méthode de la phase stationnaire analytique. Pour la dernière partie de la démonstration, il faut aussi observer que : $\frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \tilde{f} > 0$ sur $\partial W \cap \Omega_1$, et que le symbole a qui apparaît dans la description BKW de v_1 est elliptique. ■

Remarque 10.13. Pour préparer le calcul de certaines constantes dans les chapitres 13 et 14, nous allons "expliciter" la contribution principale au développement asymptotique (10.69) de l'intégrale (10.66), quand on fait les hypothèses géométriques du Théorème 10.12. Soit $\Gamma \subset \partial \bar{\Omega}$ l'ensemble des points de type 1, qui est donc par hypothèse une sous-variété analytique de codimension d dans $\partial \bar{\Omega}$ et dans C . Sans changer le développement asymptotique (10.69) on peut remplacer ∂W dans (10.66) par $C_\epsilon = \{x \in \text{voisinage de } \Gamma ; f_2(x) = \epsilon\}$. Ici on écrit $f = f_1 - i f_2$ comme après la Remarque 10.3. Soit $\Gamma_\epsilon \subseteq C_\epsilon$ la sous-variété formée par les points d'intersection entre les courbes bicaractéristiques de p issues de Γ et de C_ϵ . (Ces courbes bicaractéristiques sont aussi des courbes intégrales de ∇f_2).

On suppose pour simplifier la discussion, que $z(h)$ est la résonance engendrée par la première valeur propre de P_{M_0} . Alors en dehors de C (mais près de C) :

$$(10.70) \quad v(x, h) = h^{-n/4} \tilde{a}(x, h) e^{-f(x)/h - S_0/h},$$

où \tilde{a} est une réalisation d'un symbole analytique elliptique classique d'ordre 0. Soit $\tilde{a}_0(x)$ la partie principale de a . Alors,

$$(10.71) \quad e^{2S_0/h} (-\operatorname{Im} z(h)) = (1 + \mathcal{O}(h)) h^{1-n/2} \int_{C_\epsilon} |\tilde{a}_0(x)|^2 \frac{\partial f_2}{\partial n} e^{-2f_1/h} dS.$$

Sur Γ_ϵ , on a : $\frac{\partial f_2}{\partial n} = |\nabla f_2|$ et $|\nabla f_1| = 0$, donc par l'équation eiconale : $\frac{\partial f_2}{\partial n} = \sqrt{-V}$. On rappelle aussi que : $f_1|_{C_\epsilon}(x) \sim \text{dist}(x, \Gamma_\epsilon)^2$ et on note $F_\epsilon(x)$, $x \in \Gamma_\epsilon$, le déterminant du Hessien transversal de $f_1|_{C_\epsilon}$ (c.à.d. la restriction du Hessien de $f_1|_{C_\epsilon}$ à $T\Gamma_\epsilon^\perp$). Par la méthode de la phase stationnaire, on peut alors réduire (10.71) à une intégrale sur Γ_ϵ :

$$(10.72) \quad e^{2S_0/h} (-\text{Im } z(h)) = (1 + \mathcal{O}(h)) \pi^{d/2} h^{1 - \frac{n}{2} + \frac{d}{2}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{|\tilde{a}_0(x)|^2 \sqrt{-V}}{(F_\epsilon(x))^{1/2}} dS_{\Gamma_\epsilon} .$$

D'autre part, la discussion menant à (10.37) montre que l'on peut voir $\tilde{a}_0(x)$ comme une fonction holomorphe ramifiée autour du complexifié de C et que \tilde{a}_0 a une singularité en $(x_n + b(x'))^{-1/4}$. Donc pour $x \in \Gamma$, la limite

$$(10.73) \quad \Phi(x) = \lim_{y \rightarrow x} |\tilde{a}_0(y)|^2 |V(y)|^{1/2} ,$$

existe, à condition de prendre la limite soit avec $y \in U \cap \Gamma_\epsilon$, soit avec y dans la réunion G des géodésiques minimales de U à Γ . On trouve aussi que $F_\epsilon(y) \rightarrow F(x)$, $\epsilon \rightarrow 0$, $y \rightarrow x$, où $F(x)$ est le déterminant du hessien de \tilde{f} ($=f|_C$) restreint à $T\Gamma^\perp$. On peut donc faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$ dans (10.72) pour obtenir la contribution principale à (10.69) :

$$(10.74) \quad e^{2S_0/h} (-\text{Im } z(h)) = (1 + \mathcal{O}(h)) \pi^{d/2} h^{1-n/2+d/2} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(x)}{(F(x))^{1/2}} dS_\Gamma .$$

On peut aussi décrire F comme une "limite de l'intérieur" de la manière suivante ; G est une sous-variété analytique de \bar{D} de codimension d . Soit $\gamma_0 \in G$ la géodésique minimale de U à $x \in \Gamma$ avec $\gamma_0(t) \rightarrow x$, $t \nearrow 0$. Si $\tilde{F}(t)$ est le déterminant en $\gamma_0(t)$ du hessien de $f|_{\gamma_0(t) + T_{\gamma_0(t)}G^\perp}$, alors

on vérifie que : $\tilde{F}(t) \rightarrow F(x)$ quand $t \rightarrow 0$.

Nous allons maintenant minorer $-\text{Im } z(h)$ dans différents cas, en appliquant simplement les méthodes de A. Martinez [Ma] à notre problème. Pour commencer, remarquons que, sous les hypothèses du Théorème 10.8, si E_0 est la valeur propre principale de l'oscillateur harmonique localisé alors (10.66) et la discussion après montrent que l'on a, pour h assez petit, la minoration :

$$(10.75) \quad -\text{Im } z(h) \geq \frac{1}{C_0} h^{1/2} e^{-2S_0/h}, \quad C_0 > 0.$$

Si E_0 se trouve plus haut dans le spectre, des combinaisons linéaires des symboles a_j du Théorème 10.8 peuvent présenter des annulations en des points cruciaux pour minorer l'intégrale dans (10.66). La difficulté est alors de contrôler l'ordre d'annulation en x et en h . On peut se demander si la minoration (10.75) n'est pas toujours valable. Les deux résultats ci-dessous montrent que c'est presque toujours le cas. Ces deux résultats ainsi que leurs démonstrations sont de simples transcriptions à notre situation des résultats de A. Martinez [Ma].

Théorème 10.14. On fait les hypothèses du Théorème 10.8. Si $N_1 = 1$, alors on a la minoration (10.75) pour toutes les résonances exponentiellement proches de μ_1 .

Démonstration : On se contente de rappeler les grandes lignes des démonstrations de A. Martinez [Ma]. Il s'agit de minorer

$$(10.76) \quad h \text{ Re} \int_{\partial W \cap \Omega_1} \tilde{D}_n(a e^{i(if)/h}) a e^{i(if)/h} dS$$

où $h^{-n/4} a e^{i(if)/h - S_0/h}$ est l'approximation BKW de v_1 , et où $\tilde{D}_n = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial n}$.

On observe ici que la même approximation BKW est valable près de chaque

composante connexe de $B_d(U, S_0) \cap \partial\bar{0}$ dans ∂W .

On introduit des coordonnées locales y_1, \dots, y_n t.q. ∂W soit donné par $y_n = 0$ et $\tilde{D}_n = \tilde{D}_{y_n}$. On rappelle que $a e^{i(if)/h}$ est une solution BKW de : $(P-hE(h)) (a e^{i(if)/h}) \sim 0$, et que if est "sortante". Près d'un point $(y_0, if'(y_0))$ avec : $y_0 \in \partial W$, $\text{Im } if(y_0) = 0$, on peut alors construire des opérateurs pseudodifférentiels analytiques (semi)-classiques d'ordre 0 $Q(y, \tilde{D}_y, h)$ et $A(y, \tilde{D}_y, h)$ tels que :

$$(10.77) \quad (P-hE(h)) = Q(y, \tilde{D}_y, h) \circ (\tilde{D}_{y_n} - A(y, \tilde{D}_y, h))$$

au sens formel, microlocalement près de $(y_0, if'(y_0))$. De plus, Q est elliptique.

On peut choisir y_n globalement, et on vérifie alors sans peine que $A(y', 0, \tilde{D}_{y'}, h)$ est un opérateur pseudodifférentiel formel, défini microlocalement près de la restriction à C_ϵ de la section nulle de $T^*\partial W \setminus 0$. Ici $C_\epsilon = \{x \in \partial W ; \text{Im } if(x) = 0\}$. De plus, le symbole principal A_0 de A vérifie :

$$(10.78) \quad \text{Re } A_0 > 0 .$$

Les opérateurs Q et A agissent naturellement sur des expressions BKW de la forme $\tilde{a} e^{i(if)/h}$ et on obtient sur ∂W :

$$(10.79) \quad \tilde{D}_n \tilde{a} e^{i(if)/h} = A(\tilde{a} e^{i(if)/h}) ,$$

où on écrit $A = A(y', 0, \tilde{D}_{y'}, h)$ pour abrégier. L'expression (10.76) devient alors modulo une erreur exponentiellement petite :

$$(10.80) \quad h \text{Re} \int_{\partial W \cap \Omega_I} A(\tilde{a} e^{i(if)/h}) \overline{\tilde{a} e^{i(if)/h}} dS .$$

On vérifie ensuite que, dans le calcul semi-classique des opérateurs pseudo-

différentiels formels agissant sur des expressions BKW, on a le droit d'utiliser l'adjoint d'un opérateur. On obtient alors :

$$(10.81) \quad h \int_{\partial W \cap \Omega_I} \frac{1}{2} (A + A^*) (a e^{iif/h}) \overline{(a e^{iif/h})} dS .$$

Ici $\frac{1}{2} (A + A^*)$ est elliptique > 0 et on peut construire un opérateur semi-classique analytique formel elliptique d'ordre 0 tel que $\frac{1}{2} (A + A^*) = B^*B$.

Alors (10.76) devient modulo une erreur exponentiellement petite :

$$(10.82) \quad h \int_{\partial W \cap \Omega_I} |b e^{iif/h}|^2 dS = h \int |b|^2 e^{-2 \operatorname{Im} i f/h} dS ,$$

où b est le symbole analytique du même ordre que a , donné par :

$$(10.83) \quad b e^{iif/h} = B(a e^{iif/h}) .$$

Il suffit donc de montrer que b ne s'annule pas à un ordre trop élevé sur C_ϵ .

Soit $\gamma : [-\infty, 0] \rightarrow \bar{0} \cup \{x_1\}$ une géodésique minimale de $x_0 = U$ à $x_1 \in \partial \bar{0} \cap B_d(x_0, S_0)$ (projection d'une q -bicaractéristique $\tilde{\gamma}$) comme au début de cette section, et soit $\gamma' : [0, t(\epsilon)] \ni t \rightarrow \mathbb{R}^n$ la courbe bicaractéristique pour p de x_1 à ∂W (projection de la p -bicaractéristique $\hat{\gamma}$). On note $\tilde{x}_1 = \gamma'(t(\epsilon))$ le point d'arrivée sur ∂W , et on choisit des coordonnées locales $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ sur ∂W centrées en \tilde{x}_1 . On rappelle finalement que a est d'ordre $m_1 \in \frac{1}{2} \mathbb{N}$, de la forme :

$$(10.84) \quad a(x, h) \sim \sum_{-\infty}^{2m_1} a_\nu(x) h^{-\nu/2} .$$

Lemme 10.15. Il existe $\nu \geq 0$ tel que $a_\nu|_{\partial W} = \mathcal{O}(|y'|^{\nu+1})$.

Démonstration : Supposons le contraire. Alors $a_\nu|_{\partial W} = \mathcal{O}(|y'|^{\nu+1})$ pour tout $\nu \geq 0$. Regardant les équations de transport pour a , on vérifie alors

assez facilement que, pour tout $\nu \geq 0$, a_ν s'annule à l'ordre $\nu+1$ en tout point $\tilde{\gamma}(t)$, $0 < t \leq t(\epsilon)$.

Les équations de transport pour a dans $\tilde{\Omega}_+$ et dans $\tilde{\Omega}_-$ sont évidemment les mêmes à des changements de notations près. Ainsi par exemple $\gamma(t) = \gamma'(it)$. Donc quand on intègre les équations de transport par exemple le long de la courbe γ' on peut faire un détour dans le complexe près de H pour contourner H et ensuite retrouver γ . Par cet argument on trouve donc que a_ν s'annule à l'ordre $\nu+1$ en tout point $\gamma(t)$, $-\infty < t < 0$. Faisant tendre t vers $-\infty$ on trouve en particulier que a_ν s'annule à l'ordre $\nu+1$ en x_0 . Ceci est en contradiction avec le fait que φ_1 soit normalisé dans $L^2(M_0)$. ■

Utilisant maintenant la relation (10.84), le fait que B soit elliptique d'ordre 0, et le lemme, on voit que la conclusion du lemme reste valable avec b remplacé par a . Travaillant toujours dans les coordonnées y' , on constate alors qu'il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$(10.85) \quad \sum_{|\alpha'| \leq 2m_1} h^{|\alpha'|/2} |b^{(\alpha')}(0)| \geq \frac{1}{C_0},$$

pour h assez petit. Pour $|y'| \leq h^{1/2}$, on écrit $z' = h^{-1/2}y'$, et par la formule de Taylor :

$$(10.86) \quad \begin{aligned} b(y', h) &= \sum_{|\alpha'| < 2m_1} h^{|\alpha'|/2} b^{(\alpha')}(0) (z')^{\alpha'} / \alpha'! + \mathcal{O}(h^{1/2}) \\ &= p_h(z') + \mathcal{O}(h^{1/2}). \end{aligned}$$

p_h varie donc dans un espace de dimension finie de polynômes et (10.85) donne une minoration d'une norme de p_h dans cet espace. Comme norme équivalente, nous avons aussi la norme L^2 sur $B(0,1) = \{z'; |z'| < 1\}$. Donc $\exists C_1 > 0$ tel que :

PUITS PONCTUEL DANS UNE ISLE

$$(10.87) \quad \|P_h\|_{L^2(B(0,1))} \geq \frac{1}{C_1},$$

pour h assez petit. Donc pour h assez petit :

$$\begin{aligned} \int_{\partial W \cap \Omega_1} |b|^2 e^{-2 \operatorname{Im} i f/h} dS &\geq \frac{1}{C_2} \int_{|y'| \leq \lambda^{-1/2}} |b|^2 dy' = \\ &= \frac{h^{(n-1)/2}}{C_2} \int_{|z'| \leq 1} |b|^2 dz' \geq \frac{h^{(n-1)/2}}{C_3}, \end{aligned}$$

où $C_2, C_3 > 0$. Cette minoration donne le Théorème. ■

Théorème 10.16. On fait les hypothèses du Théorème 10.8 et on se place maintenant dans le cas $N_1 \geq 2$. Soient $\pm \gamma_1, \dots, \pm \gamma_n$ les valeurs propres du linéarisé du champ hamiltonien en $(U, 0)$, (avec $\gamma_j > 0$). On sait donc que $\left\{ \alpha \in \mathbb{N}^n; \sum_{j=1}^n (\frac{1}{2} + \alpha_j) \gamma_j = E_0 \right\}$ contient exactement N_0 éléments et que les valeurs minimales de $2m_j$ dans le Théorème 10.8 sont les valeurs correspondantes de $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. On suppose que toutes ces valeurs sont égales : $2m_1$. Alors pour chaque résonance $z(h)$ exponentiellement proche dans μ_j , on a la minoration (10.75).

Démonstration (d'après A. Martinez [Ma]). Soit $a_{j,v}^{(v)}(z)$ la partie homogène de $d^0 v$ ($v \geq 0$) dans le développement de Taylor de $a_{j,v}$ en x_0 . (Voir (10.46)). Alors on sait en plus que les polynômes homogènes $a_{j,2m_1}^{(2m_1)}$, $j=1, \dots, N_1$, sont linéairement indépendants. On en déduit facilement qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour tout $\eta \in \mathbb{C}^{N_1}$ de norme 1, on ait :

$$\sum_{|\alpha|=2m_1} |(h^{1/2} \partial_x)^\alpha a_\eta(x, h)| \geq \frac{1}{C_0} \text{ pour } |x-x_0| \leq \frac{1}{C_0}.$$

Ici $a_\eta = \sum_1^{N_1} \eta_j a_j$. En effet, il suffit de montrer une telle minoration pour $x = x_0$ et ensuite d'utiliser seulement que : $(h^{1/2} \partial_x)^\alpha a_\eta$, $|\alpha| = 2m_1$ est dans un ensemble borné dans l'espace de symboles d'ordre 0 quand η varie dans la sphère d'unité dans \mathbb{C}^{N_1} . On se contente maintenant d'une minoration plus faible :

(10.88) Il existe $C_0 > 0$ tel que, pour tout $\eta \in \mathbb{C}^{N_1}$ de norme 1 :

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m_1} |(h^{1/2} \partial_x)^\alpha a_\eta(x, h)| \geq \frac{1}{C_0} \text{ pour } |x - x_0| \leq \frac{1}{C_0} .$$

Lemme 10.17. Il existe $C_0 > 0$ tel que (10.85) soit vérifié pour tout $\eta \in \mathbb{C}^{N_1}$ de norme 1. Ici on pose $a = a_\eta$ et on prolonge $a e^{-f/h}$ selon la procédure déjà décrite (au travers de C à l'aide d'une intégrale oscillante etc.), et, comme avant, on définit b par $b e^{-f/h} = B(a e^{-f/h})$.

Ce lemme entraîne le Théorème, car si $z(h)$ est une résonance, alors $\exists v = \sum_1^{N_1} \eta_j v_j$ avec $\eta = \eta(h) \in \mathbb{C}^{N_1}$ normalisé tel que : $(P - z(h))v = 0$, et on peut conclure comme dans la démonstration du Théorème 10.15.

Démonstration du Lemme : On constate d'abord qu'il suffit de montrer (10.85) (uniformément par rapport à η) avec b remplacé par a . En effet, puisque B est d'ordre 0, on voit facilement que

$$\begin{aligned} & h^{1/2} + \sum_{|\alpha'| \leq 2m_1} h^{|\alpha'|/2} |b^{(\alpha')}(0, h)| \\ & \leq \text{Const.} \left(h^{1/2} + \sum_{|\alpha'| \leq 2m_1} h^{|\alpha'|/2} |a^{(\alpha')}(0, h)| \right) \end{aligned}$$

et puisque B est elliptique, on a aussi une inégalité dans le sens opposé.

La relation formelle $(P - hE(h))(a e^{i\lambda f}) \sim 0$ donne des équations de transport que l'on peut utiliser pour montrer que :

$$(10.89) \quad h^{1/2} + \sum_{|\alpha'| \leq 2m_1} h^{|\alpha'|/2} |a^{(\alpha')}(0, h)| \sim h^{1/2} + \sum_{|\alpha| \leq 2m_1} h^{|\alpha|/2} |a^{(\alpha)}(0, h)| .$$

Pour le voir, on se place dans des coordonnées locales (z', z_n) t.q. : $\tilde{x}_1 = 0$, $\partial W : z_n = 0$, $\forall f \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z_n}$. On écrit ensuite les équations de transport sous la forme concentrée

$$(10.90) \quad \forall f \nabla a \pm (E(h) \pm \Delta f)a = h \Delta a .$$

On multiplie par $h^{1/2}$ et on applique tous les opérateurs $(h^{1/2} \partial_z)^\alpha$ avec $|\alpha| < 2m_1$. Puisque a est un symbole d'ordre $2m_1$, on trouve alors :

$$h^{1/2} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m_1 \\ \alpha_n > 0}} h^{|\alpha|/2} |a^{(\alpha)}(0, h)| \leq h + h^{1/2} \sum_{|\alpha| \leq 2m_1} h^{|\alpha|/2} |a^{(\alpha)}(0, h)| .$$

Ceci donne le contrôle manquant sur les dérivées normales pour obtenir la partie non-triviale de (10.89).

Soit maintenant $\vec{a}(x, h) = \{h^{|\alpha|/2} a^{(\alpha)}(x, h)\}_{|\alpha| \leq 2m_1}$. Dérivant (10.90)

de toutes les manières, on trouve :

$$(10.91) \quad (\nabla f \nabla + \mathcal{A}(x, h)) \vec{a} = \mathcal{O}(h^{1/2}) ,$$

où $\mathcal{A}(x, h)$ est une matrice $\mathcal{O}(1)$. (On utilise également le fait que a est un symbole d'ordre $2m_1$). On en déduit que $h^{1/2} + \|\vec{a}\|$ garde le même ordre de grandeur sur tout segment compact de γ' qui évite x_1 . Près de x_1 , on suit γ' dans le complexe de façon à contourner C et rejoindre γ . On peut ensuite suivre γ jusqu'à un point arbitrairement proche de x_0 . Autrement dit, pour tout $t \in]-\infty, 0[$ fixé, les quantités $h^{1/2} + \|\vec{a}\|$ en

$\gamma(t)$ et en \tilde{x}_1 respectivement ont le même ordre de grandeur uniformément quand h et η varient. Si $-t$ est assez grand, nous savons déjà que $h^{1/2} + \|\vec{a}(\gamma(t))\| \geq \frac{1}{C_0}$; donc, d'après ce qui précède et (10.89), nous avons (10.85) d'abord avec b remplacé par a et donc aussi avec b lui-même. ■

Ceci termine aussi la démonstration du Théorème. ■

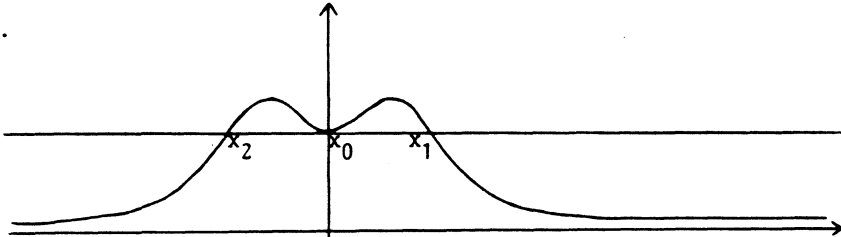
Avron [A.1,2] et Banks, Bender et Wu [B.B.W.] ont développé des idées heuristiques semblables à certains des arguments de ce chapitre. Nous y reviendrons dans les chapitres suivants.

11. APPLICATIONS. QUELQUES CALCULS EXPLICITES DANS LE CAS DE LA DIMENSION 1
OU DANS LE CAS INVARIANT PAR ROTATION.

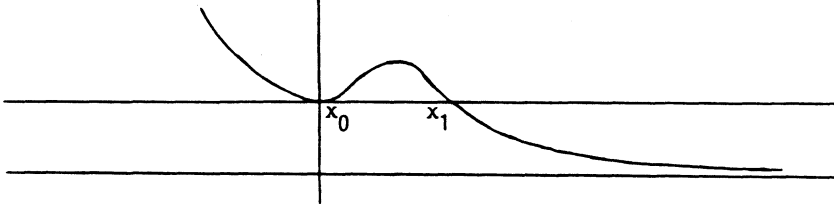
On garde les hypothèses de la section 10 mais on se place en dimension 1.

On suppose que $U = \{x_0\} = \{0\}$ et que cas 1 $\partial\bar{0} = \{x_1\} \cup \{x_2\}$ ou
cas 2 $\partial\bar{0} = \{x_1\}$.

Cas 1.



Cas 2.



Pour simplifier, on s'intéresse à la 1ère résonance située près de h et les hypothèses de la section 10 se traduisent (après normalisation) par :

$$(11.1) \quad V(0) = 0 \quad , \quad V'(0) = 2 \quad , \quad V'(x_1) \neq 0 \quad , \quad V'(x_2) \neq 0 \quad .$$

Dans le cas 1, on supposera de plus qu'on a pour simplifier :

$$(11.2) \text{ (cas 1)} \quad V(x) = V(-x) \quad .$$

On pose :

$$(11.3) \quad S_0 = d_V(x_0, x_1) = \int_0^{x_1} \sqrt{V(t)} \, dt \quad .$$

D'après la formule (10.66), il y a près de h une résonance $z(h)$ donnée par la formule :

$$(11.4) \quad \operatorname{Im} z(h) = -h^2 \operatorname{Im} \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x) \cdot \bar{v}(x) \right] + \mathcal{O}(e^{-(2S_0 + \epsilon_0)/h}) \quad \text{dans le cas 2}$$

$$= -2h^2 \cdot \operatorname{Im} \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x) \cdot \bar{v}(x) \right] + \mathcal{O}(e^{-(2S_0 + \epsilon_0)/h}) \quad \text{dans le cas 1}$$

où x est un point quelconque $x > x_1$ assez proche de x_1 .

L'objet de ce § est de montrer la :

Proposition 11.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$(11.5) \quad \operatorname{Im} z(h) = -h^{1/2} f(h) e^{-2S_0/h} \quad \text{dans le cas 2}$$

$$= -2h^{1/2} f(h) e^{-2S_0/h}$$

où $f(h) \sim f_0 + \sum f_j h^j$ et

$$(11.6) \quad f_0 = \pi^{-1/2} e^{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\operatorname{Log} \epsilon + \int_{\epsilon}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{V(t)}} \right]}$$

Démonstration : On se contente de traiter le cas 2, le cas 1 se traiterait de la même manière.

Comme indiqué au §.10, on peut dans ce calcul remplacer $v(x, h)$ par son approximation WKB.

On sait, que pour $x \in [x_0, x_1[$:

$$(11.7) \quad v(x, h) \approx e^{-\frac{d_V(x, x_0)}{h}} \tilde{a}(x, h) \quad \text{avec} \quad d_V(x, x_0) = \int_0^x \sqrt{V(t)} dt$$

et que, pour $x > x_1$:

CAS DE LA DIMENSION 1

$$(11.8) \quad v(x, h) \approx e^{-\frac{S_0}{h}} \cdot e^{i \frac{f_2(x)}{h}} \tilde{b}(x, h) \quad \text{avec} \quad f_2 = \int_{x_1}^x \sqrt{-V(t)} dt$$

(cf. 10.28).

Ici, d'après [H.S.2] (formule (1.10) et (1.17)), on a :

$$(11.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}(x, h) = h^{-1/4} a(x, h) \\ a(x, h) = a_0(x) + \sum_{j \geq 1} a_j(x) h^j \\ a_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-\int_0^x \left[\frac{(V^{1/2})' - 1}{2 \sqrt{V}} \right] (t) dt} \end{array} \right.$$

$$(11.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}(x) = h^{-1/4} b(x, h) \\ b(x, h) = b_0(x) + \sum_{j \geq 1} b_j(x) h^j \\ \text{et } b_0(x) > 0 \text{ pour } x > x_1. \end{array} \right.$$

D'après la formule (11.4) et cette approximation de $v(x, h)$, on obtient :

$$(11.11) \quad \begin{array}{l} -e^{2S_0/h} \operatorname{Im} z(h) = h^{1/2} \left[|b_0(x)|^2 f_2'(x) + \mathcal{O}(h) \right] \text{ et donc :} \\ -e^{2S_0/h} \operatorname{Im} z(h) \quad h^{-1/2} = |b_0|^2 \sqrt{-V(x)} + \mathcal{O}(h) \end{array}$$

pour un point $x > x_1$.

Comme on le voit aisément à partir des équations de transport vérifiées par $b_0(x)$, la quantité $|b_0|^2 \sqrt{-V(x)}$ ne dépend pas de x (voir aussi Remarque 10.13). D'après (10.73), on a donc :

$$(11.12) \quad |b_0|^2 \sqrt{-V(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} |a_0|^2 \sqrt{V(x)} .$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer cette expression. D'après (11.9), on a donc :

$$|b_0|^2 \sqrt{-V(x)} = \pi^{-1/2} \lim_{x \rightarrow x_1} \sqrt{V} \cdot e^{-2 \int_0^x \left[\frac{(V^{1/2})' - 1}{2\sqrt{V}} \right] (t) dt}$$

calcul que l'on ramène immédiatement à l'étude de :

$$(11.13) \quad 2A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} \frac{1}{2} \text{Log } V(x) - 2 \int_0^x \left[\frac{(V^{1/2})' - 1}{2\sqrt{V}} \right] (t) dt$$

Calculons cette limite ; pour $0 < y < x < x_1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Log } V(x) - 2 \int_0^x \left[\frac{(V^{1/2})' - 1}{2\sqrt{V}} \right] (t) dt \\ = -2 \int_0^y \frac{(V^{1/2})' - 1}{2\sqrt{V}} (t) dt + \text{Log}[V^{1/2}(y)] + \int_y^x \frac{dt}{\sqrt{V}} \end{aligned}$$

Faisant tendre y vers 0 et x vers x_1 , on obtient :

$$(11.14) \quad 2A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\text{Log } \epsilon + \int_{\epsilon}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{V(t)}} \right]$$

On obtient ainsi la formule :

$$(11.15) \quad |b_0|^2 \sqrt{-V(x)} = \pi^{-1/2} e^{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\text{Log } \epsilon + \int_{\epsilon}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{V(t)}} \right]} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 11.2. Il semble plus judicieux de voir la formule (11.5) sous la forme :

$$\text{Im } z(h) = -h^{1/2} \pi^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(h) \left[e^{-S_0/h} \left[e^{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \epsilon}{2} + \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{V(t)}}} \right] \right])^2$$

qui correspond à un aller du point x_0 au point x_1 puis à un retour du point x_1 au point x_0 . Elle correspond ainsi à des formules qu'on peut attendre de la méthode (de notre point de vue formelle) des Instantons (cf. Coleman [Co]).

Dans cet esprit, la formule du splitting pour le problème du double puits s'écrivait (cf. [H.S.2] §.1)

$$(\Delta\lambda)(h) = 4 h^{1/2} \pi^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(h)] e^{-S_0/h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\text{Log } \epsilon + \int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{dt}{2\sqrt{V(t)}} \right]$$

La "vraie" distance entre les 2 puits est donc :

$$S_0 - h \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\text{Log } \epsilon + \int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{dt}{2\sqrt{V(t)}} \right] \text{ pour le double puits}$$

et celle du puits à la mer est :

$$S_0 - h \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\text{Log } \epsilon}{2} + \int_{x_0+\epsilon}^{x_1} \frac{dt}{2\sqrt{V(t)}} \right] . \quad \blacksquare$$

Remarque 11.3. Dans le même esprit, on peut également écrire la formule donnant la partie imaginaire de la résonance sous la forme :

$$(11.16) \quad \text{Im } z(h) = -h c_0 (1 + \mathcal{O}(h^\rho)) e^{-\frac{2}{h} \int_{x_0(h)}^{x_1(h)} \sqrt{V(t) - \lambda(h)} dt}$$

où c_0 est une constante universelle calculable $\left[c_0 = \pi^{-1/2} \left(\frac{1}{e}\right)^{1/2} \right]$, où $\lambda(h)$ est la valeur propre associée au puits $\{x_0\}$ et $x_0(h)$ et $x_1(h)$ sont les points tels que :

$$x_0 < x_0(h) < x_1(h) < x$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{cases} V(x_0(h)) = \lambda(h) \\ V(x_1(h)) = \lambda(h) \end{cases}$$

(Rappelons que $\lambda(h) = h + \mathcal{O}(h^2)$).

On retrouve ainsi les formules du type Harrell mentionnées dans [H.S.2] et sans doute bien connues en physique. ■

Remarque 11.4. L'exemple suivant sera utile pour retrouver la formule de Bender-Wu. Considérons :

$$V(x) = x^2 - x^4 .$$

On vérifiera dans la prochaine section que toutes les hypothèses pour appliquer les résultats précédents sont satisfaites. Nous sommes dans le cas 1 avec $x_1 = +1$, $x_2 = -1$, $x_0 = 0$.

Il s'agit donc simplement de calculer l'expression :

$$A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\text{Log } \epsilon}{2} + \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^1 \frac{dt}{t \sqrt{1-t^2}} \right] .$$

Remarquons que :

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dt}{t \sqrt{1-t^2}} = \int_1^{1/\epsilon} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} .$$

Posant $u = \text{ch } t$, on obtient :

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dt}{t \sqrt{1-t^2}} = \text{Arg ch} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$$

et

$$A = \frac{\text{Log } 2}{2} .$$

On vérifie aisément que :

$$(11.17) \quad S_0 = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{3}$$

d'où la formule :

$$(11.18) \quad \text{Im } z(h) = -4 h^{1/2} \pi^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(h)) e^{-\frac{2h}{3}} . \quad \blacksquare$$

Remarque 11.5. Le cas symétrique en dimension > 1.

On se place dans le cas de la dimension $n > 1$ mais on suppose que le potentiel V vérifie :

$$V(x) = V_0(|x|) \quad (V_0'(0) = 2)$$

où V_0 vérifie les hypothèses correspondant au cas (2). La caustique devient une variété de dimension $(n-1)$. La théorie générale s'applique, mais, tenant compte des symétries, on se ramène à faire le calcul le long d'un rayon en joignant le puits $\{0\}$ à un point de (C) .

On pose :

$$S_0 = \int_0^{t_1} \sqrt{V_0(t)} dt$$

et on a :

$$\text{Im } z(h) = -h \cdot \frac{1-n}{2} \cdot e^{-2S_0/h} \cdot \left(\lim_{t \rightarrow t_1} |a_0|^2 \sqrt{V_0(t)} \right) \cdot (n \omega_n) \cdot t_1^{n-1}$$

où t_1 est le point $\neq 0$ t.q. $V_0(t_1) = 0$ et où ω_n est le volume de la sphère dans \mathbb{R}^n .

Calculons l'expression :

$$\lim_{t \rightarrow t_1} |a_0|^2 \sqrt{V_0(t)} .$$

Le long du rayon considéré, a_0 satisfait à l'équation de transport :

$$(11.19) \quad 2\sqrt{V_0} \frac{d a_0}{dt} + ((\sqrt{V_0})' + \frac{(n-1)}{t} \sqrt{V_0} - n) a_0 = 0 .$$

Pour que la fonction propre soit normalisée correctement, on doit prendre (comme on le constate, en faisant la phase stationnaire en 0) :

$$a_0 \hat{=}_{t=0} = \pi^{-n/4} .$$

Plutôt que de calculer a_0 , on calcule directement :

$$(11.20) \quad \psi(t) = \text{Log}(a_0^2 \sqrt{V_0})$$

en remarquant que ψ vérifie l'équation :

$$(11.21) \quad \begin{aligned} (1) \quad \psi'(t) &= -\frac{(n-1)}{t} + \frac{n}{\sqrt{V_0(t)}} \\ (2) \quad \psi(t) &= \text{Log} [\pi^{-n/2} t [1 + \mathcal{O}(t)]] \quad (t \rightarrow 0^+) . \end{aligned}$$

De (11.21)₍₁₎, on déduit que :

$$\psi(t) = c - (n-1) \text{Log } t + n \int_{t_2}^t \frac{ds}{\sqrt{V_0(s)}}$$

d'où en utilisant (11.21)₍₂₎ :

$$\psi(t) = n \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{Log } \epsilon + \int_{\epsilon}^t \frac{ds}{\sqrt{V_0(s)}}) + \text{Log} (\pi^{-n/2}) - (n-1) \text{Log } t .$$

On obtient finalement (voir Remarque 10.13) :

$$(11.22) \quad \text{Im } z(h) = -h (\Pi h)^{-n/2} (n \omega_n) e^{-2 S_0/h} \cdot \exp(2n A) [1 + \mathcal{O}(h)]$$

où A est introduit en (11.10) et $z(h)$ est la résonance située près du niveau fondamental ($\sim nh$).

Remarque 11.6. La formule (11.6) présente beaucoup d'analogies avec le calcul de la partie imaginaire de la résonance correspondant aux états excités du modèle en dimension 1. Reprenons en effet la démonstration de la Proposition 11.1 mais en cherchant $\text{Im } z_k(h)$ où $z_k(h)$ est la résonance située

CAS DE LA DIMENSION 1

près du $(k+1)$ état excité proche de $(2k+1)h$.

On a cette fois-ci (cf. [H.S.2] §.1) :

$$\tilde{a}(x) = h^{-k/2-1/4} a(x, h)$$

avec

$$a_0(x) = \pi^{-1/4} \left(\frac{2^k}{k!}\right)^{1/2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(k \operatorname{Log} \varepsilon - \int_{\varepsilon}^x \frac{(V^{1/2})' - (2k+1)}{\sqrt{V}} dt \right)$$

On en déduit que :

$$(11.23) \quad \lim_{x \rightarrow x_1} a_0^2 \sqrt{V} = \pi^{-1/2} \left(\frac{2^k}{k!}\right) (\exp 2A)^{2k+1}$$

et que par conséquent :

$$(11.24) \quad \operatorname{Im} z_k(h) = -h \cdot (\pi h)^{-1/2} \cdot h^{-k} \left(\frac{2^k}{k!}\right) (1 + \mathcal{O}(h)) (\exp 2A)^{2k+1} e^{-2S_0/h}$$

A un facteur de normalisation près universel (indépendant de V), les formules coïncident lorsque $n = (2k+1)$.

12. APPLICATION A L'ETUDE DE L'OSCILLATEUR ANHARMONIQUE. FORMULE DE BENDER-WU.

On montre dans ce paragraphe comment on peut retrouver, dans le cadre de la théorie développée précédemment, la formule de Bender-Wu pour l'oscillateur anharmonique [Ben.W.1]. On retrouvera en particulier les résultats de [Ha.Si] et on justifiera également certains résultats de J. Avron [A.1,2] et Banks-Bender-Wu [Ba.Ben.W.] concernant le cas de la dimension > 1 . Comme corollaire, on retrouve également les résultats connus sur l'effet-Stark [Gra].

On considère dans \mathbb{R}^n l'opérateur de Schrödinger :

$$(12.1) \quad -\Delta + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta P_{2m}(x)$$

où $P_{2m}(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme réel elliptique homogène de degré $2m$ ($m > 1$) positif.

Il est bien connu que, pour $\beta \in \mathbb{R}^+$, cet opérateur admet près de la première valeur propre de l'oscillateur harmonique n une valeur propre $\lambda(\beta)$ admettant le développement asymptotique :

$$(12.2) \quad \lambda(\beta) \sim n + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \beta^j .$$

On sait de plus que :

$$(12.3) \quad \left[\begin{array}{l} \lambda(\beta) \text{ se prolonge holomorphiquement pour tout} \\ \eta > 0 \text{ dans un secteur de la forme :} \\ \\ 0 < |\beta| < B \\ |\arg \beta| < \left(\frac{m+1}{2}\right)\pi - \eta \\ \text{sur la surface de Riemann de } \beta^{1/m+1} \end{array} \right.$$

OSCILLATEUR ANHARMONIQUE

et que le développement (12.2) est alors valide dans un tel secteur.

On trouvera démonstrations et références dans [Si.4] ou [Gra.].

Une étude plus fine de la résolvante conduit de plus à une estimation de la forme :

$$(12.4) \quad |\lambda(\beta) - n - \sum_{j=1}^N a_j \beta^j| \leq A^{N+2} (N+1)! |\beta|^{N+1}, \quad \forall N \geq 1$$

dans le même secteur, qui permet de resommer, au sens de Borel (généralisé), la série asymptotique pour obtenir $\lambda(\beta)$ dans un secteur assez petit contenant l'axe réel positif (par application d'un théorème de Watson-Nevanlinna).

Rappelons tout d'abord comment, par changement d'échelle, on retrouve, à partir des résultats de [H.S.1], la majoration bien connue sur les a_j .

Dans cet esprit, on cherche à se ramener à une étude semi-classique ($\hbar \rightarrow 0$) pour l'opérateur :

$$(12.5) \quad -\hbar^2 \Delta_y + \sum_{i=1}^n y_i^2 + P_{2m}(y)$$

ou, plus généralement, ce qui sera nécessaire ultérieurement, à étudier :

$$(12.6) \quad P_\alpha(\hbar) = -\hbar^2 \Delta_y + \sum_{i=1}^n y_i^2 + \alpha P_{2m}(y)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{2} < |\alpha| < 2$.

Le passage de (12.1) à (12.6) se fait par le changement de variable $x = \rho y$, avec $\rho = |\beta|^{1/(2-2m)}$, et on trouve alors l'opérateur $\frac{1}{\hbar} P_\alpha(\hbar)$ avec $\alpha = \frac{\beta}{|\beta|}$, $\hbar = |\beta|^{1/m-1}$.

La théorie générale développée en [H.S.1] montre que pour $\alpha = 1$, $P_\alpha(\hbar)$ admet une valeur propre "proche" de $n\hbar$, $\mu(\hbar)$ admettant le développement :

$$(12.7) \quad \mu(h) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} h^{\ell+1} \quad \text{avec} \quad |b_{\ell}| \leq C^{\ell+1} \ell! .$$

Remarquons que :

$$(12.8) \quad \lambda(\beta) = h^{-1} \mu(h) \quad \text{avec} \quad h = |\beta|^{1/m-1}$$

et comparant (12.2), (12.7) et (12.8), on obtient que :

$$a_j = b_{(m-1)j}$$

et par conséquent :

$$(12.9) \quad |a_j| \leq A^{j+1} ((m-1)j)! .$$

Dans le cas $n=1$, $m=2$, $P_4(x) = x^4$, Bender et Wu [B.W]₁ ont conjecturé, à la suite de calculs numériques, que :

$$(12.10) \quad a_j \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^{j+1} 4 \pi^{-3/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{j+1/2} \Gamma(j + \frac{1}{2}) .$$

B. Simon a montré l'équivalence de cette formule avec la formule :

$$(12.11) \quad \operatorname{Im} \lambda(-\beta - i0) \underset{\beta \rightarrow 0^+}{\sim} -4 \pi^{-1/2} |\beta|^{-1/2} e^{-2/3|\beta|} .$$

Cette formule est démontrée rigoureusement dans ce cas par Harrell-Simon [Ha.Si] mais la démonstration, basée sur des techniques fines d'équations différentielles, reste liée à la dimension 1. Le cas de la dimension > 1 est resté jusqu'à présent plus mystérieux même s'il est parfois abordé de manière partiellement heuristique dans des articles de Banks-Bender-Wu [Ba.Ben.W.], [Ba.W.] et de J. Avron [A.1,2]. On se propose dans cette section de redémontrer rigoureusement toutes ces formules.

Rappelons que le lien entre les formules (12.10) et (12.11) est donné par la formule :

$$(12.12) \quad a_j = (-1)^j \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{\operatorname{Im} \lambda(-\beta-i0)}{\beta^{j+1}} d\beta + O_R\left(\frac{1}{R^{j+1}}\right) \text{ pour } 0 < R < B .$$

Pour se replacer dans le cadre de la section 8, il faut montrer que $\lambda(-\beta-i0)$ s'interprète comme une résonance au sens de cette section et donc faire le lien avec une résonance pour l'opérateur :

$$P_{-1}(h)(y, D_y) = -h^2 \Delta_y^2 + y^2 - P_{2m}(y) .$$

En utilisant le changement d'échelle introduit précédemment, on est donc conduit à l'étude de $P_\alpha(y, D_y)$ où α est amené à varier dans une demi-couronne D :

$$D = \left\{ \frac{1}{2} < |\alpha| < 2, \operatorname{Arg} \alpha \in [-\pi, 0] \right\} \text{ et } h \in]0, h_0] , h_0 \text{ assez petit .}$$

La démonstration s'articule alors comme suit :

(a) Montrer l'existence d'une résonance $E(\alpha, h)$ au sens de la section 8 voisine de la première valeur propre de l'oscillateur harmonique nh pour $\alpha \in D$. Ceci nécessite une légère extension de la théorie développée à la section 8 où on ne considérait que des opérateurs formellement auto-adjoints.

(b) Vérifier que $h^{-1} E(\alpha, h) = \lambda(\beta)$ avec $h = |\beta|^{1/m-1}$ avec $\arg \alpha = \arg \beta$, $|\alpha| = 1$, $\arg \alpha \in [-\epsilon, 0]$.

(c) On conclura alors que :

$$(12.13) \quad |\beta|^{-1/m-1} E(-1, |\beta|^{1/m-1}) = \lambda_0(-\beta-i0)$$

par un argument de prolongement analytique, en vérifiant par exemple les hypothèses du Théorème II.3.1 de [Si.4].

Théorème 12.1. Soit D un domaine connexe. Soit P_α ($\alpha \in D$) une famille holomorphe d'opérateurs non bornés sur un Hilbert H de domaine fixe (avec injection compacte dans H).

Soit $f(\alpha)$ une fonction analytique dans D , qui coïncide avec une valeur propre de P_α dans un voisinage de α_0 , alors $f(\alpha)$ est une valeur propre de P_α à travers D .

On appliquera ce théorème à $E(\alpha, h)$ (avec h fixé $0 < h < h_0$).

On va donc construire un espace $H(\Lambda_t, 1)$ tel que P_α soit une famille holomorphe d'opérateurs non bornés sur $H(\Lambda_t, 1)$ de domaine $H(\Lambda_t, m)$ pour un poids m convenable tel que $m(x, \xi) \rightarrow \infty$ lorsque $|x| + |\xi| \rightarrow \infty$.

On choisit comme poids :

$$(12.14) \quad r = \langle y \rangle^m, \quad R = \langle y \rangle.$$

On vérifie immédiatement que le symbole de P_α :

$$(12.15) \quad P_\alpha(y, \eta) = \eta^2 + y^2 + \alpha P_{2m}(y) \in S^{2,0}$$

uniformément par rapport à α dans la couronne.

Considérons tout d'abord le cas $\alpha = -1$.

On introduit la fonction fuite $G(y, \eta) = y \cdot \eta$ qui est clairement dans $\dot{S}^{1,1}$.

Sur $(p_{-1})^{-1}(0)$, on a :

$$(12.16) \quad H_p G = -2V - y \cdot \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Posant $V = V_1 + V_2$ avec $V_1 = y^2$, $V_2 = -P_{2m}(y)$, on réécrit $H_p G$ sous la forme :

OSCILLATEUR ANHARMONIQUE

$$H_p G = -4V - (2m-2)V_2 \text{ sur } p^{-1}(0) .$$

On en déduit immédiatement que, sur $p^{-1}(0) \setminus \{0\}$, on a :

$$(12.17) \quad H_p G \geq c_0 r^2 \text{ où } c_0 > 0 .$$

L'hypothèse (8.13) est donc satisfaite.

Notons alors que (cf. 8.14) $\{V=0\}$ est la réunion de $\{0\}$ et de l'hypersurface compacte $P_{2m}(y) = y^2$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Vérifions maintenant l'hypothèse (8.15) qui correspond à une hypothèse globale par rapport au poids $\tilde{r}(y,n)^2$. Celle-ci se déduit immédiatement du critère (9.4).

Cas général $\arg \alpha \in [-\pi, 0]$, $\frac{1}{2} < |\alpha| < 2$.

Le passage au cas général ne pose pas trop de problème mais $P_\alpha(h)(y, D_y)$ n'est plus essentiellement auto-adjoint. On observe cependant que $\text{Im } p_\alpha(y,n) \leq 0$, ce qui est suffisant pour justifier la théorie développée dans la section 8. Plus précisément, cette théorie s'applique lorsque :

- (12.18) [
- (1) p est elliptique en dehors de $p^{-1}(0)$ au sens de (8.15).
 - (2) p prend ses valeurs dans un cône Γ de \mathbb{C} en dehors d'un compact
 - (3) $p=0 \Rightarrow H_p G \in \tilde{\Gamma}$ en dehors d'un compact et $|H_p G| \approx r^2$ en dehors d'un compact
- où
- (4) $\tilde{\Gamma}$ et Γ sont deux cônes tels que l'application :

$$\Gamma \times \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(t, s) \rightarrow t - is$$
 est propre.

Dans notre cas, Γ est le cône $\text{Im } z \leq 0$ et $\tilde{\Gamma}$ est le cône $\text{Re } z \geq |\text{Im } z|$.

Il est alors facile de voir que toute la théorie développée au §.8 s'applique uniformément par rapport à $\alpha \in D$; pour α voisin de l'axe réel négatif, c'est une perturbation de la situation examinée dans le cas $\alpha = -1$ et pour α loin de l'axe réel négatif $p_\alpha(y, \eta)$ est elliptique en dehors d'un compact.

On montre ainsi que $P_\alpha(h)(y, D_y)$ est une famille holomorphe d'opérateurs non bornés dans $H(\Lambda_t)$ de domaine $H(\Lambda_t, \tilde{r}^2)$ pour $t > 0$ assez petit indépendant de $\alpha \in D$ et pour $h \in]0, h_0]$.

Dans le secteur $\text{Arg } \alpha \in [-\epsilon, 0]$, on remarque grâce au théorème 8.5 que les résonances au sens de $H(\Lambda_t)$ coïncident avec celles au sens de $H(\Lambda_0) = L^2$ et coïncident donc au voisinage de nh avec les valeurs propres étudiées dans la théorie usuelle. On sait alors que, dans la boule $B(nh, \epsilon_0 h)$, on a une unique valeur propre simple dépendant holomorphiquement de α qui coïncide avec celle introduite au début de la section. Compte-tenu du théorème 12.1, on est ramené à étudier les résonances pour $\alpha = -1$ dans la boule $B(nh, \epsilon_0 h)$. On sait en effet que le prolongement holomorphe de $\lambda(\beta)$ en fournit une dans cette boule et l'étude que nous allons faire maintenant montre qu'il n'y en a qu'une à savoir $E(-1, h)$. On pourrait sans doute faire une démonstration plus directe complètement interne à notre théorie mais celle présentée ici est plus économique.

Nous sommes donc maintenant ramenés pour exploiter la formule (12.12) à étudier : $\text{Im } E(-1, h)$, ce qui correspond justement à l'étude menée aux sections 9 et 10.

Etude de la résonance.

Nous serons brefs dans la mesure où nous avons déjà vérifié les hypothèses (12.15) et (12.17). Avec les notations de ces sections, on a :

OSCILLATEUR ANHARMONIQUE

$$V(y) = y^2 - P_{2m}(y) \quad , \quad U = \{y = 0\}$$

$$\tilde{O} = \{y ; y^2 - P_{2m}(y) > 0\} \quad , \quad \partial\tilde{O} = \{y, y \neq 0 ; y^2 = P_{2m}(y)\} .$$

On pose : $S_0 = d_V(0, \partial\tilde{O})$.

Introduisant, pour $\eta > 0$ assez petit, $M_0 = \overline{B(U, S_0 - \eta)}$, il existe dans la boule $B(nh, \epsilon h)$ une unique valeur propre du problème de Dirichlet $P_{M_0}(h) : \lambda_{M_0}^{M_0}(h)$ et le théorème 9.5 donne alors l'existence d'une résonance unique $E(-1, h)$ telle que :

$$(12.19) \quad E(-1, h) - \lambda_{M_0}^{M_0}(h) = \tilde{O}(e^{-2 S_0/h}) .$$

On constate également que les hypothèses (10.1) sont satisfaites et il résulte du théorème 10.11 et de (10.75) que :

$$(12.20) \quad \frac{1}{C_0} h^{1/2} e^{-2 S_0/h} \leq -\operatorname{Im} E(-1, h) \leq C_0 h^{1-n/2} e^{-2 S_0/h} .$$

Si on suppose de plus que les points de type 1 forment une sous-variété de codimension d dans $\partial\tilde{O}$ et si la surface caustique C a un contact d'ordre 2 exactement, alors on a (cf. 10.68) :

$$(12.21) \quad -\operatorname{Im} E(-1, h) = h^{1 - \frac{n}{2} + \frac{d}{2}} f(h) e^{-2 S_0/h}$$

où f est la réalisation d'un symbole analytique elliptique.

Application à la formule Bender-Wu.

Rappelons, d'après (12.13), que :

$$\operatorname{Im} \lambda_0(-\beta - i0) = |\beta|^{-1/m-1} \operatorname{Im} E(-1, |\beta|^{1/m-1}) .$$

Dans le cas où (12.20) est satisfaite, on obtient grâce à (12.12) que :

$$(12.22) \quad \frac{1}{C} \Gamma((m-1)j + \frac{1}{2}) \leq (-1)^{j+1} a_j (2S_0)^{(m-1)j} \leq C \Gamma((m-1)j + \frac{n}{2})$$

avec $C > 0$.

Dans le cas où (12.21) est satisfaite, on obtient que :

$$(12.23) \quad a_j = (-1)^{j+1} (2S_0)^{-(m-1)j} \Gamma((m-1)j + \frac{(n-d)}{2}) [\alpha + \mathcal{O}(\frac{1}{j})]$$

avec $\alpha \neq 0$.

Le calcul de α semble difficile à préciser dans le cas général (voir cependant le §.14).

Remarque 12.2. On peut obtenir des estimations du même type que (12.22) et (12.23) relativement aux niveaux excités.

Etude du cas $n=1, m=2$: $P_4(y) = y^4$.

On peut utiliser les calculs effectués au §.11 (ex. 11.4) et on démontre les formules (12.11) et (12.10). ■

Remarque 12.3. On traite le cas $n=1, m=2$ pour simplifier mais les résultats ne sont pas limités à ce cas.

Nous n'avons pas exploité complètement la propriété que : $\theta(\beta) = -e^{2/3\beta} 4\pi^{1/2} \beta^{1/2} \text{Im} \lambda_0(-\beta-i0)$ est un symbole analytique à savoir qu'il existe $C > 0$ et $\epsilon > 0$ t.q. :

$$\theta(\beta) = 1 + \sum_1^{C/\beta} C_\ell \cdot \beta^\ell + \mathcal{O}(e^{-\epsilon/\beta}) \quad (\text{avec } \epsilon > 0)$$

où, ce qui est équivalent, mais plus utile ici : $\exists C > 0$ tel que : $\forall N$:

$$|\theta(\beta) - 1 - \sum_1^N C_\ell \beta^\ell| \leq |\beta|^{N+1} C^{N+1} \cdot N!$$

Utilisant (12.12), on observe alors qu'il existe ϵ_1, ϵ_2 avec $0 < \epsilon_1 < 1$, $0 < \epsilon_2 < 1$ tels que, $\forall j$,

OSCILLATEUR ANHARMONIQUE

$$a_j = (-1)^{j+1} \frac{1}{4} \pi^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{j+1/2} \Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \sum_{l=1}^{[\epsilon_1 j]} C_l \left(\frac{2}{3}\right)^l \frac{1}{(j - \frac{1}{2}) \dots (j - l + \frac{1}{2})} + \mathcal{O}(\epsilon_2^j) \right].$$

Une expression de la constante C_1 est conjecturée dans un article de Bender-Wu [Ben.W.2]. L'existence d'un tel développement, même si elle était présente n'était pas démontrée à notre connaissance.

13. ETUDE DE L'EFFET ZEEBMAN. DEMONSTRATION DE LA FORMULE DE BENDER-WU.

Nous suivons ici une démarche proposée par S. Graffi.

13.1. Rappels et énoncé des résultats.

On considère dans \mathbb{R}^3 l'opérateur :

$$(13.1.1) \quad Z_B = -\Delta - \frac{1}{r} + B(x^2 + y^2) \quad , \quad B > 0$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Rappelons les résultats suivants :

Théorème 13.1.1.

- (i) Pour $B \in \mathbb{C} \setminus 0$, $|\text{Arg } B| < \pi$, l'opérateur Z_B définit une famille holomorphe de domaine $H^2(\mathbb{R}^3) \cap D(x^2 + y^2)$.
- (ii) Il existe, près de la valeur propre $-\frac{1}{4}$ de $-\Delta - \frac{1}{r}$, une unique valeur propre $E(B)$ définie dans $\Omega_{B_0} = \{0 < |B| < B_0, |\text{Arg } B| < \pi\}$.
- (iii) Pour tout $\eta > 0$, $E(B)$ admet un prolongement holomorphe dans un secteur de la forme :

$$\tilde{\Omega}_\eta = \{0 < |B| < B(\eta), |\text{Arg } B| < 2\pi - \eta\} \quad (\text{sur la surface de Riemann})$$

et dans tout secteur $\tilde{\Omega}_\eta = \{0 < |B| < B(\eta), |\text{Arg } B| < 2\pi - \eta\}$ avec $\eta > 0$

$$(13.1.2) \quad E(B) \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n B^n$$

- (iv) $|\gamma_n| \leq C^{n+1} (2n)!$ et de plus, on peut resommer la série de perturbations au sens de Borel, pour réobtenir $E(B)$ dans un secteur $\tilde{\Omega}_\eta = \{0 < |B| < B(\eta), |\text{Arg } B| < \frac{3\pi}{2} - \eta\}$.

EFFET ZEEMAN

Ces résultats sont dûs à Avron-Herbst-Simon [A.H.S] et on pourra en trouver une démonstration brève dans le Survey de S. Graffi [Gra].

Comme dans la section précédente, on s'intéresse à préciser le comportement asymptotique de γ_n .

Compte-tenu du Théorème 13.1.1 (points (i) à (iii)), on a :

$$(13.1.3) \quad \gamma_n = (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{B_0} \frac{\text{Im } E(-B-i0)}{B^{n+1}} dB + \mathcal{O}\left(\frac{1}{B_0^{n+1}}\right).$$

L'objet de cette section est donc de démontrer le théorème suivant conjecturé par J. Avron (et partiellement justifié) [A.2].

Théorème 13.1.2.

$$(13.1.4) \quad \text{Im } E(-B-i0) = -B^{-3/4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + O(\sqrt{B})) \exp\left(\frac{-\pi}{8\sqrt{B}}\right).$$

Ce Théorème admet classiquement comme corollaire :

Corollaire 13.1.3.

$$(13.1.5) \quad \gamma_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{\pi}\right)^{5/2} \left(\frac{16}{2}\right)^n (2n + \frac{1}{2})! \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Notre démarche sera voisine de celle suivie dans la section 12 ; toutefois, comme notre théorie n'aime pas les potentiels singuliers, nous devons changer de problème en suivant une stratégie suggérée par S. Graffi et qui apparaît déjà dans l'ouvrage de Titchmarsh. Cette stratégie apparaît également dans l'étude de l'effet Stark (cf. le Survey de Graffi et ses références).

13.2. Réduction à un problème semi-classique pour un oscillateur anharmonique dans \mathbb{R}^4 .

On utilise ici les coordonnées paraboliques (cf [Ti]). On omet de suivre les domaines intermédiaires des opérateurs et la justification des

changements de coordonnées. Ce point est traditionnellement escamoté (et considéré comme admis) et il suffira pour le justifier de suivre le vecteur propre qui nous intéresse.

On pose :

$$(13.2.1) \quad \begin{aligned} x &= u \cdot v \cdot \cos \varphi & \varphi \in [0, 2\pi[\\ y &= u \cdot v \cdot \sin \varphi & u \in \mathbb{R}^+ \\ z &= \frac{1}{2} (u^2 - v^2) & v \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

et on cherche des fonctions propres vérifiant :

$$R_\varphi \cdot f = f$$

où R_φ est la rotation d'angle φ autour de l'axe des z .

On cherche des fonctions propres sous la forme :

$$u^{-1/2} \cdot v^{-1/2} \psi$$

avec ψ dans un espace convenable (en particulier $\psi \in L^2(\mathbb{R}^{2++})$). On est alors conduit à chercher pour $B > 0$ fixé la plus petite valeur $E(B)$ pour laquelle l'opérateur

$$(13.2.2) \quad -\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) - 2 + B(u^2 + v^2)u^2 v^2 - E(u^2 + v^2) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right)$$

a un noyau non nul dans un espace convenable.

Pour éliminer la singularité du potentiel, on préfère, calculer la plus petite valeur de E pour laquelle l'extension de Friedrichs associée à l'opérateur

$$(13.2.3) \quad W(E, B) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_2^2}\right) - 2 + B(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - E(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)$$

EFFET ZEEMAN

a un noyau non nul dans le domaine de l'opérateur intersecté avec l'espace des solutions invariantes par l'action de $S^1 \times S^1$ dans \mathbb{R}^4 donnée par :

$$(13.2.4) \quad S^1 \times S^1 \ni (\theta_1, \theta_2) \rightarrow R_{\theta_1, \theta_2} \in O(4)$$

$$R_{\theta_1, \theta_2}(u_1, u_2, v_1, v_2) = (R_{\theta_1}(u_1, u_2), R_{\theta_2}(v_1, v_2))$$

où R_{θ_1} (resp. R_{θ_2}) est la rotation d'angle θ_1 (resp. θ_2) dans le plan des u (resp. le plan des v).

Ce noyau "invariant" (voir plus loin) est de dimension 1 et coïncide avec le noyau.

Montrons que l'élément dans le noyau de (13.2.3) fournit un vecteur propre pour Z_B .

Soit $\chi[u_1, u_2, v_1, v_2]$ la solution invariante. On a :

$$(13.2.5) \quad \chi \in L^2(\mathbb{R}^4), \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \quad (\text{et même à décroissance exponentielle}).$$

Dans nos changements de coordonnées, des singularités peuvent apparaître uniquement sur : $|u| = |v| = 0$, c.à.d. $x = y = 0$.

Remarquons également que :

$$(13.2.6) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = u^{-1/2} \cdot v^{-1/2} \psi(u, v) & (u, v) \in \mathbb{R}^{2+} \\ \chi(u, v) = |u|^{-1/2} |v|^{-1/2} \psi(|u|, |v|) & (u, v) \in \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

et que

$$(13.2.7) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{2++})} = \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}.$$

Soit donc f la fonction associée à χ par les formules (13.2.6). f est a

priori définie dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$ et on vérifie que :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((Z_B - E(B))f) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\} . \\ f \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}) . \\ f \text{ décroît exponentiellement lorsque } (|x| + |y| + |z|) \rightarrow \infty . \end{array} \right.$$

On note \tilde{f} un prolongement de f dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Alors :

$$(Z_B - E(B))\tilde{f} = \mu$$

où μ est une distribution à support dans $\{x=y=0\}$.

Si on montre que : $\mu = 0$, on aura terminé, car on retrouvera facilement que \tilde{f} est dans le domaine de Z_B en revenant à l'équation.

On a le :

Lemme 13.2.1. Soit $\tilde{f} \in L^2_{loc}$, tel que $(\Delta_{x,y,z} \tilde{f}) \in L^2_{loc}$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$, alors $(\Delta_{x,y,z} \tilde{f}) \in L^2_{loc}$.

Démonstration : On écrit que $(\Delta_{x,y,z} \tilde{f}) = h + \mu$ avec $h \in L^2_{loc}$, μ à support dans $\{x=y=0\}$.

Soit $\rho(z)$ une fonction test dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; on a :

$$\int (\Delta_{x,y,z} \tilde{f}) \cdot \rho(z) dz = \int h(x,y,z) \rho(z) dz + \langle \mu, \rho \rangle .$$

On pose $\tilde{f}_\rho = \int \tilde{f}(x,y,z) \rho(z) dz$

$$\mu_\rho = \int \mu(x,y,z) \rho(z) dz .$$

On obtient ainsi dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$:

$$\Delta_{x,y} \tilde{f}_\rho = \tilde{h}_\rho + \mu_\rho$$

EFFET ZEEMAN

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{h}_\rho = h_\rho - \tilde{f}_\rho, \in L_{loc}^2 \\ \mu_\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \text{ à support dans } \{x=y=0\} \\ \tilde{f}_\rho \in L_{loc}^\infty. \end{cases}$$

Comme $\tilde{f}_\rho \in L_{loc}^2$, on a nécessairement $\mu_\rho \in H_{loc}^{-2}(\mathbb{R}^2)$ et donc

$$\mu_\rho = c \cdot \delta.$$

Si $c \neq 0$, on obtient une contradiction car alors :

$$\tilde{f}_\rho = \lambda c \cdot \log(x^2 + y^2) \pmod{L_{loc}^\infty} \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

On a donc $\mu_\rho = 0$ pour tout ρ et donc $\mu = 0$. C.Q.F.D.

Le lemme 13.2.1. s'applique directement à notre situation car :

$$(Z_B - E(B))\tilde{f} = \Delta \tilde{f} - \frac{1}{r} \tilde{f} + B(x^2 + y^2)\tilde{f} - E(B)\tilde{f} = \mu$$

et, si $\tilde{f} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors $-\frac{1}{r} \tilde{f} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$.

Par des techniques analogues, on montrerait de même qu'une fonction dans le noyau de $(Z_B - E(B))$ invariante par rotation, donne une solution invariante dans le noyau de $W(E(B), B)$.

On a donc démontré la :

Proposition 13.2.2. $E(B)$ est une valeur propre de Z_B correspondant à une fonction propre invariante si et seulement si $E(B)$ est une valeur de E telle que :

$W(E, B)$ a un noyau non nul dans l'espace de ses solutions invariantes dans le domaine de l'extension de Friedrichs.

Nous nous sommes ainsi ramené à l'étude de l'opérateur $W(E,B)$, en gardant en mémoire que nous sommes intéressés par le comportement de $E(B)$ lorsque $B \rightarrow 0$.

On souhaite maintenant se ramener à des problèmes plus classiques pour pouvoir utiliser les techniques antérieures.

Considérons dans \mathbb{R}^4 le changement d'échelles :

$$(13.2.8) \quad u = \lambda x, v = \lambda y \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

L'opérateur $W(E,B)$ devient :

$$(13.2.9) \quad -\frac{1}{\lambda^2} (\Delta_{x,y}) - 2 + B \lambda^6 (x^2 + y^2)(x^2 y^2) - E \lambda^2 (x^2 + y^2).$$

On choisit (compte-tenu du fait que E est proche de $-\frac{1}{4}$) λ pour que soit vérifiée la relation : $-E \lambda^2 = B \lambda^6$, soit :

$$(13.2.10) \quad \lambda = \left(-\frac{E}{B}\right)^{1/4}.$$

Posant :

$$(13.2.11) \quad h = \frac{\sqrt{B}}{-E} = \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{-E}}$$

on tombe sur l'étude des couples (E,h) pour lequel :

$$(13.2.12) \quad -h^2 \Delta_{x,y} - \frac{2}{\sqrt{-E}} h + (x^2 + y^2)x^2 \cdot y^2 + (x^2 + y^2)$$

a un noyau non vide,

soit encore sur le calcul d'une valeur propre $\lambda(h)$ de :

$$(13.2.13) \quad P(h) = -h^2 \Delta_{x,y} + (x^2 + y^2)x^2 y^2 + (x^2 + y^2)$$

Comme on s'intéresse à la plus petite valeur de E , on cherche le niveau fondamental pour $P(h)$ (d'où l'identité entre les solutions nulles de

EFFET ZEEMAN

$W(E, B)$ et les solutions nulles invariantes). Le lien entre le problème initial et le nouveau problème est donc donné par :

$$(13.2.14) \quad h = \frac{\sqrt{B}}{-E(B)}, \quad \frac{2}{\sqrt{-E(B)}} = \frac{\lambda(h)}{h} \quad B \in \mathbb{R}^+$$

L'étude de l'opérateur (13.12.13) a fait l'objet de [H.S.1] et [Si.1]. $\lambda(h)$ et $-E(B)$ sont des fonctions analytiques sur $]0, h_0[$ et $]0, B_0[$ respectivement et on obtient directement du premier article cité que :

$$(13.2.15) \quad \frac{\lambda(h)}{h} \sim \sum_{n \geq 0} \delta_n h^{2n}, \quad h \in]0, h_0[\quad \text{avec} \quad |\delta_n| \leq C^{2n+1} (2n)! .$$

Remarquons maintenant qu'un nouveau changement d'échelle (du même type que celui effectué dans la section précédente) montre que l'étude de ce problème est encore équivalente à l'étude de la première valeur propre $v(s)$ de l'opérateur :

$$(13.2.16) \quad Q(s) = -\Delta_{x,y} + (x^2 + y^2) + s(x^2 + y^2)x^2 y^2$$

avec les relations :

$$(13.2.17) \quad s = h^2, \quad v(s) = \frac{\lambda(h)}{h}$$

On a ainsi le point de vue perturbation singulière du problème.

Considérons la relation (cf. (13.2.14) et (13.2.17)) :

$$(13.2.18) \quad v(s) = \frac{2}{\sqrt{-E(B)}}, \quad \text{avec} \quad s = \frac{B}{(-E(B))^2}$$

valable a priori pour $B \in]0, B_0[$.

Compte-tenu du Théorème 13.1.1 (iii), on en déduit que $v(s)$ admet un prolongement holomorphe dans un secteur de la forme :

$$\tilde{\Omega}_\eta = \{0 < |s| < s(\eta), |\text{Arg } s| < 2\pi - \eta\}$$

et que le développement de $v(s)$:

$$(13.2.19) \quad v(s) \sim \sum_{n \geq 0} \delta_n s^n \quad (\text{avec } \delta_0 = 4)$$

est valable dans tout sous-secteur $\tilde{\Omega}_\eta = \{0 < |s| < s(\eta), |\text{Arg } s| < 2\pi - \eta\}$.

Il existe une démonstration plus directe de ces propriétés (cf. Remarque 13.3.1) mais nous préférons ici aller au plus court.

De plus, la relation (13.2.18) est alors valable dans des secteurs du type $\tilde{\Omega}_\eta$.

Pour réduire complètement le problème au problème semi-classique, il reste 2 problèmes à éclaircir :

- Le premier est de faire le lien entre $\text{Im } v(-s-i0)$ et $\text{Im } E(-B-i0)$.
- Le deuxième est de faire le lien entre $\text{Im } v(-s-i0)$ et la résonance proche de $4h$ de l'opérateur $P_\alpha(h)$ avec $\alpha = -1$ et

$$(13.2.20) \quad P_\alpha(h) = -h^2 \Delta_{x,y} + (x^2 + y^2) + \alpha(x^2 + y^2)x^2 y^2.$$

Compte-tenu de l'étude qui sera faite dans les sous-sections suivantes, le deuxième problème se résout comme dans la section précédente si on remarque que, compte-tenu de (13.2.17), la fonction $\lambda_\alpha(h) = h v(\alpha h^2)$ est holomorphe pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 2]$, $\text{Arg } \alpha \in]-\pi - \eta, +\eta[$ et que, par conséquent, compte-tenu de la proposition rappelée dans la section précédente et du fait que $\lambda_\alpha(h) = \lambda(h)$ (pour $\alpha = 1$), on a bien :

$$(13.2.21) \quad z(h) = h v(-h^2 - i0), \quad h \in]0, h_0[$$

où $z(h)$ est la résonance de $P_{-1}(h)$ proche de $4h$.

On se ramène donc à l'étude du deuxième problème qui fait l'objet du :

EFFET ZEE MAN

Lemme 13.2.3.

$$(13.2.22) \quad \operatorname{Im} E(-B-i0) = \frac{1}{8} (1 + \mathcal{O}(B)) \operatorname{Im} v \left(- \frac{B}{(\operatorname{Re} E(-B-i0))^2} \right).$$

Démonstration : Il suffit de partir de la relation (13.2.18), de prendre les parties imaginaires et de faire un développement de Taylor de $\operatorname{Im} v$ au point $-\frac{B}{(\operatorname{Re} E(-B-i0))^2}$. Utilisant que $\operatorname{Im} E(-B-i0) = \mathcal{O}(B^\infty)$ et que v admet un développement asymptotique dans le secteur considéré, le résultat s'en déduit aisément.

Compte-tenu de (13.2.21) et (13.2.22) l'étude de $\operatorname{Im} E(-B-i0)$ se ramène donc à l'étude de $\operatorname{Im} z(h)$.

13.3. Définition de la résonance pour une famille d'opérateurs semi-classiques.

On considère dans \mathbb{R}^4 la famille :

$$(13.3.1) \quad P_\alpha(h) = -h^2 \Delta_{x_1, x_2} + |x_1|^2 (1 + \alpha |x_1|^2 |x_2|^2)$$

avec $\operatorname{Arg} \alpha \in [-\pi, \pi]$ ($\eta > 0$), $\frac{1}{2} < |\alpha| < 2$.

Il s'agit dans le même esprit qu'à la section précédente de montrer que les hypothèses des sections 8, 9, 10 sont satisfaites. De nouvelles difficultés apparaissent car l'isle n'est plus compacte.

On concentre nos efforts sur le cas $\alpha = -1$, car, pour $\operatorname{Arg} \alpha \in]-\pi + \eta, \pi]$, on est dans une situation "elliptique", et la vérification des conditions ci-dessous est stable par petite perturbation dans les classes d'opérateurs pseudo-différentiels considérées.

Considérons donc le potentiel :

$$(13.3.2) \quad V(x) = x^2 (1 - x_1^2 x_2^2) \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

pour lequel on a déjà observé l'invariance par R_{θ_1, θ_2} ($(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$)

(et où on note $x^2 = |x|^2$, $x_1^2 = |x_1|^2$, ...) :

$$(13.3.3) \quad V(R_{\theta_1} x_1, R_{\theta_2} x_2) = V(x_1, x_2) .$$

V est donc déterminé par sa restriction V_0 à \mathbb{R}^{2++}

$$(13.3.4) \quad V_0(t_1, t_2) = V(t_1, 0, t_2, 0) ; (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{2++} .$$

On introduit les poids (r, R) suivants :

$$(13.3.5) \quad \begin{cases} r(x) = (1 + |x|^2)^{1/2} (1 + |x_1|^2 |x_2|^2)^{1/2} \\ R(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2} (1 + |x_1|^2 |x_2|^2)^{1/2} . \end{cases}$$

Observons qu'on a bien $r \geq 1$, $rR \geq 1$ et on remarque aussi que :

$$(13.3.6) \quad \begin{cases} (1 + |x|^2)^{-1/2} \leq R \leq (1 + |x|^2)^{1/2} \\ (1 + |x|^2)^{1/2} \leq r \leq (1 + |x|^2)^{3/2} . \end{cases}$$

Par ailleurs r, R ont les mêmes propriétés d'invariance par rotation que V .

De plus : $|V(x)| \leq r(x)^2$ pour $x \in \mathbb{R}^4$.

Si $y \in \mathbb{C}^4$, $x \in \mathbb{R}^4$ et $|y - x| \leq \varepsilon R(x)$ avec ε assez petit, alors

$$|1 + |y|^2| \sim |1 + |x|^2|$$

et

$$\begin{aligned} ||y_1|^2 |y_2|^2 - |x_1|^2 |x_2|^2| &\leq ||y_1|^2 - |x_1|^2| ||y_2|^2 - |x_2|^2| \\ &\quad + |x_1|^2 ||y_2|^2 - |x_2|^2| \\ &\quad + |x_2|^2 ||y_1|^2 - |x_1|^2| \\ &\leq \tilde{C} \varepsilon (1 + |x_1|^2 |x_2|^2) . \end{aligned}$$

EFFET ZEEMAN

Par conséquent, on vérifie que :

$$|V(y)| \leq C r(x)^2 .$$

Cet argument montre aussi que si l'on étend r, R de manière holomorphe dans le domaine $|\operatorname{Im} x| \leq \varepsilon R(\operatorname{Re} x)$, alors $|r(y)| \leq C r(x)$ $|R(y)| \leq C R(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$ et $|y - x| \leq \varepsilon R(x)$. Donc par les inégalités de Cauchy, on obtient :

$$(13.3.7) \quad \begin{cases} \partial^\alpha r = \mathcal{O}(r R^{-|\alpha|}) \\ \partial^\alpha R = \mathcal{O}(R^{1-|\alpha|}) . \end{cases}$$

Nous avons ainsi vérifié que r, R ont toutes les propriétés voulues pour être une paire de poids et que :

$$(13.3.8) \quad p = \xi^2 + V \in S^{2,0} .$$

Construction de la fonction fuite G .

On va maintenant montrer l'existence d'une fonction fuite G telle que :

$$(13.3.9) \quad H_p G \geq \frac{1}{C_0} r^2 , \quad C_0 > 0 \quad \text{sur } p^{-1}(0) \setminus \{0\} .$$

On cherche ici des fonctions fuites sous la forme du symbole principal d'un champ gradient :

$$(13.3.10) \quad G(x, \xi) = f'(x) \cdot \xi$$

où f est choisie dans $S^{0,2}$.

On obtient facilement l'inégalité :

$$(13.3.11) \quad H_p(f'(x) \cdot \xi) \geq -f'(x) \cdot V'(x) + 2 \lambda_{\min}(f'')(-V) \quad \text{sur } p^{-1}(0)$$

où $\lambda_{\min}(f'')$ est la plus petite valeur propre du Hessien de $f : f'$.

On choisira f de telle sorte que f soit dans $S^{0,2}$ et invariante par rotation :

$$(13.3.12) \quad f(x_1, x_2) = f(R_{\theta_1} x_1, R_{\theta_2} x_2) \quad , \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1 .$$

Observons qu'alors :

$$(13.3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (f' \cdot V')(x_1, x_2) \text{ et } \lambda_{\min}(f'')(x_1, x_2) \\ \text{sont également invariantes par rotation.} \end{array} \right.$$

Nous utiliserons cette propriété ultérieurement pour ne faire les calculs qu'en des points $(t_1, 0, t_2, 0)$ avec $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{2++}$.

Considérons d'abord la fonction :

$$(13.3.14) \quad \tilde{f}(x) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{|x|^2}$$

(définie pour $|x| > \frac{1}{2}$ et modifiée convenablement pour $|x|$ petit).

On vérifie que \tilde{f} appartient à $S^{0,2}$ et on trouve en posant :

$$(13.3.15) \quad g_0(t) = \frac{t_1^2 t_2^2}{|t|^2} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^{2++}$$

et

$$\begin{array}{ll} x_1 = (x_1^i, x_1^i) & t_1 = |x_1| \\ x_2 = (x_2^i, x_2^i) & t_2 = |x_2| \end{array}$$

$$(13.3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1^i} = \frac{\partial g_0}{\partial t_1} \cdot \frac{x_1^i}{|x_1|} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1^{ii}} = \frac{\partial g_0}{\partial t_1} \cdot \frac{x_1^{ii}}{|x_1|} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2^i} = \frac{\partial g_0}{\partial t_2} \cdot \frac{x_2^i}{|x_2|} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2^{ii}} = \frac{\partial g_0}{\partial t_2} \cdot \frac{x_2^{ii}}{|x_2|} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(tout au moins pour } |x_1| \neq 0 \\ |x_2| \neq 0) \end{array}$$

EFFET ZEEMAN

On en déduit que :

$$(13.3.17) \quad -(\tilde{f}' \cdot V')(x_1, x_2) = -(g'_0 \cdot V'_0)(t_1, t_2) .$$

Calculons $\lambda_{\min}(\tilde{f}'')$ qu'on essaiera de comparer avec $\lambda_{\min}(g''_0)$.

Notons que g_0 est homogène de d^2 et qu'on a les identités :

$$g_1(t_1, t_2) = t_1 g_{11}(t_1, t_2) + t_2 g_{12}(t_1, t_2)$$

$$g_2(t_1, t_2) = t_1 g_{21}(t_1, t_2) + t_2 g_{22}(t_1, t_2)$$

(avec les conventions $g_i(t) = \frac{\partial g_0}{\partial t_i}(t)$, $g_{ij} = \frac{\partial^2 g_0}{\partial t_i \partial t_j}(t_1, t_2)$).

En un point $(x'_1, 0, x'_2, 0)$ avec $x'_1 > 0$, $x'_2 > 0$, un calcul que nous omettons montre que :

$$\tilde{f}''(x'_1, 0, x'_2, 0) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & g_{12} \\ g_{12} & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{12} & 0 & g_{22} \end{pmatrix} + g_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_2}{x'_1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{x'_1}{x'_2} \end{pmatrix}$$

Si on observe que $g_{12} \geq 0$ et que :

$$\begin{pmatrix} \frac{x'_2}{x'_1} & -1 \\ -1 & \frac{x'_1}{x'_2} \end{pmatrix} \text{ est une matrice positive ,}$$

on en déduit immédiatement que :

$$\lambda_{\min}(\tilde{f}'')(x'_1, 0, x'_2, 0) \geq \lambda_{\min}(g''_0)(x'_1, x'_2)$$

et compte-tenu de l'invariance par rotation, on en déduit que :

$$(13.3.18) \quad \lambda_{\min}(\tilde{f}'')(x_1, x_2) \geq \lambda_{\min}(g''_0)(|x_1|, |x_2|) .$$

Compte-tenu de (13.3.17) et (13.3.18), il reste maintenant à étudier une minoration convenable de :

$$(13.3.19) \quad -(g_0' \cdot V_0') + \lambda_{\min}(g_0'') [-2V_0]$$

en un point (t_1, t_2) de \mathbb{R}^{2++} t.q. $V_0(t_1, t_2) \leq 0$.

On est ainsi ramené à l'étude de la fonction g_0 sur \mathbb{R}^{2++} pour laquelle on va maintenant faire les calculs.

Soit donc $g_0(t_1, t_2) = \frac{t_1^2 t_2^2}{|t|^2}$; on trouve :

$$(13.3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_0}{\partial t_1} = \frac{2 t_2^4 t_1}{|t|^4}, \quad \frac{\partial g_0}{\partial t_2} = \frac{2 t_1^4 t_2}{|t|^4} \\ \frac{\partial^2 g_0}{\partial t_1^2} = \frac{2 t_2^6 - 6 t_2^4 t_1^2}{|t|^6}, \quad \frac{\partial^2 g_0}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{8 t_1^3 t_2^3}{|t|^6} \geq 0 \\ \frac{\partial^2 g_0}{\partial t_2^2} = \frac{2 t_1^6 - 6 t_1^4 t_2^2}{|t|^6} \end{array} \right.$$

D'où :

$$(13.3.21) \quad -g_0' \cdot V_0' = \frac{4}{|t|^4} \left[|t|^2 (|t|^4 - 2(t_1 t_2)^2) (t_1 t_2)^2 + (t_1 t_2)^2 |t|^2 ((t_1 t_2)^2 - 1) \right]$$

et

$$(13.3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_0'' = \frac{2}{|t|^6} \left(\begin{array}{c|c} t_2^6 - 3 t_2^4 t_1^2 & 4 t_1^3 t_2^3 \\ \hline 4 t_1^3 t_2^3 & t_1^6 - 3 t_1^4 t_2^2 \end{array} \right) = \frac{2}{|t|^6} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix} \\ \lambda_{\min} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{a} + \tilde{c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{a} - \tilde{c}}{2}\right)^2 + \tilde{b}^2} \end{array} \right.$$

EFFET ZEEMAN

$$2 \lambda_{\min} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix} = |t|^6 - 6 |t|^2 (t_1 t_2)^2 - \sqrt{(t_2^2 - t_1^2)^6 + 64 t_1^6 t_2^6} ,$$

d'où finalement :

$$(13.3.23) \begin{cases} -g'_0 \cdot V'_0 + 2 \lambda_{\min}(g'')(-V_0) = \\ = \frac{2}{|t|^4} \left[2 |t|^2 (|t|^4 - 2(t_1 t_2)^2) (t_1 t_2)^2 + 2(t_1 t_2)^2 |t|^2 ((t_1 t_2)^2 - 1) \right. \\ \left. + (t_1^2 t_2^2 - 1) (|t|^6 - 6 |t|^2 (t_1 t_2)^2 - \sqrt{(t_2^2 - t_1^2)^6 + 64 t_1^6 t_2^6}) \right]. \end{cases}$$

On pose $|t|^2 = a$, $|t_1 t_2| = b$ ($1 \leq b \leq \frac{a}{2}$), on trouve :

$$(13.3.24) \quad \begin{aligned} \phi &\equiv -g'_0 \cdot V'_0 + 2 \lambda_{\min}(g'')(-V_0) = \\ &= \frac{2}{a^2} \left[3 a^3 b^2 - 8 a b^4 - a^3 + 4 a b^2 - (b^2 - 1) \sqrt{(a^2 - 4 b^2)^3 + 64 b^6} \right]. \end{aligned}$$

(On a utilisé l'identité $(t_1^2 - t_2^2)^2 = a^2 - 4 b^2$).

On suppose que $1 \leq b \leq \frac{\varepsilon}{2} a$, $\varepsilon \in]0, 1]$ et on va discuter l'estimation en fonction de ε . On obtient d'abord une minoration de ϕ par :

$$\begin{aligned} \phi &\geq \frac{2}{a^2} \left[3 a^3 b^2 - 8 a^3 b^2 \frac{\varepsilon^2}{4} - a^3 + 4 a - (b^2 - 1) a^3 \right] \\ &\geq \frac{2}{a^2} \left[2 a^3 b^2 (1 - \varepsilon^2) + 4 a \right] \end{aligned}$$

d'où

$$(13.3.25) \quad \phi \geq \frac{4}{a} \left[a^2 b^2 (1 - \varepsilon^2) + 2 \right].$$

On a donc finalement pour $1 \leq |t_1 t_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t|^2$, $\varepsilon \in [0, 1]$

$$(13.3.26) \quad -g'_0 V'_0 + 2 \lambda_{\min}(g'')(-V_0) \geq 2 (1 - \varepsilon^2) r_0(t)^2 + \frac{8}{|t|^2} \\ (r_0(t) = r(t_1, 0, t_2, 0)) .$$

Cette inégalité montre que la fonction fuite \tilde{G} associée à \tilde{f} vérifie :

$$(13.3.27) \quad H_p \tilde{G} \geq 0 \quad \text{pour } |x| \geq \frac{1}{2}$$

et

$$(13.3.28) \quad H_p \tilde{G} \geq \frac{1}{C_\varepsilon} r^2 \quad \text{si } (|x_1| - |x_2|) \geq \varepsilon |x| .$$

Pour obtenir une fonction fuite valable partout, on pose, pour $|x| > \frac{1}{2}$:

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \delta_1 \chi \left(\frac{|x_1| - |x_2|}{\varepsilon |x|} \right) [|x_1|^2 + |x_2|^2]$$

avec $\varepsilon > 0$, δ_1 choisi assez petit et où χ est une fonction de troncature égale à 1 sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et à support dans $]-1, +1[$.

La fonction $\check{f}(x) = |x_1|^2 + |x_2|^2$ étant dans $S^{0,2}$ dans $\{|x_1| - |x_2| \leq \varepsilon |x|\}$ et vérifiant $-\check{f}' \cdot V' + 2 \lambda_{\min}(\check{f}'')(-V) \geq \frac{1}{C_0} |x|^6$ dans cette zone (sur $V \leq 0$), on obtient finalement que G définie par :

$$G(x, \xi) = (\nabla f)(x) \cdot \xi$$

est telle que :

$$(13.3.29) \quad H_p G \geq \frac{1}{C} r^2 \quad \text{sur } V^{-1}]-\infty, 0) .$$

Vérification de l'hypothèse d'ellipticité en dehors de $p^{-1}(0)$.

On doit maintenant vérifier la propriété (8.15) ou encore, compte-tenu d'une remarque faite dans la section 9, vérifier (9.4).

On raisonne par l'absurde ; supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $W \subset \bar{0}$ voisinage du puits $U = \{0\}$ et une suite x_n avec $x_n \in \bar{0} \setminus (W \cap B(\bar{0}, \varepsilon_0))$ telle que :

EFFET ZEEMAN

$$(13.3.30) \quad 0 \leq h(x_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{V(x)}{r(x)^2} .$$

Alors on a une contradiction.

Rappelons que dans les notations des §.8 et 9, on a :

$$(13.3.31) \quad U = \{0\}, \quad \overset{\circ}{O} = \{|x_1|^2 |x_2|^2 < 1\}, \quad \partial \overset{\circ}{O} = \{x, x \neq 0, |x_1|^2 |x_2|^2 = 1\} .$$

Si la suite $|x_n|$ (ou plus exactement une sous-suite extraite de celle-ci est barrée), on obtient immédiatement une contradiction.

Le cas pouvant poser problème est le cas où :

$$(13.3.32) \quad \begin{aligned} |x_n| &\rightarrow \infty \\ (x_1)_n^2 (x_2)_n^2 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

et on suppose par exemple que :

$$(13.3.33) \quad |x_{2,n}| \rightarrow 0, \quad |x_{1,n}| \rightarrow \infty .$$

On obtiendra une contradiction, en construisant une suite y_n telle que :

$$(13.3.34) \quad V(y_n) = 0 \quad \text{et} \quad |x_n - y_n| < \varepsilon_0 R(x_n) .$$

On cherche y_n sous la forme :

$$\begin{aligned} y_{1,n} &= x_{1,n} \\ y_{2,n} &= (1 + \tau_n)^{-1} \cdot x_{2,n} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$(1 + \tau_n)^2 - |x_{1,n}|^2 |x_{2,n}|^2 = 0$$

soit :

$$t_n^2 + 2 t_n + (1 - |x_{1,n}|^2 |x_{2,n}|^2) = 0$$

et on trouve facilement $t_n \rightarrow 0$ avec :

$$t_n = (1 + o(\frac{1}{n})) (|x_{1,n}|^2 |x_{2,n}|^2 - 1) .$$

On en déduit que :

$$\frac{|x_n - y_n|}{R(x_n)} = (1 + o(\frac{1}{n})) \frac{|t_n| |x_{2,n}|}{R(x_n)} = \frac{(1 + o(\frac{1}{n}))}{\sqrt{2}} \cdot |t_n| |x_{2,n}| |x_n|$$

et on conclut que :

$$\frac{|x_n - y_n|}{R(x_n)} \rightarrow 0 . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le bilan de cette section est le suivant. Les hypothèses du Théorème 8.3 sont satisfaites pour $P_{-1}(h)$ et permettent de définir la résonance près de 4h. Comme dans la section précédente, on peut montrer qu'il existe $t > 0$ tel que la famille $P_\alpha(h)$ soit une famille holomorphe d'opérateurs non bornés dans $H(\Lambda_t, 1)$, de domaine $H(\Lambda_t, r^2)$ où Λ_t est la Lagrangienne associée à (la modification) de G construite ici et où α parcourt le domaine $\text{Arg } \alpha \in]-\pi - \eta(t), \eta(t)[$ avec $\eta(t) > 0$ assez petit, $\frac{1}{2} < |\alpha| < 2$.

Pour $\text{Arg } \alpha \in]-\pi + \eta, \eta[$ ($\eta > 0$ assez petit) la démonstration du Théorème 8.5, montre que les résonances ainsi définies sont les mêmes que celles qu'on pourrait définir avec $\Lambda_t = \Lambda_0$ ($t = 0$) c.à.d. en considérant $P_\alpha(h)$ comme famille non bornée dans $L^2(\mathbb{R}^4)$ et qu'en particulier ce sont bien les valeurs propres usuelles pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 2$).

Remarque 13.3.1. L'existence de ce calcul pseudo-différentiel permettrait de démontrer directement les propriétés de $v(s)$ que nous avons déduites par commodité des propriétés de $E(B)$ (on peut suivre la démonstration

proposée par S. Graffi [Gra]). Ceci permettrait une démonstration alternative des propriétés (ii) à (iv) de $E(B)$ (Th. 13.1.1) à partir des résultats sur $v(s)$ en utilisant 13.2.17. Nous omettons les détails. Les propriétés de sommabilité de Borel de $E(B)$ se déduisent de celles de v en utilisant par exemple l'appendice de [Gra.Gre.Ha.Sil].

13.4. Calcul de la résonance pour $P_{-1}(h)$.

Compte-tenu de (13.12.21), (13.12.22) et de l'étude menée au §.13.3, la démonstration du Théorème 3.1.2 se ramène à l'étude de la résonance $z(h)$ de l'opérateur $P_{-1}(h)$ pour laquelle nous pouvons utiliser la machinerie développée au §.9. On se propose dans cette sous-section de vérifier les hypothèses des Théorèmes 10.8 et 10.12 et de démontrer plus précisément la :

Proposition 13.4.1. *L'opérateur $P_{-1}(h)$ admet dans une boule de centre $4h$ et de rayon $\varepsilon_0 h$ une unique résonance telle que :*

$$(13.4.1) \quad -\operatorname{Im} z(h) = -h^{-1/2} \cdot 16\sqrt{2} [f(h)] e^{-\pi/2h}$$

où $f(h)$ est un symbole analytique tel que $f(0) = 1$.

Détermination des géodésiques minimales.

Compte-tenu de l'invariance par $S^1 * S^1$, il est clair que la distance minimale entre $\{0\}$ et $\partial\bar{0}$ peut être réalisée par une géodésique minimale joignant $\{0\}$ à un point du type $(t_1, 0, t_2, 0)$. D'autre part, la géodésique minimale joignant 0 à $(t_1, 0, t_2, 0)$ est unique car $|\nabla V| \neq 0$ sur $\{V = 0 \setminus \{0\}\}$. Enfin, si on a une géodésique minimale dans \mathbb{R}^{2++} (pour d_{V_0}), c'est une géodésique minimale dans \mathbb{R}^4 pour l'injection naturelle de \mathbb{R}^{2++} dans \mathbb{R}^4 . Pour des raisons de symétrie, on fait un changement de variable orthogonal en posant :

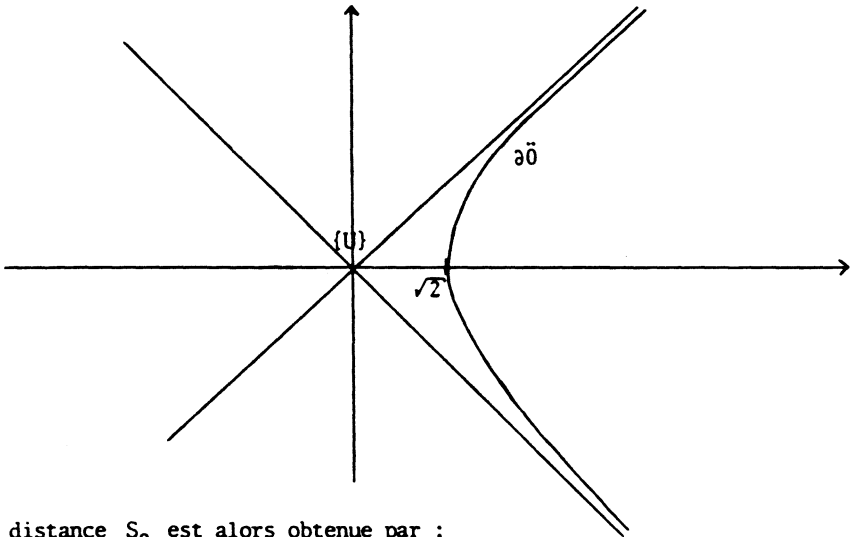
$$(13.4.2) \quad \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{2}} = s \quad , \quad \frac{t_1 + t_2}{\sqrt{2}} = t \quad .$$

Dans ces nouvelles coordonnées le potentiel s'écrit :

$$(13.4.3) \quad W_0 [s, t] = t^2 [1 - \frac{1}{4} t^4] + s^2 [1 + \frac{1}{4} t^4] + s^4 [\frac{1}{4} (t^2 - s^2)]$$

dans une zone $\begin{cases} t > 0 \\ 0 < |s| < t \end{cases} \cup \{0\}$.

Compte-tenu de la positivité des 2 derniers termes, on voit qu'à t fixé le minimum de W_0 est toujours atteint en $s=0$. Il est alors facile de voir que la géodésique minimale est donnée par l'équation $s=0$ (ou dans les anciennes coordonnées par l'équation $t_1 = t_2$).



La distance S_0 est alors obtenue par :

$$(13.4.4) \quad S_0 = \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{1 - \frac{t^4}{4}} dt = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi}{4} \quad .$$

On obtient ainsi que l'ensemble T des points de type 1 est la sous-variété de dimension 2 définie par $|x_1| = 1$, $|x_2| = 1$ et que celle-ci est de codimension 1 dans $\partial\Omega$.

EFFET ZEEMAN

Pour obtenir les résultats optimaux, le deuxième point à vérifier est de montrer que la caustique \mathcal{C} est au voisinage de T une sous-variété de dimension 3 ayant un contact d'ordre 2 exactement avec $\partial\tilde{0}$ le long de T .

Etude de la caustique.

De nouveau, des arguments de symétrie conduisent à la réduction du problème à \mathbb{R}^{2++} .

Si on désigne par $f(s,t)$ la fonction $d_{W_0}((s,t),0) - S_0$, on sait (cf. [H.S.1]) que cette fonction est C^∞ dans un voisinage de $(\{0, \sqrt{2}\} \times \{0\})$. Plus précisément, on a vu dans la section 10 que f est C^1 jusqu'au bord $\mathcal{C}_0 (= \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{2++})$ de la trace de la caustique sur \mathbb{R}^{2++} et la restriction \tilde{f} de f à \mathcal{C}_0 est C^∞ . Compte-tenu de la remarque 10.3, il s'agit de montrer que \tilde{f} s'annule exactement à l'ordre 2 au point $(\sqrt{2}, 0)$.

L'expression de f au voisinage de la caustique (faite autour du point 10.22) montre qu'on a, en paramétrant par s , la courbe \mathcal{C}_0 :

$$(13.4.5) \quad \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial s^2}(0) = \lim_{\substack{t < \sqrt{2} \\ t \rightarrow \sqrt{2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(0,t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \ell.$$

Par conséquent \tilde{f} s'annulera exactement à l'ordre 2 en $s=0$ si et seulement si $\ell \neq 0$. On montrera ultérieurement que :

$$(13.4.6) \quad \ell = \frac{4}{\pi}$$

ce qui montre donc la propriété souhaitée.

Utilisant l'équation eiconale (10.25), on obtient qu'en $(\sqrt{2}, 0)$, on a l'égalité :

$$(13.4.7) \quad \ell^2 s^2 = t^2 \left(1 - \frac{1}{4} t^4\right) + s^2 \left[1 + \frac{1}{4} t^4\right] + \mathcal{O}(s^3) \text{ sur } \mathcal{C}_0.$$

Si \mathcal{C}_0 est définie par :

$$(13.4.8) \quad t = \sqrt{2} - b(s)$$

avec

$$(13.4.9) \quad b(s) = 8s^2 + \mathcal{O}(s^3)$$

on déduit de (13.4.7) à (13.4.9) que :

$$z^2 = 4\sqrt{2}\beta + 2$$

et par conséquent :

$$(13.4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'équation de la trace de la caustique dans} \\ \mathbb{R}^{2++} \text{ est donnée par :} \\ \\ t = \sqrt{2} - \left(\frac{8}{\pi^2} - 1\right) \cdot \frac{s^2}{2\sqrt{2}} + \mathcal{O}(s^3) . \end{array} \right.$$

Démonstration de la Proposition 13.4.1. Compte-tenu de la formule (10.74)

et de l'invariance par $S^1 \times S^1$, on a :

$$(13.4.11) \quad -\operatorname{Im} z(h) \cdot h^{1/2} e^{\pi/2h} = \pi^{-2} \phi \cdot \left(\frac{\pi}{\varphi_1(\sqrt{2})}\right)^{1/2} \cdot (4\pi^2) (1 + \mathcal{O}(h))$$

où

$$(13.4.12) \quad \varphi_1(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(0, t)$$

et où

$$(13.4.13) \quad \phi = \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} (a_0(t)^2 \cdot \varphi_1')$$

EFFET ZEEMAN

avec

$$(13.4.14) \quad \varphi_0^1(t) = \sqrt{W_0(0,t)} = t \sqrt{1 - \frac{t^4}{4}}, \quad t \in [0, \sqrt{2}]$$

et où $a_0(t)$ est la restriction de l'amplitude de la solution W.K.B.

$a(x) \cdot e^{\frac{-d_V(x,0)}{h}} [1 + \mathcal{O}(h)]$ à la géodésique minimale $x(t) = (\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}}, 0)$ normalisée par $a(0) = 1$. Le terme π^{-2} figurant devant ϕ dans (13.4.11) correspond au fait que la bonne normalisation (en norme L^2) conduirait à $a(0) = (\pi h)^{-1}$. On vérifie alors, à partir de l'équation eiconale et de (13.4.3) que φ_1 vérifie l'équation :

$$(13.4.15) \quad \begin{cases} \sqrt{W_0(0,t)} \varphi_1^1(t) + \varphi_1^2 = 1 + \frac{t^4}{4} \\ \varphi_1(0) = 1 \end{cases}$$

Il suffit en effet d'identifier les coefficients en s^2 de la relation $|\nabla d_V(x,0)|^2 = V(x)$ qui s'écrit, si on désigne par $\varphi(s,t)$ la restriction de d_V à \mathbb{R}^{2++} dans les coordonnées (s,t) :

$$(13.4.16) \quad |\nabla_{s,t} \varphi(s,t)|^2 = W_0(s,t) \quad \text{au voisinage du rayon minimal}$$

et de se rappeler que :

$$(13.4.17) \quad \varphi(s,t) = \frac{s^2 + t^2}{2} + \mathcal{O}(|s| + |t|)^3 \quad \text{près de } (0,0) .$$

On a alors :

$$(13.4.18) \quad \varphi(s,t) = \varphi_0(t) + \frac{s^2}{2} \varphi_1(t) + \mathcal{O}(s^3)$$

et (13.4.15) se déduit de (13.4.16) à (13.4.18).

On traite de la même manière la première équation de transport pour a qui régit son évolution le long d'une géodésique minimale :

$$(13.4.19) \quad 2 \nabla_{d_Y} \cdot \nabla a + [\Delta(d_Y) - 4] a = 0 .$$

Dans \mathbb{R}_{++}^2 , où on reprend les coordonnées (t, s) , (13.4.19) devient :

$$(13.4.20) \quad \begin{cases} 2 \varphi_0'(t) a_0'(t) + [\varphi_0'(t) + \frac{2}{t} \varphi_0'(t) + \varphi_1(t) - 4] a_0(t) = 0 \\ a_0(0) = 1 . \end{cases}$$

Toutes ces considérations apparaissent de manière heuristique chez [Ba.Ben.W.] pour un problème voisin; notons ici, ce que nous développerons au §.14., que nous pourrions ainsi justifier mathématiquement toutes leurs considérations.

On va montrer ici, en s'inspirant de leur étude (et de remarques de P. Vogel que nous tenons à remercier), comment résoudre explicitement le système d'équations différentielles (13.4.15) - (13.4.20).

La résolution de (13.4.15) est classique : recherche d'une solution particulière $-\sqrt{1-t^4/4}$. On se ramène à une équation de Bernoulli qui se ramène par changement de fonction à une équation différentielle du 1er ordre linéaire qui s'intègre sans trop de difficultés. On obtient ainsi :

$$(13.4.21) \quad \varphi_1(t) = -\sqrt{1-\frac{t^4}{4}} + \frac{t^2}{\text{Arc sin}(\frac{t^2}{2})} .$$

Ceci démontre (13.4.6) car $\varphi_1(\sqrt{2}) = 2$.

Plutôt que de résoudre (13.4.20), on pose $\theta(t) = \text{Log}(a_0^2 \varphi_0')$ et on observe que $\theta(t)$ vérifie l'équation :

$$(13.4.22) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\varphi_0'} \left[\frac{2}{t} \varphi_0' + \varphi_1 - 4 \right] .$$

EFFET ZEEMAN

Posant : $\theta(t) = \rho(u)$ avec $u = \frac{t^4}{4}$, on obtient que :

$$\rho(u) = C - \frac{1}{4} \text{Log } u - \text{Log} (\text{Arc sin } \sqrt{u}) - 2 \text{Arg ch} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) .$$

La constante C est déterminée en observant que :

$$\theta(t) \sim \text{Log } t + \mathcal{O}(t) \text{ lorsque } t \rightarrow 0 .$$

On trouve ainsi que :

$$(13.4.23) \quad \rho(u) = \frac{5}{2} \text{Log } 2 - \frac{1}{4} \text{Log } u - \text{Log} (\text{Arc sin } \sqrt{u}) - 2 \text{Arg ch} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) .$$

Soit encore :

$$(13.4.24) \quad a_0^2 \varphi_0'(t) = 2^{3/4} \cdot t^{-1} (\text{Arc sin} \left(\frac{t^2}{2} \right))^{-1} \cdot e^{-2 \text{Arg ch} \left(\frac{2}{t^2} \right)}$$

On en déduit que :

$$(13.4.25) \quad \phi = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} .$$

Compte tenu de (13.4.11), la Proposition 13.4.1 est démontrée. ■

Démonstration du Théorème 13.1.2. (13.1.4) se déduit immédiatement de

(13.2.14), (13.2.21) et (13.2.22) en se rappelant que $\text{Re } E(0) = \frac{1}{4}$. ■

14. QUELQUES REMARQUES JUSTIFIANT L'ARTICLE DE BANKS-BENDER-WU [Ba.Ben.W.].

Cet article est à notre connaissance un des seuls articles traitant de la formule de Bender-Wu en dimension >1 de manière convainquante à défaut d'être complètement rigoureuse^(*). Nos techniques permettent en fait de justifier complètement les arguments qu'ils avancent et dont ils avaient seulement vérifié le bien fondé par des calculs numériques. On traitera simplement ici le modèle qu'ils ont considéré tout d'abord et qu'ils ont considéré comme significatif.

Nous le présentons dans le contexte semi-classique ; la réduction à cette situation est analogue aux cas que nous avons considérés dans les §.12 et 13.

Considérons donc :

$$(14.1) \quad P(h) = -h^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + (x^2 + y^2) - (x^4 + y^4 + 2c x^2 y^2)$$

où c vérifie $-1 < c$

et on se propose d'étudier la résonance située près de $2h$ et plus exactement le comportement asymptotique de $\text{Im } z(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Le cas $c < -1$ n'est pas considéré par ces auteurs, mais il ne semble pas exclus dans notre approche, car, nous pouvons sans doute traiter ce cas où l'ile n'est pas compacte par les techniques introduites pour l'étude de l'effet Zeeman. On se limite pour l'instant au cas où $c > -1$. Cette condition est naturelle si on pense au problème des perturbations pour $Q(t) = -\Delta_{x,y} + (x^2 + y^2) + t(x^4 + y^4 + 2c x^2 y^2)$, $t > 0$. Elle implique que l'opérateur $Q(t)$ est semi-borné. Nous ne détaillerons que les points différents de ceux considérés aux §.12, 13. L'existence de la résonance ne pose pas de

^(*) du point de vue d'un mathématicien.

REMARQUES SUR L'ARTICLE DE BANKS-BENDER-WU

problèmes nouveaux et nous allons donc surtout nous attacher aux problèmes nouveaux posés dans l'étude de $P(h)$.

On a avec les notations des paragraphes précédents :

$$(14.2) \quad U = \{0\}, \quad \ddot{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 > x^4 + y^4 + 2c x^2 y^2\}.$$

On voit facilement que \ddot{O} est relativement compacte, et la première chose à considérer est d'étudier la nature des géodésiques minimales entre U et $\partial\ddot{O}$. Banks-Bender-Wu en donnent les équations en indiquant qu'il suffit de chercher les points cols du potentiel V situé dans \ddot{O} et de remarquer que passent par certains de ces points cols des géodésiques minimales qui sont miraculeusement des droites. Cette technique a 2 lacunes, d'une part sa justification est peu claire car rien ne dit a priori qu'une géodésique minimale doit passer par un point col et on peut imaginer des situations où ce n'est pas le cas, d'autre part les auteurs ne vérifient pas qu'ils ont ainsi toutes les géodésiques minimales, la justification de ce dernier point ne s'obtenant que, a posteriori, par des vérifications numériques qui rassurent complètement le physicien mais ne satisfont pas totalement le mathématicien. La démonstration de ces propriétés est pourtant très simple. On pose :

$$(14.3) \quad V_c(x, y) = (x^2 + y^2) - (x^4 + y^4 + 2c x^2 y^2)$$

et on considère 3 cas :

Cas 1. $c = 1$.

Dans ce cas, le potentiel $V_1(x, y) = (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$ est invariant par rotation et tous les rayons issus de $(0, 0)$ sont des géodésiques minimales. Ce cas est étudié au §.12.

Cas 2. $c < 1$.

On remarque que :

$$V_c(x,y) = V_1(x,y) + 2(1-c)x^2y^2 .$$

Si $c < 1$, on observe alors qu'on augmente le potentiel en dehors des deux axes $x=0$, $y=0$. La distance de tout point de $\partial\bar{0}_c$ à U augmente strictement en dehors de ces deux axes. Il ne reste donc plus que 4 géodésiques minimales joignant en ligne droite $(0,0)$ aux 4 points de $\partial\bar{0}_c$ qui n'ont pas bougé à savoir $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$.

Quand on fait varier c dans $]-\infty, 1]$, la distance à $\partial\bar{0}_c$ est constante et égale à :

$$(14.4) \quad S_0 = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-u} du = \frac{1}{3} .$$

Remarquons que dans ces considérations, l'hypothèse $c > -1$ n'intervient pas.

Cas 3. $c > 1$.

On fait le changement de variable orthogonal :

$$(14.5) \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}} = t ; \quad \frac{x-y}{\sqrt{2}} = s .$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le potentiel devient :

$$W_c(t,s) = (s^2 + t^2) - \frac{1}{2} (1+c)(t^2 + s^2)^2 + 2(c-1) s^2 t^2$$

et on compare ce potentiel avec le potentiel symétrique

$$W_c^0(t,s) = (s^2 + t^2) - \frac{1}{2} (1+c)(t^2 + s^2)^2 .$$

Par les mêmes arguments que dans le cas 2, on obtient qu'il y a 4 géodésiques minimales correspondant cette fois-ci aux 4 bissectrices (dans les coordonnées x,y).

REMARQUES SUR L'ARTICLE DE BANKS-BENDER-WU

La distance à $\partial\bar{0}_c$ varie avec c et est donnée par :

$$(14.6) \quad S_c = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{1+c}}} u \sqrt{1 - \left(\frac{1+c}{2}\right)u^2} du = \frac{1}{1+c} \int_0^1 \sqrt{1-v} dv = \frac{2}{3(1+c)} .$$

Le changement de variable montre donc que le cas 3 se ramène à celui du cas 1 ($-1 < c < 1$) et on se contentera donc d'étudier ce cas.

Calcul de la résonance dans le cas $-1 < c < 1$.

On procède de manière complètement analogue à celle de l'étude faite au §.13.4. Il y a 4 contributions identiques de chaque géodésique et on se contentera donc de calculer celle relative au rayon joignant $(0,0)$ à $(0,1)$.

Comme au §.13 (cf.(13.4.11)), on a :

$$(14.7) \quad -\text{Im}z(h) \cdot e^{2S_0/h} \cdot h^{-1/2} = \frac{1}{\pi} \cdot 4 \cdot \phi \cdot \left(\frac{\pi}{\varphi_1}\right)^{1/2} (1 + \mathcal{O}(h))$$

où φ_1 satisfait à l'équation :

$$(14.8) \quad \begin{cases} t \sqrt{1-t^2} \varphi_1' + \varphi_1^2 = 1 - 2ct^2 \text{ sur } [0,1[\\ \varphi_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$(14.9) \quad \phi = \lim_{t \rightarrow 1} (a_0^2 \varphi_0') \text{ avec } \varphi_0'(t) = t \sqrt{1-t^2}$$

et où a_0 satisfait à l'équation :

$$(14.10) \quad \begin{cases} 2t \sqrt{1-t^2} a_0' + (\varphi_0' + \varphi_1) a_0 = 2a_0 \\ a_0(0) = 1 \end{cases}$$

Toutes ces formules se déduisent du Théorème 10.12 à condition de vérifier que la caustique a un contact d'ordre 2 exactement aux points $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, ce qui équivaut comme au §.13 à la vérification de :

$$(14.11) \quad \varphi_1(1) \neq 0 .$$

Résolution de 14.7. (d'après [Ba.Ben.W.]

Le changement de variable $s = \sqrt{1-t^2}$, conduit à l'équation :

$$(14.12) \quad \begin{cases} -(1-s^2) \frac{d\psi}{ds}(s) + \psi^2(s) = 1 - 2c + 2cs^2 & s \in]0,1[\\ \psi(1) = 1 \end{cases}$$

où

$$(14.13) \quad \psi(s) = \varphi_1(t) \quad \text{avec} \quad s = \sqrt{1-t^2} .$$

Cette équation est justement l'équation (4.15) de [Ba.Ben.W.] p. 3352.

On fait alors le changement de fonction :

$$(14.14) \quad \psi(s) = (s^2 - 1) \frac{X'}{X}$$

qui conduit à l'équation classique de Legendre suivante :

$$(14.15) \quad (1-s^2) X'' - 2s X' + X \left(2c - \frac{1}{1-s^2} \right) = 0 .$$

La "bonne" solution de (14.15) est donnée par la fonction classique (cf. Bateman manuscript Project, Vol.1, p. 121)

$$(14.16) \quad P_{\nu}^{\mu}(s) \quad \text{avec} \quad \nu(\nu+1) = 2c, \mu = -1 .$$

Cette solution a les propriétés suivantes (cf. Bateman manuscript Project, Vol.1, p. 145) qui justifie son choix :

$$(14.17) \quad P_{\nu}^{-1}(0) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2} \pi \nu\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \nu\right)}$$

$$(14.18) \quad P_{\nu}^{-1'}(0) = -\pi^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{2} \pi \nu\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2} \nu\right)}$$

REMARQUES SUR L'ARTICLE DE BANKS-BENDER-WU

$$(14.19) \quad \frac{\sqrt{2} P_V^{-1}(s)}{(1-s)^{1/2}} \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1$$

(cf. Bateman manuscript Project, Vol.1, p. 163).

$$(14.20) \quad \frac{-P_V^{-1}(s)(1-s)^{1/2}}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1 .$$

Les relations (14.14), (14.19) et (14.20) impliquent que $\psi(1) = 1$.

Vérifions maintenant que la condition (14.11) est satisfaite. On a

$$\varphi_1(1) = \psi(0) = - \frac{P_V^{-1}(0)}{P_V(0)}$$

d'où

$$(14.21) \quad \varphi_1(1) = +2 \cdot \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi\nu) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu) \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\nu)}{\sin(\frac{1}{2}\pi\nu) \Gamma(\frac{1}{2}\nu) \Gamma(1 + \frac{1}{2}\nu)} .$$

(On vérifie que $\varphi_1(1) \neq 0$; les singularités apparaissant pour certaines valeurs de ν ne sont qu'apparentes !).

Calcul de ϕ .

On pose $\theta(t) = \text{Log}(a_0^2 \varphi_0')$. L'équation régissant θ se déduit de (14.10). On obtient :

$$(14.22) \quad \varphi_0'(t) \frac{d\theta}{dt} = 2 - \varphi_1(t) .$$

Dans la coordonnée s , (14.22) devient, avec $\check{\theta}(s) = \theta(t)$

$$(14.23) \quad \frac{d\check{\theta}}{ds} = - \frac{2}{1-s^2} - \frac{X'}{X}$$

d'où :

$$\theta(s) = C - \text{Log} \left(\frac{1+s}{1-s} \right) - \text{Log} X .$$

C est obtenue en remarquant que lorsque $s \rightarrow 1$,

$$\begin{aligned} \check{\theta}(s) &= \frac{1}{2} \text{Log}(1-s^2) + o(1-s) = \frac{1}{2} \text{Log}(1-s) + \frac{\text{Log } 2}{2} + o(1-s) \\ &= C - \text{Log } 2 + \text{Log}(1-s) - \frac{1}{2} \text{Log}(1-s) + \frac{\text{Log } 2}{2} + o(1-s). \end{aligned}$$

On obtient par conséquent :

$$\check{\theta}(s) = \text{Log } 2 - \text{Log} \left(\frac{1+s}{1-s} \right) - \text{Log } \chi$$

d'où

$$(14.24) \quad \phi = \frac{2}{\chi(0)} = \frac{2}{P_v^{-1}(0)}.$$

Calcul de la résonance.

Compte-tenu de (14.6) on obtient :

$$-(\text{Im } z(h)) e^{2S_0/h} h^{-1/2} = 8 \cdot \pi^{-1/2} \frac{1}{[P_v^{-1}(0)(-P_v^{-1})'(0)]^{1/2}} [1 + o(h)].$$

Il résulte de (14.17) et (14.18) que :

$$\begin{aligned} P_v^{-1}(0) P_v^{-1}'(0) &= -\frac{1}{4\pi} \sin \pi v \frac{\Gamma(\frac{1}{2}v) \cdot \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}v)}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{v}{2}) \Gamma(1 + \frac{1}{2}v)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sin \pi v \cdot \frac{1}{v(v+1)} = -\frac{\sin \pi v}{\pi 2c}. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} -(\text{Im } z(h)) e^{2S_0/h} h^{-1/2} &= 8 \left(\frac{2c}{\sin \pi v} \right)^{1/2} [1 + o(h)] \\ (14.25) \quad \text{Im } z(h) &= h^{1/2} \cdot 8 \cdot e^{-2S_0/h} \left(\frac{2c}{\sin \pi v} \right)^{1/2} [1 + o(h)]. \end{aligned}$$

Cette formule coïncide à renormalisation près avec la formule (4.41) de

[Ba. Ben. W.].

Remarque 14.1.

On peut préciser le $(1 + \mathcal{O}(h))$ dans (14.25) sous la forme $(1 + \mathcal{O}(h))$ est un symbole analytique. Ceci conduit à des formules de Bender-Wu plus précises comme dans le §.12 et qui semblent difficile à justifier avec la technique de "Matching" de [Ba.Ben.W.]. Ceci justifie les expressions du type (5.1) de B.B.W₁.

Remarque 14.2. Le cas $a \neq b$, $a > 0$, $b > 0$, $c > -\sqrt{ab}$.

Ce cas est également traité dans [Ba.Ben.W.]. Nous remplaçons seulement l'argument peu rigoureux à nos yeux des points selles, le reste se déroulant comme dans le cas symétrique. Par changement de coordonnées orthogonales, on se ramène toujours à la situation où $a < b$, $c < b$.

On compare de nouveau avec une situation symétrique en remarquant que :

$$x^2 + y^2 - (ax^4 + by^4 + 2cx^2y^2) = (y^2 + x^2) - b(y^2 + x^2)^2 + x^2((b-a)x^2 + 2(b-c)y^2) .$$

On remarque alors que seules les géodésiques minimales $(0, \frac{t}{\sqrt{b}})$ ($t \in [0,1]$)

et $(0, -\frac{t}{\sqrt{b}})$ ($t \in [0,1]$) subsistent lorsque l'on ajoute

$$x^2((b-a)x^2 + 2(b-c)y^2) \text{ au potentiel symétrique .}$$

La suite de la démonstration s'adapte essentiellement sans changement en reprenant les arguments de [Ba.Ben.W.] avec l'adaptation que nous avons faite précédemment.

APPENDICE A. Théorie de Fredholm.

On reprend la théorie classique sous une forme directement utilisable dans le texte principal. Soient d'abord A, B des espaces de Banach sur \mathbb{C} et $\Omega \ni z \rightarrow P_z : A \rightarrow B$ une famille continue (en norme) d'opérateurs bornés. Ici $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert. Soit $z_0 \in \Omega$ et supposons que P_{z_0} soit un opérateur de Fredholm d'indice fini. Soit $a_+ = \dim \text{Ker } P_{z_0}$, $a_- = \dim \text{Coker } P_{z_0}$. On choisit alors $R_- : \mathbb{C}^{a_-} \rightarrow B$ et $R_+ : A \rightarrow \mathbb{C}^{a_+}$ bornés de rang maximal tels que $R_-(\mathbb{C}^{a_-})$ soit transverse à $P_{z_0}(A)$ et $R_+|_{\text{Ker } P_{z_0}}$ soit bijectif. On introduit alors l'opérateur :

$$(A.1) \quad \mathcal{P}_{z_0} = \begin{pmatrix} P_{z_0} & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : A \times \mathbb{C}^{a_-} \rightarrow B \times \mathbb{C}^{a_+} ,$$

qui correspond au problème :

$$(A.2) \quad \begin{cases} P_{z_0} u + R_- u_- = v \\ R_+ u = v_+ \end{cases} , \quad u \in A, u_- \in \mathbb{C}^{a_-}, v_+ \in \mathbb{C}^{a_+}, v \in B .$$

On voit facilement que ce problème admet une solution unique et donc que \mathcal{P}_{z_0} est bijectif avec un inverse borné. L'opérateur

$$(A.3) \quad \mathcal{P}_z = \begin{pmatrix} P_z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

a donc les mêmes propriétés pour z dans un voisinage $V(z_0)$ de z_0 et l'analogue de (A.2) (avec P_{z_0} remplacé par P_z) a donc une solution unique de la forme :

$$(A.4) \quad \begin{pmatrix} u \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(z) & E_+(z) \\ E_-(z) & E_{-+}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_+ \end{pmatrix} = \hat{G}(z) \begin{pmatrix} v \\ v_+ \end{pmatrix}$$

THÉORIE DE FREDHOLM

pour $z \in V(z_0)$. Ici E, E_+, E_-, E_{-+} varient continûment en norme avec z et $E_{-+}(z_0) = 0$. De plus $E_+(z)$ et $E_-(z)$ sont de rang maximal pour $z = z_0$ et donc pour tout $z \in V(z_0)$ (si l'on diminue $V(z_0)$). Pour $z \in V(z_0)$, étudions maintenant l'équation :

$$(A.5) \quad P_z u = v$$

et introduisons $v_+ = R_+(z)u$ comme variable auxiliaire. Alors (A.5) équivaut à :

$$(A.6) \quad \begin{cases} u = E(z)v + E_+(z)v_+ \\ 0 = E_-(z)v + E_{-+}(z)v_+ \end{cases} .$$

Pour $v \in B$ donné, (A.5) admet alors une solution ssi $E_-(z)v \in \text{Im } E_{-+}(z)$. Puisque $E_-(z)$ est surjectif, nous voyons d'une part que $\text{Im}(P_z)$ est fermé et d'autre part que :

$$(A.7) \quad \text{Codim Im}(P_z) = \text{Codim Im}(E_{-+}(z)) .$$

De la même manière, puisque E_+ est injectif, nous voyons que :

$$(A.8) \quad \dim \text{Ker } P_z = \dim \text{Ker } E_{-+}(z) .$$

En particulier $\text{ind}(P_z) = \text{ind}(E_{-+}) = a_+ - a_-$ est indépendant de z (résultat bien connu).

Regardons maintenant la théorie spectrale. Soient $z_0, V(z_0)$ comme ci-dessus et supposons que $V(z_0)$ soit ouvert et connexe. On suppose maintenant que $A \subset B$ avec une inclusion dense et que $P_z = P - z$. On suppose en plus que P_z est bijectif pour au moins un point de $V(z_0)$. Alors E_{-+} est bijectif au même point et donc $a_+ = a_- = n$. E, E_-, E_+, E_{-+} dépendent maintenant holomorphiquement de z et les zéros de $\det E_{-+}(z)$ forment donc un ensemble discret de $V(z_0)$. Quitte à diminuer $V(z_0)$, nous pouvons donc supposer

que $E_{-+}(z)$ (et donc $P-z$) est bijectif pour $z \in V(z_0) \setminus z_0$, pendant que $E_{-+}(z_0) = 0$. Pour $z \neq z_0$, nous avons :

$$(A.9) \quad (P-z)^{-1} = E(z) - E_{+}(z) E_{-+}(z)^{-1} E_{-}(z) .$$

Si γ est un contour simple autour de z_0 et si \oint_{γ} désigne $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma}$, alors :

$$(A.10) \quad \Pi = \oint_{\text{def.}} (z-P)^{-1} dz = - \oint_{\gamma} E_{+}(z) E_{-+}(z)^{-1} E_{-}(z) dz .$$

Ici on constate que $E_{-+}(z)^{-1}$ a un pôle d'ordre fini N_0 en $z = z_0$, et on introduit le développement de Laurent :

$$(A.11) \quad E_{-+}(z)^{-1} = \frac{R_{-N_0}}{(z-z_0)^{N_0}} + \dots + \frac{R_{-1}}{(z-z_0)} + \text{holomorphe}$$

ainsi que les développements de Taylor de E_{\pm} :

$$(A.12) \quad E_{\pm}(z) = E_{\pm}(z_0) + E'_{\pm}(z_0)(z-z_0) + E_{\pm}^{[2]}(z_0)(z-z_0)^2 + \dots .$$

D'après la formule des résidus :

$$(A.13) \quad \Pi = - \sum_{\substack{j+q-k=-1 \\ 1 \leq k \leq N_0}} E_{+}^{[j]}(z_0) R_{-k} E_{-}^{[k]}(z_0) .$$

Puisque les opérateurs $E_{+}^{(j)}(z_0)$ sont de rang fini $\leq n$ on voit que Π est de rang fini $\leq N_0 n$. On voit aussi directement sur (A.10) que $\text{Im}(\Pi) \subset A$.

Puisque A est dense dans B , et Π est de rang fini, on a : $\Pi(A) = \Pi(B)$.

Pour $u \in A$, nous avons : $P(z-P)^{-1} u = (z-P)^{-1} P u = -u + z(z-P)^{-1} u$ et donc en intégrant :

$$(A.14) \quad \Pi P u = P \Pi u \quad , \quad \forall u \in A .$$

Donc $\Pi(A) = \Pi(B)$ est invariant par P . A l'aide d'une récurrence facile, on montre ensuite que :

THÉORIE DE FREDHOLM

$$(A.15) \quad (P-w)^m \Pi = \oint_{\gamma} (z-w)^m (z-P)^{-1} dz ,$$

pour $w \in z$, $m = 1, 2, \dots$. Pour $w \in V(z_0)$ à l'extérieur du contour γ , on a aussi :

$$(A.16) \quad (P-w)^{-1} \Pi = \oint_{\gamma} (z-w)^{-1} (z-P)^{-1} dz .$$

En effet, si l'on appelle W le second membre de (A.16), alors :

$$(P-w)^{-1} W = \oint (z-w) (z-w)^{-1} (z-P)^{-1} dz = \Pi ,$$

car $\oint (P-z) (z-w)^{-1} (z-P)^{-1} dz = 0$.

Soit $\Gamma \subset V(z_0)$ un deuxième contour simple qui contient γ dans son intérieur. Alors d'après (A.16)

$$\Pi^2 = \oint_{\Gamma} (w-P)^{-1} \Pi dw = \oint_{\Gamma} \left(\oint_{\gamma} (w-z)^{-1} (z-P)^{-1} dz \right) dw .$$

Ici on peut renverser l'ordre d'intégration et, puisque $\oint_{\Gamma} (w-z)^{-1} dw = 1$ pour $z \in \gamma$, on obtient :

$$(A.17) \quad \Pi^2 = \Pi .$$

Donc Π est un projecteur de rang fini avec $\Pi(B) \subset A$ et $\Pi(B)$ est P -invariant et nous avons $(P-z_0)^{N_0} \Big|_{\Pi(B)} = 0$. La dernière propriété résulte de (A.15) avec $w = z_0$ puisque d'après (A.9) : $(P-z)^{-1}$ a un pôle d'ordre $\leq N_0$ en z_0 . Il ne reste qu'à montrer que :

$$(A.18) \quad (P-z_0) : A \cap \text{Ker } \Pi \rightarrow B \cap \text{Ker } \Pi \text{ est bijectif .}$$

On pose $Q = \oint (z-z_0)^{-1} (P-z)^{-1} dz : B \rightarrow A$. Il est clair que Π et Q commutent, donc $Q : B \cap \text{Ker } \Pi \rightarrow A \cap \text{Ker } \Pi$. De plus,

$$(P-z_0)Q = \oint \frac{(z-z_0)}{(z-z_0)} (P-z)^{-1} dz + \oint (z-z_0)^{-1} (P-z)(P-z)^{-1} dz$$

$$= -\Pi + I.$$

Donc, $Q|_{\text{Ker } \Pi}$ est un inverse à droite de l'opérateur (A.18). De la même manière, on obtient : $Q(P-z_0) = I - \Pi$ et $Q|_{\text{Ker } \Pi}$ est donc aussi un inverse à gauche.

On remarque aussi que si $z_1 \in W(z_0)$, $z_1 \neq z_0$ est un deuxième point où $P-z$ n'est pas bijectif avant diminution de $V(z_0)$ à la page (A.3), et si Π_{z_0} , Π_{z_1} sont les projections correspondantes alors on a :

$$(A.19) \quad \Pi_{z_0} \Pi_{z_1} = \Pi_{z_1} \Pi_{z_0} = 0.$$

Remarque A.1. On voit facilement que $\frac{d}{dz} E_{-+}(z) = E_{-}(z) E_{+}(z)$. Si $E_{-}(z_0) E_{+}(z_0)$ est inversible on voit que $N_0 = 1$ puisque $E_{-+}(z_0) = 0$ et z_0 est donc un pôle simple pour $(P-z)^{-1}$. (On vérifie aussi directement que l'inversibilité de $E_{-}(z_0) E_{+}(z_0)$ équivaut à la condition $\text{Im}(P-z_0) \cap \text{Ker}(P-z_0) = 0$, qui exclut des vecteurs propres généralisés).

Dans la section 9, on reprend des arguments de cet appendice dans des situations où $E_{-+}(z_0)$ est non-inversible mais pas nécessairement 0. La dernière remarque n'est alors plus valable.

BIBLIOGRAPHIE

- [A.He.Si.] J.E. AVRON, I. HERBST, B. SIMON : *Schrödinger operators with magnetic fields III, Atoms in homogeneous magnetic field*, *Comm. Math. Phys.* 79, p. 529-572, (1981).
- [A.1] J.E. AVRON : *Bender-Wu formulas and classical trajectories : higher dimensions and degeneracies*, *Int. J. of Quantum Chemistry* 21 (1982), 119-124.
- [A.2] J.E. AVRON : *Bender-Wu formulas for the Zeeman effect in hydrogen*, *Ann. of Physics* 131, (1981), 73-94.
- [Ag.C.] J. AGUILAR, J.M. COMBES : *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971), 269-279.
- [B.C.] E. BALSLEV, J.M. COMBES : *Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation analytic interactions*, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971), 280-294.
- [Be.F.] R. BEALS, C. FEFFERMAN : *Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators*, *Comm. P.A. Math.*, 27 (1974), 1-24.
- [Be.] R. BEALS : *A general calculus of pseudo-differential operators*, *Duke Math. J.*, 42, n° 1 (1975), 1-42.
- [Ben.W.1] C. BENDER, T. WU : *Anharmonic oscillator*, *Phys. Rev.*, 184 (1969), 1231-1260.
- [Ben.W.2] C. BENDER, T. WU : *Phys. Rev. D7*, (1973), 1620.
- [Ba.Ben.W.] T. BANKS, C. BENDER, T. WU : *Coupled anharmonic oscillators I. Equal mass case*, *Phys. Rev. D.*, Vol.8, n° 10, (Nov. 1973), 3346-3366.

[Ba.Ben.] T. BANKS, C. BENDER : *Coupled anharmonic oscillators II: Unequal mass case*, Phys. Rev. D., Vol. 8, n° 10 (Nov. 1973), 3366-3378.

[Bo.S.] L. BOUTET DE MONVEL, J. SJÖSTRAND : *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Saegö*, Astérisque 34-35, (1976), 123-164.

[Bo.G.] L. BOUTET DE MONVEL, V. GUILLEMIN : *The spectral theory of Toeplitz operators*, Ann. of Math. Studies, n° 99, (1981), Princeton University Press.

[Co.] E. COLEMAN : *The use of instantons*, Conference d'Erice.

[C.D.Se.] J.M. COMBES, J. DUCLOS, R. SEILER : *On the shape resonance*, à paraître.

[Cy.] H. CYCON : *Resonances defined by modified dilations*, à paraître.

[De.] N. DENCKER : *The Weyl calculus with locally temperate metrics and weights*, Préprint.

[Gra.Gre.Ha.Sil.] S. GRAFFI, V. GRECCHI, E.M. HARRELL, SILVERSTONE : *The $\frac{1}{R}$ expansion for H_2^+ : Analyticity, Summability and Asymptotics*, Préprint.

[Gra.] S. GRAFFI : Séminaire d'Analyse de Bologne (1982-83).

[Ha.Si] E. HARRELL, B. SIMON : *The mathematical theory of resonances whose widths are exponentially small*, Duke Math. J., Vol. 47, n° 4, Déc. 1980.

[H.R.] B. HELFFER, D. ROBERT : *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*, J. Funct. Anal., 53, n° 3, (1983), 246-268.

[H.S.1] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND : *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Comm. in PDE, 9(4) (1984), 337-408.

[H.S.2] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND : *Puits multiples en limite semi-classique II, Interaction moléculaire, symétries, perturbation*, Ann. de l'I.H.P., Vol. 42, n°2, 1985, p. 127-212.

BIBLIOGRAPHIE

- [H.S.3] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND : *Multiple wells in the semi-classical limit III, non resonant wells*, Math. Nachr., (1985).
- [H.S.4] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND : *Puits multiples en mécanique semi-classique IV, étude du complexe de Witten*, Comm. P.D.E., 10(3), (1985), 245-340.
- [H.S.5] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND : *Puits multiples en mécanique semi-classique V, étude des mini puits*, A paraître.
- [He.] I. HERBST : *Dilation analyticity in a constant electric field*, Comm. Math. Phys., 64 (1979), 279-298.
- [Hö.1] L. HÖRMANDER : *Fourier integral operators I.*, Acta Math. 127 (1971), 79-183.
- [Hö.2] L. HÖRMANDER : *The Weyl calculus of pseudo-differential operators*, Comm. P.A.M., 32 (1979), 359-443.
- [Ma] A. MARTINEZ : *Estimations de l'effet tunnel pour le double puits*, Publications Mathématiques d'Orsay, 85 T 17.
- [M.S.] A. MELIN, J. SJÖSTRAND : *Fourier integral operators with complex valued phase functions*, Springer L.N. in Math., n° 459, 120-223.
- [Re.Si] M. REED, B. SIMON : *Methods of modern mathematical physics*, Vol. IV, Academic Press, New-York, 1978.
- [Si.1] B. SIMON : *Resonances and complex scaling, a rigorous overview*, Int. J. Quantum Chemistry, 14 (1978), 529-542.
- [Si.2] B. SIMON : *Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I*, Ann. I.H.P., 38, n° 3, (1983), 295-307.
- [Si.3] B. SIMON : *Large orders of summability of eigenvalue perturbation theory : a mathematical overview*, Int. J. Quantum Chemistry, 21 (1982), 3-25.

- [Si.4] B. SIMON : *Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator*, Ann. of Physics, 58 (1970), 76-136.
- [S.1] J. SJÖSTRAND : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n° 95 (1982).
- [S.2] J. SJÖSTRAND : *Tunnel effects for semi-classical Schrödinger operators*, Contribution to the workshop and symposium on hyperbolic equations and related topics, Katuda and Kyoto, August 27 - Sept. 5, 1984, à paraître.
- [Ti.] TITSCHMARCH : *Eigenfunction expansions II*, Oxford at the Clarendon Press, 1958.
- [V.1] B.R. VAINBERG : *On the analytic properties of the resolvent for a certain class of operator-pencils*, Mat. Sb., 77(119), (1968), n° 2, Math. USSR, Sb., 6 (1968), N° 2.
- [V.2] B.R. VAINBERG : *On exterior elliptic problems ...*, Mat. Sb., 92(134), (1973), n° 2, Math. USSR. Sb., 21 (1973), n° 2.