

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL GROS

Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 21 (1985)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_21__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSES DE CHERN ET CLASSES DE CYCLES
EN COHOMOLOGIE DE HODGE-WITT LOGARITHMIQUE

MICHEL GROS (*)

Résumé

Si k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, on définit, pour tout k -schéma lisse X , une théorie de classes de Chern et de classes de cycles à valeurs dans les groupes de cohomologie étale $H^i(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{\text{log}}^i)$, où $W_n \Omega_X^i$ est le complexe de de Rham-Witt de cran n de X et $W_n \Omega_{\text{log}}^i$ le sous-faisceau abélien de $W_n \Omega_X^i$ engendré localement, pour la topologie étale, par les différentielles logarithmiques. Via l'application naturelle de $H^i(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{\text{log}}^i)$ dans le groupe de cohomologie cristalline $H_{\text{cris}}^{2i}(X/W_n)$, on retrouve les classes de Chern de Berthelot-Illusie, et la classe de cohomologie d'un sous-schéma fermé lisse construite par Berthelot. Notre construction de la classe de cohomologie d'un cycle repose sur un théorème de pureté pour les faisceaux $W_n \Omega_{\text{log}}^i$. On montre que cette classe transforme intersections propres en cup-produits, et l'on prouve la compatibilité usuelle entre classe de Chern et classe de cycle pour un sous-schéma fermé (non nécessairement lisse).

Abstract

Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$. For every smooth k -scheme X , we define a theory of Chern classes and cycle classes with value in the étale cohomology groups $H^i(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{\text{log}}^i)$, where $W_n \Omega_X^i$ is the Rham-Witt complex of X of step n and $W_n \Omega_{\text{log}}^i$ the abelian subsheaf of $W_n \Omega_X^i$ generated locally for the étale topology by the logarithmic differentials. Via the natural map from $H^i(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{\text{log}}^i)$ to the crystalline cohomology group $H_{\text{cris}}^{2i}(X/W_n)$, we recover Berthelot-Illusie's Chern classes and the cohomology class of a smooth closed subscheme constructed by Berthelot. Our construction of the cycle class relies on a purity theorem for the sheaves $W_n \Omega_{\text{log}}^i$. We show that proper intersections correspond to cup-products and we prove the usual compatibility between the Chern class and the cycle class of a (non necessarily smooth) closed subscheme.

Texte reçu le 15 avril 1985

(*) Thèse de doctorat de 3e cycle de Mathématiques, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, juin 83.

TABLE DES MATIERES

	pages
INTRODUCTION.....	4
NOTATIONS ET CONVENTIONS.....	9
I. COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS.	
1. <u>Les faisceaux</u> $W \Omega_{n X, \log}^i$	10
2. <u>Cohomologie logarithmique des fibrés projectifs</u>	12
3. <u>Points fixes par</u> F	15
4. <u>Cohomologie de Hodge-Witt des fibrés projectifs</u>	19
5. <u>Comparaison avec la cohomologie cristalline</u>	23
II. MORPHISME DE GYSIN.	
1. <u>Définition des différents morphismes de Gysin</u>	27
1.1. Rappels sur l'autodualité du complexe de De Rham-Witt.	
1.2. Définitions.	
2. <u>Propriétés</u>	28
2.1. Transitivité.	
2.2. Formule de projection.	
2.3. Transversalité.	
2.4. Formule d'intersection.	
2.5. Classe de cycle et classe de Chern.	
2.6. Cas d'un morphisme $P(E) \rightarrow X$.	
2.7. Cas d'un morphisme birationnel.	
3. <u>Cas d'une immersion fermée</u>	38
3.1. Préliminaires d'algèbre homologique.	
3.2. Construction locale du morphisme de Gysin.	
3.3. Description du morphisme de Gysin.	
3.4. Comparaison avec la définition 1.2.6.	
3.5. Cas de la cohomologie logarithmique.	
4. <u>Classe de cohomologie d'un cycle</u>	50
4.1. Définition.	
4.2. Propriétés.	
5. <u>Morphisme de Gysin et complexe de Cousin</u>	57
5.1. Cas de la cohomologie de Hodge-Witt.	
5.2. Cas de la cohomologie logarithmique.	

III. CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES.	
1. <u>Classes de Chern logarithmiques</u>	60
1.1. Enoncé du théorème principal.	
1.2. Démonstration du théorème principal.	
2. <u>Variantes et compatibilités</u>	65
2.1. Comparaison avec les classes de Chern cristallines.	
2.2. Cohomologie d'un schéma de drapeaux.	
<u>Appendice : classes de Chern à supports</u>	68
IV. APPLICATIONS.	
1. <u>Cohomologie d'un éclaté</u>	71
1.1. Cohomologie de Hodge-Witt d'un éclaté.	
1.2. Cohomologie de Hodge d'un éclaté.	
1.3. Cohomologie logarithmique d'un éclaté.	
2. <u>Formule de self-intersection</u>	78
3. <u>Classe de Chern et classe de cycle</u>	84
BIBLIOGRAPHIE.	86

INTRODUCTION

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X un k -schéma lisse. Si Y est un sous-schéma fermé lisse de X de codimension r , on sait (cf. [2]) lui associer une classe fondamentale de cohomologie $cl(Y/X)$ dans la cohomologie cristalline $H_{\text{Cris}}^{2r}(X/W(k))$ de X sur les vecteurs de Witt $W(k)$ de k . Un des objets du présent travail est de s'affranchir de l'hypothèse de lissité faite sur Y en employant des techniques afférentes au complexe de De Rham-Witt ([21]).

Des exemples tels ceux de la cohomologie étale à valeurs dans \mathbb{Z}_ℓ ($\ell \neq p$) ou de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0 montrent que la définition de la classe de cohomologie d'un cycle éventuellement singulier est possible dès que l'on dispose d'un théorème de pureté permettant d'exprimer de manière plus simple certains groupes de cohomologie à support. Il est bien connu (cf. [2]) que la cohomologie cristalline ne vérifie pas de tels théorèmes de pureté. On peut toutefois travailler avec des groupes de cohomologie "plus fins", tels que les groupes de cohomologie logarithmiques $H^*(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{X, \log}^*)$, où les faisceaux étales $W_n \Omega_{X, \log}^*$ sont les faisceaux définis dans [21] (ils diffèrent très légèrement des faisceaux $v_n(i)$ introduits par Milne dans [28]).

En effet, on verra que ces faisceaux vérifient des propriétés de pureté suffisantes pour permettre une définition satisfaisante de la classe de cohomologie d'un cycle éventuellement singulier. Comme ils semblent d'autre part jouer un rôle important dans diverses questions de géométrie arithmétique (cf. [5], [7], [25]), il nous a paru utile de donner certaines constructions et théorèmes concernant ces faisceaux : classes de Chern, classes de cycles, cohomologie d'un schéma éclaté, formule de self-intersection, théorème de Riemann-Roch pour une immersion fermée.

INTRODUCTION

Le chapitre I est essentiellement consacré au calcul de $Rf_* W_n \Omega_P^*$ et $Rf_* W_n \Omega_{P, \log}^*$ où P est le fibré projectif associé à un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$ et f la projection canonique $P \rightarrow X$. Par analogie avec le calcul de $Rf_* \Omega_P^*$ (cf. [4] ou [14]), on construit des morphismes canoniques dans des catégories dérivées convenables

$$(1) \quad \bigoplus_{i=0}^{\infty} W_n \Omega_X^*(-i)[-i] \longrightarrow Rf_* W_n \Omega_P^*$$

$$(2) \quad \bigoplus_{i=0}^{\infty} W_n \Omega_{X, \log}^*(-i)[-i] \longrightarrow Rf_* W_n \Omega_{P, \log}^*$$

dont on montre que ce sont des isomorphismes. Grosso modo, (2) se déduit de (1) en prenant "les points fixes sous F ". La vérification que (1) est un isomorphisme utilise le "lemme de Nakayama d'Ekedahl" (cf. [9], [22]) pour se ramener au cas $n=1$.

Au chapitre II, nous développons une théorie du morphisme de Gysin pour des morphismes propres entre k -schémas lisses. Après un rappel des résultats de dualité du complexe de De Rham-Witt dus à T. Ekedahl, nous construisons pour tout morphisme propre $f: Y \rightarrow X$ entre k -schémas lisses, un morphisme de Gysin

$$(3) \quad f_* : Rf_* W_n \Omega_Y^* \longrightarrow W_n \Omega_X^*(r)[r] \quad (r = \dim(X) - \dim(Y))$$

dans la catégorie dérivée des R_X -Modules où R_X est un certain faisceau d'anneaux sur X défini par T. Ekedahl et généralisant l'anneau R de [23]. Par application d'un foncteur "points fixes sous F ", on en déduit un morphisme

$$(4) \quad f_* : Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^*(r)[r]$$

dans la catégorie dérivée des $W_n \Omega_{X, \log}^*$ -pro-Modules.

Au numéro 2, on énonce diverses propriétés de (4) : transitivité, formule de projection, etc.

Le numéro 3 est indépendant des résultats de T. Ekedahl. On propose dans le cas où f est une immersion fermée, une construction d'un morphisme

$$(5) \quad W_n \Omega_Y^* \longrightarrow H_Y^{\cdot, r}(W_n \Omega_X^*(r))$$

à l'aide de relèvements locaux Y' et X' de Y et X sur W_n et du morphisme de Gysin en cohomologie de De Rham (cf. [2])

$$(6) \quad \Omega_{Y'}^i / W_n \longrightarrow H_{Y'}^{*r}(\Omega_{X'}^i / W_n(r)) .$$

Ceci est rendu possible par l'utilisation de l'isomorphisme (cf. [23])

$$(7) \quad W_n \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} H^i(\Omega_{X'}^i / W_n) .$$

On vérifie que le morphisme ainsi construit est bien identique à celui qu'on déduit de (3).

Par application du foncteur "points fixes sous F ", (6) fournit un morphisme

$$(8) \quad W_n \Omega_{Y, \log}^* \longrightarrow H_Y^{*r}(W_n \Omega_{X, \log}^*(r))$$

qui est en fait un isomorphisme.

Ce morphisme diffère des morphismes que l'on peut déduire de (4), mais l'on peut récupérer (4) à l'aide de (8) et démontrer ainsi certaines des propriétés énoncées au numéro 2.

Le numéro 4 donne la définition de la classe d'un cycle éventuellement singulier de X (construction faite indépendamment par Milne dans [30]). La méthode est assez proche du cas de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0, à ceci près qu'ici, on n'a pas $H_Y^{r+1}(W_n \Omega_{X, \log}^*) = 0$. On termine ce numéro en prouvant la compatibilité de la classe ainsi construite aux intersections, puis en prouvant que deux cycles algébriquement équivalents ont même classe de cohomologie.

Au numéro 5, nous revenons au cas d'un morphisme propre quelconque et montrons comment réaliser (3) à l'aide de complexes de Cousin.

Le chapitre III est consacré à la définition des classes de Chern $c_i(E) \in H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)$ attachées à tout \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang fini. Compte tenu des résultats du premier chapitre et de la théorie du morphisme de Gysin pour une immersion fermée (y compris la compatibilité à la première classe de Chern dans le cas de la codimension 1), les méthodes sont essentiellement standard (cf. [13] et [SGA 5, VII]).

INTRODUCTION

Le numéro 2 est consacré à la comparaison des classes ainsi définies avec les classes de Chern cristallines de [4]. On termine le chapitre par le calcul de la cohomologie d'un schéma de drapeaux.

Au chapitre IV, nous calculons la cohomologie d'un schéma éclaté par des techniques analogues à celles utilisées pour prouver que (1) et (2) sont des isomorphismes. On en déduit la "formule de self-intersection"

$$(9) \quad i^* i_*(y) = y c_{r+1}(\tilde{N}) \in H^{r+1}(X, W_n \mathcal{O}_{X, \log}^{r+1})$$

pour i une immersion fermée lisse de codimension $r+1$ définie par un idéal J de \mathcal{O}_X et $N = J/J^2$.

Nous prouvons également une variante de la "formule-clef" de ([SGA 5, VII]) et de la formule "habituelle" comparant classe de Chern et classe de cycle

$$(10) \quad c_{r+1}(i_* \mathcal{O}_Y) = (-1)^{r+1} r! \text{cl}(Y/X) \in H^{r+1}(X, W_n \mathcal{O}_{X, \log}^{r+1}).$$

C'est une conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour une immersion fermée dont la démonstration est essentiellement la même qu'en [24].

Ce travail où intervient de manière essentielle la théorie du complexe de De Rham-Witt et des R_X -Modules m'a été suggéré par L. Illusie. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude pour la patience avec laquelle il m'a prodigué conseils et encouragements tout au long du travail.

P. Berthelot et T. Ekedahl ont bien voulu lire une première version de la thèse et corriger certaines erreurs. Qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés. Je remercie également O. Gabber qui m'a communiqué certains résultats qui ont servi de catalyseur à ceux présentés ici.

(Ajouté en octobre 1985) Nous venons de prendre connaissance d'un preprint de H. Gillet et W. Messing intitulé "Cycle Classes and Riemann-Roch for Crystalline Cohomology", donnant, pour X lisse sur un corps k de caractéristique $p > 0$, une théorie de classes de cycles à valeurs dans les groupes de cohomologie cristalline $H_{\text{cris}}^{2i}(X/C) \otimes \mathbb{Q}$ ($C =$ anneau de Cohen pour k). Pour k parfait (et $C = W$), cette théorie se déduit de celle construite ici via l'application composée $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{W}_i) \rightarrow H^{2i}(X/W) \rightarrow H^{2i}(X/W) \otimes \mathbb{Q}$, comme il résulte de III 2.1 et IV 3.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans tout ce travail, on fixe un nombre premier p et un corps parfait k de caractéristique p . On note

$W(k)$ (ou W) : l'anneau des vecteurs de Witt sur k ,

$W_n(k)$ (ou W_n) : $W(k)/p^n$, l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n .

Si X est un k -schéma, on note :

$\mathcal{G}_m = \mathcal{O}_X^*$ le groupe multiplicatif sur X

Ω_X^\bullet le complexe de De Rham de X sur k

$W_n \Omega_X^\bullet$ le complexe de De Rham-Witt de X de cran n ([21], I 1.12)

$W \cdot \Omega_X^\bullet$ le système projectif (ou parfois le pro-objet) formé par les $W_n \Omega_X^\bullet$ et les flèches de restriction $W_{n+1} \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$, notées π .

$W \Omega_X^\bullet : \varprojlim W_n \Omega_X^\bullet$ le complexe de De Rham-Witt de X

$\underline{x} = (x, 0, 0, \dots) \in W \mathcal{O}_X$ (ou $W_n \mathcal{O}_X$) le représentant de Teichmüller de $x \in \mathcal{O}_X$.

Si M est un complexe (d'une catégorie abélienne), on note $M^{\ll i}$, $M^{\gg i}$ les tronqués naifs de M et $t_{\ll i} M$, $t_{\gg i} M$ les tronqués canoniques de M :

$M^{\ll i} = (\dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow M^i \rightarrow 0)$, $M^{\gg i} = (0 \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots)$

$t_{\ll i} M = (\dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow Z^i M \rightarrow 0)$, $t_{\gg i} M = (0 \rightarrow M^i/B^i M \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots)$

où $Z^i M = \text{Ker } d$, $B^i M = \text{Im } d$.

Si P' est un objet gradué et si $r \in \mathbb{Z}$, $P'(r)$ désigne l'objet gradué défini par $(P'(r))^i = P'^{r+i}$.

Si L est un faisceau, la notation $x \in L$ signifie que x est une section locale de L .

L'écriture $a := b$ signifie que a est défini par b .

CHAPITRE I

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

Dans tout ce chapitre, la lettre X désignera un k -schéma lisse.

1. Les faisceaux $W_n \Omega_{X, \log}^i$.

1.1. Pour $n \gg 1$, nous noterons

$$(1.1.1) \quad \text{dlog} : \mathcal{O}_X^* \longrightarrow W_n \Omega_X^1$$

l'homomorphisme de faisceaux abéliens défini par $x \longmapsto dx/x$.

Pour n variable, les applications (1.1.1) forment un homomorphisme du système projectif constant \mathcal{O}_X^* dans le système projectif $W_n \Omega_X^1$ que nous noterons encore dlog .

1.2. Soit $i \gg 1$, on rappelle ([21], I.5.7) que l'on désigne par $W_n \Omega_{X, \log}^i$ le sous-faisceau abélien de $W_n \Omega_X^i$ engendré localement, pour la topologie étale sur X , par les sections de la forme $\text{dlog}(x_1) \dots \text{dlog}(x_i)$ avec $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$ si $n \gg 1$ et $W_n \Omega_{X, \log}^i = 0$ si $n \leq 0$. Pour $i=0$, on conviendra que $W_n \Omega_{X, \log}^0 = \mathbb{Z}/p^n$ si $n > 0$ et $W_n \Omega_{X, \log}^0 = 0$ si $n \leq 0$.

Lorsque $n=1$, on écrira $\Omega_{X, \log}^i$ au lieu de $W_1 \Omega_{X, \log}^i$.

Chaque fois que l'on écrira $W_n \Omega_{X, \log}^i$, il sera sous-entendu que l'on travaille sur le site étale des schémas considérés.

Si $f : X \longrightarrow X'$ est un morphisme de k -schémas lisses, les morphismes canoniques de fonctorialité ([21], I (1.2.12), (1.2.13)) induisent des morphismes canoniques adjoints l'un de l'autre

$$(1.2.1) \quad W_n \Omega_{X', \log}^* \longrightarrow f_* W_n \Omega_{X, \log}^*$$

$$(1.2.2) \quad f^{-1} W_n \Omega_{X', \log}^* \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^*$$

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

La structure de produit de $W_n \Omega_X^*$ induit une structure de produit associatif et anticommutatif sur $W_n \Omega_{X, \log}^*$

$$(1.2.3) \quad W_n \Omega_{X, \log}^i \times W_n \Omega_{X, \log}^i \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^{i+j} .$$

1.3. Les résultats essentiels dont nous aurons besoin sont les suivants :

On a une suite exacte (pour la topologie étale sur X) (Thm. 2.4.2 de [21])

$$(1.3.1) \quad 0 \longrightarrow \Omega_{X, \log}^i \longrightarrow Z\Omega_X^i \xrightarrow{1-C_X} \Omega_X^i \longrightarrow 0 .$$

Ce résultat se généralise de la manière suivante : on a une suite exacte de pro-faisceaux abéliens (pour la topologie étale sur X)

$$(1.3.2) \quad 0 \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^i \longrightarrow W_n \Omega_X^i \xrightarrow{1-F} W_n \Omega_X^i \longrightarrow 0 .$$

C'est le théorème I.5.7.2 de [21].

Les catégories dérivées avec lesquelles nous aurons à travailler sont les suivantes : $D(\mathbb{Z}/p^n\text{-Mod})$, $D(\mathbb{Z}/p^*\text{-pro-Mod})$, $D(W_n \Omega_{X, \log}^*\text{-Mod})$, $D(W_n \Omega_{X, \log}^*\text{-pro-Mod})$, c'est-à-dire les catégories dérivées de, respectivement la catégorie des \mathbb{Z}/p^n -Modules, des pro-Modules sur le pro-Anneau \mathbb{Z}/p^* , des $W_n \Omega_{X, \log}^*$ -Modules ($W_n \Omega_{X, \log}^*$ étant un anneau d'après ce qui précède) gradués, des pro-Modules gradués sur le pro-anneau gradué $W_n \Omega_{X, \log}^*$.

Théorème 1.3.3. La flèche naturelle de $D(W_n \Omega_{X, \log}^*\text{-pro-Mod})$

$$(1.3.4) \quad W_n \Omega_{X, \log}^* \longleftarrow \mathbb{Z}/p^n \otimes W_n \Omega_{X, \log}^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Il suffit de vérifier qu'elle induit un isomorphisme pour tout $i \geq 0$

$$(1.3.5) \quad W_n \Omega_{X, \log}^i \longleftarrow \mathbb{Z}/p^n \otimes W_n \Omega_{X, \log}^i$$

dans $D(\mathbb{Z}/p^n\text{-pro-Mod})$. Or, on a un isomorphisme de \mathbb{Z}/p^n -pro-Modules

$$(1.3.6) \quad W_n \Omega_{X, \log}^i \longleftarrow \mathbb{Z}/p^n \otimes W_n \Omega_{X, \log}^i$$

d'après le corollaire 5.7.5 de [21].

D'autre part, on a

$$(1.3.7) \quad \text{Tor}_j^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^n, W.\Omega_{X, \log}^i) = 0$$

pour $j > 0$ et tout i car la multiplication par p est injective dans le pro-objet $W.\Omega_{X, \log}^i$ puisque c'est déjà le cas sur le pro-objet $W.\Omega_X^i$ d'après le corollaire I.3.5 de [21].

2. Cohomologie logarithmique des fibrés projectifs.

2.1. Soit E un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$ ($r \geq -1$). On notera $P = \mathbb{P}(E)$ le fibré projectif sur X associé à E et f la projection $P \rightarrow X$. On veut calculer $Rf_* W_n \Omega_{P, \log}^*$ vu comme objet de $D(W_n \Omega_{X, \log}^* \text{-Mod})$.

On remarque que (1.1.1) fournit un morphisme

$$(2.1.1) \quad d\log : \mathcal{O}_P^* \rightarrow \varprojlim W.\Omega_{P, \log}^1$$

qui, composé avec l'homomorphisme canonique $\varprojlim W.\Omega_{P, \log}^1 \rightarrow R\varprojlim W.\Omega_{P, \log}^1$ fournit un morphisme de $D(\mathbb{Z})$

$$(2.1.2) \quad d\log : \mathcal{O}_P^* \rightarrow R\varprojlim W.\Omega_{P, \log}^1$$

lequel induit en cohomologie un morphisme

$$(2.1.3) \quad c_1 : \text{Pic}(P) \xrightarrow{\sim} H^1(P, \mathcal{O}_P^*) \rightarrow H^1(P, R\varprojlim W.\Omega_{P, \log}^1).$$

Pour tout faisceau inversible L sur P , $c_1(L)$ désignera l'image par (2.1.3) de la classe de L dans $\text{Pic}(P)$ et sera appelée première classe de Chern (logarithmique) de L .

Pour tout objet M . de $D(\mathbb{Z}/p^{\cdot}\text{-pro-Mod})$, on a un isomorphisme canonique évident

$$(2.1.4) \quad R\text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}\text{-pro-Mod}}(\mathbb{Z}/p^{\cdot}, M) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(P, R\varprojlim M.)$$

si bien que

$$(2.1.5) \quad \text{Hom}_{D(\mathbb{Z}/p^{\cdot}\text{-pro-Mod})}(\mathbb{Z}/p^{\cdot}, W.\Omega_{P, \log}^1[1]) \xrightarrow{\sim} H^1(P, R\varprojlim W.\Omega_{P, \log}^1).$$

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

L'élément $c_1(\mathcal{O}_P(1))$ de $H^1(P, \text{Rlim } W.\Omega_{P, \log}^1)$ définit donc un morphisme dans $D(\mathbb{Z}/p\text{-pro-Mod})$ noté encore $c_1(\mathcal{O}_P(1))$

$$(2.1.6) \quad c_1(\mathcal{O}_P(1)) : \mathbb{Z}/p \longrightarrow W.\Omega_{P, \log}^1[1] .$$

La structure de produit (1.2.3) permet, par produit tensoriel, de déduire de (2.1.6) des morphismes dans $D(\mathbb{Z}/p\text{-pro-Mod})$

$$(2.1.7) \quad c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \mathbb{Z}/p \longrightarrow W.\Omega_{P, \log}^i[i]$$

et ceci pour tout $i \gg 0$ ($c_1(\mathcal{O}_P(1))^0 = \text{Id}$).

On en déduit par adjonction un morphisme dans $D(W.\Omega_{P, \log}^* \text{-pro-Mod})$

$$(2.1.8) \quad \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} W.\Omega_{P, \log}^*(-i)[-i] \longrightarrow W.\Omega_{P, \log}^* .$$

Pour tout module différentiel gradué M^* (ou tout complexe M^*), on note $M^*(m)[n]$ (ou $M^*(m)[n]$) le module différentiel gradué (ou le complexe) obtenu en appliquant m fois le foncteur translation pour les modules différentiels gradués (ou pour les complexes) et n fois le foncteur translation dans la catégorie dérivée que l'on considère.

Enfin, utilisant le morphisme d'adjonction

$$(2.1.9) \quad \text{adj} : W.\Omega_{X, \log}^* \longrightarrow \text{Rf}_* W.\Omega_{P, \log}^* ,$$

on obtient un morphisme dans $D(W.\Omega_{X, \log}^* \text{-pro-Mod})$

$$(2.1.10) \quad \text{adj} \circ \text{Rf}_* \left(\bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} c_1(\mathcal{O}_P(1))^i \right) : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} W.\Omega_{X, \log}^*(-i)[-i] \longrightarrow \text{Rf}_* W.\Omega_{P, \log}^* .$$

Théorème 2.1.11. Le morphisme (2.1.10) est un isomorphisme.

Au n° 4, nous déduirons ce théorème d'un théorème analogue concernant la cohomologie de Hodge-Witt d'un fibré projectif. Nous donnerons cependant au numéro 2.2 une démonstration directe.

Corollaire 2.1.12. On a pour tout $n \gg 0$ un isomorphisme canonique dans $D(W_n \Omega_{X, \log}^* \text{-Mod})$

$$(2.1.13) \quad (2.1.10) \otimes^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} W_n \Omega_{X, \log}^*(-i)[-i] \xrightarrow{\sim} \text{Rf}_* W_n \Omega_{P, \log}^* .$$

Démonstration : On applique la formule de projection

$$(2.1.14) \quad (Rf_* W \cdot \Omega_{P, \log}^*) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{\sim} Rf_* (W \cdot \Omega_{P, \log}^* \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n)$$

et l'isomorphisme (1.3.4).

Corollaire 2.1.15. On a un isomorphisme de \mathbb{Z}/p^n -Modules

$$(2.1.16) \quad H^j((2.1.10)) : H^j(P, W \cdot \Omega_{P, \log}^*) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^r H^{j-i}(X, W \cdot \Omega_{X, \log}^{*-i}). \quad (1)$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le foncteur $H^j(X, -)$ à l'isomorphisme (2.1.10).

Corollaire 2.1.17. On a

$$(2.1.18) \quad H^j(P_k^r, W \cdot \Omega_{P_k^r, \log}^i) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \text{ ou } i > r \\ \mathbb{Z}/p^n \cdot c_1(\mathcal{O}_{P_k^r}(1))^i & \text{pour } i \in [0, r] \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire précédent au cas $X = \text{Spec}(k)$ et $E = k^{r+1}$.

2.2. Démonstration de 2.1.11. On commence par remarquer que l'isomorphisme (1.3.4) appliqué à chacun des deux membres montre que $\text{Cône}((2.1.10)) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{\sim} \text{Cône}(2.1.13)$. Soit C^* le cône de (2.1.10), il suffit donc de démontrer que $C^* \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p = 0$, car alors $C^* \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n = 0$ et donc $C^* = 0$. On remarque alors que $C^* \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p$ est le cône du morphisme (2.1.13) pour $n=1$. On vérifie alors que la suite exacte (1.3.1) permet de définir un morphisme de triangles distingués

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^r \Omega_X^*(-i)[-i] & & Rf_* \Omega_P^* \\ \swarrow [+1] & \xrightarrow{\bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_P(1))^i} & \swarrow [+1] \\ \bigoplus_{i=0}^r \Omega_{X, \log}^*(-i)[-i] & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^r Z \Omega_X^*(-i)[-i] \longrightarrow Rf_* \Omega_{P, \log}^* \longrightarrow Rf_* Z \Omega_P^* \end{array}$$

(1) Pour $n=1$, ce résultat a été prouvé indépendamment par O. Gabber (non publié, cf. [15]).

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

(la définition des morphismes horizontaux étant analogue à la définition du morphisme (2.1.10)).

Comme le morphisme

$$(2.2.2) \quad \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} \Omega_X^*(-i)[-i] \longrightarrow \text{Rf}_* \Omega_P^*$$

est un isomorphisme ([4] et [14]), il suffit de démontrer que

$$(2.2.3) \quad \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} Z\Omega_X^*(-i)[-i] \longrightarrow \text{Rf}_* Z\Omega_P^*$$

est un isomorphisme.

On utilise pour cela un argument qui m'a été communiqué par L. Illusie (cf. aussi [31, 1.5]). On commence par prouver que l'on a un isomorphisme

$$(2.2.4) \quad \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} t_{\llcorner j-i} \Omega_X^i \longrightarrow \text{Rf}_* t_{\llcorner j} \Omega_P^i$$

en remarquant pour ce faire que le conoyau de l'application injective $t_{\llcorner j} \Omega_X^i \longrightarrow t_{\llcorner j+1} \Omega_X^i$ est quasi-isomorphe à $\Omega_X^{j+1}[-(j+1)]$ grâce à l'opération de Cartier. Par récurrence ascendante sur j , on déduit alors de (2.2.2) que (2.2.4) est un isomorphisme.

Pour terminer, on remarque que $Z\Omega_X^j[-j]$ est le noyau du morphisme surjectif $t_{\llcorner j} \Omega_X^j \longrightarrow \Omega_X^{\llcorner j}$ et donc qu'il suffit de prouver que

$$(2.2.5) \quad \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \bigoplus_{i=0}^{\mathbb{F}} \Omega_X^{\llcorner j-i}[-i] \longrightarrow \text{Rf}_* \Omega_P^{\llcorner j}$$

est un isomorphisme. Ce qui résulte facilement de l'isomorphisme (2.2.2).

3. Points fixes par F .

3.1. Commençons par rappeler la définition de l'anneau R_X , généralisation due à T. Ekedahl de l'anneau de Cartier-Dieudonné-Raynaud. L'anneau R_X est par définition la $W\Omega_X^*$ -algèbre différentielle graduée engendrée par deux générateurs \underline{F} et \underline{V} de degré 0 et un générateur \underline{d} de degré 1 soumis aux relations

- (3.1.1) (i) $Fa = Fa.F$ si $a \in W\Omega_X^*$, $FdV = d$
 (ii) $aV = V.Fa$ si $a \in W\Omega_X^*$
 (iii) $VaF = Va$ si $a \in W\Omega_X^*$
 (iv) $VF = FV = p$
 (v) $d^2 = 0$
 (vi) $da = da + (-1)^{\deg(a)} a_d$ si $a \in W\Omega_X^*$.

Un R_X -Module à gauche gradué est la donnée d'un $W\Omega_X^*$ -Module différentiel gradué muni d'opérateurs F et V de degré 0 et d'un opérateur d de degré 1 vérifiant le formulaire suivant

- (3.1.2) $FV = VF = p$, $FdV = d$, $xVy = V(Fx.y)$ pour tout x et tout y , $d^2 = 0$, $F(xy) = Fx.Fy$,
 $d(ax) = xda + (-1)^{\deg(a)} a.dx$.

Exemples : L'anneau R_X lui-même, l'anneau $W\Omega_X^*(F, V, d)$ opérant sur $W\Omega_X^*$ grâce à F , V et d respectivement).

Lemme 3.1.3. Tout élément x de R_X^i s'écrit de manière unique sous la forme

$$(3.1.4) \quad \sum_{n \geq 0} a_n F^n + \sum_{n \geq 0} V^n b_n + \sum_{n \geq 0} c_n F^n d + \sum_{n \geq 0} dV^n e_n$$

avec $a_n, b_n \in W\Omega_X^i$ et $c_n, e_n \in W\Omega_X^{i-1}$ nuls pour presque tout n .

La vérification est analogue à celle de l'assertion correspondante pour l'anneau R ([23, I.1.1]).

On posera

$$(3.1.5) \quad R_{n,X} = R_X / (V^n.R_X + dV^n.R_X).$$

On prendra garde au fait que, $(V^n.R_X + dV^n.R_X)$ n'étant pas un idéal bilatère de R_X , $R_{n,X}$ n'est pas un anneau.

La projection canonique $\pi : W_{n+1}\Omega_X^* \longrightarrow W_n\Omega_X^*$ induit un morphisme noté encore π

$$(3.1.6) \quad \pi : R_{n+1,X} \longrightarrow R_{n,X}$$

et faisant de la famille $R_{n,X}$ pour n variable un système projectif. On posera

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

$$(3.1.7) \quad R_X^\wedge = \varprojlim R_n \cdot X$$

$$(3.1.8) \quad \tilde{R}_X = \varprojlim R_X / P \cdot$$

Il est facile de vérifier que ce sont des anneaux et des modules à gauche sur R_X .

Avant d'énoncer la proposition suivante, définissons un morphisme canonique $R_X^\wedge \rightarrow W\Omega_X^\wedge$. Il résulte de 3.1.3 que tout élément x de R_X^\wedge s'écrit de manière unique sous la forme

$$(3.1.9) \quad x = \sum_{n \geq 0} a_n F^n + \sum_{n \geq 0} c_n F^n d + \sum_{n \geq 0} v^n b_n + \sum_{n \geq 0} d v^n e_n$$

avec les deux premières sommes éventuellement infinies mais dont les coefficients a_n et c_n tendent vers 0 pour la topologie standard de $W\Omega_X^\wedge$ lorsque n tend vers ∞ et les deux dernières sommes infinies mais sans condition de convergence.

On dispose donc d'un morphisme

$$(3.1.10) \quad \varphi : R_X^\wedge \rightarrow W\Omega_X^\wedge$$

$$\text{défini par } \varphi(x) = \sum_{n \geq 0} a_n + \sum_{n \geq 0} v^n b_n,$$

x étant supposé écrit comme dans (3.1.4).

Proposition 3.1.11. On a une suite exacte de R_X -Modules

$$(3.1.12) \quad 0 \rightarrow R_X^\wedge \xrightarrow{.(1-F)} R_X^\wedge \rightarrow W\Omega_X^\wedge \rightarrow 0.$$

Démonstration : Soit $x \in R_X^\wedge$ écrit comme en (3.1.4). Dire que $x.(1-F) = 0$ implique

$$(3.1.13) \quad a_0 = v b_1, \quad c_0 = p e_1 \text{ et quel que soit } i \gg 1 \\ a_i = a_{i+1}, \quad b_i = v b_{i+1}, \quad c_i = p c_{i-1}, \quad e_i = p e_{i+1}.$$

Comme $\bigcap_n p^n W\Omega_X^\wedge = 0$, on en déduit que $x = 0$. Comme φ est clairement surjectif, il nous reste à vérifier l'exactitude au centre de (3.1.12) i.e. que $\text{Ker}(\varphi) \leftarrow \text{Im}(.(1-F))$. Or, on a

$$(3.1.14) \quad x' . (1-F) = (a'_0 - v b'_1) + (c'_0 - p e'_1) + \sum_{n \geq 0} [(c'_n - p c'_{n-1}) F^n d + \\ v^n (b'_n - b'_{n+1}) + (e'_n - p e'_{n+1}) d v^n + (a'_n - a'_{n-1}) F^n].$$

Le système d'équations auquel conduit l'égalité $x' \cdot (1-F) = x$ admet toujours une solution si $x \in \text{Ker}(\varphi)$ comme on le voit facilement, d'où le résultat.

On peut de même écrire les éléments de \tilde{R}_X^i comme en (3.1) avec les sommes infinies et les coefficients tendant vers 0 pour la topologie p-adique. On a alors la

Proposition 3.1.15. On a une suite exacte de R_X -Modules

$$(3.1.16) \quad 0 \longrightarrow \tilde{R}_X \xrightarrow{\cdot(1-F)} \tilde{R}_X \longrightarrow W\Omega_X^* \longrightarrow 0$$

(le morphisme $\tilde{R}_X \longrightarrow W\Omega_X^*$ étant défini de la même manière que φ).

Démonstration : C'est la même que celle de la proposition 3.1.11.

Corollaire 3.1.17. On a une suite exacte de R_X/p' -pro-Modules

$$(3.1.18) \quad 0 \longrightarrow R_X/p' \xrightarrow{\cdot(1-F)} R_X/p' \longrightarrow W\Omega_X^*/p' \longrightarrow 0$$

Démonstration : Il suffit de réduire modulo p' la suite exacte précédente.

3.2. Venons-en à la définition du foncteur "points fixes sous F" d'un R_X/p' -pro-Module.

Soit M . un R_X/p' -pro-Module, on notera " $\underline{\text{Hom}}_{R_X/p'}(W\Omega_X^*/p', M)$ " le pro- $W\Omega_{X, \log}^*$ -Module " $\varinjlim_j \varprojlim_i \underline{\text{Hom}}(W\Omega_X^*/p^i, M_j)$ ". Il est clair que l'on obtient bien ainsi un $W\Omega_{X, \log}^*$ -pro-Module puisque l'action de F, V, d est $W\Omega_{X, \log}^*$ -linéaire.

" $\underline{\text{Hom}}_{R_X/p'}(W\Omega_X^*/p', -)$ " est ainsi un foncteur exact à gauche dont le dérivé droit au sens de SGA 4, XVII, 1.2.1 sera noté $(-)^F$. C'est donc un foncteur allant de $D(R_X/p'$ -pro-Mod) dans $\text{Ind-D}(W\Omega_{X, \log}^*$ -pro-Mod).

Proposition 3.2.1. Pour tout R_X/p' -pro-Module M ., on a un isomorphisme canonique

$$(3.2.2) \quad R''\underline{\text{Hom}}_{R_X/p'}(W\Omega_X^*/p', M) \xrightarrow{\sim} R''\underline{\text{Hom}}_{R/p'}(W/p', M) .$$

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

Démonstration : La suite exacte (3.1.20) fournit un isomorphisme

$$(3.2.3) \quad (M.)^F \xrightarrow{\sim} R^{\text{Hom}}_{R_X/P^*}([R_X/P^* \xrightarrow{1-F} R_X/P^*], M.)$$

soit

$$(3.2.4) \quad (M.)^F \xrightarrow{\sim} [M. \xrightarrow{1-F} M.] .$$

La même méthode s'applique au second membre de (3.2.2), d'où le résultat.

Corollaire 3.2.5. On a un isomorphisme dans $\text{Ind-D}(W.\Omega_{X,\log}^* \text{-pro-Mod})$

$$(3.2.6) \quad (W\Omega_{X/P^*}^*)^F \xrightarrow{\sim} W.\Omega_{X,\log}^* .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer (3.2.4) au cas $M. = W\Omega_{X/P^*}^*$ et d'utiliser le résultat d'Ekedahl (Lemme 9.1 de [9]) identifiant le cône de $1-F$ sur $W\Omega_{X/P^*}^*$ et sur $W.\Omega_{X,\log}^*$.

Corollaire 3.2.7. Pour tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ entre k -schémas lisses et tout R_X/P^* -pro-Module $M.$, on a un isomorphisme canonique

$$(3.2.8) \quad (Rf_* M.)^F \xrightarrow{\sim} Rf_*((M.)^F) .$$

Démonstration : Grâce à (3.2.4) on a des isomorphismes

$$(3.2.9) \quad \begin{aligned} Rf_*((M.)^F) &\xrightarrow{\sim} Rf_*[M. \xrightarrow{1-F} M.] \\ &\xrightarrow{\sim} [Rf_* M. \xrightarrow{1-F} Rf_* M.] \\ &\xrightarrow{\sim} Rf_*((M.)^F) . \end{aligned}$$

4. Cohomologie de Hodge-Witt des fibrés projectifs.

4.1. On conserve les hypothèses et notations du numéro 2. On veut calculer $Rf_* W\Omega_P^*$ vu comme objet de $D(X, R_X \text{-Mod})$.

Proposition 4.1.1. On a un isomorphisme canonique

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{c} \text{Hom}_{D(\mathbb{Z}/p^* \text{-pro-Mod})}(\mathbb{Z}/p^*, W.\Omega_{P,\log}^*[*]) \\ \downarrow \\ \text{Hom}_{D(R^* \text{-Mod})}(W, W\Omega_P^*[*])(*) \end{array}$$

Démonstration : Il suffit de voir que l'on a un isomorphisme

$$(4.1.3) \quad \text{RHom}_{\mathbb{Z}/p\text{-pro-Mod}}(\mathbb{Z}/p^*, W \cdot \Omega_p^* \log[*]) \\ \cong \\ \text{RHom}_{R^\wedge\text{-Mod}}(W, W \Omega_p^**).$$

Pour ce faire, on remarque que (3.1.12) fournit un isomorphisme

$$(4.1.4) \quad \text{RHom}_{R^\wedge\text{-Mod}}(W, W \Omega_p^**) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}_{R^\wedge\text{-Mod}}(R^\wedge \xrightarrow{1-F} R^\wedge, W \Omega_p^**)$$

D'où des isomorphismes

$$(4.1.5) \quad \text{RHom}_{R^\wedge\text{-Mod}}(W, W \Omega_p^**) \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(P, [W \Omega_p^* \xrightarrow{1-F} W \Omega_p^*]*) \\ \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(P, \text{R}\varinjlim [W \cdot \Omega_p^* \xrightarrow{1-F} W \cdot \Omega_p^*]*) \\ \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(P, \text{R}\varinjlim W \cdot \Omega_p^* \log[*]).$$

Le dernier isomorphisme résultant de la suite exacte (1.3.2).

Le résultat découle alors de l'isomorphisme (2.1.4).

Le morphisme (2.1.6) définit donc un morphisme dans $D(R^\wedge\text{-Mod})$

$$(4.1.6) \quad c_1(\mathcal{O}_P(1)) : W \longrightarrow W \Omega_p^1[1]$$

et (2.1.7) joint à (4.1.2) permet de définir des morphismes

$$(4.1.7) \quad c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : W \longrightarrow W \Omega_p^i[i]$$

dans $D(R^\wedge\text{-Mod})$ pour tout $i \geq 0$ ($c_1(\mathcal{O}_P(1))^0 = \text{Id}$).

On en déduit, par adjonction, un morphisme dans $D(R_P\text{-Mod})$

$$(4.1.8) \quad \bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_P(1))^i : \bigoplus_{i=0}^r W \Omega_p^i(-i)[-i] \longrightarrow W \Omega_p^r.$$

Utilisant d'autre part le morphisme d'adjonction

$$(4.1.9) \quad \text{adj} : W \Omega_X^r \longrightarrow \text{Rf}_* W \Omega_p^r$$

on déduit de (4.1.8) un morphisme dans $D(R_X\text{-Mod})$

$$(4.1.10) \quad \text{adj} \circ \text{Rf}_* \left(\bigoplus_{i=0}^r c_1(\mathcal{O}_P(1))^i \right) : \bigoplus_{i=0}^r W \Omega_X^i(-i)[-i] \longrightarrow \text{Rf}_* W \Omega_p^r.$$

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

Théorème 4.1.11. Le morphisme (4.1.10) est un isomorphisme.

La démonstration sera donnée en 4.2.

Corollaire 4.1.12. On a un isomorphisme canonique dans $D(W_n \Omega_X^* - \text{Mdg})$

$$(4.1.13) \quad R_n \otimes_R^{\mathbb{L}} (4.1.10) : \bigoplus_{i=0}^r W_n \Omega_X^*(-i)[-i] \xrightarrow{\sim} Rf_* W_n \Omega_P^* .$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la formule de projection

$$(4.1.14) \quad R_n \otimes_R^{\mathbb{L}} Rf_* W_n \Omega_P^* \xrightarrow{\sim} Rf_* (R_n \otimes_R^{\mathbb{L}} W_n \Omega_P^*)$$

et l'isomorphisme canonique (cf. [22, I (1.2.1)])

$$(4.1.15) \quad R_n \otimes_R^{\mathbb{L}} W_n \Omega_X^* \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_X^*$$

pour tout $n \gg 1$.

Corollaire 4.1.16. On a un isomorphisme canonique dans $D(R_X/p^* - \text{pro-Mod})$

$$(4.1.17) \quad R_X/p^* \otimes_R^{\mathbb{L}} (4.1.10) : \bigoplus_{i=0}^r W_n \Omega_X^*/p^*(-i)[-i] \xrightarrow{\sim} Rf_* W_n \Omega_P^*/p^* .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le foncteur $/p^*$ à (4.1.10).

Application : démonstration de 2.1.11. On applique le foncteur $(-)^F$ à l'isomorphisme (4.1.17). Le résultat découle alors de (3.2.6).

4.2. Démonstration de 4.1.11. Il suffit de voir que (4.1.10) est un isomorphisme dans $D(R\text{-Mod})$, i.e. que le cône C de (4.1.10), considéré comme objet de $D(R\text{-Mod})$ est nul. On va utiliser pour ce faire le lemme suivant du type "lemme de Nakayama" dû à T. Ekedahl ([9]).

Lemme 4.2.1. Soit A un objet de $D^-(R\text{-Mod})$. Si $R_1 \otimes_R^{\mathbb{L}} A = 0$, alors

$$R_n \otimes_R^{\mathbb{L}} A = 0 \quad \text{pour tout } n \gg 1 .$$

Démonstration : Nous en indiquerons seulement le principe, en renvoyant à [9] pour les détails.

On définit gr_n par la suite exacte

$$(4.2.2) \quad 0 \longrightarrow gr_n \longrightarrow R_{n+1} \longrightarrow R_n \longrightarrow 0$$

si bien que l'on est ramené à vérifier que $\text{gr}_n \overset{n}{\otimes}_R A = 0$.

On prouve alors que l'on a une suite exacte analogue de ([21], I.3.9.1)

$$(4.2.3) \quad 0 \longrightarrow R_1^*/B_n \longrightarrow \text{gr}_n^* \longrightarrow R_1^*/Z_n(-1) \longrightarrow 0.$$

Il suffit alors de prouver qu'on a

$$(4.2.4) \quad B_n \overset{n}{\otimes}_R A^* = Z_n \overset{n}{\otimes}_R A = 0$$

puis par récurrence sur n l'assertion analogue pour $n=1$, ce qui se voit en utilisant simultanément les deux suites exactes

$$(4.2.5) \quad 0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow Z_1 \xrightarrow{C} R_1 \longrightarrow 0$$

où C est l'analogue de l'opération de Cartier,

$$(4.2.6) \quad 0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{d} B_1(1) \longrightarrow 0.$$

Pour démontrer 4.1.11, il suffit donc de prouver que $R_1 \overset{n}{\otimes}_R C = 0$; c'est-à-dire que le morphisme

$$(4.2.7) \quad R_1 \overset{n}{\otimes}_R (4.1.10) : \bigoplus_{i=0}^r \Omega_X^i(-i)[-i] \longrightarrow \text{Rf}_* \Omega_P^i$$

est un isomorphisme (cf. 4.1.12).

Faute de référence, démontrons ce résultat. La question est locale sur X , on peut donc supposer P trivial et par suite, que la suite exacte

$$(4.2.8) \quad 0 \longrightarrow f^* \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_P^1 \longrightarrow \Omega_{P/X}^1 \longrightarrow 0$$

est scindée et fournit donc des isomorphismes

$$(4.2.9) \quad \Omega_P^i = \bigoplus_j f^* \Omega_X^{i-j} \otimes_{\mathcal{O}_P} \Omega_{P/X}^j.$$

La formule de projection montre alors que l'on a un isomorphisme

$$(4.2.10) \quad \text{Rf}_* \Omega_P^i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_j \Omega_X^{i-j} \overset{i}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \text{Rf}_* \Omega_{P/X}^j.$$

Il suffit donc de montrer que

$$(4.2.11) \quad \text{Rf}_* \Omega_{P/X}^j \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X[-j]$$

pour tout $j \gg 0$.

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS PROJECTIFS

Or, d'après SGA 7, exp. XI, Thm. 1.1, on a

$$(4.2.12) \quad R^i f_* \Omega_{P/X}^j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } R^i f_* \Omega_{P/X}^i \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X.$$

D'où le résultat.

Corollaire 4.2.13. On a un isomorphisme de W_n -Modules compatible à F , V et aux projections canoniques

$$(4.2.14) \quad H^j((4.1.13)) : H^j(P, W_n \Omega_P^*) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^r H^{j-i}(X, W_n \Omega_X^{*-i}).$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le foncteur $H^j(X, -)$ à l'isomorphisme (4.1.13).

Corollaire 4.2.15. On a des isomorphismes de W_n -Modules

$$(4.2.16) \quad H^j(P_k^r, W_n \Omega_{P_k}^i) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \text{ ou } i > r \\ W_n \cdot c_1(\mathcal{O}_{P_k^r}(1))^i & \text{pour } i \in [0, r]. \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire 4.2.13 au cas $X = \text{Spec}(k)$ et $E = k^{r+1}$.

5. Comparaison avec la cohomologie cristalline.

5.1. Soit u_{P/W_n} le morphisme canonique de topos (cf. [2])

$$(5.1.1) \quad (P/W_n)_{\text{cris}} \longrightarrow P_{\text{Zar}}.$$

On rappelle ([21], II Thm. 1.4) que l'on dispose d'un isomorphisme canonique fonctoriel de $D(W_n\text{-Mod})$

$$(5.1.2) \quad Ru_{P/W_n} \mathcal{O}_{P/W_n} \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_P^*.$$

D'autre part, d'après ([4], Thm. 2.5) on dispose d'un isomorphisme canonique

$$(5.1.3) \quad Rf_{* \text{cris}} \mathcal{O}_{P/W_n} \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^r \mathcal{O}_{X/W_n}[-2i].$$

Appliquant le foncteur Ru_{X/W_n} , on obtient un isomorphisme

$$(5.1.4) \quad \text{Rf}_{* \text{cris}}(\text{Ru}_{\mathbb{P}/\mathbb{W}_n} \otimes_{\mathbb{P}/\mathbb{W}_n}^{\otimes} \mathbb{P}/\mathbb{W}_n) \xrightarrow{\sim} \text{Ru}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \otimes_{\mathbb{W}_n}^{\otimes} (\text{Rf}_{* \text{cris}} \mathbb{P}/\mathbb{W}_n)$$

$$\uparrow \left\{ \begin{array}{l} \text{R} \\ \oplus \\ i=0 \end{array} \right. \text{Ru}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \otimes_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}^{\otimes} \mathbb{X}/\mathbb{W}_n[-2i] .$$

Théorème 5.1.5. On a un diagramme commutatif

$$(5.1.6) \quad \begin{array}{ccc} \text{Rf}_{*}(\text{Ru}_{\mathbb{P}/\mathbb{W}_n} \otimes_{\mathbb{P}/\mathbb{W}_n}^{\otimes} \mathbb{P}/\mathbb{W}_n) & \xleftarrow{(5.1.4)} & \text{R} \oplus_{i=0} \text{Ru}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \otimes_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}^{\otimes} \mathbb{X}/\mathbb{W}_n[-2i] \\ \left\{ \downarrow \text{Rf}_{*}(5.1.2) \right. & & \left. \downarrow (5.1.2) \right. \\ \text{Rf}_{*} \mathbb{W}_n \Omega_{\mathbb{P}}^{\bullet} & \xleftarrow{(4.1.13)} & \text{R} \oplus_{i=0} \mathbb{W}_n \Omega_{\mathbb{X}}^{\bullet}(-i)[-i] \end{array}$$

Démonstration : Il suffit de vérifier la commutativité du diagramme (où X désigne un k-schéma lisse quelconque)

$$(5.1.7) \quad \begin{array}{ccc} & & \text{H}^2(\mathbb{X}, \mathbb{W}_n \Omega_{\mathbb{X}}^{\bullet}) \\ & \nearrow c_1 & \downarrow \\ \text{H}^1(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}^*) & & \text{H}_{\text{cris}}^2(\mathbb{X}/\mathbb{W}_n) \\ & \searrow \underline{c}_1 & \end{array}$$

c_1 provenant de $\text{dlog} : \mathcal{O}_{\mathbb{X}}^* \rightarrow \mathbb{W}_n \Omega_{\mathbb{X}}^1, \log \rightarrow \mathbb{W}_n \Omega_{\mathbb{X}}^{\bullet}[1]$ et \underline{c}_1 étant la première classe de Chern d'un faisceau inversible telle qu'elle est définie dans ([4], (2.1.3)). Rappelons (cf. [4]) que \underline{c}_1 est défini de la manière suivante. Si $\text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}$ désigne l'idéal cristallin noyau du morphisme canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$, on a une suite exacte

$$(5.1.8) \quad 0 \rightarrow 1 + \text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}^* \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}^* \rightarrow 0$$

d'où un morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}^* \rightarrow (1 + \text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n})[1]$ qui composé avec la flèche induite par le logarithme $\log : 1 + \text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \rightarrow \text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}$ fournit

$$(5.1.9) \quad \underline{c}_1 : \mathcal{O}_{\mathbb{X}}^* \rightarrow \text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}[1]$$

dans $\text{D}(\text{X}_{\text{cris}})$.

Pour obtenir la commutativité de (5.1.7), il suffit donc de vérifier la commutativité du diagramme

$$(5.1.10) \quad \begin{array}{ccc} & & \text{Ru}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n} \otimes_{\mathbb{W}_n}^{\otimes} \text{J}_{\mathbb{X}/\mathbb{W}_n}[1] \\ & \nearrow \underline{c}_1 & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbb{X}}^* & & \mathbb{W}_n \Omega_{\mathbb{X}}^{\bullet}[1] \\ & \searrow c_1 & \end{array}$$

où la flèche verticale est induite par (5.1.2).

Pour ce faire, on va réaliser plus concrètement les morphismes en présence. Introduisons le complexe de De Rham multiplicatif de l'enveloppe à puissances divisées \tilde{X}' d'un relèvement X' de X sur W_n

$$(5.1.11) \quad \Omega_{X'}^{\cdot, X} = (\mathcal{O}_{X'}^* \xrightarrow{d} \Omega_{X'}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X'}^2 \longrightarrow \dots) .$$

On a un isomorphisme

$$(5.1.12) \quad Ru_{X/W_n} \mathcal{O}_{X/W_n}^* \xrightarrow{\sim} \Omega_{X'}^{\cdot, X} / W_n$$

et la projection par Ru_{X/W_n} du triangle distingué déduit de

(5.1.8) se déduit de la suite exacte (où I désigne l'idéal définissant X dans \tilde{X}')

$$(5.1.13) \quad 0 \longrightarrow ((1+I) \xrightarrow{d} \Omega_{X'}^1 / W_n \xrightarrow{d} \Omega_{X'}^2 / W_n \longrightarrow \dots) \longrightarrow \Omega_{X'}^{\cdot, X} / W_n \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}^* \longrightarrow 0 .$$

On réalise ainsi sur X_{Zar} le morphisme \underline{c}_1 comme composé du morphisme $\mathcal{O}_X^* \longrightarrow ((1+I) \xrightarrow{d} \Omega_X^1 / W_n \longrightarrow \dots)[1]$ et du morphisme induit par $\log : 1+I \longrightarrow I$.

Désignons maintenant par $W_n \Omega_X^{\cdot, X}$ le complexe de De Rham-Witt multiplicatif : $0 \longrightarrow W_n \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{d} W_n \Omega_X^1 \xrightarrow{d} W_n \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots$. On a une suite exacte

$$(5.1.14) \quad 0 \longrightarrow (1+W_{n-1} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} W_n \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \dots) \longrightarrow W_n \Omega_X^{\cdot, X} \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 .$$

Si maintenant on suppose donné un relèvement Φ sur X' du Frobenius de $X' \otimes k$, on dispose d'un morphisme $\Omega_{X'}^{\cdot, X} / W_n \longrightarrow W_n \Omega_X^{\cdot, X}$ (cf. [21]) compatible aux morphismes de Frobenius, et s'insérant dans un diagramme commutatif envoyant la suite exacte (5.1.13) dans la suite exacte (5.1.14)

$$(5.1.15) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & ((1+I) \xrightarrow{d} \dots) & \longrightarrow & \Omega_{X'}^{\cdot, X} / W_n & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X'}^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & ((1+W_{n-1} \mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} \dots) & \longrightarrow & W_n \Omega_X^{\cdot, X} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 . \end{array}$$

D'où un diagramme commutatif

(5.1.16)

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Omega_X^* / W_n[1] \\
 & \nearrow \varepsilon_1 & \downarrow \\
 \mathcal{O}_X^* & & W_n \Omega_X^*[1] \\
 & \searrow &
 \end{array}$$

où la flèche oblique descendante est induite par la composée de la flèche $\mathcal{O}_X^* \rightarrow ((1+WV_{n-1}\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} W_n \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \dots)[1]$ déduite de (5.1.14) et de la flèche induite par le logarithme $1+WV_{n-1}\mathcal{O}_X \rightarrow W_n \mathcal{O}_X$.

Il reste donc à voir que cette flèche oblique descendante est bien c_1 . Pour ce faire, on remarque que l'application représentant de Teichmüller s ($s(x) = \underline{x}$) de \mathcal{O}_X^* vers $W_n \mathcal{O}_X^*$ permet de scinder la suite exacte (5.1.14). Le résultat en découle.

CHAPITRE II

MORPHISME DE GYSIN

1. Définition des différents morphismes de Gysin.

1.1. Rappels sur l'autodualité du complexe de De Rham-Witt.

Les résultats de ce numéro sont dus à T. Ekedahl (cf. [9]). Soit X un k -schéma lisse, pour tout objet M de $D_C^b(R_X)$ on notera $D_X M$ l'objet $R\lim \text{RHom}(M_n, W_n \Omega_X^a[a])$ de $D_C^b(R_X)$ (a désignant la dimension de X sur k). Le premier résultat que nous aurons à utiliser est que l'on dispose d'un isomorphisme canonique dans $D_C^b(R_X)$

$$(1.1.1) \quad W_n \Omega_X^a \xrightarrow{\sim} (D_X W_n \Omega_X^a)(-a)[-a].$$

Le second résultat est le suivant : soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme propre de k -schémas lisses et M un objet de $D_C^b(R_Y)$, on peut alors construire un isomorphisme de dualité

$$(1.1.2) \quad Rf_* D_Y M \xrightarrow{\sim} D_X Rf_* M$$

obtenu en composant l'application canonique $Rf_* D_Y M \rightarrow R\lim \text{RHom}(Rf_* M_n, Rf_* W_n \Omega_Y^b[b])$ (où $b = \dim_k(Y)$) et une application

$$(1.1.3) \quad Rf_* W_n \Omega_Y^b[b] \rightarrow W_n \Omega_X^a[a]$$

appelé trace et obtenu en utilisant le fait que $W_n \Omega_X^a$ est dualisant.

1.2. Définitions.

On va définir pour tout morphisme propre $f: Y \rightarrow X$ entre k -schémas lisses ($\dim(Y) = b$, $\dim(X) = a$) comme ci-dessus des morphismes de Gysin pour divers faisceaux. On posera $r = a - b$.

Définition 1.2.1. Le morphisme de $D_C^b(R_X)$

$$(1.2.2) \quad f_* : Rf_* W_n \Omega_Y^r \rightarrow W_n \Omega_X^r[r]$$

est le transposé (par autodualité des complexes en présence) du morphisme $f^* : W\Omega_X^* \longrightarrow \text{Rf}_* W\Omega_Y^*$.

Détaillons un peu cette définition. (1.1.1) induit un isomorphisme de $D_C^b(R_X)$

$$(1.2.3) \quad \text{Rf}_* W\Omega_Y^* \longrightarrow \text{Rf}_* D_Y W\Omega_Y^*(-b)[-b] .$$

D'où grâce à (1.1.3) un morphisme

$$(1.2.4) \quad \text{Rf}_* W\Omega_Y^* \longrightarrow D_X \text{Rf}_* W\Omega_Y^*(-b)[-b] .$$

D_X étant contravariant, (1.1.1) montre que $f^* : W\Omega_X^* \longrightarrow \text{Rf}_* W\Omega_Y^*$ induit un morphisme noté f_*

$$(1.2.5) \quad \text{Rf}_* W\Omega_Y^* \longrightarrow W\Omega_X^*(r)[r] .$$

Définition 1.2.6. On notera encore $f_* : \text{Rf}_* W\Omega_Y^*/p^* \longrightarrow W\Omega_X^*/p^*(r)[r]$ le morphisme de $D(R_X/p^*\text{-pro-Mod})$ défini par $R_X/p^* \overset{n}{\otimes} R_X$ (1.2.5).

Définition 1.2.7. On notera encore $f_* : \text{Rf}_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^{*+r}[r]$ le morphisme de $D(W_n \Omega_{X, \log}^*\text{-pro-Mod})$ défini par (1.2.6)^F.

Définition 1.2.8. On notera encore $f_* : \text{Rf}_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^{*+r}[r]$ le morphisme de $D(W_n \Omega_{X, \log}^*\text{-Mod})$ défini par $\mathbb{Z}/p^n \overset{n}{\otimes}$ (1.2.7), compte tenu de I 1.3.4.

2. Propriétés.

On va maintenant énoncer quelques propriétés du morphisme de Gysin de 1.2.8 qui est, en un sens, le "plus fin" des quatre. Toutes ces propriétés resteront valables, mutatis mutandis, pour les morphismes de Gysin 1.2.1, 1.2.6 et 1.2.7.

2.1. Transitivité.

Considérons deux morphismes propres $f : Y \longrightarrow X$ et $g : Z \longrightarrow Y$ entre k -schémas lisses. Alors

MORPHISME DE GYSIN

Proposition 2.1.1. On a

$$(2.1.2) \quad (fg)_* = f_* \circ Rf_*(g_*) : R(fg)_* W_n \Omega_{Z, \log}^* \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^{**+r+r'} [r+r'] .$$

Démonstration : Par construction des morphismes en présence, il suffit de prouver l'assertion analogue pour les morphismes du type (1.2.2), c'est-à-dire sur $W_n \Omega_X^*$ ce qui résulte immédiatement de la formule

$$(2.1.3) \quad (fg)^* = Rf_*(g^*) \circ f^* : W_n \Omega_X^* \longrightarrow R(fg)_* W_n \Omega_Z^* .$$

2.2. Formule de projection.

Proposition 2.2.1. Soit f un morphisme propre comme en 1.2, on a un diagramme commutatif

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_{X, \log}^* \otimes^{\mathbb{N}} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* & \xrightarrow{\text{Id} \otimes f_*} & W_n \Omega_{X, \log}^* \otimes^{\mathbb{N}} W_n \Omega_{X, \log}^{**+r} [r] \\ \downarrow f^* \otimes \text{Id} & & \downarrow \gamma_X \\ Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \otimes^{\mathbb{N}} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* & \xrightarrow{\gamma_Y} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \xrightarrow{f_*} & W_n \Omega_{X, \log}^{**+r} [r] \end{array}$$

avec γ_X (resp. γ_Y) le morphisme de produit et $\otimes = \otimes_{W_n \Omega_{X, \log}^*}$.

Démonstration : On décompose le diagramme (2.2.2) en deux parties. On a un diagramme commutatif

$$(2.2.3) \quad \begin{array}{ccc} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \cong W_n \Omega_{X, \log}^* \otimes^{\mathbb{N}} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* & \xrightarrow{\gamma_X \circ (\text{Id} \otimes f_*)} & W_n \Omega_{X, \log}^{**+r} [r] \\ \parallel & & \parallel \\ Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* & \xrightarrow{f_*} & W_n \Omega_{X, \log}^{**+r} [r] \end{array}$$

puisque f_* est un morphisme dans $D(X, W_n \Omega_{X, \log}^* \text{-Mod})$.

D'autre part, on a un diagramme commutatif évident

$$(2.2.4) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_{X, \log}^* \otimes^{\mathbb{N}} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* & & \\ \downarrow f^* \otimes \text{Id} & \searrow & \\ Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \otimes^{\mathbb{N}} Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* & \xrightarrow{\gamma_Y} & Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \end{array}$$

D'où le résultat.

Corollaire 2.2.5. Pour tout $y \in H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*)$ et tout $x \in H^{*-r}(X, W_n \Omega_{X, \log}^{*-r})$, on a

$$(2.2.6) \quad f_*(y \cdot f^*(x)) = f_*(y) \cdot x \quad \text{dans } H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*)$$

où f_* désigne le morphisme induit en cohomologie

$$H^{*-r}(X, W_n \Omega_{X, \log}^{*-r}) \longrightarrow H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) \quad \text{par } f_* \text{ de la définition 1.2.8.}$$

Démonstration : On applique le foncteur $R\Gamma(X, -)$ au diagramme commutatif (2.2.2) puis on en prend la cohomologie, (2.2.6) est alors la traduction de la commutativité du diagramme que l'on obtient.

Définition 2.2.7. Si f est une immersion fermée, l'élément $cl(Y/X) := f_*(1_Y) \in H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ sera appelé classe de cohomologie de Y dans X .

Supposons dans la fin de ce numéro que f est une immersion fermée.

Corollaire 2.2.8. Le morphisme $f_* f^* : R\Gamma(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) \longrightarrow R\Gamma(X, W_n \Omega_{X, \log}^{*+r})[r]$ est le produit par $cl(Y/X)$.

Démonstration : On remarque simplement que le produit avec $cl(Y/X)$ est le morphisme

$$(2.2.9) \quad R\Gamma(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) \xrightarrow{\text{Id} \otimes s} R\Gamma(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) \otimes^{\mathbb{L}} R\Gamma(X, W_n \Omega_{X, \log}^{*+r}[r])$$

$$\downarrow \gamma_X$$

$$R\Gamma(X, W_n \Omega_{X, \log}^{*+r})[r]$$

où s est le morphisme

$$\mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{1} R\Gamma(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*) \xrightarrow{f_*} R\Gamma(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^{*+r})[r].$$

Le corollaire découle alors de la commutativité de (2.2.2).

Proposition 2.2.10. Pour tout $y \in H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*)$, on a

$$(2.2.11) \quad f^* f_*(y) = y \cdot f^*(1) \quad \text{dans } H^{*+r}(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^{*+r}).$$

MORPHISME DE GYSIN

Démonstration : Elle sera donnée au chapitre IV en même temps que nous calculerons $f^*f_*(1)$ (cf. IV (2.1.2)).

2.3. Transversalité.

Considérons un diagramme cartésien

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

où tous les schémas sont des k -schémas lisses et où f et f' sont des immersions fermées. On a alors la

Proposition 2.3.2. Si f et h sont transverses, on a

$$(2.3.3) \quad Rh_*(f'_*)Rf_*(g^*) = h^*f_* : Rf_*W_n\Omega_{Y,\log}^* \longrightarrow Rh_*W_n\Omega_{X',\log}^{**+r} [r] .$$

Démonstration : La démonstration sera donnée au numéro 3.

Corollaire 2.3.4. On a

$$(2.3.5) \quad h^*cl(Y/X) = cl(Y'/X') \quad \text{dans } H^r(X', W_n\Omega_{X',\log}^r) .$$

2.4. Formule d'intersection.

Proposition 2.4.1. Soient $f: Y \rightarrow X$ et $f': Y' \rightarrow X$ deux immersions fermées lisses de codimension respectivement r et r' . On pose $T = Y \times_X Y'$. Supposons que Y et Y' se coupent transversalement, on a alors

$$(2.4.2) \quad cl(Y/X) \cdot cl(Y'/X) = cl(T/X) \quad \text{dans } H^{r+r'}(X, W_n\Omega_{X,\log}^{r+r'}) .$$

Démonstration : On a par définition $cl(Y/X) = f_*(1)$, $cl(Y'/X) = f'_*(1)$. La formule de projection 2.2.6 donne

$$(2.4.3) \quad f'_*(1) \cdot f_*(1) = f'_*(1 \cdot f'^*f_*(1)) .$$

Soit f'' (resp. f''') : $T \rightarrow Y$ (resp. : $T \rightarrow Y'$) la première (resp. seconde) projection, Y et Y' se coupant transversalement, (2.3.5) donne

$$(2.4.4) \quad f'^*f_*(1) = f'^*cl(Y/X) = cl(T/Y') = f'''_*(1)$$

d'où

$$(2.4.5) \quad f'_*(1) \cdot f_*(1) = f'_* f''_*(1)$$

d'où, grâce à (2.1.2)

$$(2.4.6) \quad f'_*(1) \cdot f_*(1) = (f' f''_*)_*(1) = \text{cl}(T/X) .$$

Remarque. On prouvera au numéro 4.2 une formule plus générale.

2.5. Classe de cycle et classe de Chern.

Proposition 2.5.1. Soit f une immersion fermée de codimension 1 définie par un idéal inversible J . On a

$$(2.5.2) \quad f_*(1) = \text{cl}(Y/X) = -c_1(J) \quad \text{dans } H^1(X, W_n \Omega_{X, \log}^1) .$$

Démonstration : Elle sera donnée au numéro 3.

2.6. Cas d'un morphisme $P(E) \rightarrow X$.

Soit toujours X un k -schéma lisse. Soit E un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r'+1$. On notera f la projection $Y = P(E) \rightarrow X$, c'est un morphisme propre et $r = -r'$. On a la

Proposition 2.6.1. On a

$$(2.6.2) \quad f_* \circ c_1(\mathcal{O}_Y(1))^{r'} = \text{Id} : W_n \Omega_{X, \log}^* \rightarrow W_n \Omega_{X, \log}^*$$

où $c_1(\mathcal{O}_Y(1))^{r'}$ est le morphisme intervenant dans I (2.1.10).

Démonstration : La question est locale sur X , on peut donc supposer que f admet une section i . On a donc un diagramme commutatif

$$(2.6.3) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ \text{Id} \searrow & & \swarrow f \\ & X & \end{array}$$

on en déduit que $f_* i_* = \text{Id}$ sur $W_n \Omega_{X, \log}^*$.

Puisque i_* est $W_n \Omega_{Y, \log}^*$ -linéaire, il suffit de montrer que

$$(2.6.4) \quad c_1(\mathcal{O}_Y(1))^{r'} = i_*(1) \quad \text{dans } H^{r'}(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^{r'}) .$$

MORPHISME DE GYSIN

Itérant la formule d'intersection (2.4.2) r' fois, on en déduit que la classe de cohomologie de l'intersection de r' hyperplans est le produit r' fois de la classe de cohomologie d'un hyperplan, classe égale à $c_1(\mathcal{O}_Y(1))$. D'où

$$(2.6.5) \quad i_*(1) = c_1(\mathcal{O}_Y(1))^{r'}$$

2.7. Cas d'un morphisme birationnel.

Supposons que le morphisme propre $f: Y \rightarrow X$ soit birationnel, on a alors la

Proposition 2.7.1. $f_* \circ \text{adj} : W_n \Omega_{X, \log}^* \rightarrow Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \rightarrow W_n \Omega_{X, \log}^*$ est égal au morphisme identité.

Démonstration : On remarque simplement que le morphisme composé

$$(2.7.2) \quad f_* f^* : W_n \Omega_{X, \log}^* \rightarrow Rf_* f^* W_n \Omega_{X, \log}^* \rightarrow Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \rightarrow W_n \Omega_{X, \log}^*$$

est l'identité car il coïncide avec l'identité sur un ouvert dense (f étant birationnel). D'où le résultat.

Corollaire 2.7.3. Sous l'hypothèse f birationnel,

$$(2.7.4) \quad f^* : H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) \rightarrow H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*)$$

est injective.

3. Cas d'une immersion fermée.

3.1. Préliminaires d'algèbre homologique.

Soit A^* un complexe borné d'une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs dont la différentielle sera notée d . On pose

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} ZA^j &= \text{Ker}(d : A^j \longrightarrow A^{j+1}) \\ BA^j &= \text{Im}(d : A^{j-1} \longrightarrow A^j) \\ \underline{H}^j(A^\bullet) &= ZA^j/BA^j . \end{aligned}$$

Soit d'autre part G un foncteur additif exact à gauche allant de la catégorie abélienne ci-dessus dans elle-même.

Considérons l'énoncé suivant

$$(3.1.2) \quad \text{Il existe un entier } r \text{ tel que pour tout } j \text{ on ait}$$

$$R^i G(A^j) = R^i G(\underline{H}^j(A^\bullet)) = 0 \text{ pour } i \neq r \text{ et}$$

$$R^i G(ZA^j) = R^i G(BA^j) = 0 \text{ pour } i \text{ suffisamment grand.}$$

Lemme 3.1.3. Supposons (3.1.2) vérifié, alors

$$(3.1.4) \quad R^i G(ZA^j) = R^i G(BA^j) = 0 \text{ pour tout } j \text{ et tout } i \neq r .$$

Démonstration : On a deux suites exactes

$$(3.1.5) \quad 0 \longrightarrow BA^j \longrightarrow ZA^j \longrightarrow \underline{H}^j(A^\bullet) \longrightarrow 0$$

$$(3.1.6) \quad 0 \longrightarrow ZA^j \longrightarrow A^j \xrightarrow{d} BA^{j+1} \longrightarrow 0 .$$

On écrit alors les deux suites exactes longues de cohomologie du foncteur G qui en résultent et l'on déduit (3.1.4) par récurrence ascendante sur i pour $i < r$ et récurrence descendante sur i pour $i > r$.

Posons maintenant

$$(3.1.7) \quad \begin{aligned} Z^j R^i G(A^\bullet) &= \text{Ker}(R^i G(d) : R^i G(A^j) \longrightarrow R^i G(A^{j+1})) \\ B^j R^i G(A^\bullet) &= \text{Im}(R^i G(d) : R^i G(A^{j-1}) \longrightarrow R^i G(A^j)) \\ \underline{H}^j(R^i G(A^\bullet)) &= Z^j R^i G(A^\bullet) / B^j R^i G(A^\bullet) . \end{aligned}$$

L'injection canonique $ZA^j \hookrightarrow A^j$ donne un morphisme canonique

$$(3.1.8) \quad R^i G(ZA^j) \longrightarrow Z^j R^i G(A^\bullet) .$$

Supposons maintenant (3.1.2) vérifié, (3.1.6) induit une suite exacte

$$(3.1.9) \quad 0 \longrightarrow R^r G(ZA^j) \longrightarrow R^r G(A^j) \longrightarrow R^r G(BA^{j+1}) \longrightarrow 0 .$$

Par définition, on a une suite exacte

$$(3.1.10) \quad 0 \longrightarrow Z^j R^r G(A^\bullet) \longrightarrow R^r G(A^j) \longrightarrow B^{j+1} R^r G(A^\bullet) \longrightarrow 0 .$$

On déduit donc de (3.1.8) un morphisme

$$(3.1.11) \quad R^r G(BA^{j+1}) \longrightarrow B^{j+1} R^r G(A^\bullet) .$$

Proposition 3.1.12. Supposons (3.1.2) vérifié, (3.1.8) et (3.1.11) sont alors des isomorphismes fonctoriels pour tout j .

Démonstration : Pour (3.1.8), si $i \neq r$, les deux membres sont nuls. Par définition de (3.1.11), l'assertion relative aux bords est équivalente à celle concernant les cycles. Prouvons cette dernière. Par définition, on a

$$(3.1.13) \quad Z^j R^r G(A^\bullet) = \text{Ker}(R^r G(A^j) \longrightarrow R^r G(BA^{j+1}) \longrightarrow R^r G(A^{j+1})) .$$

Prouvons que $R^r G(BA^{j+1}) \longrightarrow R^r G(A^{j+1})$ est une injection, la proposition 3.1.12 en résultera grâce à la suite exacte (3.1.9).

L'injection $BA^{j+1} \hookrightarrow A^{j+1}$ se factorise en les deux injections $BA^{j+1} \hookrightarrow ZA^{j+1}$ et $ZA^{j+1} \hookrightarrow A^{j+1}$. Or 3.1.3 appliqué aux suites exactes (3.1.5) et (3.1.6) montre que l'on a des injections

$$(3.1.14) \quad R^r G(BA^{j+1}) \hookrightarrow R^r G(ZA^{j+1})$$

$$(3.1.15) \quad R^r G(ZA^{j+1}) \hookrightarrow R^r G(A^{j+1}) ,$$

d'où une injection

$$(3.1.16) \quad R^r G(BA^{j+1}) \hookrightarrow R^r G(A^{j+1}) ,$$

d'où la conclusion. On déduit de (3.1.5) une suite exacte

$$(3.1.17) \quad 0 \longrightarrow R^r G(BA^j) \longrightarrow R^r G(ZA^j) \longrightarrow R^r G(\underline{H}^j(A^\bullet)) \longrightarrow 0 .$$

D'autre part, on a par définition une suite exacte

$$(3.1.18) \quad 0 \longrightarrow B^j R^r G(A^\bullet) \longrightarrow Z^j R^r G(A^\bullet) \longrightarrow \underline{H}^j(R^r G(A^\bullet)) \longrightarrow 0 .$$

Les morphismes (3.1.8) et (3.1.11) induisent donc un morphisme

$$(3.1.19) \quad R^r G(\underline{H}^j(A^\bullet)) \longrightarrow \underline{H}^j(R^r G(A^\bullet))$$

et 3.1.12 implique

Corollaire 3.1.20. Le morphisme (3.1.19) est un isomorphisme fonctoriel pour tout j .

Remarque. Comme le fait remarquer Gabber, on peut aussi obtenir (3.1.19) de la façon suivante. On considère les deux suites spectrales

$$(3.1.21) \quad E_1^{ij} = R^j G(A^i) \longrightarrow R^* G(\underline{s}A^i)$$

$$(3.1.22) \quad E_2^{ij} = R^i G(\underline{H}^j(A^i)) \longrightarrow R^* G(\underline{s}A^i).$$

Les hypothèses (3.1.2) impliquent qu'elles dégénèrent toutes deux en E_2 et fournissent donc des isomorphismes

$$(3.1.23) \quad R^r G(\underline{H}^{j-r}(A^i)) \xrightarrow{\sim} R^j G(\underline{s}A^i) \xleftarrow{\sim} \underline{H}^{j-r}(R^r G(A^i)).$$

3.2. Construction locale du morphisme de Gysin.

L'objet de ce numéro est de donner une construction du morphisme de Gysin attaché à une immersion fermée à l'aide de relèvements locaux. On vérifiera plus tard la coïncidence avec la définition de 1.2.

Nous noterons $\Gamma_Y(-)$ le foncteur "sections locales à support dans Y " (Y désignant un sous-schéma fermé lisse de X de codimension r). Pour tout complexe de \mathbb{Z} -Modules A^i , on pose

$$(3.2.1) \quad \Gamma_Y^j(A^i) = \Gamma_Y(A^j).$$

On a donc un foncteur exact à gauche Γ_Y^i de la catégorie des complexes de \mathbb{Z} -Modules dans elle-même dont les dérivés droits seront notés $H_Y^{i,m}(-)$. Il est clair que l'on a des isomorphismes canoniques

$$(3.2.2) \quad H_Y^{q,m}(A^i) \xrightarrow{\sim} H_Y^m(A^q).$$

On va définir un morphisme de complexes de \mathbb{Z} -Modules

$$(3.2.3) \quad f_* : W_n \Omega_Y^i(-r) \longrightarrow H_Y^{i-r}(W_n \Omega_X^i).$$

On commencera par définir un morphisme de modules gradués

$$(3.2.4) \quad f_* : W_n \Omega_Y^i(-r) \longrightarrow H_Y^{i-r}(W_n \Omega_X^i).$$

Supposons tout d'abord que f se relève en une immersion fermée $f' : Y' \hookrightarrow X'$ de W_n -schémas lisses.

On dispose dans cette situation, du morphisme de Gysin de f' ([2], VI (3.1.1))

$$(3.2.5) \quad f'_* : \Omega_{Y'/W_n}^r(-r) \longrightarrow \mathbb{H}_{Y'}^r(\Omega_{X'/W_n}^r).$$

Ce morphisme induit en cohomologie un morphisme

$$(3.2.6) \quad \mathbb{H}(f'_*) : \mathbb{H}^{*-r}(\Omega_{Y'/W_n}^*) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbb{H}_{Y'}^r(\Omega_{X'/W_n}^r)).$$

On va maintenant appliquer le corollaire 3.1.20 au second membre de (3.2.6). Il faut pour ce faire, vérifier que l'on a bien (3.1.2). Ceci pourrait être vu en utilisant les liens existant entre $\mathbb{H}^*(\Omega_{X'/W_n}^*)$ et $W_n \Omega_X^*$ mais l'on va prouver un résultat plus fort.

On remarque que l'on peut considérer $Z\Omega_{X'/W_n}^j$, $B\Omega_{X'/W_n}^j$, $\mathbb{H}^j(\Omega_{X'/W_n}^*)$ comme des modules sur l'anneau $\mathbb{H}^0(\Omega_{X'/W_n}^*) (\simeq W_n \mathcal{O}_{X'})$.

Considérons alors la filtration p -adique sur les trois modules précédents et posons $gr^i = Fil^i / Fil^{i+1}$, il est clair que chacun des trois modules $gr^i Z\Omega_{X'/W_n}^j$, $gr^i B\Omega_{X'/W_n}^j$, $gr^i \mathbb{H}^j(\Omega_{X'/W_n}^*)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X^{(p^n)}$ -Module. On a alors la

Proposition 3.2.7. $gr^i Z\Omega_{X'/W_n}^j$, $gr^i B\Omega_{X'/W_n}^j$, $gr^i \mathbb{H}^j(\Omega_{X'/W_n}^*)$ sont des $\mathcal{O}_X^{(p^n)}$ -Modules localement libres de type fini.

Démonstration : La méthode est standard (cf. [22, 0.2.2.8] et [26]) : chacun des trois faisceaux étant compatible à la localisation étale, on peut supposer que $X' = \text{Spec}(W_n[t_1, \dots, t_a])$ avec $a = \dim(X)$.

Soit alors \bar{X}' le schéma déduit de X' par extension des scalaires à une clôture algébrique de k . Les images inverses des trois faisceaux sur \bar{X}' s'identifient à $gr^i Z\Omega_{X'/W_n}^j$, $gr^i B\Omega_{X'/W_n}^j$, $gr^i \mathbb{H}^j(\Omega_{X'/W_n}^*)$ et sont localement libres sur un ouvert non vide de \bar{X}' car cohérents.

Comme ces trois faisceaux sont invariants par translation, des translations par des k -points de \bar{X}' montrent qu'ils sont partout localement libres de type fini.

Corollaire 3.2.8. On a

$$(3.2.9) \quad H_Y^i(Z\Omega_X^j/W_n) = H_Y^i(B\Omega_X^j/W_n) = H_Y^i(H^j(\Omega_X^j/W_n)) = 0$$

pour tout $i \neq r$.

Démonstration : On filtre les trois modules par la filtration p -adique. Comme les gradués correspondants sont localement libres, on en déduit le résultat voulu, Y étant de profondeur r .

On a donc un isomorphisme canonique

$$(3.2.10) \quad H^*(H_Y^r(\Omega_X^r/W_n)) \xrightarrow{\sim} H_Y^r(H^*(\Omega_X^r/W_n)),$$

et (3.2.6) s'interprète donc comme un morphisme

$$(3.2.11) \quad H^*(f_*) : H^{*-r}(\Omega_Y^r/W_n) \longrightarrow H_Y^r(H^*(\Omega_X^r/W_n)).$$

Comme on a un isomorphisme ([20], III (1.5.2))

$$(3.2.12) \quad H^*(\Omega_X^r/W_n) \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_X^*,$$

on déduit de (3.2.11) un morphisme que l'on notera f_*

$$(3.2.13) \quad f_* : W_n \Omega_Y^{*-r} \longrightarrow H_Y^r(W_n \Omega_X^*).$$

Pour terminer la construction de (3.2.4), on remarque que la construction précédente est indépendante du relèvement f' de f choisi (on emploie le même argument que pour prouver que le premier membre de (3.2.12) est indépendant du relèvement X' de X choisi). D'autre part, si f ne se relève pas en une immersion fermée f' , on peut toujours trouver un recouvrement de X par des ouverts U_i tels que $f|_{U_i}$ se relève en une immersion fermée de W_n -schémas comme ci-dessus. On vérifie alors que les divers morphismes $f_*|_{U_i}$ se recollent en un morphisme f_* comme annoncé.

3.3. Description du morphisme de Gysin.

Rappelons tout d'abord la description du morphisme (3.2.5).

Lemme 3.3.1 ([2], VI, Prop. 3.1.3). Supposons que Y' soit défini par une suite régulière t'_1, \dots, t'_r de sections de $\mathcal{O}_{X'}$. Alors l'image d'une section α de $\Omega_{Y'}^{j-r}/W_n$ par le morphisme (3.2.5) est la section

MORPHISME DE GYSIN

$$\alpha \wedge dt'_1/t'_1 \wedge \dots \wedge dt'_r/t'_r$$

de $H_Y^r(\Omega_{X'/W_n}^j)$.

Rappelons que dans cet énoncé, on a identifié $H_Y^r(\Omega_{X'/W_n}^j)$ au module des parties polaires de Ω_{X'/W_n}^j en les t'_1, \dots, t'_r i.e. le module

$$\Omega_{X'/W_n}^j [t_1'^{-1}, \dots, t_r'^{-1}] / \sum_i \Omega_{X'/W_n}^j [t_1'^{-1}, \dots, \hat{t}_i'^{-1}, \dots, t_r'^{-1}].$$

On va donner une description analogue pour le morphisme (3.2.13).

Calcul de $H_Y^r(W_n \Omega_X^j)$.

Pour toute suite i_0, \dots, i_m d'entiers appartenant à la suite $1, \dots, r$ on notera $j_{i_0 \dots i_m}$ le morphisme d'immersion de l'ouvert $U_{i_0 \dots i_m}$ d'inversibilité de t_{i_0}, \dots, t_{i_m} dans X .

Notons immédiatement que dire que t_j est inversible est équivalent à dire que t_j est inversible. Il y a donc identité entre U_1, \dots, r et $X-Y$.

On posera

$$(3.3.2) \quad C_{t_1 \dots t_r}^m(W_n \Omega_X^j) = \bigoplus_{i_0 \dots i_m} \langle j_{i_0 \dots i_m} \rangle^* (j_{i_0 \dots i_m})^*(W_n \Omega_X^j).$$

On a de manière naturelle un complexe

$$(3.3.3) \quad 0 \longrightarrow W_n \Omega_X^j \longrightarrow C_{t_1, \dots, t_r}^m(W_n \Omega_X^j) \longrightarrow 0$$

avec $W_n \Omega_X^j$ placé en degré 0. Ce complexe est isomorphe dans $D(\mathbb{Z}\text{-Mod})$ à $R_{-Y}^r(W_n \Omega_X^j)$.

D'autre part, si l'on note $\text{Kosz}^{\cdot(m)}(W_n \Omega_X^j)$ le complexe de Koszul de $W_n \Omega_X^j$ relativement à la suite t_1^m, \dots, t_r^m placé entre les degrés 0 et r (i.e. le complexe $\text{Kosz}^{\cdot(m)}(t_1) \otimes_{W_n \mathcal{O}_X} \dots \otimes_{W_n \mathcal{O}_X} \text{Kosz}^{\cdot(m)}(t_r) \otimes_{W_n \mathcal{O}_X} W_n \Omega_X^j$ où $\text{Kosz}^{\cdot(m)}(t_i)$ désigne le complexe de Koszul de l'anneau $W_n \mathcal{O}_X$ relativement à l'élément t_i^m de $W_n \mathcal{O}_X$), le complexe (3.3.4) est isomorphe au complexe $\varinjlim_m \text{Kosz}^{\cdot(m)}(W_n \Omega_X^j)$

où pour $m' < m$ le morphisme de transition $\text{Kosz} \cdot (m') (W_n \Omega_X^j) \rightarrow \text{Kosz} \cdot (m) (W_n \Omega_X^j)$ est donné en degré m et sur la composante d'indice i_1, \dots, i_{r-m} par la multiplication par $(t_{j_1} \dots t_{j_m})^{m'-m}$ où j_1, \dots, j_m est la suite complémentaire de la suite i_1, \dots, i_{r-m} .

On en déduit en particulier un isomorphisme

$$(3.3.4) \quad H_Y^r(W_n \Omega_X^j) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_m W_n \Omega_X^j / I^{(m)} W_n \Omega_X^j$$

où $I^{(m)}$ est l'idéal de $W_n \mathcal{O}_X$ engendré par t_1^m, \dots, t_r^m .

Notant $1/t_1^m \dots t_r^m$ l'image de la section unité de $W_n \mathcal{O}_X / I^{(m)}$ par le morphisme canonique $W_n \mathcal{O}_X / I^{(m)} \rightarrow \varinjlim_m W_n \mathcal{O}_X / I^{(m)}$, on voit que

(3.3.5) s'écrit comme un isomorphisme

$$(3.3.6) \quad H_Y^r(W_n \Omega_X^j) \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_X^j [t_1^{-1}, \dots, t_r^{-1}] / \varinjlim_i W_n \Omega_X^j [t_1^{-1}, \dots, \hat{t}_i^{-1}, \dots, t_r^{-1}].$$

On déduit que $\omega \wedge dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r$ est bien une section de $H_Y^r(W_n \Omega_X^j)$.

Tirons un corollaire de la description (3.3.6).

Corollaire 3.3.7. On a un isomorphisme canonique

$$(3.3.8) \quad H_Y^r(W_n \mathcal{O}_X) \otimes_{W_n \mathcal{O}_X} W_n \Omega_X^j \xrightarrow{\sim} H_Y^r(W_n \Omega_X^j).$$

Proposition 3.3.9. Supposons que Y soit défini par une suite régulière t_1, \dots, t_r de sections de \mathcal{O}_X . Alors l'image d'une section ω de $W_n \Omega_Y^{j-r}$ par le morphisme (3.2.13) est la section

$$(3.3.10) \quad \omega \wedge dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r$$

de $H_Y^r(W_n \Omega_X^j)$.

Démonstration : La question est locale. On peut donc supposer qu'il existe un morphisme g étale de X vers A_K^a tel que Y soit le produit cartésien $A_K^b \times_{A_K^a} X$. Notons h la restriction de g à Y , c'est un morphisme étale, on a donc $h^* W_n \Omega_Y \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_{A_K^b}$. La section ω s'obtient donc comme combinaison $W_n \mathcal{O}_X$ -linéaire de sections ω' de $\mathcal{O}_{A_K^b}$. Il suffit donc de prouver la proposition 3.3.9 dans la situation $X = A_K^a$, $Y = A_K^b$. On a alors $X' = \text{Spec}(W_n[t_1, \dots, t_a])$ et Y' donné

MORPHISME DE GYSIN

par $t'_1 = \dots = t'_r = 0$. De plus, le morphisme de Frobenius de X est relevé par le morphisme F de \mathcal{O}_X , défini par $F(t'_i) = t'^i_P$. On a alors un morphisme canonique

$$(3.3.11) \quad \varphi : \Omega_{X'}^i / W_n \longrightarrow W_n \Omega_X^i$$

induit par le morphisme

$$(3.3.12) \quad \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow W_n \mathcal{O}_X$$

envoyant t'_i sur $\underline{t}_i = (t'_i \bmod p, 0, 0, \dots)$

φ induit un morphisme

$$(3.3.13) \quad H_Y^{i,r}(\Omega_{X'}^i / W_n) \longrightarrow H_Y^{i,r}(W_n \Omega_X^i)$$

qui admet donc la description suivante : à $\sum_i \mu_i \cdot (1/t')^i$, on associe $\sum_i \varphi(\mu_i) \cdot (1/\underline{t})^i$ où l'on a abrégé $1/t_1^{i_1} \dots 1/t_r^{i_r}$ en $(1/t')^i$, de même avec les \underline{t} .

Appliquant $H^*(-)$ au morphisme (3.3.13), on obtient un morphisme

$$(3.3.14) \quad H^*(H_Y^{i,r}(\Omega_{X'}^i / W_n)) \longrightarrow H^*(H_Y^{i,r}(W_n \Omega_X^i))$$

qui n'est autre que le morphisme obtenu en appliquant $H_Y^{i,r}(-)$ au morphisme

$$(3.3.15) \quad H^*((3.3.11)) : H^*(\Omega_{X'}^i / W_n) \longrightarrow H^*(W_n \Omega_X^i).$$

Ce dernier morphisme est un isomorphisme, en effet, c'est le composé de l'isomorphisme (3.2.12) et de l'isomorphisme de Cartier

$$(3.3.16) \quad W_n \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} H^*(W_n \Omega_X^i).$$

On peut maintenant, suivant les constructions pas à pas, donner la description de (3.2.13) : soit $\omega \in W_n \Omega_Y^{j-r} \xrightarrow{\sim} H^{j-r}(\Omega_Y^j / W_n)$, on représente ω par un cycle α de Ω_Y^{j-r} / W_n . L'image de α par (3.2.5) est $\alpha \, dt'_1/t'_1 \dots dt'_r/t'_r$, c'est un cycle, qui définit donc une classe de cohomologie dans $H^*(H_Y^{i,r}(\Omega_{X'}^i / W_n))$ et cette classe n'est autre (d'après la description de (3.3.13)) que la

classe de $\varphi(\alpha) \wedge dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r$ soit $\omega \wedge dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r$.

D'où la proposition 3.3.9.

Comme $d(dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r) = 0$, on en déduit que (3.2.4) fournit bien un morphisme (3.2.3).

Corollaire 3.3.17. Les deux diagrammes suivants sont commutatifs

$$(3.3.18) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_Y^{*-r} & \longrightarrow & H_Y^{*r}(W_n \Omega_X^*) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ W_{n-1} \Omega_Y^{*-r} & \longrightarrow & H_Y^{*r}(W_{n-1} \Omega_X^*) \end{array}$$

$$(3.3.19) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_Y^{*-r} & \longrightarrow & H_Y^{*r}(W_n \Omega_X^*) \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ W_{n+1} \Omega_Y^{*-r} & \longrightarrow & H_Y^{*r}(W_{n+1} \Omega_X^*) \end{array}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la proposition 3.3.3 en remarquant que $F(dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r) = dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r$.

Remarque. On peut se demander ce qu'il advient lorsque l'on applique le foncteur $H^*(-)$ au morphisme (3.2.3) et que l'on utilise l'opération de Cartier (3.3.16). D'après ([21, I.3.9]), la filtration canonique (loc. cit.) de $W_n \Omega_X^*$ a un gradué extension de \mathcal{O}_X -Modules localement libres. Par suite, il en est de même (grâce à l'isomorphisme (3.3.16)) de $H^*(W_n \Omega_X^*)$. D'où

$$(3.3.20) \quad H_Y^i(W_n \Omega_X^*) = H_Y^i(H^*(W_n \Omega_X^*)) = 0 \text{ pour } i \neq r.$$

Comme $ZW_n \Omega_X^*$ et $BW_n \Omega_X^*$ sont des faisceaux quasi-cohérents, on en déduit que

$$(3.3.21) \quad H_Y^i(ZW_n \Omega_X^*) = H_Y^i(BW_n \Omega_X^*) = 0 \text{ pour } i \text{ suffisamment grand.}$$

On dispose donc grâce à 3.1.19 d'un isomorphisme canonique

$$(3.3.22) \quad H_Y^r(H^j(W_n \Omega_X^*)) \xrightarrow{\sim} H^j(H_Y^r(W_n \Omega_X^*)),$$

soit encore, utilisant (3.3.16) un isomorphisme

$$(3.3.23) \quad H_Y^r(W_n \Omega_X^j) \xrightarrow{\sim} H^j(H_Y^r(W_n \Omega_X^*)).$$

MORPHISME DE GYSIN

Utilisant la description donnée par la proposition 3.3.3, on en déduit que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (3.3.24) & W_n \Omega_Y^{*-r} & \xrightarrow{(3.2.4)} H_Y^r(W_n \Omega_X^*) \\
 & \downarrow \wr & \downarrow \wr (3.3.23) \\
 (3.3.16) & H^{*-r}(W_n \Omega_Y^*) & \xrightarrow{H^*((3.2.4))} H^*(H_Y^r(W_n \Omega_X^*))
 \end{array}$$

résultant du fait que $F(dt_1/t_1 \dots dt_r/t_r) = dt_1/t_1 \dots dt_r/t_r$.

3.4. Comparaison avec la définition 1.2.6.

Lorsque f est une immersion fermée, le morphisme f_* de 1.2.6 fournit par adjonction un morphisme

$$(3.4.1) \quad W_n \Omega_Y^* \longrightarrow R\Gamma_Y(W_n \Omega_X^*)(r)[r] .$$

Compte tenu de (3.3.20), on a un isomorphisme

$$(3.4.2) \quad R\Gamma_Y(W_n \Omega_X^*)(r)[r] \xrightarrow{\sim} H_Y^r(W_n \Omega_X^*)(r) .$$

(3.4.1) s'interprète donc comme un morphisme

$$(3.4.3) \quad W_n \Omega_Y^* \longrightarrow H_Y^r(W_n \Omega_X^*)(r)$$

dans la catégorie des $W_n \Omega_X^*$ -Modules différentiels gradués. On va le comparer avec le morphisme (3.2.3). Il suffit, vu la $W_n \Omega_X^*$ -linéarité de comparer l'image de $1 \in H^0(Y, W_n \Theta_Y)$ par $H^0(X, (3.4.3))$ et par $H^0(X, (3.2.3))$ dans $H_Y^r(X, W_n \Omega_X^r)$.

On va pour ce faire passer par l'intermédiaire de la cohomologie cristalline. Il résulte de la comparaison entre le théorème de dualité d'Ekedahl et le théorème de dualité cristallin (cf. [10]) que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (3.4.4) & Ru_{X/W_n^*} (f_* \text{cris}^{\Theta_Y/W_n}) & \longrightarrow R\Gamma_Y(Ru_{X/W_n^*} \Theta_{X/W_n})[2r] \\
 & \downarrow \wr & \downarrow \wr \\
 & W_n \Omega_Y^* & \xrightarrow{(3.4.1)} R\Gamma_Y(W_n \Omega_X^*)(r)[r] .
 \end{array}$$

Les morphismes verticaux sont induits par le théorème de comparaison (Thm. 1.4, II de [21]) et le morphisme horizontal supérieur est la

projection par Ru_{X/W_n^*} du morphisme de Gysin (3.3.8) du chapitre VI de [1].

D'autre part, d'après le théorème 3.3.5 du chapitre VI de [2], le diagramme suivant est commutatif

$$(3.4.5) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{Y'}^{\bullet}/W_n & \longrightarrow & R\Gamma_{Y'}(\Omega_{X'}^{\bullet}/W_n)(r)[r] \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ru_{X/W_n^*}(f^*cris^{\oplus} \Omega_{Y/W_n}) & \longrightarrow & R\Gamma_{Y'}(Ru_{X/W_n^*} \Omega_{X/W_n}^{\oplus})[2r] . \end{array}$$

Le morphisme horizontal inférieur étant celui figurant dans (3.4.4), le morphisme horizontal supérieur est le morphisme (3.2.5) réinterprété grâce à l'isomorphisme canonique

$$(3.4.6) \quad R\Gamma_{Y'}(\Omega_{X'}^{\bullet}/W_n)(r)[r] \longrightarrow H_{Y'}^{\bullet,r}(\Omega_{X'}^{\bullet}/W_n)(r)$$

résultant de ce que $H_{Y'}^j(\Omega_{X'}^{\bullet}/W_n) = 0$ sauf pour $j=r$.

Les morphismes verticaux sont les morphismes canoniques.

Mettant (3.4.4) et (3.4.5) ensemble, puis prenant la cohomologie locale on obtient un diagramme commutatif

$$(3.4.7) \quad \begin{array}{ccc} H^*(\Omega_{Y'}^{\bullet}/W_n) & \longrightarrow & H^*(H_{Y'}^{\bullet,r}(\Omega_{X'}^{\bullet}/W_n)(r)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(W_n \Omega_{Y'}^{\bullet}) & \longrightarrow & H^*(H_{Y'}^{\bullet,r}(W_n \Omega_{X'}^{\bullet})(r)) . \end{array}$$

Diagramme que l'on réécrit (par définition de (3.2.3))

$$(3.4.8) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_{Y'}^{\bullet} & \xrightarrow{(3.2.3)} & H_{Y'}^{\bullet,r}(W_n \Omega_{X'}^{\bullet}(r)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(W_n \Omega_{Y'}^{\bullet}) & \longrightarrow & H^*(H_{Y'}^{\bullet,r}(W_n \Omega_{X'}^{\bullet}(r))) \end{array}$$

Ce qui joint au diagramme commutatif (3.3.24) montre que $H^*(X, (3.4.3))$ et $H^*(X, (3.2.3))$ coïncide. D'où le résultat (en faisant $*=0$).

3.5. Cas de la cohomologie logarithmique.

Le morphisme (3.2.4) induit un morphisme de pro-Modules gradués compatibles (d'après le corollaire 3.3.17) à F et V

$$(3.5.1) \quad W.\Omega_Y^* \longrightarrow \underline{H}_Y^{*r}(W.\Omega_X^*)(r)$$

qui sera encore noté f_* . On a un diagramme commutatif de pro-objets

$$(3.5.2) \quad \begin{array}{ccc} W.\Omega_Y^* & \longrightarrow & \underline{H}_Y^{*r}(W.\Omega_X^*)(r) \\ \downarrow 1-F & & \downarrow 1-F \\ W.\Omega_Y^* & \longrightarrow & \underline{H}_Y^{*r}(W.\Omega_X^*)(r) . \end{array}$$

D'autre part, la suite exacte (1.3.2) de I induit une suite exacte

$$(3.5.3) \quad 0 \longrightarrow \underline{H}_Y^r(W.\Omega_{X,\log}^*) \longrightarrow \underline{H}_Y^r(W.\Omega_X^*) \xrightarrow{1-F} \underline{H}_Y^r(W.\Omega_X^*) \longrightarrow \underline{H}_Y^{r+1}(W.\Omega_{X,\log}^*) \longrightarrow 0$$

et $\underline{H}_Y^i(W.\Omega_{X,\log}^*) = 0$ pour tout $i \neq r, r+1$.

Remarque. Il est en général faux que $\underline{H}_Y^{r+1}(W.\Omega_{X,\log}^*) = 0$ sauf si Y est réduit à un point fermé. Le lecteur trouvera des compléments intéressants sur ces questions dans [15].

Prenant le morphisme induit sur le noyau des flèches verticales de (3.5.2), on obtient un morphisme

$$(3.5.4) \quad f_* : W.\Omega_{Y,\log}^* \longrightarrow \underline{H}_Y^r(W.\Omega_{X,\log}^*)(r) .$$

Tensorisant ce morphisme par \mathbb{Z}/p^n , on obtient (compte tenu de l'isomorphisme (1.3.6) de I) un morphisme

$$(3.5.5) \quad f_* : W_n \Omega_{Y,\log}^* \longrightarrow \underline{H}_Y^r(W_n \Omega_{X,\log}^*)(r) .$$

Proposition 3.5.6. Supposons que Y soit défini dans X par une suite régulière t_1, \dots, t_r de sections de \mathcal{O}_X . Alors l'image d'une section α de $W_n \Omega_{Y,\log}^{j-r}$ par le morphisme (3.5.5) est la section

$$(3.5.7) \quad \alpha \wedge dt_1/t_1 \wedge \dots \wedge dt_r/t_r$$

de $\underline{H}_Y^r(W_n \Omega_{X,\log}^j)$.

Démonstration : La proposition résulte immédiatement de la construction de (3.5.5) et de 3.3.9.

(3.5.5) est donc un morphisme de $W_n \Omega_{X, \log}^*$ -Modules gradués.

Théorème 3.5.8 (3.5.5) est un isomorphisme.

Démonstration : Commençons par prouver le théorème lorsque $n = 1$.

La question étant locale, on peut trouver des sections t_1, \dots, t_N de \mathcal{O}_X telles que dt_1, \dots, dt_N forment une base de Ω_X^1 et que Y soit donné par les équations $t_1 = \dots = t_r = 0$. Prouvons tout d'abord l'injectivité de (3.5.5). Par construction, il suffit de prouver l'injectivité de (3.2.13) (lorsque $n = 1$). Soit donc $\omega \in \Omega_Y^{j-r}$, son image par (3.2.13) est la classe de la section $\omega \wedge dt_1/t_1 \dots dt_r/t_r$ dans $H_Y^r(\Omega_X^j) \simeq \Omega_X^j[t_1^{-1}, \dots, t_r^{-1}] / \sum \Omega_X^j[t_1^{-1}, \dots, \hat{t}_i^{-1}, \dots, t_r^{-1}]$. Dire que cette classe est nulle, c'est donc dire que l'on a une égalité

$$(3.5.9) \quad \omega \wedge dt_1/t_1 \dots dt_r/t_r = \sum_j \alpha_j / t_1 \dots \hat{t}_j \dots t_r$$

dans $\Omega_X^j[t_1^{-1}, \dots, t_r^{-1}]$. On écrit alors

$$(3.5.10) \quad \omega = \sum_{(i_1, \dots, i_{j-r})} \omega_{i_1 \dots i_{j-r}} dt_{i_1} \dots dt_{i_{j-r}}$$

(la sommation étant prise sur tous les multi-indices (i_1, \dots, i_{j-r}) tels que $r < i_1 < \dots < i_{j-r}$ et $\omega_{i_1 \dots i_{j-r}} \in \mathcal{O}_Y$).

L'égalité (3.5.9) implique alors une égalité du type

$$(3.5.11) \quad \omega_{i_1 \dots i_{j-r}} = \sum_{\gamma=1}^r t_\gamma \alpha'_\gamma \quad \text{pour tout } (i_1, \dots, i_{j-r})$$

impossible si $\omega_{i_1 \dots i_{j-r}} \neq 0$ puisque Y est donné par $t_1 = \dots = t_r = 0$. Passons maintenant à la surjectivité. On pose

$$(3.5.12) \quad \text{Fil}^i_{H_Y^r(\Omega_X^j)} = \{x \in H_Y^r(\Omega_X^j) \text{ tel que } x \text{ admette un représentant } x' \text{ dans } \Omega_X^j[t_1^{-1}, \dots, t_r^{-1}] \text{ de la forme } x'' / (t_1 \dots t_r)^{p_i} \text{ avec } x'' \in \Omega_X^j\}.$$

On définit ainsi une filtration croissante dont les termes sont nuls pour i négatif ou nul. On notera $\text{Fil}^j_{H_Y^r(\Omega_X^j)}$ la filtration

MORPHISME DE GYSIN

induite (via l'inclusion canonique $H_Y^r(Z\Omega_X^j) \hookrightarrow H_Y^r(\Omega_X^j)$). On remarquera d'ailleurs que 3.1.12 fournit (grâce à (3.3.6)) un isomorphisme $H_Y^r(Z\Omega_X^j) \simeq Z\Omega_X^j[t_1^{-P}, \dots, t_r^{-P}] / \sum Z\Omega_X^j[t_1^{-P}, \dots, \hat{t}_i^{-P}, \dots, t_r^{-P}]$ et que

$$(3.5.13) \quad C(x''/(t_1 \dots t_r)^{P_i}) = C(x''/(t_1 \dots t_r)^i) \quad \text{pour } x'' \in Z\Omega_X^j$$

C est donc de manière évidente un morphisme filtré qui passe au gradué $\text{gr } H_Y^r(Z\Omega_X^j) \rightarrow \text{gr } H_Y^r(\Omega_X^j)$. (3.5.13) montre alors que $\text{gr}(C) = 0$ sauf si $i = 1$, ce qui implique que l'image de $H_Y^r(\Omega_X^j, \log)$ dans $H_Y^r(Z\Omega_X^j)$ est constitué d'éléments admettant un représentant dans $Z\Omega_X^j[t_1^{-1}, \dots, t_r^{-1}]$ de la forme $x''/(t_1 \dots t_r)^P$. L'invariance par C d'un tel élément conduit donc à une égalité de la forme

$$(3.5.14) \quad (C(x'')(t_1 \dots t_r)^{P-1-x''}) / (t_1 \dots t_r)^P = \sum_i \beta_i / (t_1 \dots \hat{t}_i \dots t_r)^P,$$

soit encore

$$(3.5.15) \quad C(x'')(t_1 \dots t_r)^{P-1-x''} = \sum_{i=1}^r \beta_i t_i^P.$$

Nous noterons I l'ensemble des j-uples (i_1, \dots, i_j) d'entiers tels que $i_\chi \in [1, N]$ pour tout $\chi \in [1, j]$ et $i_1 < \dots < i_j$. D'autre part, on utilisera l'abréviation suivante : $dt_{\underline{i}} = dt_{i_1} \dots dt_{i_j}$ pour $\underline{i} \in I$ et $\underline{i} = (i_1, \dots, i_j)$; $d\log t_{\underline{i}} = d\log t_{i_1} \dots d\log t_{i_j}$ pour ce même \underline{i} . L'égalité (3.5.15) implique une égalité du type

$$x'' = t_1^{P-1} x''' + t_2^P \beta_2 + \dots + t_r^P \beta_r.$$

Comme $dx'' = 0$, on en déduit que

$$(3.5.16) \quad t_1^{P-2} dt_1 \cdot x''' = t_1^{P-1} dx''' + \sum_{j \geq 2} t_j^P \cdot d\beta_j.$$

Si l'on écrit $x''' = \sum_{\underline{i} \in I} a_{\underline{i}} dt_{\underline{i}}$ avec $a_{\underline{i}} \in \mathcal{O}_X$ pour tout $\underline{i} \in I$, l'égalité (3.5.16) montre que $\sum_{\underline{i} \in I | i_1 \neq 1} a_{\underline{i}} dt_{\underline{i}}$ est de la forme

$$t_1^{\delta_1} + \sum_{j \geq 2} t_j^{\delta_j}.$$

Ecrivant $x'' = \sum_{\underline{i} \in I} b_{\underline{i}} dt_{\underline{i}}$ avec $b_{\underline{i}} \in \mathcal{O}_X$ pour tout $\underline{i} \in I$, on en déduit que $\sum_{\underline{i} \in I | i_1 \neq 1} b_{\underline{i}} dt_{\underline{i}}$ est de la forme $t_1^{\gamma_1} + \dots + t_r^{\gamma_r}$.

Comme on peut échanger le rôle joué par t_1 par t_2, \dots, t_r , on voit que $\sum_{i \in I - \{1, \dots, r\}} b_i dt_i$ est de la forme $t_1^{p_1 \cdot \epsilon_1 + \dots + t_r^{p_r \cdot \epsilon_r}}$.

L'image d'un élément x de $H_Y^r(\Omega_{X, \log}^j)$ par la suite d'inclusions $H_Y^r(\Omega_{X, \log}^j) \hookrightarrow H_Y^r(Z\Omega_X^j) \hookrightarrow H_Y^r(\Omega_X^j)$ admet donc un représentant de la forme $x''' d\log t_1 \wedge \dots \wedge d\log t_r + (t_1^{p_1 x'''} + \dots + t_r^{p_r x'''}) / (t_1 \dots t_r)^p$, soit encore un représentant de la forme $z \cdot dt_1 / t_1 \dots dt_r / t_r$. On écrit alors

$$z = \sum_{\underline{i}} c_{\underline{i}} dt_{i_1} \dots dt_{i_{j-r}} \text{ avec } \underline{i} = (i_1, \dots, i_{j-r}) \text{ tel que}$$

$i_{\lambda} \neq 1, \dots, r$ pour tout $\lambda \in [1, j-r]$. Comme par définition on identifie deux représentants $z \cdot dt_1 / t_1 \dots dt_r / t_r$ et $z' \cdot dt_1 / t_1 \dots dt_r / t_r$

lorsque $z - z' = \sum_{i=1}^r t_i \cdot \mu_i$, on en déduit que l'ensemble des classes d'éléments de la forme $z \cdot dt_1 / t_1 \dots dt_r / t_r$ est $\Omega_Y^{j-r} \cdot dt_1 / t_1 \dots dt_r / t_r$ (puisque l'on peut supposer que $Y \hookrightarrow X$ se scinde et que donc

$$z = z' + \sum_{i=1}^r t_i z_i + \sum_{i=1}^r z'_i dt_i \text{ avec } z' \in \Omega_Y^{j-r}.$$

L'invariance par C^{-1} implique alors que $z \in \Omega_{Y, \log}^{j-r}$. D'où le théorème lorsque $n=1$. Pour prouver le théorème pour tout n , on va utiliser la filtration p -adique de $W_n \Omega_{Y, \log}^*$ dont le gradué est isomorphe à $\Omega_{Y, \log}^*$. Il faut vérifier que le foncteur $H_Y^r(-)$ est exact sur la suite exacte

$$(3.5.17) \quad 0 \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^* \xrightarrow{p} W_n \Omega_{X, \log}^* \longrightarrow \Omega_{X, \log}^* \longrightarrow 0$$

i.e. vérifier que $H_Y^r(W_n \Omega_{X, \log}^*) \longrightarrow H_Y^r(\Omega_{X, \log}^*)$ est surjectif. Ce qui résulte trivialement de la surjectivité de (3.5.5) pour $n=1$.

On prendra garde au fait que la non-nullité de $H_Y^{r+1}(W_n \Omega_{X, \log}^*)$ montre que l'on n'a pas d'isomorphisme entre $H_Y^r(W_n \Omega_{X, \log}^*)$ et $R_{-Y}^r(W_n \Omega_{X, \log}^*)[-r]$. Par suite, lorsque f est une immersion fermée, l'application induite par la définition (1.2.9)

$$(3.5.18) \quad f_* : W_n \Omega_{Y, \log}^* \longrightarrow R_{-Y}^r(W_n \Omega_{X, \log}^*(r)) [r]$$

n'est pas un isomorphisme.

Néanmoins, la nullité de $H_Y^i(W_n \Omega_{X, \log}^*)$ pour $i < r$ montre que l'on a un isomorphisme

$$(3.5.19) \quad H_Y^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) \simeq H^0(X, H_Y^r(W_n \Omega_{X, \log}^*)).$$

MORPHISME DE GYSIN

L'image de $1 \in H^0(Y, \mathbb{Z}/p^n)$ dans $H_Y^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ (ou dans $H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$) par $H^0(X, (3.5.5))$ sera notée $cl(Y/X)$ et appelée classe de cohomologie de Y.

L'image de cette classe par le morphisme canonique $H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r) \rightarrow H^r(X, W_n \Omega_X^r)$ coïncide avec la classe précédemment définie avant le corollaire 2.2.6. C'est une conséquence de la construction de (3.5.5).

Prouvons maintenant 2.3.2. On remarque qu'il suffit de prouver (par factorisation de f_* et f'_*) la commutativité du diagramme

$$(3.5.20) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_{Y, \log}^{*-r} & \xrightarrow{f_*} & H_Y^r(W_n \Omega_{X, \log}^*) \\ \downarrow g^* & & \downarrow h^* \\ g_* W_n \Omega_{Y', \log}^{*-r} & \xrightarrow{f'_*} & h_* H_{Y'}^r(W_n \Omega_{X'}^*, \log) \end{array} \quad r = \text{codim}(Y)$$

On utilise pour ce faire la description donnée par la proposition 3.5.6 en remarquant que si t_1, \dots, t_r est une suite régulière de sections de \mathcal{O}_X définissant localement Y dans X, alors $h^* t_1, \dots, h^* t_r$ est une suite régulière de sections de $\mathcal{O}_{X'}$ définissant localement Y' dans X'. La commutativité est alors claire.

Prouvons maintenant 2.5.1. On va effectuer un calcul à la Čech des deux membres de (2.5.2). Soit donc $u = (U_j)_{j \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines U_j tels que $U_j \cap Y$ soit défini par une section $t_{(j)}$ de \mathcal{O}_X .

Par définition, $t_{(j)}/t_{(i)}$ est un cocycle représentant la classe de J dans $\text{Pic}(X)$. $c_1(J)$ est donc représenté par la classe du 1-cocycle $d\log(t_{(i)}/t_{(j)})$ ($i < j$) dans $H^1(X, W_n \Omega_{X, \log}^1) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(u, W_n \Omega_{X, \log}^1)$. D'autre part, $f_*(1)$ est représenté par l'image par la différentielle δ du complexe de Čech de $W_n \Omega_{X, \log}^1$ du 0-cocycle (d'après 3.5.6) $d\log(t_{(i)})$, soit $d\log(t_{(i)}) - d\log(t_{(j)}) = -d\log(t_{(j)}/t_{(i)})$ avec $i > j$. D'où (2.5.2).

4. Classe de cohomologie d'un cycle singulier.

4.1. Définition.

Proposition 4.1.1. Soit Y un sous-schéma fermé intègre de X . On a

$$(4.1.2) \quad H_Y^j(X, W_n \Omega_X^j, \log) = H_Y^{j+1}(X, W_n \Omega_X^j, \log) = 0$$

pour $j < \text{codim}(Y) = r$.

Démonstration : i) Y est lisse. On a une suite spectrale

$$(4.1.3) \quad E_2^{ab} = H^a(X, H_Y^b(W_n \Omega_X^j, \log)) \implies H_Y^*(X, W_n \Omega_X^j, \log)$$

et d'après (3.5.3) $E_2^{ab} = 0$ pour tout $b \neq r, r+1$.

Le théorème (3.5.8) montre que $E_2^{ar} = H^a(X, W_n \Omega_Y^{j-r}, \log)$.

D'où $E_2^{ar} = 0$ pour $j < r$. On vérifie donc qu'il y a suffisamment de termes nuls dans la suite spectrale (4.1.3) pour affirmer (4.1.2).

ii) Cas général. On va prouver (4.1.2) par récurrence descendante sur la codimension de Y .

Supposons Y de codimension r et la proposition prouvée pour les codimensions supérieures ou égales à $r+1$. Soit Y' le lieu singulier, de sorte que $Y-Y'$ est lisse de codimension r . On utilise alors la suite exacte longue de cohomologie

$$(4.1.4) \quad \dots \rightarrow H_Y^r(X, W_n \Omega_X^j, \log) \rightarrow H_Y^r(X, W_n \Omega_X^j, \log) \rightarrow H_{Y-Y'}^r(X, W_n \Omega_X^j, \log) \rightarrow H_{Y'}^{r+1}(X, W_n \Omega_X^j, \log) \rightarrow \dots$$

(où l'on a utilisé l'isomorphisme d'excision évident

$$(4.1.5) \quad H_{Y-Y'}^*(X-Y', W_n \Omega_X^*, \log) \simeq H_{Y-Y'}^*(X, W_n \Omega_X^*, \log))$$

qui, jointe à l'hypothèse de récurrence et au fait que (4.1.2) est prouvé pour $Y-Y'$ fournit le résultat.

Pour $j=r$, (4.1.4) montre en particulier que l'on a un isomorphisme

$$(4.1.6) \quad H_Y^r(X, W_n \Omega_X^r, \log) \xrightarrow{\sim} H_{Y-Y'}^r(X, W_n \Omega_X^r, \log).$$

Définition 4.1.7. On appelle classe de cohomologie de Y dans X , l'image par (4.1.6) de la classe de $Y-Y'$ dans X .

MORPHISME DE GYSIN

Lorsque Y est lisse, elle coïncide bien entendu avec la classe de cohomologie précédemment définie.

Utilisant les morphismes canoniques $H_Y^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r) \rightarrow H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ et $H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r) \rightarrow H^{2r}(X, W_n \Omega_X^r) \simeq H_{\text{cris}}^{2r}(X/W_n)$, on dispose ainsi d'une classe de cohomologie cristalline d'un sous-schéma fermé intègre éventuellement singulier. Lorsque Y est lisse, la classe construite ici coïncide avec celle de Berthelot ([2], VI, 3.1) comme il résulte du diagramme (3.4.4) du chapitre II et du principe de construction ($\text{cl}(Y/X) = i_*(1_Y)$). Bien entendu, si $Y = \bigsqcup n_i Y_i$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et Y_i des sous-schémas fermés intègres, $\text{cl}(Y/X)$ désignera $\bigsqcup n_i \text{cl}(Y_i/X) \in H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ (ou $H_{\text{cris}}^{2r}(X/W_n)$), r désignant la codimension commune des Y_i .

Pour $n=1$, on obtient par ce procédé une classe de cohomologie d'un cycle éventuellement singulier en cohomologie de Hodge et de De Rham d'un schéma défini sur un corps parfait complétant ainsi les constructions d'El Zein (cf. [11]).

4.2. Propriétés.

Proposition 4.2.1. Si Y est un diviseur de Cartier de X , on a

$$(4.2.2) \quad \text{cl}(Y/X) = c_1(\mathcal{O}_X(Y)) \text{ dans } H^1(X, W_n \Omega_{X, \log}^1).$$

Démonstration : Par définition de chacun des deux membres, on est ramené au cas où Y est lisse. La proposition résulte alors de (2.5.2).

Proposition 4.2.3. Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre k -schémas lisses et Z un sous-schéma fermé de X de codimension r . On a alors

$$(4.2.4) \quad \text{cl}(f_*Z/Y) = f_*\text{cl}(Z/X) \in H_{f(Z)}^{r+N}(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^{r+N})$$

où $N = \dim(Y) - \dim(X)$.

Démonstration : Posons $T = f(Z)$. Grâce à (4.1.2) et (4.1.4), on voit que l'on a des isomorphismes

$$(4.2.5) \quad H_{f(Z)}^{r+N}(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^{r+N}) \xrightarrow{\sim} H_{T-T}^{r+N}(\text{sing}^{-f(Z)}(\text{sing}^{-f(Z)}))^{r+N}(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^{r+N}) \\ \xrightarrow{\sim} H_T^{r+N}(Y', W_n \Omega_{Y'}^{r+N})$$

avec $T' = T - T_{\text{sing}} - f(Z_{\text{sing}})$ et $Y' = Y - T_{\text{sing}} - f(Z_{\text{sing}})$ (l'indice sing indiquant que l'on prend la partie singulière des schémas considérés). Vu la définition des classes de cycles, on est ramené à prouver que

$$(4.2.6) \quad (f_* \text{cl}(Z/X) =) f_* \text{cl}(Z - Z_{\text{sing}}/X) = \text{cl}(T'/Y') .$$

On peut donc supposer Z (et par suite T) lisse et $g = f|_Z$ fini surjectif de degré d . On a alors $f_* Z = dZ$ et la formule à prouver devient

$$(4.2.7) \quad d \text{cl}(T/Y) = f_* \text{cl}(Z/X) .$$

On a

$$(4.2.8) \quad \begin{aligned} f_* \text{cl}(Z/X) &= f_* i_* (1) && (i: Z \hookrightarrow X) \\ &= j_* g_* (1) && (j: T \hookrightarrow Y) \\ &= j_* g_* g^* (1) . \end{aligned}$$

Il suffit alors de voir que $g_* g^* = d$ car alors $j_* g_* g^* (1) = d j_* (1) = d \text{cl}(T/Y)$.

Proposition 4.2.9. Pour $g: Z \rightarrow T$ fini de degré d , on a

$$(4.2.10) \quad g_* g^* = d \quad \text{sur } W_n \Omega_{T, \log}^* .$$

Démonstration : Il suffit de prouver la formule sur $W_n \Omega_T^*$ puis d'en prendre les points fixes sous F .

La question étant locale sur T , on peut supposer que g se relève en un morphisme fini surjectif $g': Z' \rightarrow T'$ de degré d de W_n -schémas lisses. D'après ([1], [27]) on a

$$(4.2.11) \quad g'_* g'^* = d \quad \text{sur } \Omega_{T'/W_n}^* .$$

Comme on le verra ci-dessous, on a $g_* g^* = \underline{H}^*(g'_* g'^*)$. D'où le résultat.

Proposition 4.2.12. Soient Y et Z deux sous-schémas fermés intègres de X se coupant proprement (i.e. avec la bonne dimension). On a

$$(4.2.13) \quad \text{cl}(Y.Z/X) = \text{cl}(Y/X) . \text{cl}(Z/X) \in H_{Y \cap Z}^{r+s}(X, W_n \Omega_{X, \log}^{r+s})$$

MORPHISME DE GYSIN

($r = \text{codim}(Y)$, $s = \text{codim}(Z)$).

Démonstration : Elle comprend plusieurs étapes.

Lemme 4.2.14. Soient Y un sous-schéma fermé lisse de codimension r dans X et S un sous-schéma fermé (non nécessairement lisse) de codimension q dans Y . Le cup-produit par $\text{cl}(Y/X)$ définit un isomorphisme

$$(4.2.15) \quad \tilde{C}_{Y/X} : H_S^q(Y, W_n \Omega_Y^q, \log) \xrightarrow{\sim} H_S^{q+r}(X, W_n \Omega_X^{q+r}, \log) .$$

Démonstration : En effet, on a

$$(4.2.16) \quad H^0(S-S_{\text{sing}}, \mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{\sim} H_S^q(Y, W_n \Omega_Y^q, \log)$$

$$(4.2.17) \quad H^0(S-S_{\text{sing}}, \mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{\sim} H_S^{q+r}(X, W_n \Omega_X^{q+r}, \log)$$

donné par j_* (où $j : S-S_{\text{sing}} \hookrightarrow Y$) et par j'_* (où $j' : S-S_{\text{sing}} \hookrightarrow X$). Le lemme résulte alors simplement de la compatibilité du morphisme de Gysin à la composition.

Soit $\Delta : X \rightarrow X \times X$ le morphisme diagonal. Pour prouver (4.2.13), il suffit donc de prouver que

$$(4.2.18) \quad \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\text{cl}(Y.Z/X)] = \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\text{cl}(Y/X). \text{cl}(Z/X)] .$$

Lemme 4.2.19 (réduction à la diagonale). On a

$$(4.2.20) \quad \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\text{cl}(Y/X). \text{cl}(Z/X)] = \text{cl}(YXZ/XXX). \text{cl}(\Delta(X)/XXX)$$

$$(4.2.21) \quad \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\text{cl}(Y.Z/X)] = \text{cl}((YXZ). \Delta(X)/XXX) .$$

Démonstration : On commence tout d'abord par remarquer que

$$(4.2.22) \quad \text{cl}(Y/X) \otimes \text{cl}(Z/X) = \text{cl}(YXZ/XXX) \in H_{YXZ}^{r+s}(XXX, W_n \Omega_{XXX}^{r+s}, \log) .$$

En effet, par définition des classes en présence, on peut supposer que Y et Z sont lisses. On utilise alors la description locale des classes en présence (i.e. on remarque que \otimes envoie bien $\text{dlog}(\underline{t}_1) \dots \text{dlog}(\underline{t}_r)$, $\text{dlog}(\underline{t}_{r+1}) \dots \text{dlog}(\underline{t}_{r+s})$ sur $\text{dlog}(\underline{t}_1) \dots \text{dlog}(\underline{t}_{r+s})$).

On prend alors les images de (4.2.22) par Δ^* , on obtient

$$(4.2.23) \quad \Delta^* \text{cl}(YXZ/XXX) = \text{cl}(Y/X). \text{cl}(Z/X) .$$

D'où

$$(4.2.24) \quad \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\text{cl}(Y/X) \cdot \text{cl}(Z/X)] = \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\Delta^* \text{cl}(YXZ/XXX)] = \text{cl}(YXZ/XXX) \cdot \text{cl}(\Delta(X)/XXX) .$$

D'autre part, l'isomorphisme $\Delta: X \xrightarrow{\sim} \Delta(X)$ fait correspondre $\text{cl}(Y;Z/X)$ à $\text{cl}(\Delta_*(Y.Z)/\Delta(X)) = \text{cl}((YXZ) \cdot \Delta(X)/\Delta(X))$. D'où

$$(4.2.25) \quad \tilde{C}_{\Delta(X)/XXX}[\text{cl}(Y.Z/X)] = \text{cl}((YXZ) \cdot \Delta(X)/\Delta(X)) \cdot \text{cl}(\Delta(X)/XXX) = \text{cl}((YXZ) \cdot \Delta(X)/XXX) .$$

Pour prouver (4.2.13), on peut donc supposer que (par exemple) Y est lisse. Ecrivait alors

$$(4.2.26) \quad H_Y^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r) = H^0(X, H_Y^r(W_n \Omega_{X, \log}^r)) \\ H_Z^s(X, W_n \Omega_{X, \log}^s) = H^0(X, H_Z^s(W_n \Omega_{X, \log}^s)) ,$$

on voit que (pour prouver (4.2.13)) l'on peut se placer au voisinage du point générique x de $(Y \cap Z)_{\text{red}}$.

D'autre part, en factorisant $Y \rightarrow X$ en une suite d'immersions fermées de codimension 1, on voit (par une récurrence évidente) que l'on peut supposer Y de codimension 1.

Le cas le plus simple est celui où Z est régulier en x , on peut alors supposer que Z est défini (au voisinage de x) par une suite régulière de sections f_1, \dots, f_s de \mathcal{O}_X . $Z \cap Y$ est alors défini par la suite $f_1|_Y, \dots, f_s|_Y$. Par définition, on a

$$(4.2.27) \quad \text{cl}(Y.Z/X) = (D'_1 \dots D'_s) \cdot \text{cl}((Y.Z)_{\text{red}}/X)$$

où $D'_i = (f_i|_Y)$.

Il s'agit donc de montrer que $df'_1/f'_1 \dots df'_s/f'_s$ (avec $f'_i = f_i|_Y$) a la même classe dans $H_X^s(W_n \Omega_{Y, \log}^s)$ que $(D'_1 \dots D'_r) \cdot \text{cl}((Y.Z)_{\text{red}}/X)$. Ceci résulte de l'égalité

$$(4.2.28) \quad \text{Tr}(df'_1/f'_1 \dots df'_s/f'_s) = (D'_1 \dots D'_r)$$

qui sera prouvée ci-dessous.

Le cas général (Z non nécessairement régulier en x) n'est pas beaucoup plus difficile. Soit $h: \tilde{Z} \rightarrow Z$ la normalisation de Z

MORPHISME DE GYSIN

(c'est un morphisme fini). Soit $g: \mathbb{P}_X^N \longrightarrow X$ le morphisme canonique. On pose $Y' = \mathbb{P}_X^N \times_X Y$. Comme g est lisse, on a $g^*cl(Y/X) = cl(Y'/\mathbb{P}_X^N)$. D'où

$$\begin{aligned}
 (4.2.29) \quad cl(Y/X) \cdot cl(Z/X) &= cl(Y/X) \cdot cl(h_*\tilde{Z}/X) \quad \text{car } h_*\tilde{Z} = Z \\
 &= cl(Y/X) \cdot g_*cl(\tilde{Z}/\mathbb{P}_X^N) \\
 &= g_*(g^*cl(Y/X) \cdot cl(\tilde{Z}/\mathbb{P}_X^N)) \quad (\text{formule de projection}) \\
 &= g_*(cl(Y'/\mathbb{P}_X^N) \cdot cl(\tilde{Z}/\mathbb{P}_X^N)) \quad (\text{lissité de } g) \\
 &= g_*(cl(Y' \cdot \tilde{Z}/\mathbb{P}_X^N)) \quad (\text{cas précédent}) \\
 &= g_*(cl(g^*Y \cdot \tilde{Z}/\mathbb{P}_X^N)) \quad (\text{définition de } Y') \\
 &= cl(g_*(g^*Y \cdot \tilde{Z})/X) \quad (\text{proposition 4.2.3}) \\
 &= cl(g_*\tilde{Z} \cdot Y/X) \quad (\text{formule de projection}) \\
 &= cl(Y \cdot Z/X) .
 \end{aligned}$$

Pour vérifier (4.2.28), on remarque que le morphisme trace

$$(4.2.30) \quad Tr_{f,y} : f_{n*} H_y^N(W_n \otimes_X^N) \longrightarrow W_n \quad N = \dim(X)$$

(y un point fermé de X , X un k -schéma lisse, f_n le morphisme canonique $W_n X = (|X|, W_n \otimes_X) \longrightarrow W_n$) défini par Ekedahl ([9]) est lié au symbole résidu (défini également par Ekedahl ([10])) par le

Lemme 4.2.31. Pour tout $\omega \in W_n \otimes_X^N$ et tout entier j , on a

$$(4.2.32) \quad Tr_{f,y}(\omega/t_1^j \dots t_N^j) = Res_{X/W_n} \left[\begin{matrix} \omega \\ t_1^j, \dots, t_N^j \end{matrix} \right]$$

où t_1, \dots, t_N est une suite régulière de sections de \mathcal{O}_X définissant y . Nous omettons la démonstration de ce lemme, essentiellement analogue à celle du cas $n=1$ (cf. [2]).

On en déduit (cf. la formule R6 p. 198 de [17]) (4.2.28).

Proposition 4.2.33. Supposons k algébriquement clos. Deux cycles algébriquement équivalents de codimension r ont même classe de cohomologie dans $H^r(X, W_n \otimes_X^r, \log)$.

Démonstration (*) : Précisons tout d'abord ce que nous entendrons par cycles algébriquement équivalents. Soient C une courbe propre et lisse sur k et Z un sous-schéma fermé de $X \times_k C$ de codimension $r+1$. Alors deux cycles seront dits algébriquement équivalents s'ils sont images réciproques dans Z de deux points de la courbe C pour un Z convenablement choisi.

Soit donc un Z comme ci-dessus, on dispose d'un morphisme

$$(4.2.34) \quad \text{Div}(C) \longrightarrow H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$$

associant à $\sum_p m_p \cdot P$ l'élément $\sum_p m_p \text{cl}(Z \cap X_p) \in H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r)$

(X_p désignant $X \times_k \{P\}$ identifié à X).

On va voir que (4.2.34) se factorise en un morphisme

$$(4.2.35) \quad \text{Pic}(C) \longrightarrow H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r) .$$

Deux éléments linéairement équivalents de $\text{Div}(C)$ proviennent par image réciproque par un morphisme $g : C \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ de deux points 0 et ∞ de \mathbb{P}_k^1 . Utilisant le morphisme composé $Z \hookrightarrow X \times_k C \longrightarrow C \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$, on voit donc que l'on est ramené à voir que deux cycles rationnellement équivalents de X ont même classe fondamentale de cohomologie. On peut donc supposer $C = \mathbb{P}_k^1$.

D'après I (2.1.16), on dispose d'un isomorphisme

$$(4.2.36) \quad H^r(X, W_n \Omega_{X, \log}^r) \xrightarrow{\sim} H^{r+1}(X \times \mathbb{P}_k^1, W_n \Omega_{X \times \mathbb{P}_k^1, \log}^{r+1})$$

donné par le produit par $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(1)) \in H^1(\mathbb{P}_k^1, W_n \Omega_{\mathbb{P}_k^1, \log}^1)$.

Si Y_1 et Y_2 désignent deux cycles rationnellement équivalents dont on veut comparer les classes de cohomologie, il suffit d'après ce qui précède de comparer les classes de $Y_1 \times \{0\}$ et $Y_2 \times \{\infty\}$ dans $H^{r+1}(X \times \mathbb{P}_k^1, W_n \Omega_{X \times \mathbb{P}_k^1, \log}^{r+1})$.

D'autre part, Z rencontre $X \times \{0\}$ et $X \times \{\infty\}$ proprement. La formule (4.2.4) donne alors

(*) D'après un argument dû (indépendamment) à Berthelot et Suslin.

MORPHISME DE GYSIN

$$(4.2.37) \quad \text{cl}(Y_1 \times \{0\}/X \times \mathbb{P}_k^1) = \text{cl}(Z/X \times \mathbb{P}_k^1) \cdot \text{cl}(X \times \{0\}/X \times \mathbb{P}_k^1)$$

$$\text{cl}(Y_2 \times \{\infty\}/X \times \mathbb{P}_k^1) = \text{cl}(Z/X \times \mathbb{P}_k^1) \cdot \text{cl}(X \times \{\infty\}/X \times \mathbb{P}_k^1)$$

d'où l'égalité puisque $\{0\}$ et $\{\infty\}$ ont même classe de cohomologie. Soient alors $\text{Pic}^0(C)$ la Jacobienne de C et $\text{NS}(C) = \text{Pic}(C)/\text{Pic}^0(C)$ le groupe de Néron-Sévéri de C . On va montrer que (4.2.35) se factorise par un morphisme

$$(4.2.38) \quad \text{NS}(C) \longrightarrow H^r(X, W_n \Omega_X^r, \log) .$$

On remarque simplement que $\text{Pic}^0(C)$ est un groupe p -divisible et que par conséquent l'image de $\text{Pic}^0(C)$ dans $H^r(X, W_n \Omega_X^r, \log)$ par

(4.2.7) est contenu dans $\bigcap_m p^m H^r(X, W_n \Omega_X^r, \log)$ et est donc nulle puisque $p^m H^r(X, W_n \Omega_X^r, \log) = 0$ pour $m \gg n$. D'où (4.2.38).

Deux cycles algébriquement équivalents de X provenant de points de C ont donc même classe de cohomologie.

Corollaire 4.2.39. Deux cycles algébriquement équivalents ont même classe de cohomologie cristalline.

5. Morphisme de Gysin et complexe de Cousin.

5.1. Cas de la cohomologie de Hodge-Witt.

Reprenons la situation du numéro 1.2, on va voir que le morphisme 1.2.6 peut se réaliser comme un morphisme entre complexes de Cousin. Rappelons que le complexe de Cousin d'un faisceau abélien F est le complexe $\text{Cous}(F)$

$$(5.1.1) \quad 0 \longrightarrow F \longrightarrow \bigoplus_x i_{*x} H_x^0(F) \longrightarrow \bigoplus_x i_{*x} H_x^1(F) \longrightarrow \dots \longrightarrow \\ \bigoplus_x i_{*x} H_x^a(F) \longrightarrow 0$$

où les sommes sont prises sur les points de codimension $0, \dots, a = \dim(X)$.

Proposition 5.1.2. Le complexe de Cousin de $W_n \Omega_X^*$ est une résolution flasque de $W_n \Omega_X^*$.

Démonstration : La proposition résulte de (3.3.20) et de ([17, IV 2.6]).

On va voir que le morphisme de Gysin

$$(5.1.3) \quad f_* : Rf_* W_n \Omega_Y^i \longrightarrow W_n \Omega_X^i(r)[r]$$

se réalise comme un morphisme de bicomplexes

$$(5.1.4) \quad f_* : f_* \text{Cous}(W_n \Omega_Y^i) \longrightarrow \text{Cous}(W_n \Omega_X^i(r))[r] \dots$$

Proposition 5.1.5. On a un isomorphisme canonique

$$(5.1.6) \quad \underline{\text{Hom}}_{W_n \mathcal{O}_X} (W_n \Omega_X^{a-i}, \text{Cous}(W_n \Omega_X^a)) \xrightarrow{\sim} \text{Cous}(W_n \Omega_X^i)$$

Démonstration : On a un isomorphisme canonique (cf. [9, II (2.2.1)])

$$(5.1.7) \quad W_n \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} \underline{\text{RHom}}_{W_n \mathcal{O}_X} (W_n \Omega_X^{a-i}, W_n \Omega_X^a)$$

d'où un isomorphisme

$$(5.1.8) \quad R\Gamma_x(W_n \Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{RHom}}_{W_n \mathcal{O}_X} (W_n \Omega_X^{a-i}, R\Gamma_x(W_n \Omega_X^a))$$

pour tout point x de codimension $j \in [0, a]$.

Chacun des foncteurs $R\Gamma_x(-)$ et $\underline{\text{RHom}}_{W_n \mathcal{O}_X} (W_n \Omega_X^{a-i}, -)$ n'a (sur les objets auxquels ils s'appliquent) qu'un seul objet de cohomologie non nul, on déduit donc de (5.1.8) un isomorphisme

$$(5.1.9) \quad H_x^j(W_n \Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{W_n \mathcal{O}_X} (W_n \Omega_X^{a-i}, H_x^j(W_n \Omega_X^a))$$

(La nullité des $\text{Ext}_{W_n \mathcal{O}_X}^i (W_n \Omega_X^{a-*}, H_x^j(W_n \Omega_X^a))$ résultant de la nullité des $\text{Ext}_{W_n \mathcal{O}_X}^i (W_n \Omega_X^{a-*}, W_n \Omega_X^a)$ pour $i > 0$ et de la description des groupes de cohomologie à support donnée en (3.3.6)).

Il en résulte facilement l'isomorphisme (5.1.6).

On remarque alors que, $W_n \Omega_X^a$ étant un complexe dualisant, le morphisme trace (1.1.2) se réalise à l'aide de complexes résiduels (cf. [17]) i.e. comme un morphisme

$$(5.1.10) \quad f_* \text{Cous}(W_n \Omega_Y^b)[b] \longrightarrow \text{Cous}(W_n \Omega_X^a)[a]$$

Soit $x \in f_* \text{Cous}(W_n \Omega_Y^i)$, x définit (grâce à (5.1.7)) un élément de $f_* \underline{\text{Hom}}_{W_n \mathcal{O}_Y} (W_n \Omega_Y^{b-i}, \text{Cous}(W_n \Omega_Y^b)) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{W_n \mathcal{O}_X} (f_* W_n \Omega_Y^{b-i}, f_* \text{Cous}(W_n \Omega_Y^b))$.
Utilisant le morphisme de functorialité

MORPHISME DE GYSIN

$$(5.1.11) \quad W_n \Omega_X^{b-i} \longrightarrow f_* W_n \Omega_Y^{b-i}$$

et (5.1.10), on en déduit un élément de $\text{Hom}_{W_n \mathcal{O}_X} (W_n \Omega_X^{b-i}, \text{Cous}(W_n \Omega_X^a))$
 i.e. un élément de $\text{Cous}(W_n \Omega_X^{i+r})[r]$. C'est l'image de x par (5.1.5).

On va maintenant vérifier la compatibilité de (5.1.5) à d .
 La vérification est de nature locale au voisinage d'un point x de
 codimension m de X . $W_n \Omega_X^a[a]$ est un complexe dualisant normalisé,
 on peut donc appliquer ([17, V 6.5]) pour obtenir l'isomorphisme
 fonctoriel de dualité locale

$$(5.1.12) \quad (W_n \Omega_X^i)_x^\wedge \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_x^m(W_n \Omega_X^{a-i}), I)$$

où I est l'enveloppe injective du corps résiduel de x et où $^\wedge$
 désigne la complétion en x .

Soit maintenant $y \in Y$ tel que $f(y) = x$, on a de même un
 isomorphisme

$$(5.1.13) \quad (W_n \Omega_Y^i)_y^\wedge \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_y^{m+r}(W_n \Omega_Y^{b-i}), I')$$

où I' désigne l'enveloppe injective du corps résiduel de y .

On est ainsi ramené à voir la commutativité du diagramme

$$(5.1.14) \quad \begin{array}{ccc} f_*(W_n \Omega_Y^i)_y^\wedge & \xrightarrow{d} & f_*(W_n \Omega_Y^{i+1})_y \\ \text{adj} \uparrow & & \uparrow \text{adj} \\ (W_n \Omega_X^i)_x^\wedge & \xrightarrow{d} & (W_n \Omega_X^{i+1})_x \end{array}$$

qui est claire.

5.2. Cas de la cohomologie logarithmique.

J'ignore si l'on peut réaliser le morphisme f_* :

$$Rf_* W_n \Omega_{Y, \log}^* \longrightarrow W_n \Omega_{X, \log}^*(r)[r] \text{ à l'aide des points fixes par } F \text{ du}$$

complexe de Cousin de $W_n \Omega_X^*$.

On remarquera simplement que Milne construit pour X une surface
 une résolution flasque (pour la topologie étale sur X) de $W_n \Omega_{X, \log}^2$
 qui se déduit de la résolution de Cousin de $W_n \Omega_X^2$ en prenant les
 points fixes sous F (cf. [29]).

CHAPITRE III

CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES

Dans tout ce chapitre, les k -schémas considérés sont supposés lisses.

1. Classes de Chern logarithmiques.

1.1. Énoncé du théorème principal.

Théorème 1.1.1. Soit n un entier $\gg 1$, il existe une unique théorie des classes de Chern associant à tout \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$ ($r \gg -1$) des classes de Chern $c_i(E) \in H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)$, $i \in \mathbb{N}$, satisfaisant aux conditions suivantes

(1.1.2) (Fonctorialité) Pour tout morphisme de k -schémas lisses $f: Y \rightarrow X$, on a $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$ pour tout $i \in [0, r+1]$.

(1.1.3) (Normalisation) Si E est inversible, $c_0(E) = 1$ et $c_1(E)$ est l'élément de $H^1(X, W_n \Omega_{X, \log}^1)$ image de la classe de E dans $\text{Pic}(X)$ par le morphisme induit en cohomologie par $d\log: \mathcal{O}_X^* \rightarrow W_n \Omega_{X, \log}^1$.

(1.1.4) (Additivité) Pour toute suite exacte de \mathcal{O}_X -Modules localement libres de type fini

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

et tout i , on a $c_i(E) = \sum_{h+m=i} c_h(E')c_m(E'')$.

1.2. Démonstration du théorème.

Prouvons l'unicité d'une théorie de classes de Chern vérifiant (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4). Soit donc E un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$ et soit D le fibré en drapeaux de E muni de sa projection $f: D \rightarrow X$. Comme f est composé de fibrations projectives, le corollaire 2.1.15 de I montre que le morphisme $f^*: H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i) \rightarrow H^i(D, W_n \Omega_{D, \log}^i)$ est injectif pour tout $i \geq 0$.

CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES

La classe $c_i(E)$ est donc connue lorsque l'on connaît $f^*c_i(E)$, c'est-à-dire grâce à (1.1.2) $c_i(f^*E)$. Or f^*E est muni d'une suite de composition $(E_j)_{0 \leq j \leq r+1}$ avec $\text{rang}(E_j) = r+1-j$. Par récurrence sur r , on voit alors grâce à (1.1.4) que

$$(1.2.1) \quad c_i(f^*E) = \sigma_i(c_1(E_0/E_1), \dots, c_1(E_r/E_{r+1}))$$

où σ_i désigne la i -ème fonction symétrique élémentaire.

Comme E_j/E_{j+1} est inversible pour tout $j \in [0, r]$, on connaît grâce à (1.1.3) $c_1(E_j/E_{j+1})$ pour tout $j \in [0, r]$. D'où le résultat.

Définissons maintenant les classes $c_i(E)$. La décomposition (2.1.16) de I appliquée au fibré projectif $P = P(\check{E})$ fournit donc un isomorphisme

$$(1.2.2) \quad H^{r+1}(P, W_n \otimes_{\mathbb{P}}^{r+1} \log) = \bigoplus_{i=0}^r H^{r+1-i}(X, W_n \otimes_X^{r+1-i} \log) \cdot c_1(\mathcal{O}_{P(\check{E})}(1))^i.$$

Appliquant cette décomposition à $c_1(\mathcal{O}_{P(\check{E})}(1))^{r+1} \in H^{r+1}(P, W_n \otimes_{\mathbb{P}}^{r+1} \log)$, on voit que l'on peut trouver de manière unique des éléments $c_i(E) \in H^i(X, W_n \otimes_X^i \log)$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$(1.2.3) \quad c_0(E) = 1, \quad c_i(E) = 0 \quad \text{si } i > r+1,$$

$$\sum_{i=0}^{r+1} c_i(E) c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))^{r+1-i} = 0.$$

Les classes $c_i(E)$ seront appelées classes de Chern (logarithmiques) de E .

Fonctorialité : Soit $F = f^*E$, le fibré projectif associé à \check{F} noté $P(\check{F})$ est l'image réciproque du fibré projectif associé à \check{E} et noté $P(\check{E})$. On a donc

$$(1.2.4) \quad c_1(\mathcal{O}_{P(\check{F})}(1)) = f^*c_1(\mathcal{O}_{P(\check{E})}(1)).$$

L'égalité de (1.1.2) est trivialement vérifiée pour $i=0$ et $i > r+1$, vérifions là pour $i \in [1, r+1]$. Par définition, on a

$$(1.2.5) \quad \sum_{i=0}^{r+1} q^*(c_i(E)) c_1(\mathcal{O}_{P(\check{E})}(1))^{r+1-i} = 0$$

où q désigne la projection $P(\check{E}) \rightarrow X$.

Soit q' la projection $P(\check{F}) \rightarrow Y$, on a

$$(1.2.6) \quad f^*q^* = q'^*f^*.$$

Appliquant f^* à l'égalité (1.2.5), on obtient

$$(1.2.7) \quad \sum_{i=0}^{r+1} q^{i-1} f^* c_i(E) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1))^{r+1-i} = 0,$$

ce qui par définition prouve que

$$(1.2.8) \quad c_i(F) = f^* c_i(E) \quad \text{pour } i \in [1, r+1].$$

D'où la functorialité.

Normalisation : Supposons E inversible, on a alors un isomorphisme

$$(1.2.9) \quad E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$$

d'où

$$(1.2.10) \quad \text{dlog}([E]) = \text{dlog}([\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)])$$

où $[]$ désigne la classe dans $\text{Pic}(X)$.

D'autre part, la définition des classes de Chern montre que l'on doit avoir

$$(1.2.11) \quad c_1(E) + \text{dlog}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) = 0.$$

D'où le résultat.

Additivité : Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 1.2.12. Soit E un \mathcal{O}_X -Module localement libre muni d'une filtration finie $0 = E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_{r+1} = E$ dont les quotients consécutifs $L_i = E_i/E_{i-1}$ ($i \in [1, r+1]$) sont inversibles. Alors on a

$$(1.2.13) \quad c_j(E) = \sigma_j(c_1(L_1), \dots, c_1(L_{r+1}))$$

(σ_j désignant la j -ième fonction symétrique élémentaire).

Montrons comment 1.2.12 entraîne (1.1.4).

Soit $h : Z = D' \times_X D'' \rightarrow X$ le produit fibré des schémas de drapeaux D' et D'' de E' et E'' respectivement. Alors $h^* E'$ et $h^* E''$ admettent des filtrations finies à quotients consécutifs inversibles $(L'_i)_{1 \leq i \leq r'+1}$ et $(L''_j)_{1 \leq j \leq r''+1}$ respectivement ($r' = \text{rang}(E')$ et $r'' = \text{rang}(E'')$). Il en résulte en particulier que

CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES

h^*E admet une filtration à quotients consécutifs les L_1^i et les L_j^i .

L'application de 1.2.12 montre alors que

$$(1.2.14) \quad c_j(h^*E) = \sigma_j(c_1(L_1^i), \dots, c_1(L_r^i), c_1(L_1^{ii}), \dots, c_1(L_r^{ii})) .$$

Comme

$$(1.2.15) \quad \sigma_j(x_1, \dots, x_{r'+1}, t_1, \dots, t_{r''+1}) = \sum_{h+m=j} \sigma(x_1, \dots, x_{r'+1}) \sigma_m(t_1, \dots, t_{r''+1})$$

on en déduit que

$$(1.2.16) \quad c_j(h^*E) = \sum_{h+m=j} c_h(h^*E') c_m(h^*E'') .$$

D'autre part, comme on l'a déjà remarqué, h^* est injectif, on en déduit donc (grâce à la functorialité (1.1.2)) que

$$(1.2.17) \quad c_j(E) = \sum_{h+m=j} c_h(E') c_m(E'') .$$

Venons-en à la démonstration de 1.2.12.

Soit f la projection $P = \mathbb{P}(\check{E}) \rightarrow X$. Il résulte de I 2.1.15 que

$$(1.2.18) \quad f^* : H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i) \rightarrow H^i(P, W_n \Omega_{P, \log}^i)$$

est injectif pour tout $i \gg 0$.

Il suffit donc de prouver que

$$(1.2.19) \quad f^* c_j(E) = f^* \sigma_j(c_1(L_1), \dots, c_1(L_{r+1}))$$

soit encore, utilisant la functorialité (1.1.2)

$$(1.2.20) \quad c_j(f^*E) = \sigma_j(c_1(f^*L_1), \dots, c_1(f^*L_r)) .$$

Pour tout $i \in [1, r+1]$, l'inclusion $E_i \hookrightarrow E$ définit un épimorphisme $E \rightarrow E_i$. On posera $V_i = \mathbb{P}(\check{E}_i)$. On obtient ainsi une suite de sous schémas fermés de P .

$$(1.2.21) \quad X \xrightarrow{\sim} Y_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Y_i \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Y_{r+1} = P .$$

On notera $\alpha_{j,i}$ l'immersion fermée canonique $Y_i \hookrightarrow Y_j$ ($1 \leq i \leq j \leq r+1$). Il résulte alors du lemme ci-dessous que Y_i est défini dans Y_{i+1} par un idéal inversible isomorphe à

$$(1.2.22) \quad \alpha_{r+1,i+1}^* (f^*(L_{i+1}^{\vee}) \otimes \mathcal{O}_P(-1)) .$$

Lemme 1.2.23 (SGA 5, exp. VII, Lemme 3.1.6). Soit

$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{O}_X -Modules localement libres. Alors la suite $0 \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_X} S(E) \xrightarrow{u} S(E) \xrightarrow{v} S(F) \rightarrow 0$ dans laquelle v désigne le morphisme évident et u le morphisme de degré 1 correspondant à l'inclusion de L dans E est exacte.

On va alors montrer par récurrence croissante sur i que

$$(1.2.24) \quad (\alpha_{r+1,i})_* (\alpha_{r+1,i})^* \left(\prod_{j < i} c_1(f^*(L_j) \otimes \mathcal{O}_P(-1)) \right) = 0 .$$

Dans le cas $i = r+1$, (1.2.24) s'écrit

$$(1.2.25) \quad \prod_i c_1((f^* L_i^{\vee}) \otimes \mathcal{O}_P(-1)) = 0$$

soit encore

$$(1.2.26) \quad \prod_i (c_1(f^* L_i^{\vee}) + c_1(\mathcal{O}_P(-1))) = 0 .$$

En développant cette égalité, on voit (par définition des $c_i(E)$) que les $c_i(E)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les $c_1(L_i)$.

Prouvons donc (1.2.24). Pour $i=1$, on remarque que, Y_1 s'identifiant à X , on a un isomorphisme

$$(1.2.27) \quad \alpha_{r+1,1}^* (f^* L_1^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y_1}(1)$$

soit

$$(1.2.28) \quad \alpha_{r+1,1}^* (f^*(L_1^{\vee}) \otimes \mathcal{O}_P(-1)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X ,$$

d'où l'assertion (1.2.24) dans ce cas.

Supposons (1.2.24) prouvé pour i et prouvons là pour $i+1$. On posera $N = \prod_{j < i} c_1(f^*(L_j^{\vee}) \otimes \mathcal{O}_P(-1))$. L'égalité (1.2.24) pour i s'écrit (car $\alpha_{r+1,i}^* = \alpha_{i+1,i}^* \circ \alpha_{r+1,i+1}^*$)

$$(1.2.29) \quad (\alpha_{r+1,i+1})_* (\alpha_{i+1,i})_* (\alpha_{i+1,i})^* (\alpha_{r+1,i+1})^* (N) = 0 .$$

Utilisant la formule de projection II (2.2.6) pour $\alpha_{i+1,i}$ et la compatibilité entre classe de Chern et classe de cycle II (2.5.2) pour $\alpha_{i+1,i}$ (Y_i étant défini dans Y_{i+1} par l'idéal inversible (1.2.22)), on obtient

CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES

$$(1.2.30) \quad (\alpha_{r+1, i+1})_* ((\alpha_{r+1, i+1})^*(N) \cdot (\alpha_{r+1, i+1})^* c_1(f^* L_{i+1}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_P(-1))) = 0.$$

D'où le résultat.

Ce qui termine la démonstration du théorème 1.1.1.

Remarquons que cette démonstration est (une fois établi les résultats et compatibilités concernant le morphisme de Gysin) entièrement formelle et analogue à celle donnée dans [13].

Corollaire 1.2.31 (i) Les classes de Chern d'un produit tensoriel ou d'une puissance extérieure s'expriment au moyen des polynômes universels explicités dans [SGA 6, 6.1].

(ii) En particulier, si E est un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$, on a $c_1(E) = c_1(\wedge^{r+1} E)$.

(iii) Pour tout entier i et tout \mathcal{O}_X -Module localement libre E , on a $c_i(\check{E}) = (-1)^i c_i(E)$.

Démonstration : Une fois utilisé le "splitting-principe", la démonstration est entièrement formelle (cf. SGA 5, VII, 3.7).

2. Variantes et compatibilités.

2.1. Comparaison avec les classes de Chern cristallines.

Le morphisme d'injection canonique $W_n \Omega_{X, \log}^i(-i) \rightarrow W_n \Omega_X^i$ induit en cohomologie un morphisme

$$(2.1.1) \quad H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i) \rightarrow H^{2i}(X, W_n \Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} H_{\text{cris}}^{2i}(X/W_n).$$

L'image des classes $c_i(E) \in H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)$ dans $H_{\text{cris}}^{2i}(X/W_n)$ sera encore notée $c_i(E)$.

D'autre part, Berthelot et Illusie ont défini dans [4] des classes de Chern $\underline{c}_i(E) \in H_{\text{cris}}^{2i}(X/W_n)$ pour tout \mathcal{O}_X -Module localement libre de type fini E . Il y a donc lieu de comparer ces classes $\underline{c}_i(E)$ avec les classes $c_i(E)$.

L'isomorphisme I (5.1.3) fournit une décomposition canonique

$$(2.1.2) \quad H_{\text{cris}}^j(P/W_n) = \bigoplus_{i=0}^r H_{\text{cris}}^{j-2i}(X/W_n) \cdot \underline{c}_1(\mathcal{O}_P(1))^i$$

où $P = P(\check{E})$ est le fibré projectif associé au dual d'un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$.

Comme l'isomorphisme

$$(2.1.3) \quad H_{\text{cris}}^j(X/W_n) \xrightarrow{\sim} H^j(X, W_n \Omega_X^j)$$

induit par l'isomorphisme canonique de comparaison (Thm. 1.4 de [21])

$$(2.1.4) \quad R\Gamma_{X/W_n} \mathcal{O}_{X/W_n} \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_X^*$$

est fonctoriel, pour voir que le diagramme suivant est commutatif

$$(2.1.5) \quad \begin{array}{ccc} H_{\text{cris}}^j(P/W_n) & \xrightarrow{\sim} & H^j(P, W_n \Omega_P^j) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{i=0}^r H_{\text{cris}}^{j-2i}(X/W_n) \cdot c_1(\mathcal{O}_P(1))^i & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i=0}^r H^{j-2i}(X, W_n \Omega_X^j) \cdot c_1(\mathcal{O}_P(1))^i \end{array}$$

il suffit de voir que $c_1(\mathcal{O}_P(1))$ a pour image $c_1(\mathcal{O}_P(1))$ dans $H_{\text{cris}}^2(P/W_n)$ ce qui a été vu au numéro 5 de I.

Comme les $c_i(E)$ sont obtenues par la relation

$$(2.1.6) \quad c_0(E) = 1, \quad c_i(E) = 0 \quad \text{pour } i > r+1, \\ \sum_{i=0}^{r+1} c_i(E) c_1(\mathcal{O}_P(E)(1))^{r+1-i} = 0.$$

On voit que l'on a bien coïncidence entre $c_i(E)$ et $c_i(E)$.

Remarque. On prendra garde au fait que dans [4], le théorème de structure des fibrés projectifs est appliqué à $P = P(E)$ et que par suite, il s'introduit des signes dans la décomposition (2.1.2) si l'on veut obtenir la coïncidence entre $c_i(E)$ et $c_i(E)$.

2.2. Cohomologie d'un schéma de drapeaux.

Soit E un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r+1$. Soit d'autre part, une suite (p_1, \dots, p_m) de m entiers strictement positifs vérifiant l'égalité $p_1 + \dots + p_m = r+1$. On notera S le schéma des drapeaux de type (p_1, \dots, p_m) de E et $g: S \rightarrow X$ le morphisme structural. Le \mathcal{O}_S -Module g^*E est alors muni d'une filtration canonique finie $0 = F_m \hookrightarrow F_{m-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_0 = g^*E$ pour laquelle le quotient $E_i = F_{i-1}/F_i$ ($1 \leq i \leq m$) est localement libre

CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES

de rang p_i .

On définit un morphisme d'anneaux

$$(2.2.1) \quad \varphi : H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) [T_{ij_i}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j_i \leq m} \longrightarrow H^*(S, W_n \Omega_{S, \log}^*)$$

en convenant d'envoyer $H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*)$ dans $H^*(S, W_n \Omega_{S, \log}^*)$ par l'application g^* et T_{ij_i} sur la j_i -ième classe de Chern $c_{j_i}(E_i)$ de E_i .

Pour tout entier i , on déduit (par récurrence) de l'additivité (1.1.4) que

$$(2.2.2) \quad c_i(g^*E) = \sum_{i_1 + \dots + i_m = i} c_{i_1}(E_1) \dots c_{i_m}(E_m).$$

Ceci, joint à la fonctorialité (1.1.2) montre que φ s'annule sur l'idéal J_X de $H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) [T_{ij_i}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j_i \leq m}$ engendré par les éléments

$$(2.2.3) \quad c_i(E) - \sum_{i_1 + \dots + i_m = i} T_{1i_1} \dots T_{mi_m}$$

pour i variable. D'où un morphisme d'anneaux

$$(2.2.4) \quad \tilde{\varphi} : H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*) [T_{ij_i}]_{(i, j_i) / J_X} \longrightarrow H^*(S, W_n \Omega_{S, \log}^*).$$

Théorème 2.2.5. Le morphisme $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme. En particulier $H^*(S, W_n \Omega_{S, \log}^*)$ est un $H^*(X, W_n \Omega_{X, \log}^*)$ -Module libre de rang $r! / (p_1! \dots p_m!)$.

Démonstration : Elle est entièrement formelle et identique à celle donnée dans SGA 5, exp. 7, Prop. 5.4.

Terminons ce chapitre par une question : supposant X propre (et lisse) sur k , a-t-on $A^i(X) \cap H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)^0 = \{0\}$ où $A^i(X)$ désigne le sous-module de $H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)$ engendré par les classes $c_i(E)$ pour E un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang fini et où $H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)^0$ désigne la partie unipotente de $H^i(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)$ (cf. [23, IV 3.3]) ?

Appendice :

Classes de Chern à supports.

Nous allons brièvement indiquer comment on peut appliquer la construction de classes de Chern à supports de Gillet (cf. [12]) dans le cas de la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.

2.3. Rappels.

2.3.1. Si X est un espace topologique et \underline{G} un faisceau de groupes sur X , on note $B_{\underline{G}}$ le topos classifiant de \underline{G} . La catégorie des objets abéliens dans $B_{\underline{G}}$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{Z}[\underline{G}]$ -Modules. Si \underline{F} est un tel objet abélien, la \underline{G} -cohomologie de \underline{F} est

$$(2.3.2) \quad H^i(X, \underline{G}, \underline{F}) = R^i(X, \underline{F}^{\underline{G}}) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}[\underline{G}]}^i(\mathbb{Z}, \underline{F})$$

où \mathbb{Z} est le faisceau constant avec action triviale de \underline{G} associé à \mathbb{Z} .

2.3.3. Si X est un schéma régulier et Y un sous-schéma fermé (non nécessairement lisse) de X , on a (cf. [12]) un isomorphisme

$$(2.3.4) \quad K_*^Y(X) \xleftarrow{\sim} K_*^*(Y)$$

où $K_*^Y(X)$ désigne la K -théorie à support dans Y (cf. [12]) et $K_*^*(Y)$ la K -théorie de la catégorie des faisceaux cohérents sur Y .

2.4. Le théorème principal.

Théorème 2.4.1. Pour toute représentation $\rho : \underline{G} \rightarrow GL(\underline{F})$ de \underline{G} dans un \mathcal{O}_X -Module localement libre \underline{F} , il existe une unique théorie de classes de Chern $c_i(\rho) \in H^i(X, \underline{G}, W_n \mathcal{O}_{X, \log}^i)$ vérifiant les axiomes suivants

(2.4.2) Fonctorialité : si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme entre k -schémas lisses et ρ une représentation comme ci-dessus sur X et si g est un homomorphisme $\underline{L} \rightarrow f^* \underline{G}$ de faisceaux en groupes

CLASSES DE CHERN LOGARITHMIQUES

sur Y , on a

$$c_i(f^*(\rho) \circ g) = g^*(f^*c_i(\rho)) .$$

(2.4.3) Normalisation : pour toute représentation comme ci-dessus, on a $c_0(\rho) = 1$.

(2.4.4) Additivité : si

$$0 \longrightarrow (\rho', \underline{F}') \longrightarrow (\rho, \underline{F}) \longrightarrow (\rho'', \underline{F}'') \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de représentations du faisceau en groupes \underline{G} , on a $c_i(\rho) = \sum_{m+q=i} c_m(\rho') c_q(\rho'')$.

Démonstration : Vu ce que l'on connaît déjà sur la structure de la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique d'un fibré projectif, il est très facile de recopier les constructions de Gillet ([12], Chap. 2) en prenant garde au fait qu'il travaille avec la topologie de Zariski. Il faut donc remplacer son $\Gamma(i)$ par $R\epsilon_* W_n^i \Omega_{X, \log}^i$ où $\epsilon : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ est le morphisme canonique de topos. Les variantes simpliciales ne posent pas de problèmes.

2.5. Classes de Chern à supports.

On va construire des classes $c_{i,j}^Y : K_j^Y(X) \rightarrow H_Y^{i-j}(X, W_n^i \Omega_{X, \log}^i)$. Il suffit là encore de paraphraser Gillet (loc. cit.). Soient $K(-, -)$ le foncteur de Dold-Puppe et \mathbb{Z}_∞ le foncteur de complétion de Bousfield et Kan. On a un isomorphisme (cf. [12])

$$(2.5.1) \quad H_Y^{-j}(X, \mathbb{Z}_\infty K(i, R\epsilon_* W_n^i \Omega_{X, \log}^i)) \xrightarrow{\sim} H_Y^{i-j}(X, W_n^i \Omega_{X, \log}^i) .$$

Pour définir les $c_{i,j}^Y$, on procède alors comme dans le diagramme p. 229 de [12]. On observe que les classes de 2.4 permettent de construire des morphismes de faisceaux simpliciaux

$$(2.5.2) \quad C_i : B.GL(\mathcal{O}_X) \rightarrow K(i, R\epsilon_* W_n^i \Omega_{X, \log}^i) .$$

Le morphisme $c_{i,j}^Y$ est alors le composé du morphisme canonique $K_j^Y(X) \rightarrow H_Y^{-j}(X, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_\infty(B.GL(\mathcal{O}_X)))$, de $H_Y^{-j}(\mathbb{Z}_\infty C_i)$ et de l'isomorphisme (2.5.1).

Proposition 2.5.3. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas lisses avec Z un sous-schéma fermé (non nécessairement lisse) de X , on a alors un diagramme commutatif

$$(2.5.4) \quad \begin{array}{ccc} K_j^Z(X) & \xrightarrow{c_{i,j}^Z} & H_Z^{i-j}(X, W_n \Omega_X^i, \log) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ K_j^{f^{-1}(Z)}(Y) & \xrightarrow{c_{i,j}^{f^{-1}(Z)}} & H_{f^{-1}(Z)}^{i-j}(Y, W_n \Omega_Y^i, \log) \end{array}$$

Démonstration : cf. Gillet ([12], Lemma 2.23).

Remarque. Lorsque $Y=X$ et $j=0$, on retrouve bien entendu les classes précédentes.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

1. Cohomologie d'un éclaté.

1.1. Cohomologie de Hodqge-Witt d'un éclaté.

Soient X un k -schéma lisse et $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée lisse définie par un idéal J . On notera $X' = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} J^n)$ l'éclaté de X le long de Y . On a un diagramme cartésien fixant les autres notations

$$(1.1.1) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array} .$$

On a $Y' = Y \times_X X' = \text{P}(J/J^2)$, et $J \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(1)$ est l'idéal définissant l'immersion fermée j . $j^* \mathcal{O}_{X'}(1) = \mathcal{O}_Y(1)$ est le faisceau canonique sur le fibré projectif Y' .

On va calculer $Rf_* W_n \Omega_{X'}^\bullet$.

Pour tout morphisme $h : Z \rightarrow T$ de k -schémas lisses, on pose

$$(1.1.2) \quad R^+ h_* W_Z^\bullet :=: R\text{Hom}(\mathcal{O} \leftarrow R_T, W_Z^\bullet \leftarrow W_T^\bullet)[-1] \Big|_T .$$

C'est un objet de la catégorie dérivée de la catégorie des R_T -Modules notée $D(R_T\text{-Mod})$ où l'on a considéré $(W_Z^\bullet, W_T^\bullet, W_T^\bullet \rightarrow h_* W_Z^\bullet) =: (W_Z^\bullet \leftarrow W_T^\bullet)$ comme module sur le topos $\text{Top}(h)$ de la flèche h ([19], 4 du Chap. III) annelé par $(R_Z \leftarrow R_T) := (R_Z, R_T, R_T \rightarrow h_* R_Z)$. On dispose donc d'un triangle distingué de $D(R_T\text{-Mod})$ (cf. Prop. 4.9 du Chap. III de [19])

$$(1.1.3) \quad \begin{array}{ccc} & R^+ h_* W_Z^\bullet & \\ \swarrow & & \searrow \\ W_T^\bullet & \longrightarrow & Rh_* W_Z^\bullet \end{array}$$

dépendant fonctoriellement de h .

Le diagramme (1.1.1) induit un morphisme dans $D(R_X\text{-Mod})$

$$(1.1.4) \quad R^+f_*W\Omega_X \longrightarrow i_*R^+g_*W\Omega_Y .$$

Théorème 1.1.5. (1.1.4) est un isomorphisme.

Avant de démontrer ce théorème, montrons comment il permet de calculer $Rf_*W\Omega_X$.

D'après II 2.7.1

$$(1.1.5) \quad f_*f^* = \text{Id}$$

puisque f est birationnel. On en déduit donc un isomorphisme

$$(1.1.6) \quad Rf_*W\Omega_X \xrightarrow{\sim} W\Omega_X \oplus R^+f_*W\Omega_X .$$

D'autre part, I 4.1.11 montre que l'on a un isomorphisme dans $D(R_Y\text{-Mod})$

$$(1.1.7) \quad R^+g_*W\Omega_Y = \bigoplus_{j>0} W\Omega_Y(-j)[-j] .$$

Le théorème 1.1.5 montre donc que l'on a un isomorphisme

$$(1.1.8) \quad R^+f_*W\Omega_X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j>0} {}^*W\Omega_Y(-j)[-j] .$$

Par suite

Théorème 1.1.9. On a un isomorphisme canonique dans $D(R_X\text{-Mod})$

$$(1.1.10) \quad Rf_*W\Omega_X \xrightarrow{\sim} W\Omega_X \oplus \bigoplus_{j>0} i_*W\Omega_Y(-j)[-j] .$$

Corollaire 1.1.11. On a un isomorphisme canonique dans $D(W_n\Omega_X\text{-Mdg})$

$$(1.1.12) \quad Rf_*W_n\Omega_X \xrightarrow{\sim} W_n\Omega_X \oplus \bigoplus_{j>0} i_*W_n\Omega_Y(-j)[-j] .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le foncteur $R_n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R (-)$ à l'isomorphisme (1.1.13) et d'utiliser l'isomorphisme I 4.1.15.

Venons-en à la démonstration du théorème 1.1.5. Soit C le cône de (1.1.4), il s'agit de montrer que $C=0$. On va pour cela utiliser le même procédé que pour démontrer I 4.1.11. Il suffit donc de prouver, grâce à I 4.2.1, que

$$(1.1.14) \quad R_1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R C = 0$$

APPLICATIONS

i.e. que $R_1 \overset{n}{\otimes}_R$ (1.1.4) est un isomorphisme.

Considérons alors pour tout morphisme $h : Z \rightarrow T$ de schémas sur une base arbitraire S le module $(\Omega_Z^i, \Omega_T^i, h^* \Omega_T^i \rightarrow \Omega_Z^i)$ sur le topos annelé $\text{Top}(h)$ (annelé par $(0_Z \leftarrow 0_T) := (0_Z, 0_T, 0_T \rightarrow h_* 0_Z)$), on pose

$$(1.1.15) \quad R^+ h_* \Omega_Z^i = \underline{\text{RHom}}(0 \leftarrow 0_T, \Omega_Z^i \leftarrow \Omega_T^i)[-1] | T \dots$$

C'est un objet de la catégorie dérivée de la catégorie des \mathcal{O}_T -Modules notée $D(\mathcal{O}_T\text{-Mod})$. On dispose comme en (1.1.3) d'un triangle distingué dans $D(\mathcal{O}_T\text{-Mod})$

$$(1.1.16) \quad \begin{array}{ccc} & R^+ h_* \Omega_Z^i & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Omega_T^i & \longrightarrow & R h_* \Omega_Z^i \end{array}$$

dépendant fonctoriellement de h .

Le morphisme (1.1.1) induit donc un morphisme

$$(1.1.17) \quad R^+ f_* \Omega_X^i \rightarrow i_* R^+ g_* \Omega_Y^i .$$

L'isomorphisme I (4.1.15) montre que l'on a des isomorphismes

$$(1.1.18) \quad R_1 \overset{n}{\otimes}_R R^+ f_* W \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} R^+ f_* \Omega_X^i,$$

$$(1.1.19) \quad R_1 \overset{n}{\otimes}_R R^+ g_* W \Omega_Y^i \xrightarrow{\sim} R^+ g_* \Omega_Y^i .$$

On voit donc que $R_1 \overset{n}{\otimes}_R$ (1.1.4) sera un isomorphisme si (1.1.17) en est un pour tout $i \geq 0$.

1.2. Cohomologie de Hodge d'un éclaté.

On peut partir d'une situation un peu plus générale que celle décrite par le diagramme (1.1.1), à savoir la situation analogue où l'on considère les schémas en présence définis sur une base un schéma arbitraire S . On notera, pour tout S -schéma T , Ω_T le complexe de De Rham de T/S . On veut donc prouver que (1.1.17) est un isomorphisme. Vu la définition des deux membres, il suffit pour cela de prouver le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $q > 1$, les flèches naturelles

$$(1.2.2) \quad \Omega_X^i \longrightarrow f_* \Omega_X^i,$$

$$(1.2.3) \quad R^q f_* \Omega_X^i \longrightarrow i_* R^q g_* \Omega_Y^i,$$

sont des isomorphismes.

Démonstration : On remarque tout d'abord que si $h: X_1 \rightarrow X$ est un morphisme étale, le carré cartésien défini par l'éclatement de X_1 le long du sous-schéma fermé défini par $J_1 = J \cdot \mathcal{O}_{X_1} = h^* J$ se déduit de (1.1.1) par le changement de base h et que $\Omega_{X_1}^i = h^* \Omega_X^i$ et de même pour Y_1, X'_1, Y'_1 puisque h est étale.

Si l'on prouve le théorème 1.2.1 pour un éclatement, il sera donc vrai pour tout autre éclatement défini par un changement de base étale $X_1 \rightarrow X$. La question étant locale au voisinage de Y , on peut donc supposer que $X = S[t_1, \dots, t_s, x_1, \dots, x_{r+1}]$ et Y défini par les équations $x_1 = \dots = x_{r+1} = 0$. Posons $Z = S[x_1, \dots, x_{r+1}]$, on a alors $X = Y \times Z$ ($Y \cong \mathbb{A}_S^s$).

Le carré (1.1.1) est le produit par Y du carré cartésien

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccc} P^r = T' & \longrightarrow & Z' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ S = \{0\} & \longrightarrow & Z \end{array}$$

défini par l'éclatement de la section nulle de Z . On a donc

$$(1.2.5) \quad \begin{aligned} \Omega_X^* &= \Omega_Y^* \otimes \Omega_Z^* \\ \Omega_{X'}^* &= \Omega_Y^* \otimes \Omega_{Z'}^* \\ \Omega_{Y'}^* &= \Omega_Y^* \otimes \Omega_{T'}^* \end{aligned}$$

d'où

$$(1.2.6) \quad \begin{aligned} Rf_* \Omega_X^* &= \Omega_Y^* \otimes Rf_* \Omega_Z^* \\ Rg_* \Omega_{Y'}^* &= \Omega_Y^* \otimes Rg_* \Omega_{T'}^* \end{aligned}$$

APPLICATIONS

Les morphismes (1.2.2) et (1.2.3) sont donc sommes, pour $j \geq 0$, des morphismes respectivement

$$(1.2.7) \quad \Omega_Y^j \otimes (\Omega_Z^{i-j} \rightarrow f_* \Omega_{Z'}^{i-j})$$

et

$$(1.2.8) \quad \Omega_Y^j \otimes (R^q f_* \Omega_{Z'}^{i-j} \rightarrow i_* R^q g_* \Omega_{T'}^{i-j}).$$

Il suffit donc de prouver le théorème 1.2.1 dans la situation (1.2.4) on peut donc supposer $Y = S$.

Considérons la filtration de Koszul de $\Omega_{X'}^i$,

$$(1.2.9) \quad \text{Fil}^j \Omega_{X'}^i = \text{Im}(f^* \Omega_X^j \otimes \Omega_{X'}^{i-j} \rightarrow \Omega_{X'}^i).$$

Lemme 1.2.10 i) On a une suite d'inclusions

$$0 = \text{Fil}^{i+1} \Omega_{X'}^i \subset \text{Fil}^i \Omega_{X'}^i \subset \Omega_{X'}^i, (i-1) \subset \text{Fil}^{i-1} \Omega_{X'}^i \subset \Omega_{X'}^i, (i-2) \subset \dots \subset \text{Fil}^1 \Omega_{X'}^i \subset \Omega_{X'}^i.$$

ii) Posons $\text{Fil}^{j+(1/2)} \Omega_{X'}^i = \Omega_{X'}^i(j)$. On a des isomorphismes canoniques

$$a) \text{gr}^j \Omega_{X'}^i \xleftarrow{\sim} \Omega_{X'}^{i-1}(j) \quad (j \text{ entier}, 1 \leq j \leq i-1),$$

$$b) \text{gr}^{j+(1/2)} \Omega_{X'}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{X'}^i(j) \quad (j \text{ entier}, 1 \leq j \leq i-1)$$

$$c) f^* \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^i \Omega_{X'}^i,$$

$$d) \Omega_{X'}^i / \text{Fil}^1 \Omega_{X'}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{X'}^i.$$

Démonstration : Rappelons tout d'abord que X' est le sous-schéma fermé de \mathbb{P}_X^r défini par les équations $x_i y_j - x_j y_i = 0$, où (y_1, \dots, y_{r+1}) sont des coordonnées homogènes sur \mathbb{P}_X^r , et que la trace de X' sur l'ouvert affine de \mathbb{P}_X^r défini par $y_i \neq 0$ est l'espace affine $S[z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_{r+1}]$, la projection $f|_{X' \cap U_i}$ étant alors induite par l'homomorphisme d'anneaux $x_i \mapsto x_i, x_j \mapsto x_i z_j$ ($j \neq i$). Il suffit de vérifier les inclusions de i) sur chaque U_i , et quitte à faire une permutation de coordonnées, on peut se borner au cas $i = 1$. $(dx_1, dz_2, \dots, dz_{r+1})$ forment alors une base de $\Omega_{X'}^1|_{U_1 \cap X'}$, et l'application canonique $f^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X'}^1$, est donnée, en restriction à U_1 , par $dx_1 \mapsto dx_1$

$dx_i \mapsto x_1 dz_i + z_1 dx_1$ ($i > 1$). C'est donc une application injective. Il en est donc de même de sa puissance extérieure $f^* \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i$, d'où ii) c).

D'autre part, la restriction de $\mathcal{O}_X(1)$ à $X' \cap U_1$ est l'idéal principal (x_1) et $Y' \cap U_1$ est l'ouvert affine de \mathbb{P}_S^r de coordonnées affines (z_2, \dots, z_{r+1}) .

Cette description rend évidentes les inclusions de i) et montre que la projection naturelle $\Omega_X^i \rightarrow \Omega_Y^i$ induit l'isomorphisme ii) d).

Reste à prouver ii) a) et ii) b). Considérons pour cela la suite exacte de \mathcal{O}_Y -Modules localement libres de type fini

$$(1.2.11) \quad 0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \Omega_Y^1 \rightarrow 0$$

où $I = \mathcal{O}_X(1)$.

On en déduit une suite exacte

$$(1.2.12) \quad 0 \rightarrow I/I^2 \otimes \Omega_Y^{i-1} \rightarrow \Omega_X^i \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \Omega_Y^i \rightarrow 0,$$

soit, en tensorisant par $\mathcal{O}_X(j-1)$

$$(1.2.13) \quad 0 \rightarrow \Omega_Y^{i-1}(j) \xrightarrow{\Phi} \Omega_X^i(j-1)/\Omega_X^i(j) \rightarrow \Omega_Y^i(j) \rightarrow 0$$

(où l'on a identifié canoniquement $I/I^2 \otimes \Omega_Y^{i-1}$ et $\Omega_Y^{i-1}(1)$). La flèche Φ est la flèche qui, sur l'ouvert $Y' \cap U_1$, envoie $x_1^j dz_{j_1} \dots dz_{j_{i-1}}$ sur $x_1^{j-1} dx_1 dz_{j_1} \dots dz_{j_{i-1}}$. L'image de Φ est donc $\text{Fil}^j \Omega_X^i / \Omega_X^i(j)$, ce qui prouve a) et b) et conclut la preuve de 1.2.10.

Terminons la preuve de 1.2.1. D'après 1.2.10 ii) a) et ii) b) et (SGA 7, XI 1.1), on a

$$(1.2.14) \quad \text{Rf}_* \text{gr}^j \Omega_X^i = 0 \text{ pour } 1 \ll j \ll i - (1/2).$$

D'autre part, d'après (SGA 6, VII 3.5), on a un isomorphisme

$$(1.2.15) \quad \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \text{Rf}_* \mathcal{O}_X.$$

ce qui joint à ii) c) montre que

$$(1.2.16) \quad \text{Rf}_* \text{Fil}^i \Omega_X^i = \Omega_X^i.$$

APPLICATIONS

Les inclusions du lemme 1.2.10 i) et ii) d) prouvent donc que l'on a un triangle distingué

$$(1.2.17) \quad \begin{array}{ccc} & i_* Rg_* \Omega_Y^i & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Omega_X^i & \longrightarrow & Rf_* \Omega_X^i \end{array} .$$

D'où le théorème 1.2.1 en prenant la suite exacte longue de cohomologie correspondante.

1.3. Cohomologie logarithmique d'un éclaté.

Reprenons la situation décrite par le diagramme (1.1.1). Appliquant le foncteur $R\text{Hom}_{R_X/p}^n(W\Omega_X^i/p^*, -)$ à l'isomorphisme de R_X/p^* -pro-Modules

$$(1.3.1) \quad Rf_* W\Omega_X^i/p^* \xrightarrow{\sim} W\Omega_X^i/p^* \oplus \bigoplus_{i>0} i_* W\Omega_Y^i/p^*(-i)[-i]$$

déduit de (1.1.10) par application du foncteur $(-)/p^*$, on obtient le

Théorème 1.3.2. On a un isomorphisme canonique dans $D(W\Omega_{X,\log}^* \text{-pro-Mod})$

$$(1.3.3) \quad Rf_* W\Omega_{X,\log}^* \xrightarrow{\sim} W\Omega_{X,\log}^* \oplus \bigoplus_{i>0} i_* W\Omega_{Y,\log}^*(-i)[-i] .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer I (3.2.6), (3.2.8).

Corollaire 1.3.4. On a un isomorphisme canonique dans $D(W_n\Omega_{X,\log}^* \text{-Mod})$

$$(1.3.5) \quad Rf_* W_n\Omega_{X,\log}^* \xrightarrow{\sim} W_n\Omega_{X,\log}^* \oplus \bigoplus_{i>0} i_* W_n\Omega_{Y,\log}^*(i)[-i] .$$

Démonstration : Il suffit de tensoriser l'isomorphisme (1.3.3) par $\mathbb{Z}/p^n \otimes (-)$ et d'utiliser l'isomorphisme I (1.3.4).

Corollaire 1.3.6. On a, pour tout j , un isomorphisme de \mathbb{Z}/p^n -Modules

$$(1.3.7) \quad H^j(X', W_n\Omega_{X,\log}^*, \log) \xrightarrow{\sim} H^j(X', W_n\Omega_{X,\log}^*) \oplus \bigoplus_{i>0} H^{j-i}(Y, W_n\Omega_{Y,\log}^{*-i})$$

qui à $x \in H^j(X', W_n\Omega_{X,\log}^*, \log)$ associe $f_* x \oplus j^*(1-f^*f_*)(x)$, l'isomorphisme réciproque étant donné par $(x, x') \mapsto f^*x + x'$ (on a identifié $\text{Ker}(f_*)$ et $\bigoplus_{i>0} H^{j-i}(Y, W_n\Omega_{Y,\log}^{*-i})$ grâce à j^*).

Démonstration : Il suffit d'appliquer le foncteur $H^j(X, -)$ à l'isomorphisme (1.3.5).

2. Formule de self-intersection.

2.1. Soit $i: Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée lisse de codimension $r+1$. On notera J l'idéal de \mathcal{O}_X définissant Y dans X et N le faisceau localement libre J/J^2 .

Théorème 2.1.1. Pour tout $y \in H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*)$, on a

$$(2.1.2) \quad i^* i_*(y) = y c_{r+1}(\check{N}) .$$

Démonstration : Elle va nécessiter plusieurs préliminaires dont le

Lemme 2.1.3. Soit F le \mathcal{O}_Y -Module localement libre défini par la suite exacte

$$(2.1.4) \quad 0 \longrightarrow F \longrightarrow g^* N \longrightarrow \mathcal{O}_Y(1) \longrightarrow 0$$

on a alors

$$(2.1.5) \quad g_*(c_r(\check{F})) = 1 .$$

Démonstration du lemme : Elle est formellement identique à celle de (SGA 5, VII, 8.4.1). L'additivité des classes de Chern, appliquée à la suite exacte (2.1.4), fournit l'égalité

$$(2.1.6) \quad g^*(c(N)) = c(F)(1 + c_1(\mathcal{O}_Y(1)))$$

où l'on a noté $c(N) = \bigoplus_{i \neq 0} c_i(N) \in H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*)$.

On en déduit donc

$$(2.1.7) \quad c(F) = g^*(c(N))(1 + c_1(\mathcal{O}_Y(1)))^{-1}$$

d'où

$$(2.1.8) \quad c_r(F) = \sum_{0 \leq i \leq r} (-1)^{r-i} g^*(c_i(N))(c_1(\mathcal{O}_Y(1)))^{r-i} .$$

Comme g_* diminue les degrés de r et que, d'après II (2.6.2) on a $g_*(c_1(\mathcal{O}_Y(1))^r) = 1$, on en déduit (2.1.5) en utilisant la formule de projection II (2.2.6).

APPLICATIONS

On en déduit en particulier que (en utilisant la formule de projection)

$$(2.1.9) \quad g_*(g^*(y)c_r(\check{F}_1)) = y .$$

Lemme 2.1.10. Soit \hat{N} le complété projectif du fibré normal de Y dans X . On notera $s: Y \hookrightarrow N$ la section canonique de la projection canonique $g_1: N \rightarrow Y$. Alors

$$(2.1.11) \quad s_*(1) = c_{r+1}(\check{F}_1) = \sum_{i=0}^{r+1} g_1^*(c_i(\hat{N})c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1)))^{r+1-i}$$

où F_1 est défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow g_1^*(N \oplus \mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{N}}(1) \rightarrow 0$$

$$(2.1.12) \quad s^*s_*(y) = yc_{r+1}(\hat{N}) \quad \text{pour tout } y \in H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*) .$$

$$(2.1.13) \quad s^*(z) = g_{1*}(zc_{r+1}(\check{F}_1)) \quad \text{pour tout } z \in H^*(N, W_n \Omega_{N, \log}^*) .$$

Démonstration : L'égalité du premier et du second membre de (2.1.11) n'est autre que le lemme 3 de [13]. L'égalité des deuxièmes et troisièmes membres est l'équivalent de (2.1.8).

Pour (2.1.12), on remarque que l'on peut supposer $y=1$ puisque

$$(2.1.14) \quad s^*s_*(y) = s^*s_*(s^*g_1^*(y)) = s^*(s_*(s^*g_1^*(y))) = ys^*s_*(1)$$

grâce à la formule de projection 2.2.6 ($s^*g_1^* = \text{Id}$).

Il s'agit alors de prouver que $s^*(c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))) = 0$. On remarque alors que si $\alpha: V(N) \hookrightarrow \hat{N}$ désigne l'inclusion canonique, on a

$$(2.1.14.1) \quad \alpha^*(c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))) = c_1(\mathcal{O}_{V(N)}) = 0$$

car $\alpha^*\mathcal{O}_{\hat{N}}(1) = \mathcal{O}_{V(N)}$.

Prouvons (2.1.13). De la suite exacte définissant F_1 résulte que

$$(2.1.14.2) \quad c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))c_{r+1}(\check{F}_1) = c_{r+2}(g_1^*\hat{N} \oplus \mathcal{O}_{\hat{N}}) = 0 .$$

On écrit alors $z = \sum_{i=0}^{r+1} g_1^*(a_i)c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))^i$. De (2.1.14.1) résulte que $s^*z = a_0$. (2.1.14.2) montre que $zc_{r+1}(\check{F}_1) = g_1^*(a_0)c_{r+1}(\check{F}_1)$. D'où le résultat grâce à l'analogie de (2.1.9) pour g_1 .

Pour terminer la preuve de (2.1.2) nous allons avoir besoin des constructions suivantes. On note $u: X \rightarrow Z = X \times_k \mathbb{P}_k^1$ le morphisme $t \mapsto (t, 0)$, on voit Y comme un sous-schéma de Z grâce au morphisme $i_1 = ui$. On éclate Y dans Z , on obtient donc un diagramme cartésien

$$(2.1.15) \quad \begin{array}{ccc} \hat{N} & \xrightarrow{j_1} & Z' \\ g_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ Y & \xrightarrow{i_1} & Z \end{array} \quad \hat{E} = \mathbb{P}_Y(N \oplus \mathcal{O}_Y) \text{ complétion projective de } V(E)$$

fixant les notations. On notera $s: Y \hookrightarrow E$ le même morphisme que dans l'énoncé 2.1.10.

L'inclusion $Y \hookrightarrow X$ permet d'identifier $Y \times \mathbb{P}_k^1 = W$ à un sous-schéma fermé de Z . On note W' le sous-schéma de Z' éclaté de W le long de $Y \simeq Y \times \{0\}$. Le morphisme canonique $f_2: W' \rightarrow W$ est donc un isomorphisme. On fixe les autres notations relatives à W' par les diagrammes

$$(2.1.16) \quad \begin{array}{ccccc} & & \hat{N} & \xrightarrow{j_1} & Z' \\ & \nearrow s & & & \downarrow f_1 \\ Y & \xrightarrow{\delta} & W' & & \\ \text{Id} \downarrow & \nearrow g_1 & \downarrow f_2 & & \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & W & \xleftarrow{\alpha} & Z \end{array}$$

$$(2.1.17) \quad \begin{array}{ccccc} & & \hat{N} & \xrightarrow{j_1} & Z' \\ & \nearrow w & & & \downarrow f_1 \\ Y' & \xrightarrow{j} & X' & & \\ g \downarrow & \nearrow g_1 & \downarrow f & & \\ Y & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{u} & Z \end{array}$$

Lemme 2.1.18. Avec les notations précédentes, on a les relations

$$(2.1.19) \quad j_1^*(\beta_*(1)) = c_{r+1}(F_1^\vee)$$

$$(2.1.20) \quad j_1^*(v_*(1)) = c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))$$

$$(2.1.21) \quad f_1^*u_*(1) = j_{1*}(1) + v_*(1) .$$

APPLICATIONS

Démonstration : Comme j_1 et β (resp. j_1 et v) sont transversaux, on a

$$(2.1.22) \quad j_1^* \beta_*(1) = s_*(1)$$

$$(2.1.23) \quad j_1^* v_*(1) = w_*(1) .$$

Les égalités (2.1.19) et (2.1.20) proviennent alors de (2.1.11) et de la compatibilité entre classe de cycle et classe de Chern. Pour (2.1.21), on remarque simplement que l'idéal inversible définissant $f_1^{-1}(X)$ dans Z' est le produit tensoriel des idéaux inversibles définissant X' et \hat{N} dans Z' respectivement et que \hat{N} et X' sont Tor-indépendants dans Z' . D'où

$$(2.1.24) \quad f_1^* c_1(\mathcal{O}_{Z'}(X)) = c_1(\mathcal{O}_{Z'}(X')) + c_1(\mathcal{O}_{Z'}(\hat{N})) .$$

La compatibilité entre classe de cycle et classe de Chern donne la formule (2.1.21).

Lemme 2.1.25. Pour tout $y \in H^*(\hat{N}, W_n \Omega_{\hat{N}, \log}^*)$, on a

$$(2.1.26) \quad c_{r+1}(\check{F}_1) \cdot j_1^* j_{1*}(y) = 0 .$$

Démonstration : L'élément y admet une unique décomposition

$$(2.1.27) \quad y = \sum_{i=0}^{r+1} a_i c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))^i = \sum_{i=0}^{r+1} a_i (j_1^* v_*(1))^i .$$

La formule de projection pour le morphisme j_1 et l'égalité évidente $c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1)) c_{r+1}(\check{F}_1) = 0$ implique que

$$(2.1.28) \quad c_{r+1}(\check{F}_1) j_1^* j_{1*}(y) = c_{r+1}(\check{F}_1) j_1^* j_{1*}(a_0) .$$

On est donc ramené au cas où y est de la forme $g_1^*(a)$. On a une unique décomposition

$$(2.1.29) \quad j_1^* j_{1*}(g_1^*(a)) = \sum_{i=0}^{r+1} g_1^*(b_i) c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1))^i .$$

Utilisant que $c_1(\mathcal{O}_{\hat{N}}(1)) c_{r+1}(\check{F}_1) = 0$, on voit que l'on est ramené à voir que $g_1^*(b_0) c_{r+1}(\check{F}_1) = 0$. On va voir que $b_0 = 0$.

(2.1.29) se réécrit

$$(2.1.30) \quad j_1^* j_{1*}(g_1^*(a)) = g_1^*(b_0) + z \cdot j_1^* v_*(1) .$$

On applique alors j_{1*} et l'on utilise la formule de projection puis (2.1.21), on obtient

$$(2.1.31) \quad j_{1*}g_1^*(b_0) = j_{1*}g_1^*(a) \cdot f_{1*}u_*(1) - v_*(1) \cdot [j_{1*}g_1^*(a) + j_{1*}(z)] .$$

Soit alors $\theta : f_1^{-1}(X \times \{1\}) \hookrightarrow Z'$ l'inclusion canonique. Elle vérifie $f_{1*}u_*(1) = \theta_*(1)$ puisque les idéaux inversibles définissant $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ dans Z sont isomorphes. On en déduit que

$$(2.1.32) \quad j_{1*}g_1^*(a) \cdot f_{1*}u_*(1) = 0$$

puisque l'on peut considérer $j_{1*}g_1^*(a)$ (resp. $f_{1*}u_*(1)$) comme un élément de $H_N^*(Z', W_n \Omega_{Z'}^*, \log)$ (resp. $H_{f_1^{-1}(X \times \{1\})}^*(Z', W_n \Omega_{Z'}^*, \log)$) et que $\hat{N} \cap f_1^{-1}(X \times \{1\}) = \emptyset$.

Par un argument de même nature, on voit que

$$(2.1.33) \quad \beta^*v_*(1) = 0$$

car $W' \cap X' = \emptyset$. D'où

$$(2.1.34) \quad \beta^*j_{1*}g_1^*(b_0) = 0$$

grâce à (2.1.31)

β et j_1 étant transverses, on en déduit

$$(2.1.35) \quad 0 = \delta_*s^*g_1^*(b_0) = \delta_*(b_0) .$$

D'où, en appliquant f_{2*}

$$(2.1.36) \quad \gamma_*(b_0) = 0 .$$

Soit $b_0 = 0$ puisque γ_* est injectif (puisque γ admet une rétraction évidente).

Terminons la démonstration de (2.1.2). Soit $pr : Z \rightarrow X$ la première projection, de sorte que $i = pr \circ i_1$. On pose $\bar{x} = pr^*i_*(y)$. On a

$$(2.1.37) \quad i^*i_*(y) = i_1^*(\bar{x})$$

et (2.1.9) donne

$$(2.1.38) \quad i^*i_*(y) = g_{1*}[g_1^*i_1^*(\bar{x}) \cdot c_{r+1}(\check{F}_1)] = g_{1*}[j_{1*}f_1^*(x) \cdot c_{r+1}(\check{F}_1)] .$$

Soit alors $\mu = \beta_*f_{2*}pr^*y$. Le théorème de structure de la cohomologie d'un éclaté montre que l'on peut trouver μ' et μ'' tels que

APPLICATIONS

$$(2.1.39) \quad \mu = f_1^* \mu' + j_{1*} \mu''$$

avec $f_{1*} \mu = \mu'$. Or $f_{1*} \mu = f_{1*} \beta_* f_2^* \text{pr}^* y = \alpha_* f_{2*} f_2^* \text{pr}^* y = \bar{x}$.
Reportant cette dernière égalité dans (2.1.39) puis dans (2.1.38), on voit que (utilisant (2.1.26))

$$(2.1.40) \quad i^* i_*(y) = g_{1*} [j_{1*}(\mu) \cdot c_{r+1}(\check{F}_1)] = s^* j_1^*(\mu)$$

(la dernière égalité résultant de (2.1.13)). On remarque alors que

$$(2.1.41) \quad j_1^*(\mu) = j_1^* \beta_* f_2^* \text{pr}^*(y) = s_* \delta^* f_2^* \text{pr}^*(y) = s_*(y)$$

puisque β et j_1 sont transverses.

D'où (2.1.2) grâce à (2.1.12).

Corollaire 2.1.42. Sous les hypothèses du théorème 2.1.1, on a

$$(2.1.43) \quad i_*(x) i_*(y) = i_*(x y c_{r+1}(\check{N})) .$$

Démonstration : La formule de projection II (2.2.6) entraîne

$$(2.1.44) \quad i_*(x) i_*(y) = i_*(x i^* i_*(y)) ,$$

d'où (2.1.43) grâce à 2.1.1.

Proposition 2.1.44. ("formule-clef") Pour tout $y \in H^*(Y, W_n \Omega_{Y, \log}^*)$, on a

$$(2.1.45) \quad f^* i_*(y) = j_*(g^*(y) c_r(\check{F})) .$$

Démonstration : Comme $f_* j_* = i_* g_*$, on en déduit de (2.1.9) que

$$(2.1.46) \quad i_*(y) = f_* j_*(g^*(y) c_r(\check{F})) .$$

D'après 1.3.6, on a

$$(2.1.47) \quad j_*(g^*(y) c_r(\check{F})) = f^* x + x' \quad \text{avec} \quad f_* x' = 0 .$$

On va voir qu'en fait, $x' = 0$. Il suffit de montrer que $j_*(g^*(y) c_r(\check{F})) \in \text{Im } f^*$. Or, d'après 1.3.6, on a $\text{Im } f^* = \text{Ker}(j^*(1-f_*))$. On a, compte tenu de (2.1)

$$(2.1.48) \quad j^*(1-f_*) (j_*(g^*(y) c_r(\check{F}))) = j^* j_*(g^*(y) c_r(\check{F})) - g^* i^* i_*(y) .$$

Utilisant que j est de codimension 1, on déduit de II (2.2.11)

$$(2.1.49) \quad j_* j_*(g^*(Y)c_r(\check{F})) = g^*(Y)c_r(\check{F})c_1(\mathcal{O}_Y, (1)) .$$

Ce qui joint à la formule de self-intersection permet d'écrire

$$(2.1.50) \quad j_* j_*(g^*(Y)c_r(F)) - g^* i_* i_*(Y) = g^*(Y)[c_r(F)c_1(\mathcal{O}_Y, (-1) - g^*(c_{r+1}(\check{N})))] .$$

Cette dernière expression est nulle, car l'additivité des classes de Chern sur la suite exacte (2.1.4) fournit

$$(2.1.51) \quad -g^*(c_{r+1}(\check{N})) = c_r(\check{F})c_1(\mathcal{O}_Y, (1)) .$$

On peut donc supposer $x' = 0$, on applique alors f_* à (2.1.47). Comme on a $f_* f^* = \text{Id}$, on voit que $x = i(Y)$, d'où (2.1.45).

3. Classe de Chern et classe de cycle.

3.1. On suppose que X est un schéma quasi-projectif.

Proposition 3.1.1. Soit Y un sous-schéma fermé (non nécessairement lisse) irréductible de X , on a

$$(3.1.2) \quad c_{r+1}(i_* \mathcal{O}_Y) = (-1)^{r+1} r! c_1(Y/X) \in H^{r+1}(X, W_n^{r+1}(X, \log))$$

($r+1 = \text{codim}(Y)$).

Démonstration : Les éléments en présence dans (3.1.2) sont images d'éléments appartenant (par définition pour la classe de cycle et grâce à l'appendice du chapitre III pour la classe de Chern) à $H_Y^{r+1}(X, W_n^{r+1}(X, \log))$ par le morphisme canonique d'oubli du support. Ce groupe de cohomologie à support ne dépendant que de la partie lisse de Y , il suffit de démontrer (3.1.2) lorsque Y est lisse, ce qui va résulter du

Théorème 3.1.3. ("Formule de Riemann-Roch sans dénominateurs")

Pour tout \mathcal{O}_Y -Module localement libre de rang $\epsilon(G)$, on a

$$(3.1.4) \quad c_{q+1}(i_* G) = i_*(P_{q+1}^{r+1}(\epsilon(G), c_1(G), \dots, c_{q-r}(G); c_1(N), \dots, c_{q-r}(N)))$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$ où $P_{q+1}^{r+1}(T_0, \dots, T_{q-r}; U_1, \dots, U_{q-r})$ est un certain polynôme universel à coefficients entiers dont la définition est rappelée dans ([24, 1.1]).

APPLICATIONS

La proposition 3.1.1 résulte de 3.1.3 appliqué appliqué au cas $G = \mathcal{O}_Y$, $q = r$. En effet, on a $P_{q+1}^{r+1} = (-1)^{r!}$.

Démonstration de 3.1.3 : Elle est pratiquement identique à la formule de Riemann-Roch dans l'anneau de Chow donné dans [24]. Nous ne mentionnerons donc que les points qui diffèrent. On garde les notations de [24], qui sont compatibles avec les nôtres.

i) On n'a pas directement $f_1^* u_*(1) = j_{1*}(1) + v_*(1)$ comme dans l'anneau de Chow, mais dans notre cas, il suffit de remarquer que l'idéal inversible définissant $f_1^{-1}(X)$ dans Z' est le produit tensoriel des idéaux inversibles définissant X' et N dans Z' respectivement

$$(3.1.5) \quad f_1^* c_1(\mathcal{O}_{Z'}(X)) = c_1(\mathcal{O}_{Z'}(X')) + c_1(\mathcal{O}_{Z'}(N)).$$

La compatibilité entre classe de Chern et classe de cycle donne l'égalité voulue.

ii) Pour voir que $c_{q+1}(j_{1*}(g_1^*(G) \cdot \omega) \cdot (f_1^* u_*(1))) = 0$, on note que l'inclusion canonique $\theta : f_1^{-1}(X \times \{1\}) \hookrightarrow Z'$ vérifie $f_1^* u_*(1) = \theta_*(1)$ puisque les idéaux inversibles définissant $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ dans $Z = X \times_{\mathbb{P}_k^1}$ sont isomorphes et que $(X \times \{1\}) \cap Y = \emptyset$. Comme on a trivialement

$$(3.1.6) \quad \theta^*(c_{q+1}(j_{1*}(j_{1*}(g_1^*(G) \cdot \omega))) = 0,$$

le résultat en découle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE.- Traces et résidus en géométrie algébrique. Thèse de troisième cycle, Orsay.
- [2] P. BERTHELOT.- Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$ (Lecture Notes in Math., n° 407, Springer-Verlag 1974).
- [3] P. BERTHELOT.- Dualité plate, dans "Surfaces algébriques". Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay, 1976-1978 (Lecture Notes in Math., n° 868, Springer-Verlag 1981).
- [4] P. BERTHELOT, L. ILLUSIE.- Classes de Chern en cohomologie cristalline (Notes aux C.R.A.S.P. du 22 et du 29 Juin 1970, Série A, t. 270).
- [5] S. BLOCH, K. KATO.- p -adic étale cohomology. Preprint.
- [6] S. BLOCH, A. OGUS.- Gersten's conjecture and the homology of schemes (Annales de l'E.N.S., 4e série, t. 7, 1974, p. 181 à 202).
- [7] J.-L. COLLIOT-THÉLENE, J.-J. SANSUC, C. SOULE.- Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux (Duke Math. Journ. 50, 1983, 763-801).
- [8] P. DELIGNE.- Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence des suites spectrales (Publications mathématiques de l'I.H.E.S. 35).
- [9] T. EKEDAHL.- On the multiplicative properties of the De Rham-Witt complex. A paraître dans Archiv für Mathematik.
- [10] T. EKEDAHL.- Travail en préparation.
- [11] F. EL ZEIN.- Complexe dualisant et applications à la classe fondamentale d'un cycle (BSMF, Mémoire n° 58, 1978).
- [12] H. GILLET.- Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory (Advances in Math. 40, 203-289 (1981)).
- [13] A. GROTHENDIECK.- La théorie des classes de Chern (BSMF 86, 1958, 137-154).
- [14] A. GROTHENDIECK.- Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets dans "Dix exposés sur la cohomologie des schémas (North-Holland, Masson).
- [15] O. GABBER.- Lettre à Bloch du 11 Janvier 1982.

BIBLIOGRAPHIE

- [16] O. GABBER.- Gersten's Conjecture for some complexes of vanishing cycles. Preprint.
- [17] R. HARTSHORNE.- Residues and Duality (Lecture Notes in Math., n° 20, Springer-Verlag 1966).
- [18] R. HARTSHORNE.- On the De Rham cohomology of algebraic varieties (Publications mathématiques de l'I.H.E.S. 45, 1976 5-99).
- [19] L. ILLUSIE.- Complexe cotangent et déformations (Lecture Notes in Math., n° 239 et 283, Springer-Verlag 1971 et 1972).
- [20] L. ILLUSIE.- Complexe de De Rham-Witt (Astérisque 63, 1979, 83-112).
- [21] L. ILLUSIE.- Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline (Annales de l'E.N.S., 4e série, t. 12, 1979, 501-661).
- [22] L. ILLUSIE.- Finiteness, duality, and Künneth theorems in the cohomology of the De Rham-Witt complex.
- [23] L. ILLUSIE, M. RAYNAUD.- Les suites spectrales associées au complexe de De Rham-Witt (Publ. math. de l'IHES n° 57 p. 73-212, 1983).
- [24] J.-P. JOUANOLOU.- Riemann-Roch sans dénominateurs (Inventiones Math. 11, 15-26 (1970)).
- [25] K. KATO, S. SAITO.- Unramified class field theory of arithmetical surfaces (Annals of Math. 118 (1983), 241-275).
- [26] N. KATZ.- Crystalline cohomology, Dieudonné Modules, and Jacobi Sums (Automorphic forms, Tata Institute, Bombay, 1979, 165-246).
- [27] B. MAZUR, L. ROBERTS.- Local Euler characteristics (Invent. Math. 9 (1970), 201-234).
- [28] J.S. MILNE.- Duality in the flat cohomology of a surface (Annales de l'E.N.S. 4e série, t. 9 (1976), 171-202).
- [29] J.S. MILNE.- Zero cycles on algebraic varieties in non zero characteristic : Rotjman's theorem (Compositio Mathematica, vol. 47 (1982), 271-287).
- [30] J.S. MILNE.- Values of zeta functions of varieties over finite fields. Preprint.
- [31] N.1. NYGAARD.- Slopes of powers of Frobenius on crystalline cohomology (Annales de l'E.N.S. 4e série, t. 14 (1981), 369-401).
- [32] A. OGUS.- Hodge cycles and crystalline cohomology dans "Hodge cycles, Motives and Shimura varieties" (Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag 1982).