MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DIGNE
JEAN MICHEL

# Fonctions $L$ des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani

*Mémoires de la S. M. F. 2e série*, tome 20 (1985)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_20__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 20
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 113, 1985, fascicule 3

# FONCTIONS L DES VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG ET DESCENTE DE SHINTANI

par François DIGNE et Jean MICHEL (*)

Résumé: Dans ce mémoire, nous étudions les fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig d'un groupe réductif G sur un corps fini. Nous exprimons ces fonctions à l'aide des caractères de l'algèbre de Hecke et de descentes de Shintani des caractères du groupe des points de G sur une extension du corps de base. Ceci permet de comparer ces descentes pour les différentes extensions finies du corps. Nous montrons la périodicité de ces descentes en fonction du degré de l'extension. Après avoir exposé l'exemple des groupes de type $G_2$ , nous développons une conjecture générale sur la décomposition des descentes de Shintani des caractères unipotents et la rattachons aux résultats connus et à une conjecture de Kawanaka.

Abstract: In this paper, we study L-functions of the Deligne-Lusztig varieties of a reductive group G defined on a finite field. These functions are computed in terms of characters of the Hecke algebra and of Shintani "descents" of characters of the group of rational points of G over an extension of the base field. We show that the L-functions are periodic functions of the degree of the extension. We then explain the example of groups of type $G_2$ and make a general conjecture about the decomposition of Shintani descents of unipotent characters. We show how this conjecture is related to known results and to a conjecture by Kawanaka.

(*) Texte reçu le 11 février 1985, révisé le 18 novembre 1985

0037-9484/85-03/1-146/$ 16.60/ © Gauthier-Villars

# Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

SOMMAIRE

0. Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

I Définitions et notations

0. Notations. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1. Nombres de points fixes et fonctions $\mathcal{L}$ . . . . . . . 8

2. Variétés $Y_{\dot{w}}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

3. Caractères de Deligne et Lusztig. . . . . . . . . . 12

4. Variétés $X_w$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

5. Induction à partir d'un sous-groupe parabolique . . . 15

6. Fonctions de F-classe . . . . . . . . . . . . . . 18

7. Descente de Shintani . . . . . . . . . . . . . . . 19

II Algèbres de Hecke.

1. Algèbres de Hecke, algèbre générique, spécialisation . 22

a. Algèbres de Hecke . . . . . . . . . . . . . . . 22

b. Algèbre de Hecke générique . . . . . . . . . . . . 23

c. Algèbres produit semi-direct . . . . . . . . . . . 24

2. Produit scalaire dans les algèbres de Frobenius . . . 26

a. Algèbres de Frobenius . . . . . . . . . . . . . 26

b. Application aux algèbres de Hecke . . . . . . . . 27

c. Produit scalaire dans l'algèbre produit semi-direct.. 29

3. Rationalité des caractères des algèbres de Hecke . . . 32

4. Degrés génériques . . . . . . . . . . . . . . . . 42

III Les résultats principaux.

1. $N_w^m$ et descente de Shintani . . . . . . . . . . . . . 44
2. Le théorème principal . . . . . . . . . . . . . . . 46
3. Conséquences du théorème principal . . . . . . . . . . 52
4. Sous-groupes produits de groupes de type $A_n$ . . . . . 55
5. Application de la désingularisation de $\bar{X}_w$ . . . . . 60
6. Dualité de Curtis . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

IV Descente de Shintani de $G^F$ à $G^F$ .

1. Propriétés générales . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
2. Descente de Shintani et foncteur de Lusztig . . . . . 74
3. Les groupes symplectiques et orthogonaux . . . . . . 78
4. Etude de Sh dans $Sl_n$ et $SU_n$ . . . . . . . . . . . 83
5. Etude de Sh dans les groupes de type $G_2$ . . . . . 88

V Exemple de $Gl_n$ .

1. Drapeaux ; variétés $X_w$ . . . . . . . . . . . . . . 91
2. Drapeaux avec données affines. Variétés $Y_{\dot{w}}$ . . . . . 92
3. Calcul de $N_w^m$ pour les éléments de Coxeter . . . . . 94

VI Décomposition des descentes de Shintani; groupes de type $G_2$ . 107

VII Décomposition des descentes de Shintani; résultats et conjectures.

1. Préliminaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116
2. Valeurs propres de F dans le cas d'un groupe de type $E_8$ . 120
3. Conséquences de notre conjecture; conjecture de Kawanaka . 124
4. Démonstration de notre conjecture dans le cas des petits groupes $\Gamma$ . 130

Appendice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

Bibliographie. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139

Index des notations . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

## 0 INTRODUCTION

Le principal objet du présent travail est l'étude des fonctions $\mathcal{L}$ des variétés de Deligne-Lusztig $X_w$ d'un groupe algébrique réductif $G$ défini sur $\mathbb{F}_q$, et le résultat principal est que ces fonctions $\mathcal{L}$ s'expriment à l'aide des caractères de l'algèbre de Hecke $H_m$ de la représentation $E_m = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_{q^m})}^{G(\mathbb{F}_{q^m})} 1$ et de "descentes de Shintani" de $G(\mathbb{F}_{q^m})$ à $G(\mathbb{F}_q)$ des caractères de $G(\mathbb{F}_{q^m})$ intervenant dans $E_m$, ces descentes de Shintani étant des fonctions périodiques de $m$.

Précisément, si $F$ est l'endomorphisme de Frobenius correspondant à la structure rationnelle de $G$ et si $W$ est le groupe de Weyl de $G$, on a pour tout $g \in G(\mathbb{F}_q)$ et pour tout $m$ multiple de l'ordre $\delta$ de $F$ sur $W$ :

$$|X_w^{gF^m}| = \sum_{\tilde{\psi}} \tilde{\psi}(T_w F)\ (\mathrm{Sh}_{F^m/F}\, U_{\tilde{\psi}})\ (g) \qquad (\underline{\text{cf}}.\ \text{III } 3)$$

où $\tilde{\psi}$ parcourt un ensemble formé d'une extension à $H_m \rtimes \langle F \rangle$ de chaque caractère F-invariant de $H_m$ et où $\mathrm{Sh}_{F^m/F}\, U_{\tilde{\psi}}$ est la descente de Shintani d'une extension $U_{\tilde{\psi}}$ à $G(\mathbb{F}_{q^m}) \rtimes \langle F \rangle$ du caractère $U_\psi$ de $G(\mathbb{F}_{q^m})$ correspondant à la restriction $\psi$ à $H_m$ de $\tilde{\psi}$.

De plus, pour tout $m$ multiple de $\delta$, on a :

$$\mathrm{Sh}_{F^m/F}\, U_{\tilde{\psi}} = \sum_V c_{V,\psi}\, \omega_V^{m/\delta}\, V \qquad (\underline{\text{cf}}.\ \text{III } 3)$$

où $V$ parcourt l'ensemble des caractères unipotents de $G^F$, où $c_{V,\psi} \in \mathbb{Q}$ et où $\omega_V$ est une racine de l'unité.

Ces résultats sont plus généraux que ceux qui ont été trouvés indépendamment par Asai [AS1] et leur annonce dans [DM1] et [DM5] a été utile à Lusztig pour compléter son travail [L3] sur la décomposition des caractères de Deligne-Lusztig.

L'organisation des chapitres est comme suit :

Dans le chapitre I nous exprimons les fonctions $\mathcal{L}$ des variétés $X_w$ à l'aide des nombres de points fixes de $gF^m$ sur ces variétés, et donnons les premières propriétés de ces nombres de points fixes (rapport avec les caractères de Deligne-Lusztig, induction à la Harish-Chandra) ; puis nous définissons la "descente de Shintani" dans le cadre d'un groupe muni de deux automorphismes qui commutent, et vérifiant pour ces deux automorphismes l'analogue du théorème de Lang sur l'endomorphisme de Frobenius (généralisant ainsi les constructions de Shintani [SH] et Kawanaka [K1]).

Le chapitre II est consacré aux résultats nécessaires sur les algèbres de Hecke et sur certaines algèbres de Frobenius de la forme $H \rtimes \langle F \rangle$, formées du produit semi-direct d'une algèbre de Hecke $H$ par un automorphisme $F$ provenant d'un automorphisme du diagramme de Coxeter. Nous donnons une généralisation des résultats de [BC] sur la rationalité des caractères des algèbres de Hecke à ces algèbres et aux algèbres génériques correspondantes, ainsi qu'une généralisation du théorème de spécialisation classique pour les algèbres de Hecke.

Le chapitre III expose la démonstration du théorème principal. Nous exprimons d'abord les nombres de points fixes $|X_w^{gF^m}|$ à l'aide des caractères de l'algèbre $H_m$ et de descentes de Shintani des caractères de $G(\mathbf{F}_{q^m})$ ; puis, en utilisant les résultats du chapitre II sur la rationalité des caractères des algèbres de Hecke, nous montrons que les coefficients qui interviennent sont produit d'un nombre rationnel $c_{V,\psi}$ par la puissance m-ième d'une racine de l'unité $\omega_V$ et par un polynôme en $q^m$. Ceci permet de "passer à la limite pour $m = 0$", ce qui lie les coefficients $c_{V,\psi}$ à la décomposition des caractères de Deligne-Lusztig $R_w^1$.

## Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

Dans le reste du chapitre III nous donnons divers résultats donnant des précisions sur les nombres $c_{V,\psi}$ , utilisant d'abord les propriétés des groupes linéaires, puis en utilisant une désingularisation de la variété $\bar{X}_w$ , et enfin en utilisant l'opérateur de dualité de Curtis.

Les résultats du chapitre III montrent que l'étude de la décomposition des caractères $R_w^1$ se ramène, pour les groupes déployés, à l'étude de la descente de Shintani Sh de $G(\mathbb{F}_q)$ à $G(\mathbb{F}_q)$ ; le chapitre IV est consacré à cette étude.

Nous donnons d'abord des résultats généraux sur l'opérateur Sh , en particulier au paragraphe 2 nous montrons que Sh commute au foncteur de Lusztig $R_L^G$ , généralisant ainsi le résultat de notre note [DM2] ; puis nous décrivons l'action de Sh dans le cas des groupes classiques et d'un groupe de type $G_2$ .

Dans le chapitre V, nous développons l'exemple du caractère de Deligne-Lustig $R_w^1$ , où w est l'élément de Coxeter, dans le groupe $Gl_n$ ; il est possible, dans ce cas, d'obtenir des résultats explicites par une méthode combinatoire.

Dans le chapitre VI, nous montrons comment, pour un groupe de type $G_2$, déterminer les descentes de Shintani des caractères unipotents de la série principale et les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius sur les variétés de Deligne-Lusztig à partir de la table des caractères de l'algèbre de Hecke.

Dans le chapitre VII, nous développons une conjecture générale sur les décompositions des descentes de Shintani des caractères unipotents en indiquant quelle partie de cette conjecture peut être prouvée par nos méthodes. En particulier (VII, 2) nous montrons comment calculer les "valeurs propres" $\omega_V$ de l'endomorphisme de Frobenius attachées au caractère V, et nous prouvons le cas m=1 de la conjecture pour certains groupes (VII, 4). Asaï a récemment prouvé le cas m=1 de cette conjecture en toute généralité ([AS2] ,[AS3] ,[AS4]). Enfin, nous montrons qu'une conjecture récente de Kawanaka ([K2]), que celui-ci a démontrée dans le cas où m est premier à l'ordre du groupe $G(\mathbf{F}_q)$ (cf [K3]) est conséquence de notre conjecture. Pour ce faire, nous introduisons une base de l'espace engendré par les caractères unipotents "transformée de Mellin" de la base canonique. Dans cette base, les opérateurs considérés (en particulier la descente de Shintani) ont des expressions particulièrement simples.

Les constants encouragements et les nombreuses suggestions de P. Cartier ont été essentiels à la réalisation de ce travail. Nous remercions également G. Lusztig dont les travaux ont un rôle fondamental dans la théorie, et avec Lequel nous avons eu une discussion profitable sur la démonstration du théorème principal. Enfin nous remercions M. Broué, L. Puig et les autres membres de l'équipe des groupes finis de Paris qui nous ont accueillis dans leur séminaire, où nous avons pu exposer nos résultats et en discuter.

Nos remerciements vont également à M. Demazure et J. Giraud qui ont accepté de faire partie des jurys des thèses* dont ce mémoire fait partie, ainsi qu'à F. Ledrappier et H. Cohen qui nous ont fourni d'intéressant sujets de seconde thèse.

J. Tits nous a fait l'honneur de présider ces jurys.

La frappe du présent mémoire a été assurée par Maryse Loiseau et Claire Michel, qu'elles trouvent ici nos remerciements.

*Thèses soutenues en juin 1984 àl'Université de Paris XI.

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

# I DEFINITIONS ET NOTATIONS

## 0. Notations.

Soit $X$ un ensemble (resp. une variété algébrique), et soit $g$ un automorphisme de $X$. On note ${}^g x$ l'image de l'élément $x$ de $X$ par l'action de $g$, et $X^g$ l'ensemble (resp. la sous-variété) des points fixes de $X$ sous l'action de $g$.

En particulier, si $X$ est un sous-groupe d'un groupe $G$, et si $g \in G$ normalise $X$, on fait agir $g$ par conjugaison sur $X$, et on écrit donc ${}^g x$ pour $gxg^{-1}$.

Si $H$ est un groupe fini et $X$ l'ensemble des caractères de $H$, on fait agir $G = \mathrm{Aut}(H)$ sur $X$ en posant : ${}^g\chi({}^g h) = \chi(h)$, pour tout $\chi \in X$, tout $g \in G$, et tout $h \in H$.

Si $H$ est un groupe fini ou une algèbre semi-simple, on note $\hat{H}$ l'ensemble des caractères irréductibles de $H$.

Dans toute la suite, si $G$ est un groupe fini, l'ensemble des fonctions sur $G$ à valeurs complexes sera muni du produit scalaire défini par :

$$< f,g >_G = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \overline{f(x)}\, g(x) \quad .$$

Enfin, on note $|X|$ ou $\# X$ le cardinal d'un ensemble fini $X$.

Nous désignerons toujours par $\mathbb{F}_q$ le corps fini à $q$ éléments de caractéristique $p$ et par $\overline{\mathbb{F}}_q$ sa clôture algébrique. Si nous considérons une variété algébrique sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ définie sur $\mathbb{F}_q$, nous noterons $F$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant.

Pour tout nombre premier $l$ différent de $p$, nous noterons $\overline{\mathbb{Q}}_l$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_l$ des nombres $l$-adiques, et nous supposerons choisis des isomorphismes $i_l : \overline{\mathbb{Q}}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Nous identifierons toute fonction $f$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ à la fonction $i_l \circ f$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si $X$ est un schéma défini sur $\mathbb{F}_q$, nous noterons $H_c^i(X, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ (ou $H_c^i(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le i-ième groupe de cohomologie l-adique à supports propres de $X$.

Si $V^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$ est un espace vectoriel gradué, et si $f$ est un endomorphisme de $V^*$, on pose :

$$\dim^* V^* = \sum_i (-1)^i \dim V^i$$

$$\operatorname{Trace}(f \mid V^*) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}(f \mid V^i) \quad .$$

Enfin nous utiliserons les résultats classiques suivants :

Proposition 0.1 (théorème de Lang, cf. [SB] , E, 12.7) - Soit $G$ un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ et soit $F$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant ; alors l'application $x \longmapsto x^{-1}.{}^F x$ de $G$ dans $G$ est surjective.

Corollaire 0.2 - Soient $G$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}_q$ et $H$ un sous-groupe fermé connexe rationnel de $G$. Alors, dans toute classe rationnelle de $G/H$, il y a un élément rationnel.

Ce résultat s'obtient facilement par application de la proposition 0.1 dans le groupe $H$.

## 1. - Nombres de points fixes et fonctions $\mathcal{L}$ .

Soit $Y$ une variété algébrique sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, munie d'une structure rationnelle sur $\mathbb{F}_q$. Soit $G$ un groupe fini opérant sur $Y$. On suppose que $F$ opère sur $G$ de façon que pour tout couple $(g,y) \in G \times Y$, on ait ${}^F g.{}^F y = {}^F(g.y)$. Posons, pour tout $g \in G$ et tout entier $m \geqslant 1$ :

$$N_Y^m(g) = \operatorname{Trace}(gF^m \mid H_c^*(Y, \bar{\mathbb{Q}}_l)) \quad .$$

On a, d'après le théorème de Lefschetz (cf [SGA]) :

$$N_Y^m(g) = |Y^{gF^m}| \quad ,$$

en particulier $N_Y^m(1) = |Y(\mathbb{F}_{q^m})|$ .

Nous définissons, pour tout caractère $\chi$ de $G$ :

$$\hat{N}_Y^m(\chi) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\, N_Y^m(g) \quad ,$$

d'où $N_Y^m(g) = \sum_{\chi} \chi(g)\, \hat{N}_Y^m(\chi)$ pour tout $g \in G$ .

Nous définissons la fonction $\mathcal{L}$ associée à $\chi$ par :

$$\mathcal{L}(\chi, F, Y) = \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} N_Y^m(\chi)\, t^m/m\Big) \in \mathbb{Q}\,[[t]] \quad .$$

<u>Proposition</u> 1.1 - $\hat{N}_Y^m(\chi) = \chi(1)^{-1}\, \mathrm{Trace}(F^m \mid H_c^*(Y)_\chi)$ si ${}^{F^m}\chi = \chi$ ,

$= 0$ sinon,

où $H_c^*(Y)_\chi$ est la composante isotypique de type $\chi$ de $H_c^*(Y, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ .

Démonstration - On a $\hat{N}_Y^m(\chi) = \chi(1)^{-1}\, \mathrm{Trace}\,(F^m P_\chi \mid H_c^*(Y))$, où $P_\chi = \chi(1)\, |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g$ est le projecteur sur $H_c^*(Y)_\chi$ . Or l'image de $H_c^*(Y)_\chi$ par $F$ est $H_c^*(Y)_{F_\chi}$ , donc la trace de $F^m P_\chi$ est nulle si ${}^{F^m}\chi \neq \chi$ . Si ${}^{F^m}\chi = \chi$ on a : $N_Y^m(\chi) = \chi(1)^{-1}\, \mathrm{trace}(F^m \mid H_c^*(Y)_\chi)$.

<u>Corollaire</u> 1.2 - Soit $\chi$ un caractère fixé. Posons $\eta = \inf\{m \geqslant 1 \mid {}^{F^m}\chi = \chi\}$, alors :

$$\mathcal{L}(\chi, F, Y)^{\eta\chi(1)} = \det((1 - t^\eta F^\eta) \mid H_c^*(Y)_\chi)^{-1} \quad .$$

Démonstration - On a, d'après la proposition 1.1 :

$$\sum_{m\geq 1} \hat{N}_Y^m(\chi)\, t^m/m = \sum_{\eta | m} \chi(1)^{-1}\, \mathrm{Trace}(F^m \mid H_c^*(Y)_\chi)\, t^m/m \quad ,$$

car ${}^{F^m}\chi$ est égal à $\chi$ si et seulement si $\eta \mid m$ .

Soit $\xi$ l'ensemble des valeurs propres de $F^\eta$ dans $H_c^*(Y)_\chi$ et, pour $\lambda \in \xi$, soit $d_{\chi,\lambda} = \dim^*(P_\lambda^*)$, où $P_\lambda^*$ est le sous-espace primaire de $H_c^*(Y)_\chi$ associé à $\lambda$ . Alors on a :

$$\mathrm{Trace}(F^m \mid H_c^*(Y)_\chi) = \sum_{\lambda\in\xi} \lambda^{m/\eta}\, d_{\chi,\lambda} \quad \text{, pour tout } m \geq 1 \text{ multiple de } \eta .$$

Donc :

$$\mathcal{L}(\chi,\ F,\ Y)^{\eta\,\chi(1)} = \exp(\eta\, \chi(1) \sum_{m\geq 1} \hat{N}_Y^m(\chi)\, t^m/m)$$

$$= \prod_\lambda \exp(\eta \sum_{\eta | m} d_{\chi,\lambda}\, \lambda^{m/\eta}\, t^m/m)$$

$$= \prod_\lambda (1 - \lambda\, t^\eta)^{-d_{\chi,\lambda}} = \det(1 - F^\eta\, t^\eta \mid H_c^*(Y)_\chi)^{-1} \quad .$$

<u>Remarque</u> 1.3 - On a $\mathcal{L}(\chi,\ F,\ Y)^{\eta\chi(1)} = \mathcal{L}_\eta(\chi,\ F^\eta,\ Y)^{\chi(1)}$, où $\mathcal{L}_\eta$ est la série obtenue en changeant $t$ en $t^\eta$ dans la série $\mathcal{L}$ .

On pose $\zeta(Y,\ F) = \exp(\sum_{m\geq 1} N_Y^m(1)\, t^m/m) = \exp(\sum_{m\geq 1} \sum_\chi \hat{N}_Y^m(\chi)\, \chi(1)\, t^m/m)$

$$= \prod_\chi \mathcal{L}(\chi,\ F,\ Y)^{\chi(1)} \quad .$$

On a : $\zeta(Y,\ F) = \det(1 - tF \mid H_c^*(Y))^{-1}$ , par un argument analogue à la démonstration du corollaire 1.2 .

## 2. - <u>Variétés</u> $Y_{\dot{w}}$ .

Dans toute la suite, G désignera un groupe réductif connexe, défini sur le corps $\mathbb{F}_q$ . Nous fixerons un sous-groupe de Borel rationnel $B_0$ de G , et un tore maximal rationnel $T_0$ de $B_0$ . On a $B_0 = T_0U_0$ , si $U_0$ désigne le radical unipotent de $B_0$ . Nous noterons $W$ le groupe de Weyl de $G$ , identifié à $N_G(T_0)/T_0$ .

Soit $\dot{w}\in N_G(T_0)$ un représentant de $w\in W$ . Considérons la variété $Z_{\dot{w}}$ définie par :

$$Z_{\dot{w}} = \{x\in G \mid x^{-1}.{}^F x\in \dot{w}U_0\} .$$

Le groupe $T_0^{wF}$ agit sur cette variété, l'action de $t\in T_0^{wF}$ étant donnée par $x \longmapsto xt^{-1}$ , pour $x\in Z_{\dot{w}}$ . D'autre part, pour tout $m$ tel que ${}^{F^m}\dot{w} = \dot{w}$ , la classe à gauche $\dot{w}U_0$ est stable par $F^m$ , donc l'endomorphisme $F^m$ agit sur $Z_{\dot{w}}$ . Le groupe $G^F$ agit par translations à gauche sur $Z_{\dot{w}}$ .

Comme le groupe $U_0\cap wU_0\, w^{-1}$ agit par translations à droite sur $Z_{\dot{w}}$ , on peut définir la variété quotient :

$$Y_{\dot{w}} = \{x\in G \mid x^{-1}.{}^F x\in \dot{w}U_0\}/(U_0\cap wU_0\, w^{-1}) .$$

Les actions de $G^F$ , de $F^m$ et de $T_0^{wF}$ sur $Z_{\dot{w}}$ induisent des actions sur le quotient $Y_{\dot{w}}$ , car le groupe $U_0\cap wU_0\, w^{-1}$ est normalisé par $T_0^{wF}$ et stable sous l'action de $F^m$ . Les actions de $G^F$ et de $T_0^{wF}$ sur $Y_{\dot{w}}$ commutent clairement.

Nous pouvons appliquer les constructions de I,1 en prenant comme variété $Y$ la variété $Y_{\dot{w}}$ et comme groupe le groupe $G^F\times T_0^{wF}$ . Nous écrirons $N^m_{\dot{w}}(g,t)$ pour $N^m_{Y_{\dot{w}}}(g,t)$ et $\hat{N}^m_{\dot{w}}(\chi, \theta)$ pour $\hat{N}^m_{Y_{\dot{w}}}(\chi, \theta)$ si $\chi$ est un caractère irréductible de $G^F$ , et $\theta$ un caractère de degré 1 de $T_0^{wF}$ (rappelons que $m$ est tel que ${}^{F^m}\dot{w} = \dot{w}$).

Nous posons aussi :

$$N^m_{\dot w}(\theta)(g) = |T_0^{wF}|^{-1} \sum_{t\in T_0^{wF}} \theta(t^{-1})\ N^m_{\dot w}(g,t)\ ,\quad \text{pour}\quad g\in G^F\quad .$$

$$\text{On a } N^m_{\dot w}(\theta)(g) = \begin{cases} \mathrm{Trace}(gF^m \mid H^*_c(Y_{\dot w})_\theta) & \text{si } {}^{F^m}\theta = \theta\ , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou $H^*_c(Y_{\dot w})_\theta$ est la composante isoptypique de type $\theta$ de $H^*_c(Y_{\dot w})$ pour l'action de $T_0^{wF}$ (cf. proposition 1.1).

Si nécessaire, nous préciserons le groupe en écrivant $N^m_{\dot w,G}$ .

3. - Caractères de Deligne et Lusztig.

Définition 3.1 - On pose $R^\theta_w(g) = \mathrm{Trace}(g\mid H^*_c(Y_{\dot w})_\theta)$, pour tout $g\in G^F$ , et tout caractère $\theta$ de degré 1 de $T_0^{wF}$ .

La notation est justifiée car le caractère virtuel de $G^F$ ainsi défini est indépendant du représentant $\dot w$ de $w$ . (cf. Deligne et Lusztig [DL] 1.8).

Si $T$ est un tore maximal rationnel de type $w$ , on peut identifier $\theta$ à un caractère de $T^F$ , et écrire $R^G_T(\theta)$ pour $R^\theta_w$ .

Avec les notations de I,1, on a :

Proposition 3.2 -

$$R^\theta_w(g) = -\Big[\sum_\chi \chi(g)\ D\mathcal{L}(\chi,\theta,F^\mu,Y_{\dot w})\Big]_{t=\infty}$$

où $D$ est l'opérateur différentiel défini par $Df = t\ df/fdt$ et où $\mu$ est tel que $F^\mu\dot w = \dot w$ . La somme porte sur les caractères $\chi$ du groupe $G^F$ .

Démonstration - On a, d'après le corollaire 1.2,

$$\eta\,\chi(1)\,D\mathcal{L}(\chi,\theta,F^{\mu},Y_{\dot{w}}) = \sum_{\lambda} d_{\chi,\theta,\lambda}\,\eta t^{\eta}\lambda\,(1-\lambda t^{\eta})^{-1},$$

où $\lambda$ parcourt les valeurs propres de $F^{\mu\eta}$ sur $H_c^*(Y_{\dot{w}})$ et où $d_{\chi,\theta,\lambda}$ est la dimension (au sens $\dim^*$) du sous-espace primaire de $H_c^*(Y_{\dot{w}})_{\chi,\theta}$ associé à la valeur propre $\lambda$ et où on a $\eta = \inf\{m \geqslant 1 \mid {}^{F^{m\mu}}\theta = \theta\}$.

Donc, pour $t = \infty$, on obtient $-\eta \sum_{\lambda} d_{\chi,\theta,\lambda}$. D'où :

$$-\Big[\sum_{\chi}\chi(g)\,D\mathcal{L}(\chi,\theta,F^{\mu},Y_{\dot{w}})\Big]_{t=\infty} = \sum_{\chi,\lambda}\chi(g)\,\chi(1)^{-1}\,d_{\chi,\theta,\lambda}$$
$$= \mathrm{Trace}(g \mid H_c^*(Y_{\dot{w}})_{\theta}).$$

<u>Remarque</u> 3.3 - D'après la démonstration précédente, on a :

$$R_w^{\theta}(g) = \sum_{\lambda,\chi} d_{\chi,\theta,\lambda}\,\chi(g)\,\chi(1)^{-1},$$

et, pour tout $m$ multiple non nul de $\eta\mu$ :

$$N_{\dot{w}}^{m}(\theta)(g) = \sum_{\lambda,\chi} \lambda^{m/\eta\mu}\,d_{\chi,\theta,\lambda}\,\chi(g)\,\chi(1)^{-1}.$$

Nous exprimerons ceci en disant que $R_w^{\theta}$ est la "limite pour $m = 0$" de $N_{\dot{w}}^{m}(\theta)$.

Si $\dot{w} = 1$, la variété $Y_1$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de $F$ dans $G/U_0$, donc $F$ agit trivialement sur $Y_1$, et $N_1^{m}(\theta) = R_1^{\theta}$.

## 4. - <u>Variétés</u> $X_w$ -

Considérons la variété définie par :

$$X_w = \{x \in G \mid x^{-1}.{}^{F}x \in wB_0\} / (B_0 \cap wB_0 w^{-1}).$$

Nous pouvons identifier cette variété au quotient de $Y_{\dot{w}}$ par l'action de $T_0^{wF}$, pour tout représentant $\dot{w}$ de $w$ (<u>cf</u>. [DL] 1.8).

La variété $X_w$ est munie d'une action du groupe $G^F$, et de $F^m$, pour tout $m$ tel que ${}^{F^m}w = w$. La valeur de $N_{\dot w}^m(\theta)$ pour $\theta = 1$ est liée à la variété $X_w$ :

<u>Proposition</u> 4.1 - (<u>cf</u>. [D.L.] 1.9) - Si $m$ est tel que ${}^{F^m}w = w$ et si on choisit un représentant $\dot w$ de $w$ tel que ${}^{F^m}\dot w = \dot w$, (ce qui est toujours possible, <u>cf</u>. corollaire 0.2), on a, pour tout $g \in G^F$ :

$$N_{\dot w}^m(1)(g) = \mathrm{Trace}(gF^m \mid H_c^*(X_w, \bar{\mathbb{Q}}_l)) \quad ,$$

$$R_w^1(g) = \mathrm{Trace}(g \mid H_c^*(X_w, \bar{\mathbb{Q}}_l)) \quad .$$

Démonstration - $N_{\dot w}^m(1)(g) = |T_0^{wF}|^{-1} \sum_{t \in T_0^{wF}} N_{\dot w}^m(g,t)$

$$= \mathrm{Trace}(g\, F^m \mid H_c^*(Y_{\dot w}, \bar{\mathbb{Q}}_l)^{T_0^{wF}}) \quad .$$

Or $H_c^*(Y_{\dot w})^{T_0^{wF}} = H_c^*(Y_{\dot w}/T_0^{wF})$ (<u>cf</u> [SR] 5.10), et $Y_{\dot w}/T_0^{wF} \simeq X_w$. D'où le premier énoncé. Le résultat sur $R_w^1$ s'en déduit par "passage à la limite pour $m=0$", ou directement d'après la définition de $R_w^\theta$.

<u>Corollaire</u> 4.2 -

(i) $N_{\dot w}^m(1)$ est indépendant du représentant $\dot w$ de $w$ choisi.

(ii) $R_w^1$ est à valeurs entières (<u>cf</u>. [DL] 3.3).

Dans la suite, nous écrirons $N_w^m$ pour $N_{\dot w}^m(1)$ .

Considérons la variété $X$ des sous-groupes de Borel de $G$ ; on a $X \simeq G/B_0$, cet isomorphisme étant défini sur $\mathbb{F}_q$. Les orbites de $G$ dans $X \times X$ sont en bijection avec les éléments du groupe de Weyl $W$, si on associe à $w$

l'orbite du couple $(B_0, {}^wB_0)$. Nous dirons que deux sous-groupes de Borel sont en position relative $w$ si leur orbite correspond à $w$. Nous noterons $B \xrightarrow{w} B'$ l'appartenance de $(B,B')$ à l'orbite correspondant à $w$. Avec ces notations, l'application qui à $w \in X_w$ associe le sous-groupe de Borel ${}^xB_0$ définit un isomorphisme : $X_w \xrightarrow{\sim} \{B \in X \mid B \xrightarrow{w} {}^FB\}$.

5. - Induction à partir d'un sous-groupe parabolique -

Soient $P$ un groupe fini, $U$ un sous-groupe distingué de $P$ et $L = P/U$. On définit un opérateur $P_U$ qui associe à toute fonction $f$ sur $P$ à valeurs complexes la fonction sur $L$ définie par : $(P_Uf)(x) = |U|^{-1} \sum_y f(y)$ pour tout $x \in L$, où $y$ parcourt l'image réciproque de $x$ dans $P$.

Notons ${}^*P_U$ l'adjoint de $P_U$ pour le produit scalaire défini dans I,0. On a :

si $x \in P$ : $\quad ({}^*P_Uf)(x) = f(p(x))$ ,

si $p$ désigne l'homomorphisme quotient $P \longrightarrow L$.

Nous pouvons appliquer ceci au cas où l'on considère le groupe $P^F$ des points rationnels d'un sous-groupe parabolique rationnel de $G$, et le sous-groupe distingué $U^F$ de $P^F$, où $U$ est le radical unipotent de $P$. Nous écrirons $P_U$ et ${}^*P_U$ pour $P_{U^F}$ et ${}^*P_{U^F}$. Le quotient $P^F/U^F$ est isomorphe à $L^F$, si $L$ est un sous-groupe de Lévi rationnel quelconque de $P$. On définit l'opérateur $R_L^G$ des fonctions centrales sur $L^F$ dans les fonctions centrales sur $G^F$ par :

$$R_L^G = \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} \circ {}^*P_U \quad .$$

L'opérateur ${}^*R_L^G$ défini par : ${}^*R_L^G = P_U \circ \mathrm{Res}_{P^F}^{G^F}$ est l'adjoint de $R_L^G$.

L'omission de $P$ dans ces notations est possible car ces opérateurs ne dépendent pas du sous-groupe parabolique $P$ admettant $L$ comme sous-groupe de Levi (cf. [L.5] 2.4).

Théorème 5.1 - Soit $L$ le sous-groupe de Lévi rationnel contenant $T_0$ d'un sous-groupe parabolique rationnel $P$ de $G$ contenant $B_0$. Soit $W_L = N_L(T_0)/T_0$ le groupe de Weyl de $L$. C'est un sous-groupe parabolique de $W$. Si $\dot{w} \in N_L(T_0)$, pour tout $m$ tel que ${}^{F^m}\dot{w} = \dot{w}$ et pour tout $t \in T_0^{wF}$, on a :

$$R_L^G(1 \longmapsto N^m_{\dot{w},L}(1,t)) = (g \longmapsto N^m_{\dot{w},G}(g,t)) \quad .$$

Corollaire 5.2 - Sous les hypothèses du théorème, si $\theta$ est un caractère de $T_0^{wF}$, et si ${}^{F^m}\theta = \theta$, on a :

$$R_L^G\, N^m_{\dot{w},L}(\theta) = N^m_{\dot{w},G}(\theta) \quad .$$

Le corollaire se déduit immédiatement du théorème.

Le théorème et son corollaire sont des généralisations faciles de [DL] 8.2 ; la démonstration est analogue.

Démonstration du théorème :

Considérons la variété $Y_{\dot{w}}$ ; on peut la décomposer en réunion de sous-variétés disjointes :

$$Y_{\dot{w}} = \coprod_{P'} \{x \in G \mid x^{-1}.{}^F x \in \dot{w}U_0 \quad , \quad xPx^{-1} = P'\} / (U_0 \cap {}^{\dot{w}}U_0) \quad ,$$

où $P'$ décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques conjugués à $P$ sous $G^F$. En effet, il est clair que ces sous-variétés sont disjointes, et, d'autre part, si $x(U_0 \cap {}^{\dot{w}}U_0) \in Y_{\dot{w}}$, alors $xPx^{-1}$ est rationnel, donc conjugué sous $G^F$ à $P$ (cf. 0.2).

Nous noterons $Y_{\dot{w},P'}$ la sous-variété indexée par $P'$ dans cette décomposition. Les actions de $F^m$ et de $T_0^{wF}$ préservent cette décomposition.

Si $g \in G^F$, l'application $x \longmapsto gx$ définit un isomorphisme de $Y_{\dot{w},P}$ sur $Y_{\dot{w},\,{}^gP}$. Cet isomorphsime est compatible avec les actions de $F^m$ et de $T_0^{wF}$. On a, pour tout $h$ dans $G^F$ et tout $t \in T_0^{wF}$ :

$$N^m_{\dot{w},G}(h,t) = \sum_{P'} (\text{nombre de points fixes de } (h,t)F^m \text{ dans } Y_{\dot{w},P'}) .$$

Or $(h,t)F^m$ ne peut avoir de point fixe dans $Y_{\dot{w},P'}$ que si $h \in P'$. Donc :

$$N^m_{\dot{w},G}(h,t) = \sum_{P' \ni h} (\text{nombre de points fixes de } (h,t)F^m \text{ dans } Y_{\dot{w},P'}) .$$

Si $P' = {}^gP$, avec $g \in G^F$, le nombre de points fixes de $(h,t)F^m$ dans $Y_{\dot{w},P'}$ est égal au nombre de points fixes de $(g^{-1}hg,\ t)F^m$ dans $Y_{\dot{w},P}$. Donc :

$$N^m_{\dot{w},G}(h,t) = |P^F|^{-1} \sum_{\{g \in G^F \mid g^{-1}hg \in P\}} (\text{nombre de points fixes de } (g^{-1}hg,\ t)F^m \text{ dans } Y_{\dot{w},P})$$

(car le normalisateur de $P^F$ dans $G^F$ est $P^F$).

Remarquons alors que $Y_{\dot{w},P}$ s'identifie à la variété analogue à $Y_{\dot{w}}$ pour le groupe $L$, c'est-à-dire :

$$\{x \in L \mid x^{-1}.{}^Fx \in \dot{w}(U_0 \cap L)\} / [(U_0 \cap L) \cap {}^{\dot{w}}(U_0 \cap L)]$$

En effet :

$$Y_{\dot{w},P} = \{x \in P \quad x^{-1}.{}^Fx \in \dot{w}U_0\} / (U_0 \cap {}^{\dot{w}}U_0) \quad .$$

Or le radical unipotent $U_P$ de $P$ est inclus dans $U_0 \cap {}^{\dot{w}}U_0$ car il est normalisé par $\dot{w} \in L$. Donc :

$$\begin{aligned} Y_{\dot{w},P} &= \{ x \in L \mid x^{-1}.{}^Fx \in \dot{w}U_0\} / (U_0 \cap {}^{\dot{w}}U_0 \cap L) \\ &= \{ x \in L \mid x^{-1}.{}^Fx \in \dot{w}.U_0 \cap L\} / [(U_0 \cap L) \cap {}^{\dot{w}}(U_0 \cap L)] \ , \end{aligned}$$

d'où l'assertion.

On voit d'autre part que si $p = lu \in P^F$ , avec $l \in L^F$ et $u \in U_P^F$ , alors p et l ont même action sur $Y_{\dot{w},P}$ . Donc :

$$N^m_{\dot{w},G}(h,t) = |P^F|^{-1} \sum_{\{g \in G^F \mid g^{-1}hg \in P^F\}} N^m_{\dot{w},L}(\overline{g^{-1}hg}, t) \quad ,$$

où $\overline{g^{-1}hg}$ est la composante de $g^{-1}hg$ dans L . D'où le théorème.

## 6. - Fonctions de F-classe.

Soient H un groupe fini et $<F>$ un groupe cyclique de générateur F agissant sur H . On notera $h \longmapsto {}^F h$ l'action de F . On considère le produit semi-direct $\Gamma = H \rtimes <F>$ .

Définition 6.1 - On dit que deux éléments h et k de H sont F-conjugués si les éléments hF et kF de $\Gamma$ sont conjugués.

Notons que hF et kF sont conjugués dans $\Gamma$ si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de H , car $F(hF)F^{-1} = h^{-1}(hF)h$ . Donc h et k sont F-conjugués si et seulement s'il existe $l \in H$ tel que $l.h.{}^F l^{-1} = k$ .

Définition 6.2 - On appelle fonction de F-classe sur H une fonction sur H constante sur les classes de F-conjugaison.

Remarque 6.3 -

(i) On identifiera souvent de telles fonctions aux restrictions à HF des fonctions centrales sur $\Gamma$ .

(ii) Si on prolonge une fonction de F-classe $f$ sur $HF$, en une fonction centrale $\tilde{f}$ sur $\Gamma$ par 0 en dehors de $HF$, on a :

$$< f_1 \mid f_2 >_H = |<F>| < \tilde{f}_1 \mid \tilde{f}_2 >_\Gamma \quad ,$$

où le produit scalaire est défini comme dans I, 0 .

(iii) Si $f_1$ et $f_2$ sont deux caractères irréductibles de $\Gamma$ dont les restrictions à $H$ sont irréductibles, alors :

$$\sum_{h \in H} \overline{f_1(hF)}\, f_2(hF) = \begin{cases} \xi(F) \sum_{h \in H} \overline{f_1(h)}\, f_2(h), & \text{s'il existe } \xi \in \widehat{<F>} \text{ tel que } f_1 = f_2\,\xi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette propriété est démontrée dans le cadre des algèbres de Frobenius dans II, 2.11.

## 7. - Descente de Shintani

Définition 7.1 - On dira qu'un groupe $G$ sur lequel agit un groupe cyclique $<F>$ vérifie la propriété de Lang pour $F$ si :

(i) $G^F$ est fini ;

(ii) l'application $L_F : G \longrightarrow G$ définie par $g \longmapsto g^{-1}.{}^F g$ est surjective.

Considérons deux groupes cycliques $<F>$ et $<F'>$ agissant sur $G$, et supposons que $G$ vérifie la propriété de Lang pour $F$ et aussi pour $F'$. Si de plus les actions de $F$ et $F'$ sur $G$ commutent, alors $G^F$ est stable par $F'$, et $G^{F'}$ est stable par $F$. Cela a donc un sens de parler de classes de $F'$-conjugaison dans $G^F$, ou de classes de $F$-conjugaison dans $G^{F'}$.

Proposition 7.2 -

(i) Sous les hypothèses précédentes la correspondance

$$L_{F'}(h) \longleftrightarrow L_F(h^{-1}) \quad , \text{ où } h\in G \ ,$$

définit une bijection, notée $N_{F/F'}$ des classes de F'-conjugaison du groupe $G^F$ sur les classes de F-conjugaison du groupe $G^{F'}$.

(ii) Si $c$ est une classe de F'-conjugaison de $G^F$, on a :

$$|G^{F'}|\,|c| = |G^F|\,|N_{F/F'}(c)| \quad .$$

Démonstration -

(i) Un calcul évident prouve que $L_{F'}(h)\in G^F$ si et seulement si $L_F(h^{-1})\in G^{F'}$. La correspondance induit une application bien définie de $G^F$ dans les classes de F-conjugaison de $G^{F'}$ : en effet, si $L_{F'}(h) = L_{F'}(k)$, alors $hk^{-1}$ est dans $G^{F'}$, et, comme :

$$hk^{-1}.L_F(k^{-1}).{}^F(hk^{-1})^{-1} = L_F(h^{-1}) \quad ,$$

les éléments $L_F(h^{-1})$ et $L_F(k^{-1})$ sont F-conjugués par un élément de $G^{F'}$. D'autre part, l'application ainsi définie envoie deux éléments F'-conjugués de $G^F$ sur la même classe de F-conjugaison de $G^{F'}$ ; en effet, si $g\in G^F$, et si $h\in G$ vérifie $L_{F'}(h)\in G^F$, alors $g.L_{F'}(h).{}^{F'}g^{-1} = L_{F'}(hg^{-1})$, et l'image de cet élément est la classe de $L_F(gh^{-1}) = L_F(h^{-1})$, car $g\in G^F$.

L'application $N_{F/F'}$ est bijective car son inverse est clairement $N_{F'/F}$.

(ii) Le membre de gauche de l'égalité est le cardinal de l'ensemble des $h\in G$ tels que $L_{F'}(h)\in c$, et celui de droite est le cardinal de l'ensemble des $h\in G$ tels que $L_F(h^{-1})\in N_{F/F'}(c)$. Ces deux ensembles sont égaux, par définition de $N_{F/F'}$.

<u>Définition</u> 7.3 - On appelle descente de Shintani de $G^F$ à $G^{F'}$ , notée $Sh_{F/F'}$ l'application de l'ensemble des fonctions de F'-classe sur $G^F$ dans l'ensemble des fonctions de F-classe sur $G^{F'}$ définie par :

$Sh_{F/F'}(f) = f \circ N_{F'/F}$ .

<u>Remarques</u> 7.4 -

(1) Dans le cas particulier où $F = F'$ , l'application $Sh_{F/F}$ est une involution sur les fonctions centrales sur $G^F$ .

(2) D'après la propriété (ii) de la proposition 7.2, $Sh_{F/F'}$ est une isométrie (le produit scalaire étant défini comme dans I, 0).

<u>Remarque</u> 7.5 - On peut appliquer tout ce qui précède au cas où $G$ est un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ , et où l'on considère les deux endomorphismes de Frobenius $F$ et $F^m$ .

Dans ce cas, la descente de Shintani $Sh_{F^m/F}$ est une application des fonctions de F-classe sur $G^{F^m}$ dans les fonctions centrales sur $G^F$ (car $F^m$ agit trivialement sur $G^F$).

Par abus de notation, si $\chi$ est un caractère de $G^{F^m} \rtimes \langle F \rangle$ , nous noterons $Sh_{F^m/F}\, \chi$ la descente de Shintani de la fonction de F-classe sur $G^{F^m}$ définie par : $g \longrightarrow \chi(gF)$.

## II - ALGÈBRES DE HECKE

### 1. - Algèbres de Hecke, algèbres génériques, spécialisation.

a) Algèbres de Hecke

Définition 1.1 - Soient $W$ un groupe de Coxeter et $S$ l'ensemble de ses générateurs de Coxeter. Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $0$, soit $K$ une extension de $k$ et soit $\underline{x} = \{x_r\ ,\ r \in S\}$ un ensemble d'éléments de $K$ tels que $x_r = x_s$ si $r$ et $s$ sont conjugués dans $W$. Nous appellerons algèbre de Hecke de $(W,\underline{x})$, notée $H(W,\underline{x})$ la $k[\underline{x}]$-algèbre ayant pour base des éléments $(a_w)_{w\in W}$ et où la multiplication est définie par :

$$(1)\qquad \begin{cases} a_w\, a_{w'} = a_{ww'} & \text{si} \quad l(ww') = l(w) + l(w') \\ a_s^2 = (x_s-1)a_s + x_s & \text{si} \quad l(s) = 1 \end{cases},$$

où $l$ est la fonction longueur dans $W$ .

Remarquons que la première relation implique que $H(W,\underline{x})$ est unitaire avec comme élément unité l'élément $a_1$ .

En reprenant les notations de I,4, nous noterons $E_m$ la représentation de permutation de $G^{F^m}$ sur $X^{F^m}$ où $X$ est la variété des sous-groupes de Borel de $G$ . C'est la représentation induite de la représentation triviale de $B_0^{F^m}$ . On note $H_m$ l'algèbre commutante de $G^{F^m}$ dans $E_m$ . Elle a pour base les opérateurs $(T_w)_{w\in W^{F^m}}$ définis par :

$$\text{pour} \quad x \in X^{F^m} : T_w\, x = \sum_{\{y\in X^{F^m} \mid y \xrightarrow{w} x\}} y$$

(cf. [BBK1] IV, §2, exercice 22) car $W^{F^m}$ paramètre les orbites de $G^{F^m}$ dans $X^{F^m} \times X^{F^m}$ .

L'endomorphisme $F$ agit sur $X^{F^m}$, donc sur $E_m$, et on a $FT_w = T_{F_w} F$. Nous noterons $\delta$ l'ordre de l'action de $F$ sur $W$.

<u>Proposition</u> 1.2 - Avec les notations précédentes, on a :

(i) (<u>cf</u>. [BT] §5) Le groupe $W^{F^m}$ est un groupe de Coxeter.

(ii) (<u>cf</u>. [BBK1] IV, §2, exercice 24) Si $k = \mathbb{C}$ et si on pose, pour tout $r \in S$ :

$$x_{r,m} = |B_0^{F^m} / (B_0^{F^m} \cap {}^rB_0^{F^m})|$$, alors l'application de $H(W^{F^m}, \underline{x}_m)$ dans $H_m$ qui envoie $a_w$ sur $T_w$ est un isomorphisme d'algèbres.

b) <u>Algèbre de Hecke générique</u>

Soit $\underline{X} = \{X_r, r \in S\}$ un ensemble d'indéterminées telles que $X_r = X_s$ si $r$ et $s$ sont conjugués dans $W$ (on n'impose pas que $X_r \neq X_s$ si $r$ et $s$ ne sont pas conjugués). On appelle algèbre de Hecke générique l'algèbre $\mathcal{H} = H(W, \underline{X})$.

On pose $\mathfrak{A} = k[\underline{X}]$ ; par définition, $\mathcal{H}$ est une $\mathfrak{A}$-algèbre. Si $w = r_1 r_2 \ldots r_k$ est une décomposition réduite de $w \in W$, on pose $X_w = X_{r_1} X_{r_2} \ldots X_{r_k}$. Ce monôme ne dépend pas de la décomposition réduite de $w$ choisie (<u>cf</u>. [BBK1] IV, §1, Proposition 5). On pose $\mathcal{P} = \sum_{w \in W} X_w$.

Soient $K$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$ et $\bar{K}$ une clôture algébrique de $K$. On pose $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes_{\mathfrak{A}} \bar{K}$, et on note $\bar{\mathfrak{A}}$ la clôture intégrale de $\mathfrak{A}$ dans $\bar{K}$.

<u>Théorème</u> 1.3 - Soit $f$ un homomorphisme $k$-linéaire $\mathfrak{A} \longrightarrow k$ tel que la $k$-algèbre $\mathcal{H} \otimes_{\mathfrak{A}} k$ (où l'on fait de $k$ une $\mathfrak{A}$-algèbre à l'aide de $f$) soit

semi-simple. Soit $\bar{f} : \bar{\mathfrak{A}} \longrightarrow k$ une extension de $f$ . Alors $\mathcal{H} \otimes_{\mathfrak{A}} k = H(W, f(\underline{X}))$ a les mêmes invariants numériques que $\mathcal{H}$ et, pour tout caractère irréductible $\chi$ de $\bar{\mathcal{H}}$ sur $\bar{K}$ , on a :

(i) $\chi(a_w) \in \bar{\mathfrak{A}}$ pour tout $w \in W$ ;

(ii) l'application linéaire $\chi_{\bar{f}} : H(W, f(\underline{X})) \longrightarrow k$ définie par $\chi_{\bar{f}}(a_w \otimes 1) = \bar{f}(\chi(a_w))$ est un caractère irréductible de $H(W, f(\underline{X}))$. On définit ainsi une bijection entre les caractères irréductibles de $\bar{\mathcal{H}}$ et ceux de $H(W, f(\underline{X}))$.

Démonstration - voir [CIK] , 7.1 et 1.11 et la démonstration de 3.1 ci-dessous.

<u>Remarque</u> 1.4 - Le théorème 1.3 s'applique au cas où l'on pose $f(X_r) = 1$ pour tout $r \in S$ . En effet, dans ce cas, l'algèbre $H(W, f(\underline{X}))$ est isomorphe à $k[W]$ (car les relations (1) de 1.1 deviennent les relations habituelles définissant W) et est donc semi-simple.

<u>Remarque</u> 1.5 - Si $\delta | m$ , i.e. si $W^{F^m} = W$ , le théorème 1.3 s'applique aussi au cas où l'on pose $f(X_r) = q^m$ pour tout $r \in S$ . En effet, dans ce cas, $H(W, f(\underline{X})) = H(W^{F^m}, f(\underline{X}))$ est isomorphe à $H_m$ d'après la proposition 1.2, car $|B_0^{F^m}/(B_0^{F^m} \cap {}^rB_0^{F^m})| = q^m$ ; or cette algèbre est semi-simple, comme algèbre commutante d'un $G^{F^m}$-module.

On notera $\mathcal{P}_m$ le spécialisé $f(\mathcal{P}) = \sum_{w \in W} q^{ml(w)}$ .

c) <u>Algèbres produit semi-direct</u>.

Soient A une k-algèbre et G un groupe agissant sur A (on notera $a \xmapsto{g} {}^g a$ l'action de $g \in G$). On appelle produit semi-direct de A par G , noté $A \rtimes G$ l'algèbre engendrée par A et G avec les relations : pour $a \in A$ , $g \in G$ $\quad g.a = {}^g a.g$ .

Soit $\langle F \rangle$ un groupe cyclique de générateur $F$ agissant sur $W$ par automorphisme du graphe de Coxeter. Dans les cas où $s \in S$ et ${}^{F}s$ ne sont pas conjugués (i.e. $F$ est l'automorphisme non trivial d'un graphe de type $B_2$, $F_4$, ou $G_2$), nous supposerons de plus que $X_s = X_{F_s}$. Alors on peut faire agir $F$ sur $\mathcal{H}$ par ${}^{F}a_w = a_{F_w}$ pour $w \in W$.

<u>Théorème</u> 1.6 - Soit $f$ un homomorphisme k-linéaire $\mathcal{A} \longrightarrow k$ tel que la k-algèbre $(\mathcal{H} \rtimes \langle F \rangle) \otimes_{\mathcal{A}} k \simeq H(W, f(\underline{X})) \rtimes \langle F \rangle$ soit semi-simple, et soit $\bar{f} : \bar{\mathcal{A}} \longrightarrow k$ une extension de $f$. Alors $H(W, f(\underline{X})) \rtimes \langle F \rangle$ a les mêmes invariants numériques que $\mathcal{H} \rtimes \langle F \rangle$ et pour tout caractère irréductible $\chi$ de $\mathcal{H} \rtimes \langle F \rangle$ sur $K$, on a :

(i) $\chi(a_w F^i) \in \bar{\mathcal{A}}$ pour tout $i$ et tout $w \in W$ ;

(ii) l'application linéaire $\chi_{\bar{f}} : H(W, f(\underline{X})) \rtimes \langle F \rangle \longrightarrow k$ définie par $\chi_{\bar{f}}(a_w F^i \otimes 1) = \bar{f}(\chi(a_w F^i))$ est un caractère irréductible. On définit ainsi une bijection des caractères irréductibles de $\mathcal{H} \rtimes \langle F \rangle$ sur ceux de $H(W, f(\underline{X})) \rtimes \langle F \rangle$.

Démonstration - On démontre ce théorème par des arguments analogues à ceux utilisés pour le théorème 1.3.

Ce théorème s'applique aux mêmes cas que le théorème 1.3 (<u>cf</u>. remarques 1.4 et 1.5) car si $H(W, f(\underline{X}))$ est semi-simple, alors $H(W, f(\underline{X})) \rtimes \langle F \rangle$ est aussi semi-simple, d'après le lemme :

<u>Lemme</u> 1.7 - Soit $A$ une algèbre semi-simple, et $G$ un groupe fini agissant sur $A$ (par automorphismes d'algèbre). Alors l'algèbre $B = A \rtimes G$ est semi-simple.

Démonstration - Par un argument classique, il suffit de voir que si $M$ est un B-module et si $N$ est un sous-module de $M$, il existe un sous-B-module supplémentaire de $N$ dans $M$, ou, ce qui revient au même, un projecteur B-linéaire de $M$ sur $N$. Comme $A$ est semi-simple, il existe un projecteur A-linéaire $p$ de $M$ sur $N$. Posons $q = |G|^{-1} \sum_{g\in G} gopog^{-1}$. Il est immédiat que $q$ commute à l'action de $G$ et est A-linéaire. Donc $q$ est B-linéaire. Si $n$ est un élément de $N$, on a $q(n) = n$ car $g^{-1}(n)\in N$ pour tout $g\in G$, et donc $g(p(g^{-1}n)) = g(g^{-1}n) = n$. Comme $q(M)\subset N$, on a bien construit un projecteur B-linéaire de $M$ sur $N$.

## 2. - Produit scalaire dans les algèbres de Frobenius.

### a) Algèbres de Frobenius.

Définition 2.1 - Une algèbre unitaire de dimension finie $A$ sur un corps $k$ est dite de Frobenius pour une forme linéaire $\lambda : A \longrightarrow k$ si la forme bilinéaire $(x,y) \longmapsto \lambda(xy)$ sur $A$ est non dégénérée.

Pour une étude détaillée des algèbres de Frobenius, cf [CR2] §9,A et [CR1] §61 et 62.

Si $A$ est une algèbre de Frobenius pour la forme linéaire $\lambda$, on peut définir un isomorphisme de $A$ sur l'espace $A^*$ des formes linéaires sur $A$ par $x \longmapsto x^*$ tel que $x^*(y) = \lambda(xy)$. On peut alors munir $A^*$ de la forme bilinéaire déduite par cet isomorphisme de la forme bilinéaire $(x,y) \longmapsto \lambda(xy)$. Cette forme sera notée $<\, ,\,>_\lambda$. On a donc :

$$< x^*,y^* >_\lambda = \lambda(xy) = x^*(y) \quad .$$

Remarque 2.2 - Si $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ sont deux bases de $A$ duales pour la forme bilinéaire $(x,y) \longmapsto \lambda(xy)$, alors on a :

(i) Pour tout $x\in A$ : $x = \sum_{i\in I} x^*(f_i)e_i$ ;

(ii) pour tous $\chi$ et $\psi$ dans $A^*$ : $<\chi,\psi>_\lambda = \sum_{i\in I} \chi(e_i)\ \psi(f_i)$ .

Proposition 2.3 (cf. [CR1] lemme 62.8) - Si M et N sont deux A-modules irréductibles non isomorphes de caractères respectifs $\chi$ et $\psi$, on a:

$$<\chi,\psi>_{\lambda} = 0 \quad .$$

Corollaire 2.4 - Soit A une algèbre semi-simple de dimension finie sur un corps k et soit $\lambda$ le caractère d'une représentation de A sur k . On suppose que A est une algèbre de Frobenius pour $\lambda$ . Alors, si $\chi$ est un caractère irréductible de A intervenant dans $\lambda$ avec la multiplicité $n_{\chi}$ , on a :

$$n_{\chi}<\chi,\chi>_{\lambda} = \chi(1) \quad .$$

Démonstration - D'après la proposition 2.3, on a $<\chi,\lambda>_{\lambda} = n_{\chi}<\chi,\chi>_{\lambda}$ , et, comme par définition $\lambda = 1^{*}$ , on a : $<\chi,\lambda>_{\lambda} = \chi(1)$ .

b) Application aux algèbres de Hecke

Dans la suite nous posons $\delta_w = \begin{cases} 1 & \text{si } w=1 , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition 2.5 - L'algèbre $\mathcal{H}$ est une algèbre de Frobenius pour la forme linéaire $\lambda$ définie par $\lambda(a_w) = \delta_w \mathcal{P}$. Les bases $(X_w \mathcal{P})^{-1} a_w$ et $a_{w^{-1}}$ sont duales.

Démonstration - Montrons par récurrence sur la longueur de w que pour tout w' on a $\lambda(a_w a_{w'}) = X_w \mathcal{P} \delta_{ww'}$ . Si $l(w) = 1$ , le résultat est vrai par définition de $\lambda$ car $X_1 = 1$ . Supposons $l(w) > 1$ .

Soit $s \in S$ tel que $l(ws) = l(w) - 1$ . Supposons d'abord que $l(sw') = l(w')+1$, alors : $a_w a_{w'} = a_{ws} a_{sw'}$ . Remarquons que l'hypothèse faite sur sw' implique

que $w^{-1} \neq w'$ et que $ws \neq (sw')^{-1}$. Par récurrence on obtient donc $\lambda(a_w a_{w'}) = 0$.
Supposons, au contraire, que $l(sw') = l(w')-1$. On a alors :

$$a_w a_{w'} = (X_s-1)\, a_{ws} a_{w'} + X_s\, a_{ws} a_{sw'} \quad .$$

Cette fois l'hypothèse faite sur $sw'$ entraîne $wsw' \neq 1$. Donc, par récurrence :

$$\lambda(a_w a_{w'}) = \mathcal{P}(X_s-1)\, \delta_{wsw'} + \mathcal{P} X_s . X_{ws}\, \delta_{(ws)(sw')} = \mathcal{P} \delta_{ww'} X_w \quad .$$

D'où le résultat.

On obtient par spécialisation le :

<u>Corollaire</u> 2.6 - Si $\delta \mid m$, l'algèbre $H_m$ est une algèbre de Frobenius pour la forme linéaire $\lambda$ définie par $\lambda(T_w) = \delta_w \mathcal{P}_m$. Les bases $(\mathcal{P}_m^{-1} q^{-ml(w)} T_w)_{w \in W}$ et $(T_{w^{-1}})_{w \in W}$ sont duales.

L'algèbre $H_m$ étant l'algèbre commutante du $G^{F^m}$-module $E_m$, ce dernier ademt une décomposition en somme directe de $H_m \times G^{F^m}$-modules irréductibles de la forme :

$$(*) \qquad E_m \simeq \bigoplus_{\chi_m \in \hat{H}_m} [\chi_m] \otimes [U_{\chi_m}] \quad ,$$

où $\chi_m \longmapsto U_{\chi_m}$ est une bijection de l'ensemble $\hat{H}_m$ des caractères irréductibles de $H_m$ sur l'ensemble des caractères irréductibles de $G^{F^m}$ qui interviennent dans $E_m$ (cf. [BBK 2] §4.4). On a noté $[\chi_m]$ (resp. $[U_{\chi_m}]$) une représentation de $H_m$ (resp. $G^{F^m}$) de caractère $\chi_m$ (resp. $U_{\chi_m}$).

<u>Corollaire</u> 2.7 - Si $\delta \mid m$, pour tout caractère irréductible $\chi_m \in \hat{H}_m$, on a :

$$\sum_{w \in W} q^{-ml(w)}\, \chi_m(T_w)\, \chi_m(T_{w^{-1}}) = \chi_m(1)\, \mathcal{P}_m / U_{\chi_m}(1) \quad .$$

Démonstration - En effet $\lambda$ est le caractère du $H_m$-module $E_m$, car on voit aisément d'après la définition de $T_w$ que :

$$\mathrm{Trace}(T_w \mid E_m) = 0 \quad \text{si} \quad w \neq 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Trace}(1 \mid E_m) = \dim E_m = |X^{F^m}| = \mathcal{P}_m .$$

En appliquant le corollaire 2.4 et la remarque 2.2 (ii), on en déduit le résultat car la multiplicité de $\chi_m$ dans $E_m$ est $U_{\chi_m}(1)$ d'après (*) .

c) Produit scalaire dans l'algèbre produit semi-direct.

Soient $A$ une algèbre de Frobenius pour la forme linéaire $\lambda$ et $<F>$ un groupe cyclique d'ordre $\delta$ agissant sur $A$ .

Alors $A \rtimes <F>$ est une algèbre de Frobenius pour la forme $\lambda'$ définie par :

$$\begin{cases} \lambda'(x) = 0 & \text{si} \quad x \in AF^i \quad \text{avec} \quad 0 < i < \delta , \\ \lambda'(x) = \lambda(x) & \text{si} \quad x \in A . \end{cases}$$

En effet, si $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ sont des bases duales de $A$ pour la forme $\lambda$, alors $(e_iF^j)_{i\in I,\ j\in[0,\delta[}$ et $(F^{-j}f_i)_{i\in I,\ j\in[0,\delta[}$ sont des bases duales de $A \rtimes <F>$ pour la forme $\lambda'$ .

Dans la suite, nous supposons $k$ algébriquement clos.

Nous noterons $\Xi$ l'ensemble des caractères irréductibles de $<F>$ sur $k$ . Si $\chi$ est le caractère d'une représentation $\rho : A \rtimes <F> \longrightarrow \mathrm{End}\, M$ et si $\xi \in \Xi$ alors $\chi\xi$ défini par $(\chi\xi)(aF^i) = \chi(aF^i)\ \xi(F^i)$ pour tout $a \in A$ est le caractère de la représentation de $A \rtimes <F>$ dans $M$ définie par :

$$aF^i \longmapsto \rho(aF^i)\ \xi(F^i) \in \mathrm{End}(M) .$$

Proposition 2.8 - Soient $\varphi$ et $\chi$ deux caractères de $A \rtimes \langle F \rangle$ . Alors pour tout j on a :

$$\sum_{i\in I} \varphi(e_i F^j)\ \chi(F^{-j} f_i) = \delta^{-1} \sum_{\xi\in\Xi} \langle \varphi, \chi\xi\rangle_{\lambda'}\ \xi(F^j) .$$

Démonstration - D'après la remarque 2.2, le membre de droite vaut :

$$\delta^{-1} \sum_{\xi\in\Xi} \sum_{i\in I} \sum_{k\in[0,\delta[} \varphi(e_i F^k)\ \chi(F^{-k} f_i)\ \xi(F^{-k})\ \xi(F^j)$$

or, pour tout k on a : $\delta^{-1} \sum_{\xi\in\Xi} \xi(F^{-k})\ \xi(F^j) = \delta_k^j$ d'où le résultat.

Corollaire 2.9 - Soient $\varphi$ et $\chi$ deux caractères irréductibles de $A \rtimes \langle F \rangle$.

Alors on a :

$$\sum_{i\in I} \varphi(e_i F)\ \chi(F^{-1} f_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \#\{\xi\in\Xi \mid \varphi = \chi\xi\} \neq 1 \\ \xi_0(F) \langle \varphi_A, \varphi_A\rangle_\lambda & \text{si } \{\xi\in\Xi \mid \varphi = \chi\xi\} = \{\xi_0\} \end{cases}$$

où on a noté $\varphi_A$ la restriction de $\varphi$ à A .

Démonstration - Comme $\varphi$ et $\chi$ sont irréductibles, on a d'après 2.3 :

$$\delta^{-1} \sum_{\xi\in\Xi} \langle \varphi, \chi\xi\rangle_{\lambda'}\ \xi(F^k) = \delta^{-1} \langle \varphi, \varphi\rangle_{\lambda'} \sum_{\{\xi\in\Xi \mid \varphi = \chi\xi\}} \xi(F^k) .$$

Si $k = 1$ , la somme de droite est nulle sauf si elle a un seul terme, d'où la première partie du corollaire.

Si : $\{\xi\in\Xi \mid \varphi = \chi\xi\} = \{\xi_0\}$ , alors la proposition 2.8 devient :

$$\sum_{i\in I} \varphi(e_i F^j)\ \chi(F^{-j} f_i) = \delta^{-1} \langle \varphi, \varphi\rangle_{\lambda'}\ \xi_0(F^j) \qquad (1)$$

Remplaçant dans (1) pour $j = 1$ la valeur de $\langle \varphi, \varphi\rangle_{\lambda'}$ donnée par (1) pour $j = 0$ on en déduit la deuxième partie du corollaire.

Corollaire 2.10 - Soient $\varphi$ et $\chi$ deux caractères de $A \rtimes \langle F \rangle$ dont les restrictions $\varphi_A$ et $\chi_A$ à $A$ sont irréductibles. On a alors :

(i) $\sum_{i \in I} \varphi(e_i F)\, \chi(F^{-1} f_i) = 0$ si $\varphi_A \neq \chi_A$ .

(ii) Si $\varphi_A = \chi_A$ , il existe un unique caractère $\xi$ de $\langle F \rangle$ tel que $\varphi = \chi\, \xi$ , et :

$$\sum_{i \in I} \varphi(e_i F)\, \chi(F^{-1} f_i) = \langle \varphi_A , \chi_A \rangle_{\lambda}\ \xi(F) \quad .$$

Démonstration - On applique le corollaire 2.9 en remarquant qu'il existe au plus un $\xi \in \Xi$ tel que $\varphi = \chi\, \xi$ , car il existe $a \in A$ tel que $\chi(aF) \neq 0$ . En effet, la représentation de $A$ de caractère $\chi_A$ étant irréductible, l'image de $A$ par cette représentation se compose de tous les endomorphismes de l'espace de la représentation. Il existe donc $a \in A$ tel que $a$ et $F^{-1}$ agissent de la même façon, et alors : $\chi(aF) = \chi(1) \neq 0$ .

Remarque 2.11 - Si $G$ est un groupe fini, alors l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ est une algèbre de Frobenius pour la forme linéaire définie par :

$$\begin{cases} \lambda(g) = 0 & \text{si} \quad g \in G - \{1\} \ , \\ \lambda(1) = 1 & . \end{cases}$$

Les bases $(g)_{g \in G}$ et $(g^{-1})_{g \in G}$ sont duales. On peut donc appliquer ce qui précède au cas d'un groupe $\Gamma = G \rtimes \langle F \rangle$ (cf. I, remarque 6.3 (iii)).

Remarque 2.12 - Si on applique le corollaire 2.10 à l'algèbre $H_m$ , on obtient : Si $\tilde{\chi}_m$ et $\tilde{\psi}_m$ sont deux caractères irréductibles de $H_m \rtimes \langle F \rangle$ (l'endomorphisme $F$ agissant sur $H_m$ par conjugaison, cf. 1,a)) dont les restrictions $\chi_m$ et

$\psi_m$ à $H_m$ sont irréductibles, on a :

$$\sum_{w\in W} q^{-m\,l(w)}\ \chi_m(T_wF)\ \psi_m(T_{w^{-1}}\,F^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_m \neq \psi_m\ , \\ \chi_m(1)\ \mathcal{P}_m/U_{\chi_m}(1) & \text{si } \tilde{\chi}_m = \tilde{\psi}_m\ . \end{cases}$$

3. - Rationalité des caractères des algèbres de Hecke.

Théorème 3.1 - Supposons que $W$ soit le groupe de Coxeter d'un système de racines irréductible et réduit. Alors pour tout caractère irréductible $\chi$ de $\overline{\mathcal{H}}$ et tout $w\in W$, on a $\chi(a_w)\in \mathbb{Z}[\underline{X}]$, sauf dans les cas suivants :

(i) $W$ est de type $G_2$ et $\chi$ est un des deux caractères de degré 2 de $W$. Alors $\chi(a_w)\in \mathbb{Z}\ [\sqrt{X_sX_t},\ X_s,X_t]$ où $S = \{s,t\}$.

(ii) $W$ est de type $E_7$ et $\chi$ est un des deux caractères de degré 512, ou $W$ est de type $E_8$ et $\chi$ est un des quatre caractères de degré 4096. Alors $\chi(a_w)\in \mathbb{Z}[\sqrt{X}\,]$, où on a posé $X = X_s$ pour tout $s\in S$.

Démonstration - Ce théorème est une généralisation du théorème 2.8 de [BC]. Nous allons utiliser un argument similaire.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer que : $\chi(a_w)\in \mathbb{Q}(\underline{X})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{X_sX_t}, X_s,X_t)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{X})$). En effet le polynôme caractéristique de la multiplication par $a_w$ dans $\overline{\mathcal{H}}$ est unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ car les relations de définition de $\mathcal{H}$ sont à coefficients dans $\mathbb{Z}[\underline{X}]$. Donc pour tout $w\in W$ et toute représentation de $\overline{\mathcal{H}}$ les valeurs propres de $a_w$ sont dans $\overline{\mathbb{Z}[\underline{X}]}$ donc $\chi(a_w)\in \overline{\mathbb{Z}[\underline{X}]}$ pour tout $w$. Si $\chi(a_w)\in \mathbb{Q}(\underline{X})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{X_sX_t},\ X_s,X_t)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{X})$) on en déduit que $\chi(a_w)\in \mathbb{Z}[\underline{X}]$ (resp. $\mathbb{Z}[\sqrt{X_sX_t},\ X_s,X_t]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{X}]$) car ces anneaux sont intégralement clos (cf. appendice A.4).

Notons que l'argument ci-dessus est celui utilisé dans la démonstration du Théorème 1.3, (i).

Nous allons maintenant démontrer le théorème par récurrence sur le rang de $W$', égal à $|S|$ .

D'après [BC] , sauf dans les cas (i) et (ii) les caractères irréductibles de $W$ dont déterminés par leurs restrictions aux sous-groupes paraboliques propres de $W$ . On en déduit par spécialisation (théorème 1.3) que la propriété analogue est vraie pour $\bar{\mathcal{H}}$ .

Soit $\chi$ un caractère irréductible de $\bar{\mathcal{H}}$ différent des caractères cités en (i) et (ii) ; alors, par l'hypothèse de récurrence, on a $\chi(a_w) \in \mathbb{Z}[\underline{X}]$ pour tout $w$ dans un sous-groupe parabolique propre.

Soit $\sigma$ un élément du groupe de Galois de $\bar{K}$ sur $\mathbb{Q}(\underline{X})$ ; alors $\chi^\sigma$ et $\chi$ ont même restriction à toutes les sous-algèbres paraboliques propres, donc sont égaux. Donc $\chi(a_w) \in \mathbb{Q}(\underline{X})$ pour tout $w \in W$ .

Pour étudier les caractères cités dans (i) et (ii), nous allons utiliser le :

<u>Lemme</u> 3.2 - Soit $w = s_1 \ldots s_n$ une décomposition réduite de $w \in W$ et soit $\rho$ une représentation de $\bar{\mathcal{H}}$ de caractère $\chi$ . Alors on a $\chi(a_s) \in \mathfrak{D}$ pour tout $s \in S$ (donc si on pose $\chi_0 = \chi_{\bar{f}}$ où $f$ est comme dans la remarque 1.4, $\chi_0(s)$ ne dépend pas de l'extension $\bar{f}$ choisie de f) et on a :

$$\det(\rho(a_w)) = \prod_{i=1}^{n} X_{s_i}^{(\chi_0(1) + \chi_0(s_i))/2} (-1)^{(\chi_0(1) - \chi_0(s_i))/2} .$$

Démonstration - en effet, on a : $\det(\rho(a_w)) = \prod_{i=1}^{n} \det(\rho(a_{s_i}))$.

Or, comme $(a_{s_i}+1)(a_{s_i} - X_{s_i}) = 0$ , les valeurs propres de $\rho(a_{s_i})$ sont $X_{s_i}$ ou $-1$ . On peut donc poser $\chi(a_{s_i}) = a X_{s_i} - b$ et $\chi(1) = a + b$ où $a, b \in \mathbb{N}$ . Par spécialisation, on obtient $a = (\chi_0(s_i) + \chi_0(1))/2$ et $b = (\chi_0(1) - \chi_0(s_i))/2$, d'où le résultat.

Appliquons le lemme 3.2 à l'élément de plus grande longueur $w_0$ de $W$, dans le cas où $W$ est de type $G_2$, $E_7$, ou $E_8$. Dans ces cas, l'élément $w_0$ est dans le centre de $W$, donc $a_{w_0}$ est dans le centre de $\overline{\mathcal{H}}$ (en général, on a $a_{w_0} a_w a_{w_0}^{-1} = a_{w_0 w w_0}$ pour tout élément $w$ de $W$, d'après la définition 1.1 et les propriétés de $w_0$ (cf. [BBK 1] IV, §1 Ex. 2)), donc agit par un scalaire dans toute représentation irréductible. On a donc :

$$(\chi(a_{w_0})/\chi(1))^{\chi(1)} = \det(\rho(a_{w_0})) \quad .$$

Distinguons 3 cas :

1 - Pour les deux caractères de degré 2 de $W(G_2)$ on a $w_0 = (st)^3$, $\chi_0(1) = 2$ et $\chi_0(s_i) = 0$ d'où $\chi(a_{w_0})/2 = \pm (X_s X_t)^{3/2}$.

2 - Pour les deux caractères de degré 512 de $W(E_7)$ on a $l(w_0) = 63$, $\chi_0(1) = 512$ et $\chi_0(s_i) = 0$ d'où $\chi(a_{w_0})/512 = \theta X^{63/2}$ où $\theta$ est une racine $512^{\text{ème}}$ de 1 qui doit être $\pm 1$ puisque $\chi_0(w_0)$ est un entier (car $w_0^2 = 1$).

3 - Pour les quatre caractères de degré 4096 de $W(E_8)$, on a $l(w_0) = 120$, $\chi_0(1) = 4096$ et $\chi_0(s) = 512\,\varepsilon$ où $\varepsilon = 1$ pour deux des caractères et $\varepsilon = -1$ pour les deux autres. D'où $\chi(a_{w_0})/4096 = \theta\, X^{(8+\varepsilon)15/2}$ où $\theta$ est une racine $4096^{\text{ième}}$ de 1 qui doit être $\pm 1$ par rationalité des caractères de $W$.

Puisque, dans chacun des cas ci-dessus, il n'y a que deux caractères de $W$ qui aient même restriction aux sous-groupes paraboliques propres, $\chi(a_w)$ doit être dans une extension quadratique de $\mathbb{Q}(\underline{X})$. D'après les calculs ci-dessus, cette extension doit contenir $\sqrt{X_s X_t}$ dans le cas 1 et $\sqrt{X}$ dans les cas 2 et 3, d'où le résultat.

Théorème 3.3 - Supposons que $W$ soit le groupe de Coxeter d'un système de racines irréductible, et que $<F>$ soit un groupe cyclique agissant sur $\bar{\mathcal{H}}$, l'action de $F$ étant induite par un automorphisme du diagramme de Coxeter tel que ${}^F s$ soit conjugué à $s$ pour tout $s \in S$. Soit $\chi$ le caractère d'une représentation $\rho$ de $\bar{\mathcal{H}}$, invariante par $F$ et irréductible.

(1) Si $F$ agit par l'identité, alors il existe une extension de $\rho$ à $\bar{\mathcal{H}} \rtimes <F>$ dont le caractère $\tilde{\chi}$ vérifie : $\tilde{\chi}(a_w F) = \chi(a_w) \quad \forall\, w \in W$.

(2) Si $F$ agit par un automorphisme intérieur non trivial (i.e. $W$ est de type $A_n$, $D_{2n+1}$ ou $E_6$ et $F$ agit comme la conjugaison par $a_{w_0}$, automorphisme d'ordre 2), alors il existe une extension de $\rho$ à $\bar{\mathcal{H}} \rtimes <F>$ dont le caractère $\tilde{\chi}$ vérifie : $\tilde{\chi}(a_w F) = \lambda_\chi^{-1}\, \chi(a_{w_0} a_w)$ pour tout $w \in W$, où on a posé $\lambda_\chi = \pm\, x^{a_\chi}$ avec :

$$a_\chi = ((\chi_0(1) + \chi_0(s)) \cdot l(w_0))/2\, \chi_0(1)$$

où $s$ est un élément quelconque de $S$ (tous les éléments de $S$ sont conjugués) et où $\chi_0$ est comme dans le lemme 3.2.

Si $W$ est de type $D_{2n+1}$, $a_\chi$ est entier ; si $W$ est de type $A_{n-1}$ et si $\chi_0$ est le caractère de $\mathfrak{S}_n$ correspondant à la partition $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, alors :

$$2a_\chi = \sum_i \binom{\alpha_i}{2} - \sum_i \binom{\alpha'_i}{2} + n(n-1)/2$$

où $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$ est la partition duale de la partition $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Si $W$ est de type $E_6$, $a_\chi$ est entier sauf si $\rho$ est une des deux représentations de degré 64 auquel cas $a_\chi = (36 \pm 9)/2$ (dans ce cas $l(w_0) = 36$, $\chi_0(s) = \pm 16$, et $\chi_0(1) = 64$).

(3) Si $W$ est de type $D_n$ et si l'action de $F$ est d'ordre 2, ou si $W$ est de type $D_4$ et l'action de $F$ d'ordre 3 , il existe une extension de $\rho$ à $\overline{\mathcal{H}} \rtimes \langle F \rangle$ dont le caractère vérifie $\tilde{\chi}(a_w F^i) \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $i$ .

Corollaire 3.4 - Plaçons nous sous les hypothèses du théorème 3.3, sauf que le groupe de Coxeter $W$ n'est plus supposé irréductible. Il est donc de la forme $\prod_{i=1}^{n} W_i^{\eta_i}$ où $W_i$ est un groupe de Coxeter irréductible et où $F$ permute cycliquement les $\eta_i$ copies de $W_i$ . Nous supposerons de plus que tous les $X_s$ $(s \in S)$ sont égaux à $X$ . Nous notons $\mathcal{H}_i = H(W_i, X)$. Alors il existe une extension de la représentation $\rho$ de $\overline{\mathcal{H}}$ à $\overline{\mathcal{H}} \rtimes \langle F \rangle$ dont le caractère $\tilde{\chi}$ vérifie $\tilde{\chi}(a_w F^j) \in \mathbb{Z}[X^{1/c_\chi}]$ pour tout $w \in W$ et tout $j$ , où $c_\chi = 1$ , sauf s'il existe $i$ tel que $(W_i, F^i, \chi|_{\mathcal{H}_i})$ soit d'un des types suivants, auquel cas $c_\chi = 2$ :

(a) $E_7$ , $\chi$ de degré 512 ;

(b) $E_8$ , $\chi$ de degré 4096 ;

(c) ${}^2E_6$ , $\chi$ de degré 64 ;

(d) ${}^2A_{n-1}$ , $\chi$ correspondant à une partition $(\alpha_i)$ de n telle que

$$\sum_i \binom{\alpha_i}{2} - \sum_i \binom{\alpha_i'}{2} + n(n-1)/2$$

soit impair, si l'on désigne par $(\alpha_i')$ la partition duale de $(\alpha_i)$ .

De plus, si $(W, F, \chi)$ est de type (c) ou (d), alors $\tilde{\chi}(a_w F) \in X^{1/2} \, . \, \mathbb{Z}[X]$ pour tout $w \in W$ .

Démonstration du corollaire - Si $W$ est irréductible, il résulte clairement des théorèmes 3.1 et 3.3 ; l'assertion sur ${}^2E_6$ et sur ${}^2A_{n-1}$ résulte de l'assertion (2) de 3.3 et du fait que $\tilde{\chi}(a_w F)$ doit être entier sur $\mathbb{Z}[X]$ .

Pour montrer le cas général, il suffit de démontrer le résultat quand $\eta=1$ . L'espace de la représentation $\rho$ s'écrit $V_1 + {}^F V_1 + \ldots + {}^{F^{\eta-1}} V_1$ , où l'on a écrit $\eta$ pour $\eta_1$ . Notons $\rho_1$ la représentation de $\mathcal{H}_1$ sur $V_1$ ; elle est $F^\eta$ invariante. On peut lui appliquer le résultat pour le cas irréductible.

On en déduit une extension $\tilde{\rho}_1$ de $\rho_1$ à $\overline{\mathcal{H}_1 \rtimes < F^\eta >}$ . On obtient alors l'extension désirée $\tilde{\rho}$ de $\rho$ en faisant agir $F$ par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & I & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ & 0 & I \ldots\ldots & & 0 \\ & & 0 & I \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & \ldots\ldots\ldots & 0 & I \\ \tilde{\rho}_1(F^\eta) & & \ldots\ldots\ldots & & 0 \end{pmatrix}$$

Cette extension a clairement les mêmes propriétés de rationalité que $\rho_1$ .

Démonstration du théorème 3.3 - le (1) est clair. Montrons le (2).

Remarquons que $a_{w_0}^2$ est dans le centre de $\overline{\mathcal{H}}$ car pour tout $w$ on a :

$$a_{w_0}\ a_w a_{w_0}^{-1} = a_{w_0 w w_0} \qquad (\underline{\text{cf}}.\ \text{démonstration du lemme 3.2}).$$

Donc si $\lambda_\chi$ est une racine carrée du scalaire par lequel $a_{w_0}^2$ agit dans la représentation $\rho$ , alors on peut définir une représentation de $\overline{\mathcal{H}} \rtimes < F>$ en faisant agir $F$ par $\lambda_\chi^{-1}\ \rho(a_{w_0})$ ; en effet cet opérateur commute comme $F$ à $\overline{\mathcal{H}}$ et est de carré $1$ . Et on a :

$$(\lambda_\chi^2)^{\chi(1)} = \det(\rho(a_{w_0}))^2 \quad .$$

Appliquons le lemme 3.2 à $w = w_0$ (ici tous les éléments de $S$ sont conjugués donc $\chi_0(s_i)$ est indépendant de $i$). Donc :

$$(\lambda_\chi^2)^{\chi(1)} = X^{(\chi_0(1) + \chi_0(s))\, l(w_0)} = X^{2a_\chi \cdot \chi(1)} ,$$

car $\chi_0(1) = \chi(1)$ .

On a donc :

$\chi(a_{w_0}^2)/\chi(1) = \lambda_\chi^2 = \theta\, X^{2a_\chi}$ où $\theta$ est une racine de l'unité d'ordre $\chi(1)$. Comme $\chi_0(w_0^2) = \chi_0(1) = \chi(1)$, on voit par spécialisation que $\theta = 1$ , d'où la valeur annoncée pour $\lambda_\chi$ . Il ne reste plus qu'à vérifier les assertions sur $a_\chi$ .

Dans le cas de ${}^2D_{2n+1}$ , le fait que $a_\chi$ est entier résulte de (3) ci-dessous.

Dans le cas de ${}^2E_6$ la valeur de $a_\chi$ peut être déterminée en examinant la table des caractères de $E_6$ donnée dans [FR].

Dans le cas de $\mathfrak{S}_n$ , remarquons que $(\chi_0(1) + \chi_0(s))/2$ est le produit scalaire de la restriction de $\chi_0$ à $\mathfrak{S}_2$ avec le caractère identité de $\mathfrak{S}_2$ , ce qui (cf. par exemple [ZH] 4.11) est encore la dimension du caractère de $\mathfrak{S}_{n-2}$ associé au diagramme gauche de forme extérieure $(\alpha_1 ,\dots, \alpha_r)$ et de forme intérieure $(\beta_1 ,\dots, \beta_r) = (2, 0 ,\dots, 0)$. D'après, par exemple, [ZH] 4.16 et 6.5, on a donc :

$$(\chi_0(1) + \chi_0(s))/2 = (n-2)!\, \det(1/(x_j - y_i)!)$$

où $x_j = \alpha_j + r-j$ et $y_i = \beta_i + r-i$ et où on a convenu que $1/(x_j - y_i)! = 0$ si $x_j < y_i$ . On a donc :

$$\frac{\chi_0(1)+\chi_0(s)}{2} = \frac{(n-2)!}{\prod_i x_i!} \begin{vmatrix} x_1(x_1-1)\ldots(x_1-r) & x_2(x_2-1)\ldots(x_2-r) & \ldots \\ x_1^{r-2} & x_2^{r-2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}$$

où nous avons développé les polynômes en $x_i$ apparaissant sur chaque ligne sauf la première et annulé par combinaison de lignes tous les termes sauf ceux de plus haut degré. On peut encore appliquer ce procédé à la première ligne et annuler tous les termes de degré au plus $r-2$ . Notons $D_k$ le déterminant obtenu où il reste $x_i^k$ sur la première ligne. Alors le déterminant à calculer vaut :

$$D_{r+1} - \left(\sum_{i=1}^{r} i\right) D_r + \left(\sum_{1\leq i<j\leq r} ij\right) D_{r-1} \qquad ;$$

$D_{r-1}$ est un déterminant de Vandermonde et vaut donc $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ ;

on a $D_r = (\sum_i x_i) D_{r-1}$ car c'est l'opposé du coefficient de $y^{r-1}$ dans :

$$\begin{vmatrix} x_1^r & x_2^r & \ldots & x_r^r & y^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r & y \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad , \text{ qui est un déterminant de Vandermonde.}$$

De même $D_{r+1}$ est l'opposé du coefficient de $y^{r-1}$ dans :

$$\begin{vmatrix} x_1^{r+1} & \ldots & x_r^{r+1} & y^{r+1} \\ x_1^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} & y^{r-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & \ldots & x_r & y \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad ,$$

déterminant qui se calcule comme $D_r$ et vaut donc :

$(x_1 + \ldots + x_r + y) \prod_i (y-x_i) \prod_{i<j} (x_i - x_j))$

et on trouve donc :

$$D_{r+1} = (\sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j) D_{r-1} \quad .$$

On a donc :

$$(\chi_0(1) + \chi_0(s))/2 = [(n-2)! / \prod_i x_i!] \prod_{i<j} (x_i - x_j) \Big[\sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j - \frac{r(r+1)}{2} \sum_i x_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} ij \Big] \quad .$$

Utilisant le fait que $l(w_0) = n(n-1)/2$ et que :

$$\chi_0(1) = [n! / \prod_i x_i!] \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

on trouve donc :

$$2 a_\chi = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j - (r(r+1)/2) \sum_i x_i + \sum_{i<j} ij \quad .$$

Nous allons calculer cette somme comme suit : En développant le membre de gauche ci-dessous et en utilisant l'égalité précédente, on trouve

$$(\sum_i (x_i - i))^2 = 4 a_\chi - \sum_i x_i^2 + \sum_i i^2 \quad .$$

Mais :

$$\sum_i (x_i - i) = \sum_i x_i - \sum_i i = n+r(r-1)/2 - (r+1)r/2 = n-r$$

donc : $4 a_\chi = (n-r)^2 + \sum_i x_i^2 - \sum_i i^2$ .

Remplaçant $x_i$ par sa valeur $\alpha_i + r-i$ , on trouve :

$$\sum_i x_i^2 - \sum_i i^2 = \sum_i \alpha_i^2 + 2rn - 2 \sum_i i \alpha_i - r^2 \quad ,$$

donc $4 a_\chi = n^2 + \sum_i \alpha_i^2 - 2 \sum_i i \alpha_i$ .

Pour terminer le calcul, il suffit d'utiliser l'identité :

$$\sum_i (i-1)\,\alpha_i = \sum_i \binom{\alpha'_i}{2} \quad .$$

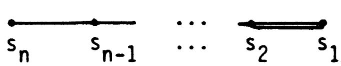
Pour démontrer cette identité, on attribue la valeur $i-1$ aux cases de la $i^{\text{ème}}$ ligne du diagramme de Young, et on remarque que le membre de gauche s'obtient en sommant sur les lignes et celui de droite sur les colonnes.

Démontrons maintenant le (3) du théorème 3.3. Soit $\bar{F}$ l'image de $F$ dans $\mathrm{Aut}(\bar{\mathcal{H}})$ ; il suffit de construire une extension $\tilde{\chi}$ de $\chi$ à l'algèbre $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ qui vérifie $\tilde{\chi}(a_w\,\bar{F}) \in \mathbb{Z}[X]$ , et, dans le cas ${}^3D_4$ , $\tilde{\chi}(a_w\,\bar{F}^{-1}) \in \mathbb{Z}[X]$.

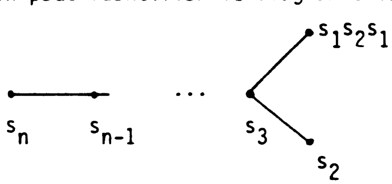
a) Dans le cas de ${}^2D_n$ , l'algèbre $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ est la spécialisée de l'algèbre générique de $B_n$ par l'application $f$ définie par :

$$f(X_{s_i}) = X \quad \text{si} \quad i \neq 1$$

$$f(X_{s_1}) = 1$$

où le diagramme de $B_n$ est  .


En effet on peut identifier le diagramme de $D_n$ au diagramme :



,

et $\bar{F}$ à $a_{s_1} \otimes 1$ .

Comme les caractères irréductibles de l'algèbre générique de type $B_n$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ , on obtient le (3) du théorème dans ce cas.

b) Dans le cas de ${}^3D_4$ , notons r, s, t, u les réflexions élémentaires du groupe de Coxeter, le diagramme étant :

$$\begin{array}{ccl} & & t \\ r - s & \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \\ & & u \end{array} \quad ,$$

et remarquons que $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ est une sous-algèbre d'une algèbre de Hecke de type $F_4$ de la façon suivante : Soit $\sigma_1$ (resp. $\sigma_2$) l'automorphisme d'ordre 2 de $\bar{\mathcal{H}}$ qui échange $a_r$ et $a_t$ (resp. $a_t$ et $a_u$) et laisse fixes les autres générateurs ; on a $\bar{F} = \sigma_1\ \sigma_2$ , et l'algèbre $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ est une sous-algèbre de $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \sigma_1 , \sigma_2 \rangle = (\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle) \rtimes \langle \sigma_1 \rangle$ , qui est la spécialisée de l'algèbre générique de type $F_4$ par l'application f définie par $f(X_s) = f(X_r) = X$ , et $f(X_{\sigma_1}) = f(X_{\sigma_2}) = 1$ , où le diagramme de $F_4$ est :

$$s - r = \sigma_2 - \sigma_1 \quad .$$

La représentation F-invariante $\rho$ a trois extensions à $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ . L'automorphisme (d'ordre 2) $\sigma_1$ opère sur ces trois extensions, donc laisse l'une d'elles (notée $\tilde{\rho}$ ) invariante. Cette dernière représentation s'étend donc à l'algèbre $(\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle) \rtimes \langle \sigma_1 \rangle$ . Comme tous les caractères irréductibles de cette dernière algèbre sont à valeurs dans $\mathbb{Z}[X]$ , on obtient le résultat cherché.

## 4. - Degrés génériques.

Définition 4.1 - Soit $\chi$ un caractère de $\bar{\mathcal{H}}$ . On appelle degré générique de $\chi$ l'élément de K suivant :

$$d_\chi = \chi(1)\, \mathcal{P} \left(\sum_{w \in W} X_w^{-1}\ \chi(a_w)\ \chi(a_{w^{-1}})\right)^{-1} \quad ,$$

(rappelons que $\mathcal{P}$ est le polynôme de Poincaré de $\mathcal{H}$ , cf. II, 1, b).

Le terme "degré générique" vient du fait que pour la spécialisation définie par $f(X_s) = q^m$ pour toutes les réflexions fondamentales, on a, si $\delta | m$ :

$$f(d_\chi) = U_{\chi_m}(1)$$

(cf. corollaire 2.7 ; rappelons $\delta$ que est l'ordre de l'action de F sur W).

D'après le théorème 3.1, on a $d_\chi \in \mathbb{Q}(\sqrt{X_s X_t}, X_s, X_t)$ si W est de type $G_2$, $d_\chi \in \mathbb{Q}(\sqrt{X})$ si W est de type $E_7$ ou $E_8$, et $d_\chi \in \mathbb{Q}(\underline{X})$ sinon.

Dans le cas où $X_s = X$ pour tout $s \in S$, on peut en déduire que $d_\chi \in \mathbb{Q}[X]$ car une fraction rationnelle en $\sqrt{X}$ qui ne prend que des valeurs entières pour une infinité de valeurs entières de X dont une au moins n'est pas un carré doit être dans $\mathbb{Q}[X]$. (C'est un lemme classique, pour un lemme plus général, cf. appendice A.2).

La proposition suivante se déduit de la définition du degré générique :

Proposition 4.2 - Si $X_s = X$ pour tout $s \in S$, on a : $d_\chi = X^{\alpha_\chi} d'_\chi$ où $\alpha_\chi \in \mathbb{N}$ et où $d'_\chi$ est un diviseur du polynôme $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration - On a, dans ce cas

$$d_\chi \cdot \left(\sum_{w \in W} X^{l(w_0) - l(w)} \chi(a_w)\, \chi(a_{w^{-1}})\right) = \chi(1)\, \mathcal{P}\, X^{l(w_0)} .$$

Cette égalité entre polynômes en X donne immédiatement le résultat.

## III - LES RÉSULTATS PRINCIPAUX

### 1. - $N_w^m$ et descente de Shintani.

Nous conservons les notations des chapitres I et II. Rappelons que $G$ désigne un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, et $F$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Si $W$ est le groupe de Weyl de $G$, on désigne par $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke générique de type $W$. Dans ce chapitre, nous supposerons de plus que, pour tout $s \in S$, on a $X_s = X$. Pour tout $m$ multiple non nul de l'ordre $\delta$ de l'action de $F$ sur $W$, on note $H_m$ l'algèbre commutante de la représentation $E_m$ de permutation de $G^{F^m}$ sur les sous-groupes de Borel rationnels sur $\mathbb{F}_{q^m}$ ; c'est l'algèbre spécialisée de $\mathcal{H}$ par l'application $X \longmapsto q^m$. L'endomorphisme $F$ agit sur $H_m$ par conjugaison dans l'anneau d'endomorphismes de $E_m$. On considère le produit semi-direct $H_m \rtimes \langle F \rangle$ et le groupe $G^{F^m} \rtimes \langle F \rangle$, où $F$ est considéré comme d'ordre $m$. On considère aussi le produit semi-direct $\mathcal{H} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$, où $\bar{F}$ est l'automorphisme de $\mathcal{H}$ qui est induit par l'action de $F$ sur $W$. Cet automorphisme $\bar{F}$ est donc d'ordre $\delta$. L'algèbre $H_m \rtimes \langle F \rangle$ a comme quotient l'algèbre $H_m \rtimes \langle \bar{F} \rangle$, spécialisée de $\mathcal{H} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ par l'application $X \longmapsto q^m$.

<u>Définition</u> 1.1 - Pour $T \in H_m$ nous notons $S_T$ la fonction de F-classe sur $G^{F^m}$ définie par :

$$S_T(g) = \mathrm{Trace}(TgF \mid E_m), \quad \text{pour} \quad g \in G^{F^m} .$$

Avec les notations de I.4, on a :

<u>Proposition</u> 1.2 - Pour tout $w \in W$, on a $N_w^m = \mathrm{Sh}_{F^m/F}\, S_{T_w}$ .

Démonstration - Pour $g \in G^{F^m}$, on a : $T_w gF(x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y$, où $\mathcal{Y} = \{ y \in X^{F^m} \mid y \xrightarrow{w} g^F y \}$ (X désigne la variété des sous-groupes de Borel de G, comme en I.4). Donc :

$$S_{T_w}(g) = \# \{ x \in X^{F^m} \mid x \xrightarrow{w} g^F x \} = \# \{ x \in X \mid {}^{F^m}x = x \text{ et } x \xrightarrow{w} g^F x \}.$$

Supposons que $g = L_F(h)$ et soit $g' = L_{F^m}(h^{-1})$ (cf. notations de I.7).
Alors :

$$S_{T_w}(g) = \# \{ x \in X \mid {}^{F^m}x = x \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{w} h^{-1}\, {}^F h\, {}^F x \} \quad .$$

Posons $y = hx$, on obtient :

$$S_{T_w}(g) = \# \{ y \in X \mid {}^{F^m}(h^{-1}y) = h^{-1}y \text{ et } y \xrightarrow{w} {}^F y \} \quad .$$

Or ${}^{F^m}(h^{-1}y) = h^{-1}y$ s'écrit $h . {}^{F^m}h^{-1} . {}^{F^m}y = y$, i.e. $g' {}^{F^m}y = y$. Donc :

$$S_{T_w}(g) = \# \{ y \in X_w \mid g' {}^{F^m}y = y \} = N_w^m(g') \quad ,$$

d'où la proposition, par définition de $Sh_{F^m/F}$ .

<u>Théorème</u> 1.3 - Soit m un multiple non nul de $\delta$, et soit $\mathcal{E}_m$ l'ensemble des caractères irréductibles F-invariants de l'algèbre $H_m$. Soit $\tilde{\mathcal{E}}_m$ un ensemble formé d'une extension $\tilde{\chi}_m$ de chaque $\chi_m \in \mathcal{E}_m$ à l'algèbre $H_m \rtimes \langle F \rangle$ (cf. II, 2.12). Alors il existe pour chaque $\chi_m \in \mathcal{E}_m$ une extension $U_{\tilde{\chi}_m}$ de $U_{\chi_m}$ à $G^{F^m} \rtimes \langle F \rangle$ telle que :

$$\text{Pour } T \in H_m \text{ et } g \in G^{F^m}, \text{ on a : } S_T(g) = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_m(TF)\, U_{\tilde{\chi}_m}(gF) \quad .$$

Démonstration - La trace de TgF sur $\mathcal{E}_m$ est égale à la somme des traces des restrictions de TgF aux composantes isotypiques F-invariantes. Soit $\chi_m$ un caractère irréductible de $H_m$ ; la composante isotypique $[\chi_m] \otimes [U_{\chi_m}]$ est

F-invariante si et seulement si $\chi_m \in \mathcal{E}_m$. Considérons un tel $\chi_m$, et soit $\Psi$ un opérateur sur $[\chi_m]$ tel que la représentation de $H_m \rtimes \langle F \rangle$ obtenue en faisant agir F par $\Psi$ ait comme caractère $\tilde{\chi}_m$. Alors $(\Psi^{-1} \otimes 1) \circ F$ commute à $H_m$. Or le commutant de $H_m$ est $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}([U_{\chi_m}])$. Donc $(\Psi^{-1} \otimes 1) \circ F$ est de la forme $1 \otimes \Phi$ i.e. $F = \Psi \otimes \Phi$. On obtient une représentation de $G^{F^m} \rtimes \langle F \rangle$ sur $[U_{\chi_m}]$ en faisant agir F par $\Phi$. En effet, on a $F^m = (\Psi \otimes \Phi)^m = 1$, et $\Psi^m = 1$, donc $\Phi^m = 1$.

D'où le résultat, si l'on note $U_{\tilde{\chi}_m}$ le caractère de cette représentation.

## 2. - Le théorème principal.

Nous commençons par donner un paramétrage "indépendant de m" des caractères de l'algèbre $H_m \rtimes \langle F \rangle$ qui interviennent dans l'énoncé du théorème principal (théorème 2.3).

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères irréductibles $\bar{F}$-invariants de l'algèbre générique $\bar{\mathcal{H}}$. Dans la suite, nous fixons un ensemble $\tilde{\mathcal{E}}$ formé d'une extension $\tilde{\chi}$ à $\bar{\mathcal{H}} \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ de chaque caractère $\chi \in \mathcal{E}$, et nous supposons que, pour tout $\chi \in \mathcal{E}$, pour tout $w \in W$, et pour tout i on a $\tilde{\chi}(a_w \bar{F}^i) \in \mathbb{Z}[X^{1/c_\chi}]$, ce qui est possible d'après le corollaire II, 3.4.

Pour tout $m > 0$, multiple de $\delta$, on définit $\bar{f}_m : \mathbb{Z}[X^{1/c_\chi}] \longrightarrow \mathbb{C}$, par $\bar{f}_m(X^{1/c_\chi}) = q^{m/c_\chi}$, et on appelle $\chi_m$ (resp. $\tilde{\chi}_m$) le caractère $\chi_{\bar{f}_m}$ de $H_m$ spécialisé de $\chi$ par $\bar{f}_m$ (resp. le caractère de $H_m \rtimes \langle F \rangle$ qui provient du caractère $(\tilde{\chi})_{\bar{f}_m}$ du quotient $H_m \rtimes \langle \bar{F} \rangle$ de $H_m \rtimes \langle F \rangle$). On note $U_{\tilde{\chi}_m}$ le caractère de $G^{F^m} \rtimes \langle F \rangle$ correspondant à $\tilde{\chi}_m$ d'après le théorème 1.3.

<u>Définition</u> 2.1 - Soit $\chi \in \mathcal{E}$, nous posons :

$$\mathrm{Sh}^{o}U_{\chi} = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \overline{\tilde{\chi}_{o}(wF)}\, R_{w}^{1} \quad .$$

C'est une combinaison linéaire de caractères irréductibles à coefficients dans $|W|^{-1}\mathbb{Z}$ ; la notation $\mathrm{Sh}^{o}U_{\chi}$ sera justifiée par le théorème 2.3, (ii). On voit facilement en utilisant le corollaire II, 2.10 que :

$$R_{w}^{1} = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_{o}(wF)\, \mathrm{Sh}^{o}\, U_{\chi} \quad .$$

Remarquons que $\mathrm{Sh}^{o}\, U_{\chi}$ est à valeurs rationnelles pour tout $\chi$, car $\tilde{\chi}_{o}$ est à valeurs entières d'après ce qui précède, et $R_{w}^{1}$ est à valeurs entières pour tout $w \in W$ (<u>cf</u>. I, 4.2).

Rappelons qu'un caractère irréductible $V$ de $G^{F}$ est dit unipotent s'il existe $w \in W$ tel que $V$ intervienne dans $R_{w}^{1}$. Nous noterons $\mathcal{U}$ l'ensemble des caractères unipotents de $G^{F}$. D'après les définitions précédentes, un caractère $V$ est unipotent si et seulement s'il existe $\chi \in \mathcal{E}$ tel que $\langle \mathrm{Sh}^{o}\, U_{\chi}, V \rangle_{G^{F}} \neq 0$ .

Rappelons qu'une fonction centrale est dite uniforme si elle est combinaison linéaire de caractères de Deligne-Lusztig. Les fonctions $\mathrm{Sh}^{o}\, U_{\chi}$ forment donc une base de l'espace des fonctions uniformes combinaisons linéaires de caractères unipotents. De plus, on voit facilement que cette base est orthonormée (connaissant les produits scalaires de deux caractères de Deligne-Lusztig). On a donc, en particulier :

<u>Remarque</u> 2.2 - Pour tout caractère $V \in \mathcal{U}$, et pour tout $g \in G^{F}$ tel que la fonction caractéristique de la classe de conjugaison de $g$ sous $G^{F}$ soit uniforme, on a :

$$V(g) = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \langle \mathrm{Sh}^{o}\, U_{\chi}, V \rangle_{G^{F}} (\mathrm{Sh}^{o}\, U_{\chi})(g) \quad .$$

Théorème 2.3 -

(i) Soit $w \in W$ et soit $V$ un caractère irréductible de $G^F$. Alors les valeurs propres de $F^\delta$ sur la composante isotypique de type $V$ de $H_c^*(X_w, \mathbb{Q}_l)$ sont égales à $\lambda_V \omega_V$ à une puissance positive de $q^\delta$ près, où $\omega_V$ est une racine de l'unité, où $\lambda_V \in \{1, q^{\delta/2}\}$, et où $\lambda_V$ et $\omega_V$ ne dépendent que de $V$.

De plus, s'il existe $\chi \in \mathcal{E}$ tel que $< Sh^0 U_\chi , V >_{G^F} \neq 0$ et $c_\chi = 1$, alors $\lambda_V = 1$ ; si $G$ est de type ${}^2A_n$ ou ${}^2E_6$ et s'il existe $\chi \in \mathcal{E}$ tel que $c_\chi = 2$ et $< Sh^0 U_\chi , V > \neq 0$ alors $\lambda_V = q$.

(ii) Si $m$ est un multiple non nul de $\delta$, on a (cf. I, 7.5) :

$$Sh_{F^m/F} \, U_{\tilde{\chi}_m} = \sum_{V \in \mathcal{U}} < Sh^0 U_\chi , V > \omega_V^{m/\delta} \, V \quad .$$

Démonstration - Avec les notations de (i), d'après [L1], 3.9, les valeurs propres de $F^\delta$ sur la composante isotypique considérée ne dépendent que de $V$, à une puissance entière de $q^\delta$ près. Il existe donc un polynôme $P_{w,V} \in \mathbb{Z}[X]$ et une constante $\rho_V \in \mathbb{C}$, avec $1 \leq |\rho_V| < q^\delta$, tels que pour tout $m$ multiple de $\delta$, on ait :

$$(1) \qquad < N_w^m , V >_{G^F} = P_{w,V}(q^m) \, \rho_V^{m/\delta} \quad ,$$

(car le premier membre est la trace de $F^m$ sur $H_c^*(X_w)_V$).

D'autre part, d'après la proposition 1.2 et le théorème 1.3, on a :

$$(2) \qquad N_w^m = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_m(T_w F) \, Sh_{F^m/F} \, U_{\tilde{\chi}_m} \quad .$$

Utilisant les bases duales de $H_m$ données par la proposition II, 2.5 pour faire le "produit scalaire dans l'algèbre $H_m \rtimes < F >$" du membre de droite de (2) par $\tilde{\chi}_m$ (cf. II, corollaire 2.10), on obtient :

$$\sum_{w\in W} \mathcal{G}_m^{-1}\ q^{-ml(w)}\ \tilde{\chi}_m(F^{-1}\ T_{w^{-1}})\ N_w^m = \chi(1)\ d_\chi(q^m)^{-1}\ \ Sh_{F^m/F}\ U_{\tilde{\chi}_m}\ ,$$

car $<\chi_m\ ,\ \chi_m>_\lambda = \chi(1)/d_\chi(q^m)$ d'après la définition II, 4.1 .

En combinant avec l'égalité (1), on obtient :

$$<Sh_{F^m/F}\ U_{\tilde{\chi}_m}\ ,\ V>_{G^F} = (d_\chi(q^m))\ \chi(1)^{-1}\ \mathcal{G}_m^{-1} \sum_{w\in W} q^{-ml(w)}\tilde{\chi}_m(F^{-1}T_{w^{-1}})\ P_{w,V}(q^m)\beta_V^{m/\delta}.$$

D'après II, corollaire 3.4 et II, proposition 4.2, on a donc :

$$(3)\qquad <Sh_{F^m/F}\ U_{\tilde{\chi}_m}\ ,\ V>_{G^F} = f_{V,\chi}(q^{m/c_\chi})\ \beta_V^{m/\delta}\ ,$$

où $f_{V,\chi}\in\mathbb{Q}(X)$ et, de plus, si $G$ est de type ${}^2A_n$ ou ${}^2E_6$ et si $c_\chi = 2$ , on a $f_{V,\chi}\in X\mathbb{Q}(X^2)$.

D'après le corollaire II, 2.10, (ii) (cf. Remarque II, 2.11), la fonction de F-classe sur $G^{F^m}$ définie par $g \longmapsto U_{\tilde{\chi}_m}(gF)$ est de carré scalaire 1 . Comme $Sh_{F^m/F}$ est une isométrie de l'ensemble des fonctions de F-classe sur $G^{F^m}$ sur l'ensemble des fonctions de classe sur $G^F$ (cf. Remarque I, 7.4 (2)), on a :

$$|<Sh_{F^m/F}\ U_{\tilde{\chi}_m}\ ,\ V>_{G^F}| \leq 1\ .$$

Remarquons que $|G^F|<Sh_{F^m/F}\ U_{\tilde{\chi}_m}\ ,\ V>_{G^F}$ est un entier algébrique, comme somme de $|G^F|$ termes, dont chacun est le produit d'une valeur d'un caractère de $G^F$ par une valeur d'un caractère de $G^{F^m}\rtimes<F>$ . D'autre part, si l'on utilise l'égalité (1) pour deux valeurs $m$ et $m+\delta$ telles que $P_{w,V}(q^m)$ et $P_{w,V}(q^{m+\delta})$ soient non nuls, on voit que $\beta_V$ est dans le corps engendré par les valeurs des caractères de $G^F$ , donc dans une extension cyclotomique fixée de $\mathbb{Q}$ .

Prenons alors $m$ multiple de $\delta c_\chi$ dans l'égalité (3). Les considérations précédentes montrent que $|G^F| < Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m}, V >_{G^F}$ est un entier algébrique de module inférieur à $|G^F|$ dans une extension cyclotomique indépendante de $m$. Si $\sigma$ est un élément du groupe de Galois de cette extension, on a :

$$\sigma < Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m}, V >_{G^F} = < Sh_{F^m/F}\, \sigma(U_{\tilde{\chi}_m}), \sigma V >_{G^F} .$$

Cette dernière quantité est de module inférieur à $1$, pour les mêmes raisons que précédemment. Donc tous les conjugués de $|G^F| < Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m}, V >_{G^F}$ sont de module inférieur à $|G^F|$. Or il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques dans une extension fixée dont tous les conjugués sont de module inférieur à une borne fixée.

Donc le membre de gauche de l'égalité (3) prend la même valeur pour une infinité de valeurs de $m$ multiples de $\delta c_\chi$. Comparant ces valeurs à l'une d'entre elles $m_0$, on obtient :

$$(4) \qquad \rho_V^{(m_0-m)/\delta} = f_{V,\chi}(q^{m_0/c_\chi})^{-1}\, f_{V,\chi}(q^{m/c_\chi}) \quad ,$$

pour une infinité de valeurs de $m$.

En comparant la croissance asymptotique (quand $m \longrightarrow \infty$) des deux membres de (4), on en déduit l'existence d'un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$|\rho_V| = q^{-a\,\delta/c_\chi},$$

d'où :

$$(5) \qquad \rho_V = q^{-a\,\delta/c_\chi}\, \omega_V \quad \text{où } |\omega_V| = 1 \quad .$$

Pour tout $m$ multiple de $\delta c_\chi$ tel que (4) soit vrai, on a :

$$\omega_V^{(m_0-m)/\delta} = f_{V,\chi}(q^{m_0/c_\chi})^{-1}\, f_{V,\chi}(q^{m/c_\chi})\, q^{(m_0-m)a/c_\chi} \in \mathbb{Q} \quad .$$

Donc $\omega_V^{(m_0-m)/\delta} = \pm 1$ . Donc une des deux valeurs +1 ou -1 est prise par $\omega_V^{(m_0-m)/\delta}$ pour une infinité de valeurs de m . Soit $\varepsilon$ cette valeur. On a donc, pour une infinité de valeurs de m multiples de $\delta c_\chi$ :

$$(6) \qquad f_{V,\chi}(q^{m/c_\chi}) = \varepsilon\, f_{V,\chi}(q^{m_0/c_\chi})\, q^{(m-m_0)a/c_\chi} \quad .$$

Posons $c_{V,\chi} = \varepsilon\, f_{V,\chi}(q^{m_0/c_\chi})\, q^{-m_0a/c_\chi} \in \mathbb{Q}$ ; l'égalité (6) se réécrit :

$$f_{V,\chi}(q^{m/c_\chi}) = c_{V,\chi}\, q^{ma/c_\chi} \quad .$$

Deux fractions rationnelles égales pour une infinité de valeurs de la variable étant égales, on a :

$$f_{V,\chi}(X) = c_{V,\chi}\, X^a \quad .$$

L'égalité (3) peut donc être réécrite :

$$< Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m}\, , V >_{G^F} = c_{V,\chi}\, q^{ma/c_\chi}\, \beta_V^{m/\delta} \quad ,$$

donc, d'après (5) :

$$(7) \qquad < Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m}\, , V >_{G^F} = c_{V,\chi}\, \omega_V^{m/\delta} \quad .$$

Montrons maintenant que :

$$(8) \qquad c_{V,\chi} = < Sh^0\, U_\chi\, , V >_{G^F} \quad .$$

En reportant dans (2) la valeur trouvée pour le premier membre de (3) (cf. (7)), on obtient :

$$N_w^m = \sum_{\chi\in\xi} \tilde{\chi}_m(T_wF) \sum_{V\in\mathcal{U}} c_{V,\chi}\, \omega_V^{m/\delta}\, V \quad ,$$

d'où $R_w^1 = (- \sum_{\delta \mid m} N_w^m\, t^m)_{m=\infty} = \sum_{\chi\in\xi} \sum_{V\in\mathcal{U}} \tilde{\chi}_0(wF)\, c_{V,\chi}\, V$ ,

d'où (8). On en déduit la partie (ii) du théorème en combinant (7) et (8).

Montrons la partie (i) : On a, d'après (5), $\beta_V = \lambda_V\ \omega_V$ où $\lambda_V = q^{-a\delta/c_\chi}$. On a vu que $\omega_V$ est une racine de l'unité. Par définition de $\beta_V$ (cf. début de la démonstration) les valeurs propres de $F^\delta$ sur $H_c^*(X_w)_V$ sont égales à $\beta_V$ à une puissance de $q^\delta$ près. Il reste à vérifier les propriétés annoncées de $\lambda_V$. L'inégalité $1 \leq |\beta_V| < q$ implique $\lambda_V \in \{1, q^{\delta/2}\}$, car $c_\chi = 1$ ou $2$. Si $c_{V,\chi}$ est non nul et $c_\chi = 1$, alors $\lambda_V$ est une puissance de $q^\delta$, donc vaut $1$. Si $G$ est de type ${}^2A_n$ ou ${}^2E_6$, et s'il existe $\chi \in \mathcal{E}$ tel que $c_{V,\chi} \neq 0$ et $c_\chi = 2$, alors $\lambda_V$ est une puissance de $q$, qui est impaire d'après la remarque qui suit l'égalité (3), donc $\lambda_V = q$, d'où la partie (i) du théorème.

Remarque 2.4 - La démonstration ci-dessus est plus simple que celle indiquée dans [DM1], qui utilisait des lemmes arithmétiques (que nous rappelons en appendice). Cette simplification nous a été suggérée par Lusztig.

## 3. - Conséquences du théorème principal.

Nous poserons dorénavant $c_{V,\chi} = \langle Sh^0\, U_\chi , V \rangle_{G^F}$. D'après le théorème 2.3, nous avons donc, pour tout $m$ multiple non nul de $\delta$ :

$$\langle Sh_{F^m/F}\, U_{\chi_m} , V \rangle_{G^F} = c_{V,\chi}\ \omega_V^{m/\delta} \quad , \text{ pour tout } \chi \in \mathcal{E} \text{ et tout } V \in \mathcal{U} ,$$

$$N_w^m = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_m(T_w F) \sum_{V \in \mathcal{U}} c_{V,\chi}\ \omega_V^{m/\delta}\ V \quad , \text{ pour tout } w \in W ;$$

et, "à la limite" :

$$R_w^1 = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_0(wF) \sum_{V \in \mathcal{U}} c_{V,\chi}\ V \quad .$$

Corollaire 3.1 -

(i) $Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m}$ ne dépend que de la valeur de $m$ modulo $\delta h$, où $h$ est le ppcm des ordres des $\omega_V$ ($V \in \mathcal{U}$), et, pour $m$ multiple de $\delta h$, on a $Sh_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m} = Sh^o\, U_\chi$ .

(ii) Si $V \in \mathcal{U}$ est une composante de $E_1$ , alors $\omega_V = 1$ .

Démonstration - Le (i) est évident. Montrons le (ii) : on a : $(g \longmapsto Tr(g \mid E_1)) = N_1^1 = N_1^m = R_1^1$ (ces deux dernières égalités car $F$ agit trivialement sur $X_1$). Donc en particulier : $< N_1^\delta , V >_{G^F} = < R_1^1 , V >_{G^F}$ , i.e. : $\omega_V(\sum_{\tilde{\chi} \in \tilde{\mathcal{E}}} \tilde{X}_\delta(f)\, c_{V,\chi}) = (\sum_{\tilde{\chi}} \tilde{X}_0(F)\, c_{V,\chi})$, d'où le résultat car par construction de $\tilde{\chi}$ on a $\tilde{\chi}_\delta(F) = \tilde{\chi}_0(F)$. (On retrouve ainsi le résultat de Lusztig [L1] 3.10 a).

Corollaire 3.2 - Soient $\chi$ et $\psi \in \mathcal{E}$. Alors :

$$\sum_{V \in \mathcal{U}} c_{V,\chi}\, c_{V,\psi} = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \psi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Démonstration - C'est une conséquence de fait que $Sh_{F^m/F}$ est une isométrie (cf. (4) dans la démonstration du théorème 2.4).

Corollaire 3.3 - Pour tout caractère $V$ unipotent, on a : $\sum_{\chi \in \mathcal{E}} c_{V,\chi}^2 \leqslant 1$ .

Démonstration - En effet le premier membre de l'inégalité est le carré de la norme de la projection de $V$ sur le sous-espace ayant comme base orthonormée l'ensemble des $Sh^o\, U_\chi$ .

Corollaire 3.4 - Soit $\sigma$ un élément du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ . On a :

(i) $c_{V,\chi} = c_{\sigma V,\chi}$

(ii) $\sigma(\omega_V) = \omega_{\sigma V}$ sauf si $\lambda_V = q^{1/2}$ et $\sigma(\lambda_V) = -\lambda_V$ ,

auquel cas $\sigma(\omega_V) = -\omega_{\sigma V}$ .

Démonstration -

(i) Cela se déduit du fait que $Sh^o\, U_\chi$ est à valeurs rationnelles pour tout $\chi$

(ii) On a : $P_{w,V}(q^m)\ \sigma(\beta_V)^{m/\delta} = \sigma(< N_w^m, V >_{G^F}) = < N_w^m \mid {}^{\sigma}V > =$

$$= P_{w,\sigma V}(q^m)\ (\beta_{\sigma V})^{m/\delta} .$$

D'où : $P_{w,V}(q^m) = P_{w,\sigma V}(q^m)$ et, en faisant $m = \delta$ , on obtient :

$$\sigma(\beta_V) = \beta_{\sigma V} \text{ , d'où le résultat.}$$

Application au cas des groupes déployés.

Si $G$ est déployé ($\delta = 1$), l'automorphisme $\bar{F}$ est l'identité, donc $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} = \hat{\hat{\mathcal{H}}}$ . Nous écrirons $U_\chi$ pour $U_{\tilde{\chi}_1}$ qui est un caractère de $G^F$ . On a alors :

Corollaire 3.5 -

(i) $N_w^m = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi_m(T_w) \sum_{V\in\mathcal{U}} c_{V,\chi}\ \omega_V^m V$ pour tout $m \geq 1$ ,

(ii) $R_w^1 = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi_o(w)\ Sh^o\, U_\chi = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi_o(w) \sum_{V\in\mathcal{U}} c_{V,\chi}\ V$ ,

(iii) $c_{U_\chi,\psi} = c_{U_\psi,\chi}$ pour tous $\chi$ et $\psi \in \hat{\hat{\mathcal{H}}}$ .

Démonstration - Les énoncés (i) et (ii) sont des traductions immédiates des énoncés du paragraphe 2. Démontrons l'énoncé (iii) : L'application $Sh_{F/F}$ est une involution et une isométrie, d'où

$$\omega_{U_\chi} c_{U_\chi,\psi} = \langle Sh_{F/F} U_\psi , U_\chi \rangle = \langle U_\psi, Sh_{F/F} U_\chi \rangle = \omega^{-1}_{U_\psi} c_{U_\psi,\chi} .$$

Or, par 3.1 (ii), on a $\omega_{U_\chi} = \omega_{U_\psi} = 1$ , d'où le résultat._

Exemple 3.6 - Produit de groupes linéaires.

Si $G$ est un produit de groupes linéaires, alors $Sh_{F/F}$ envoie chaque classe de $G^F$ sur son inverse (cf. IV, Cor 1.3, Ex. (i)) ; donc $Sh_{F/F} U_\chi = \overline{U}_\chi = U_{\overline{\chi}} = U_\chi$ , et donc $c_{V,\chi} = \delta_{V,U_\chi}$ (on retrouve $\omega_{U_\chi} = 1$ , et $\mathcal{U} = \{ U_\chi \mid \chi \in \mathcal{E} \}$), d'où :

(i) $\quad R^1_w = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi_0(w)\, U_\chi$ ,

(ii) $\quad N^m_w = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi_m(T_w)\, U_\chi$ .

4. - Sous-groupes produits de groupes de type $A_n$ .

Le but de ce paragraphe est de donner une formule pour $N^m_w$ quand $w$ est dans un sous-groupe parabolique $W_1$ de $W$ sur lequel $F$ agit trivialement, et tel que le sous-groupe de Levi correspondant de $G$ soit un produit de groupes de type $A_n$ . Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1 - Soient $G$ un groupe fini, $P$ un sous-groupe, et $E_P$ une représentation de $P$ . Posons $E_G = \mathrm{Ind}_P^G(E_P) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[P]} E_P$ , et considérons les algèbres commutantes $H_P = \mathrm{End}_P(E_P)$ et $H_G = \mathrm{End}_G(E_G)$. Nous identifions $H_P$ à son image dans $H_G$ par l'application $i$ définie par $i(h)(g \otimes x) = g \otimes h(x)$ pour $h \in H_P$, $g \in G$, et $x \in E_P$. Si $\pi \in \hat{H}_P$ (resp. $\gamma \in \hat{H}_G$), nous noterons $U_\pi$ (resp. $U_\gamma$) le caractère correspondant de $P$ (resp. $G$). Alors :

La multiplicité de $U_\gamma$ dans $\mathrm{Ind}_P^G U_\pi$ est égale à la multiplicité de $\pi$ dans $\mathrm{Res}_{H_P}^{H_G} \gamma$.

Démonstration - On peut décomposer $E_G$ et $E_P$ sous la forme :

$$E_G = \bigoplus_{\gamma \in \hat{H}_G} [U_\gamma] \otimes [\gamma] \qquad (1)$$

$$E_P = \bigoplus_{\pi \in \hat{H}_P} [U_\pi] \otimes [\pi] \qquad (2)$$

où $[\gamma]$, $[U_\gamma]$, $[\pi]$, $[U_\pi]$ sont des modèles des représentations de caractères $\gamma$, $U_\gamma$, $\pi$, $U_\pi$, respectivement.

De (2), on tire :

$$E_G \simeq \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[P]} \Big( \bigoplus_{\pi \in \hat{H}_P} [U_\pi] \otimes [\pi]\Big) \simeq \bigoplus_{\pi \in \hat{H}_P} (\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[P]} [U_\pi]) \otimes [\pi].$$

Décomposant en $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles, on obtient :

$$\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[P]} [U_\pi] \simeq \bigoplus_{\gamma \in \hat{H}_G} [U_\gamma] \otimes \mathbb{C}^{\langle \mathrm{Ind}_P^G U_\pi, U_\gamma \rangle_G},$$

d'où : $E_G \simeq \bigoplus_{\gamma \in \hat{H}_G} [U_\gamma] \otimes \Big( \bigoplus_{\pi \in \hat{H}_P} \mathbb{C}^{\langle \mathrm{Ind}_P^G U_\pi | U_\gamma \rangle} \otimes [\pi]\Big)$,

en tant que $G \times H_P$-module. En comparant avec (1), on en déduit que $\bigoplus_{\pi \in \hat{H}_P} \mathbb{C}^{\langle \mathrm{Ind}_P^G U_\pi | U_\gamma \rangle} \otimes [\pi]$ est muni d'une structure de $H_G$-module irréductible de type $\gamma$, d'où le lemme.

Nous allons appliquer le lemme 4.1 à la situation d'un groupe algébrique et d'un sous-groupe parabolique : Soit $G$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ : soit $L$ un sous-groupe de Lévi rationnel d'un sous-groupe parabolique rationnel $P$ de $G$, et soit $E_G$ (resp. $E_L$) la représentation de permutation de $G^F$ sur l'ensemble des sous-groupes de Borel rationnels de $G$ (resp. la représentation analogue pour $L$). Nous poserons $H_G = \mathrm{End}_{G^F}(E_G)$ et $H_L = \mathrm{End}_{L^F}(E_L)$. Soit $W$ le groupe de Weyl de $G$ et $W_L$ celui de $L$.

Rappelons (cf. II, 1.2 (ii)) que $H_G \cong H(W^F, (x_{s,1})_{s\in S})$, et que $H_L \cong H(W_L^F, (x_{s,1})_{s\in S_L})$ où $S$ (resp. $S_L$) est l'ensemble des générateurs de Coxeter de $W^F$ (resp. de $W_L^F$). L'algèbre $H_L$ s'identifie naturellement à une sous-algèbre de $H_G$. Nous noterons $U_\gamma$ (resp. $U_\pi$) le caractère de $G^F$ (resp. de $L^F$) correspondant au caractère $\gamma$ de $H_G$ (resp. au caractère $\pi$ de $H_L$).

Proposition 4.2 - La multiplicité de $U_\gamma$ dans $R_L^G U_\pi$ est égale à la multiplicité de $\pi$ dans $\mathrm{Res}_{H_L}^{H_G} \gamma$, pour tous caractères $\pi$ et $\gamma$ comme ci-dessus.

Démonstration - Soit $E_P$ la représentation de $P^F$ obtenue en étendant trivialement au radical unipotent de $P^F$ la représentation $E_L$. On a $E_G = \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} E_P$, car $E_P$ est la représentation de permutation de $P^F$ sur ses sous-groupes de Borel, de plus, $\mathrm{End}_{P^F}(E_P) \simeq H_L$. On obtient donc immédiatement la proposition en appliquant le lemme 4.1.

Nous pouvons appliquer, sous les hypothèses précédentes, les résultats de spécialisation du théorème II, 1.3, car $H(W^F, \underline{x}_1)$ et $H(W_L^F, \underline{x}_1)$ sont semi-simples comme algèbres commutantes de représentations de groupes finis. Nous noterons $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{E}'_L$) l'ensemble des caractères irréductibles de l'algèbre générique $H(W^F, \underline{X})$ (resp. $H(W_L^F, \underline{X})$). D'après le théorème II, 3.1, les caractères irréductibles de ces algèbres sont à valeurs dans $\mathbb{Z}[\underline{X}^{1/2}]$. Pour tout $m \geq 0$, on définit $\bar{f}_m : \mathbb{Z}[\underline{X}^{1/2}] \longrightarrow \mathbb{C}$ par $X_s^{1/2} \longmapsto (x_{s,m})^{1/2}$. Pour tout caractère $\chi \in \mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{E}'_L$) on note $\chi_m$ le spécialisé $\chi_{\bar{f}_m}$ de $\chi$ et on note $U_\chi$ le caractère de $G^F$ (resp. de $L^F$) correspondant à $\chi_{\bar{f}_1}$ (cette notation est compatible, dans le cas où $G$ est déployé avec les notations de 3.5).

<u>Théorème</u> 4.3 - Sous les hypothèses précédentes, et si, de plus, le sous-groupe $L$ est un produit de groupes de type $A_n$ (déployés sur $\mathbb{F}_q$), alors :

$$\text{Si } w \in W_L \text{ , on a } N^m_{w,G} = \sum_{\psi \in \mathcal{E}'} \psi_m(T_w)\, U_\psi \quad .$$

Démonstration - D'après le théorème I, 5.1, on a :

$$N^m_{w,G} = R_L^G\, N^m_{w,L} \quad .$$

Puisque $L$ est un produit de groupes de type $A_n$, on a :

$$N^m_{w,L} = \sum_{\chi \in \mathcal{E}'_L} \chi_m(T_w)\, U_\chi \quad .$$

En effet, ce résultat est vrai pour un produit de groupes linéaires (<u>cf.</u> 3.6) : or les variétés $X_w$ ne dépendent que du type de $W$, et les caractères unipotents d'un groupe de Chevalley fini se factorisent par le groupe adjoint du même type (<u>cf.</u> [DL1]), donc la décomposition des fonctions centrales $N_w^m$ en caractères irréductibles ne dépend que du type de $W$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} N^m_{w,G} &= \sum_{\chi \in \mathcal{E}'_L} \chi_m(T_w)\, R_L^G\, U_\chi \\ &= \sum_{\psi \in \mathcal{E}'} \sum_{\chi \in \mathcal{E}'_L} \chi_m(T_w) < R_L^G\, U_\chi \, , U_\psi >_{G^F}\, U_\psi \quad . \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.2, on a $< R_L^G U_\chi , U_\psi >_{G^F}$ = multiplicité de $\chi_{\bar{f}_1}$ dans $\mathrm{Res}_{H_L}^{H_G} \psi_{\bar{f}_1}$ .

Cette dernière multiplicité est égale, d'après le théorème de spécialisation (théorème II, 1.3), à la multiplicité de $\chi$ dans la restriction de $\psi$ de $H(W^F, \underline{X})$ à $H(W_L^F , \underline{X})$. D'où :

$$\sum_{\chi \in \mathcal{E}'_L} \chi_m(T_w) < R_L^G U_\chi , U_\psi >_{G^F} = \psi_m(T_w) \quad ,$$

d'où le résultat.

Corollaire 4.4 - Sous les hypothèses du théorème 4.3, on a :

$$R^1_{w,G} = \sum_{\psi \in \mathcal{E}'} \psi_0(w) \; U_\psi \quad .$$

Corollaire 4.5 - Sous les hypothèses du théorème 4.3, on a :

$$\sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}(a_w F) \; c_{V,\chi} = \begin{cases} \psi(a_w) & \text{s'il existe } \psi \in \mathcal{E}' \text{ tel que } V = U_\psi , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration - On a : $< N_w^m \mid V >_{G^F} = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_m(T_w F) < \mathrm{Sh}_{F^m/F} \, U_{\tilde{\chi}_m} \mid V >_{G^F}$ .

D'où, en comparant avec 4.3 :

$$\sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_m(T_w F) \quad c_{V,\chi} = \begin{cases} \psi_m(T_w) & \text{si } V \text{ est de la forme } U_\psi , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

car dans le cas où $V = U_\psi$ , on a $\omega_V = 1$ (cf. 3.1 (ii)).

On en déduit le corollaire, car les deux membres sont des polynômes égaux pour une infinité de valeurs de la variable.

5. - Application de la désingularisation de $\bar{X}_w$ .

Soit $\underline{s} = (s_1 \dots s_n)$ une suite de réflexions fondamentales (i.e. d'éléments de $S \subset W$), et soit $X_{\underline{s}}$ la variété formées des suites $(B_1, \dots, B_n)$ de sous-groupes de Borel de $G$ telles que la position relative de $B_i$ avec $B_{i+1}$ soit $s_i$ ou 1 , et que la position relative de $B_n$ avec ${}^F B_1$ soit $s_n$ ou 1 . Pour $g \in G^F$ , nous poserons $N_{\underline{s}}^m(g) = |X_{\underline{s}}^{gF^m}|$.

D'après [D] , si $s_1 \dots s_n$ est une décomposition réduite de $w$ , alors $X_{\underline{s}}$ est une désingularisation de l'adhérence de $X_w$ dans la variété $X = G/B_0$ .

Lemme 5.1 - $N_{\underline{s}}^m = \sum_{\chi \in \mathcal{E}} \tilde{\chi}_m((1 + T_{s_1}) \dots (1 + T_{s_n})F)\, (\mathrm{Sh}_{F^m/F}\, U_{\tilde{\chi}_m})$ si $m$ est multiple non nul de $\delta$ .

Démonstration - En suivant le calcul de III, 1.1 (remontée de Shintani de $F$ à $F^m$), on trouve que le membre de gauche vaut :

$$\mathrm{Sh}_{F^m/F}\,(g \longmapsto \mathrm{Trace}((1 + T_{s_1}) \dots (1 + T_{s_n})\, gF \mid E_m) \quad ,$$

d'où le résultat, d'après III, 1.2.

Appliquons maintenant les résultats sur les variétés non singulières. Etant complète et non singulière de dimension $n$ , la variété $X_{\underline{s}}$ n'a de la cohomologie qu'en degrés 0 à $2n$ , et les valeurs propres de $F^\delta$ sur $H_c^i(X_{\underline{s}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ sont de module $q^{\delta i/2}$ . De plus, par dualité de Poincaré, si $V$ est un $G^F$-module irréductible, on a $< V, H_c^i(X_{\underline{s}})> = < \bar{V}, H_c^{2n-i}(X_{\underline{s}})>$ , où $\bar{V}$ désigne le dual de $V$ . Donc, d'après le théorème de Lefschetz :

$$N_{\underline{s}}^m(g) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i\, \mathrm{Trace}(gF^m \mid H_c^i(X_{\underline{s}}))$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i\, q^{mi/2} \sum_{V \in \mathcal{U}}\ \sum_{\lambda \in E_{i,V}} \lambda^{m/\delta}\, V(g) \ ,$$

où $E_{i,V}$ est un ensemble de nombres complexes de module 1 tels que $(\lambda q^{\delta i/2})_{\lambda\in E_{i,V}}$ soient les valeurs propres de $F^{\delta}$ sur $H_c^i(X_{\underline{s}})_V$ .

D'autre part, d'après le lemme 5.1 et le théorème principal, on a :

$$N_{\underline{s}}^m = \sum_{V\in\mathcal{U}} \omega_V^{m/\delta} \ V \Big(\sum_{\chi\in\mathcal{E}} \tilde{\chi}_m((1+T_{s_1}) \ldots (1+T_{s_n})F)\, c_{V,\chi}\Big) .$$

En comparant avec la formule précédente, on obtient $E_{i,V} = \{\omega_V\}$ , et, en comparant les deux expressions de $< N_{\underline{s}}^m , V > \omega_V^{-m/\delta}$ on obtient :

<u>Lemme</u> 5.2 -

$$\begin{aligned} < N_{\underline{s}}^m, V > \ \omega_V^{-m/\delta} &= \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \tilde{\chi}_m((1+T_{s_1}) \ldots (1+T_{s_n})F)\, c_{V,\chi} \\ &= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i q^{mi/2} < V , H_c^i(X_{\underline{s}})> \end{aligned} .$$

Notons d'autre part que en développant le second membre dans l'égalité du lemme 5.1 et en utilisant l'égalité (2) de la démonstration du théorème 2.3 on obtient :

$$N_{\underline{s}}^m = \sum_w \text{(coefficient de } (1+T_{s_1}) \ldots (1+T_{s_n}) \text{ sur } T_w)\, N_w^m .$$

Or, d'après la démonstration du théorème 2.3, on a

$$< N_w^m, V > \ \omega_V^{-m/\delta}\ \lambda_V^{-m/\delta} = P_{w,V}(q^m) \quad \text{où} \quad P_{w,V}\in \mathbb{Z}[X] .$$

Donc on peut écrire

$$< N_{\underline{s}}^m, V > \ \omega_V^{-m/\delta}\ \lambda_V^{-m/\delta} = P_{\underline{s},V}(q^m) \quad \text{où} \quad P_{\underline{s},V}\in \mathbb{Z}[X] .$$

Le lemme 5.2 montre alors que :

$$P_{\underline{s},V}(q^m)\ \lambda_V^{m/\delta} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i\ q^{mi/2} < V, H^i_c(X_{\underline{s}})> \quad .$$

Comme $\lambda_V$ est une puissance entière de $q^{1/2}$, on obtient immédiatement :

<u>Théorème</u> 5.3 -

Posons $\lambda_V = q^{a_V \delta/2}$ où $a_V = 0$ ou $1$ . Alors :

(i) Le caractère $V$ n'intervient dans $H^i_c\,(X_{\underline{s}})$ que pour $i \equiv a_V$ mod. 2

(ii) On a $(-1)^{a_V}\ X^{-a_V/2} \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \tilde{\chi}((1+a_{s_1})(1+(1+a_{s_n})F)\ c_{V,\chi}$

$$= \sum_{i=0}^{n-a_V} X^i < V\ ,\ H_c^{2i+a_V}\,(X_{\underline{s}})> \quad ,$$

cette expression est donc un polynôme à coefficients entiers positifs.

<u>Remarque</u> - Comme $c_{V,\chi}$ est égal à $c_{\bar{V},\chi}$ , on retrouve que $< V, H_c^{2n-i}(X_{\underline{s}})> = < V\ ,\ H^i_c(X_{\underline{s}})>$ en utilisant le lemme 5.2 et le fait que $\tilde{\chi}((1+a_{s_1})\ \dots\ (1+a_{s_n})F,\ X)$ est égal à $X^n\ \tilde{\chi}((1+a_{s_1})\ \dots\ (1+a_{s_n})F,\ X^{-1})$, ce qui provient du fait que $\{X^{-1}(1+a_s)\}_{s\in S}$ est un ensemble de générateurs de $H(W,X^{-1})$ vérifiant les mêmes relations que $\{(1+a_s)\}_{s\in S}$ comme générateurs de $H(W,X) = \mathcal{H}$ .

## 6. - Dualité de Curtis.

Considérons l'opérateur $D_G$ (dualité de Curtis) sur les fonctions centrales sur $G^F$, défini par :

$$D_G = (-1)^{\sigma(G)} \sum_M (-1)^{\eta(M)} R_M^G \circ {}^*R_M^G ,$$

où l'on note $\sigma(H)$ le $\mathbb{F}_q$-rang du groupe algébrique réductif $H$, et $\eta(H)$ le $\mathbb{F}_q$-rang semi-simple du groupe algébrique (non nécessairement réductif) $H$ ; dans la somme $M$ parcourt un ensemble formé d'un sous-groupe de Lévi rationnel de chaque sous-groupe parabolique contenant un sous-groupe de Borel rationnel fixé (cf. [C], [A], [DM3]).

Théorème 6.1 - On a $D_G R_T^G(\theta) = (-1)^{\sigma(T)} R_T^G(\theta)$.

Démonstration - Nous donnons une démonstration de ce résultat en application du théorème 2 de [DM3]. D'après ce théorème, le résultat est vrai si la "formule de Mackey" suivante est vérifiée :

$${}^*R_M^G \circ R_T^G(\theta) = \sum_{x \in \mathcal{J}} R_{{}^xT}^M ({}^x\theta) \qquad (M) ,$$

où $M$ est un sous-groupe de Lévi rationnel d'un sous-groupe parabolique rationnel $P = MU$, et où $\mathcal{J}$ est un ensemble de représentants de $M^F \backslash \{x \in G^F \mid M \supset {}^xT\} / T^F$.

Lemme 6.2 - Si le caractère (virtuel) ${}^*R_M^G \circ R_T^G(\theta)$ est combinaison linéaire de caractères de Deligne-Lusztig de $M^F$, alors la formule $(M)$ est vérifiée.

Démonstration - Il suffit dans ce cas de voir que les deux membres de (M) ont même produit scalaire avec tous les caractères $R^M_{T'}(\theta')$ de $M^F$. Or :

$$< {}^*R^G_M\, R^G_T(\theta),\ R^M_{T'}(\theta')>_{M^F} = < R^G_T(\theta),\ R^G_M \circ R^M_{T'}(\theta')>_{G^F} ,$$

ce qui est égal (cf. [DL] 8.2 ou ci-dessus I, 5.2) à $< R^G_T(\theta),\ R^G_{T'}(\theta')>_{G^F}$, donc, d'après [DL] 6.8 au cardinal de l'ensemble $E_1 = \{x\in G^F \mid {}^xT=T'$ et ${}^x\theta=\theta'\}/_{T^F}$.

D'autre part le produit scalaire de $R^M_{T'}(\theta')$ avec le membre de droite de (M) est :

$$\sum_{x\in \mathcal{S}} < R^M_{{}^xT}({}^x\theta),\ R^M_{T'}(\theta')>_{M^F} = \sum_{x\in\mathcal{S}} \mid T'^F\backslash\{y\in M^F \mid {}^{yx}(T,\theta) = (T',\theta')\}\mid = \mid E_2\mid ,$$

où $E_2 = T'^F \times M^F\backslash E_3/T^F$, avec $E_3 = \{(x,y)\in G^F\times M^F \mid {}^{yx}(T,\theta) = (T',\theta')\}$, l'action de $T'^F\times M^F$ sur $E_3$ étant donnée par $(x,y) \xmapsto{(t',m)} (mx,\ t'ym^{-1})$, et celle de $T^F$ par $(x,y) \xmapsto{t} (xt,\ y)$.

Il faut voir que $E_1$ et $E_2$ ont même cardinal. Or $E_3$ s'envoie surjectivement sur $E_2$ (resp. sur $E_1$ par $(x,y) \longmapsto yx$), et les fibres de ces deux applications sont toutes de cardinal $M^F\times T^F$. D'où le lemme.

Pour montrer que ${}^*R^G_M \circ R^G_T(\theta)$ est combinaison linéaire de caractères de Deligne-Lusztig de $M^F$, nous allons raisonner par récurrence sur $\eta(G)$. La propriété est évidente si $M=G$, nous supposerons donc que $M\neq G$. Si $M$ contient un conjugué de $T$ sous $G^F$, on peut supposer que $M$ contient $T$, et alors :

$${}^*R^G_M\, R^G_T(\theta) = ({}^*R^G_M\, R^G_M)\ (R^M_T(\theta)) .$$

On sait que $^*R^G_M \circ R^G_M = \sum_{x\in \mathcal{E}(M)} R^M_{M\cap {}^xM} \circ \mathrm{ad}\, x \circ {}^*R^M_{x^{-1}M\cap M}$ ,

où $\mathcal{E}(M)$ est un ensemble de représentants de $M^F\backslash\{x \mid {}^xM\cap M$ contient un tore maximal $\}/M^F$ (cf. [LS] 2.6). Donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $M$, on obtient le résultat. Si $M$ ne contient pas de conjugué de $T$ sous $G^F$, nous obtenons le résultat par le lemme suivant :

Lemme 6.3 - Sous l'hypothèse de récurrence, si $M$ ne contient pas de conjugué de $T$ sous $G^F$ , alors $^*R^G_M\, R^G_T(\theta) = 0$ .

Démonstration - Utilisons la formule du caractère pour $R^G_T(\theta)$ (cf. [DL] 4.2). Cette formule est équivalente aux deux formules suivantes :

$$R^G_T(\theta)(x) = \sum_{T'\in\mathcal{T}} R^{Z(s)^o}_{T'}(\theta)(x) \qquad (1) \ ,$$

où $s$ est la partie semi-simple de $x$ et où $\mathcal{T}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans $Z(s)^o$ des tores de $Z(s)^o$ conjugués à $T$ sous $G^F$ ; et : si $s$ est dans le centre $ZG^F$ de $G^F$ et $u$ est unipotent,

$$R^G_T(\theta)(su) = R^G_T(1)(u)\,\theta(s) \qquad (2) \ .$$

Nous utilisons aussi l'égalité suivante (cf. [DM3] proposition 4) :

$$\text{si } x\in M^F \quad ({}^*R^G_M\,\chi)(x) = ({}^*R^{Z(s)^o}_{M\cap Z(s)^o} \circ \mathrm{Res}^G_{Z(s)^o}\,\chi)(x) \qquad (3) \ ,$$

où $\chi$ est un caractère quelconque de $G^F$ , et où $s$ est la partie semi-simple de $x$ . En combinant (1) et (3), on obtient :

$$({}^*R^G_M(R^G_T(\theta)))(x) = \sum_{T'\in\mathcal{T}} {}^*R^{Z(s)^o}_{M\cap Z(s)^o}\, R^{Z(s)^o}_{T'}(\theta)(x) \qquad (1') \ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, si $Z(s)^o \neq G$ (i.e. si $s \notin ZG^F$), le deuxième membre de (1') est nul. Le seul cas à étudier est donc le cas où $s \in ZG^F$. Dans ce cas, d'après (2), pour tout élément unipotent $u$ de $M^F$, on a :

$$({}^*R_M^G\, R_T^G(\theta))(su) = f(u)\,\theta(s) \qquad (2') \quad ,$$

où $f(u) = |U^F|^{-1} \sum_{v \in U^F} R_T^G(1)(uv)$, car pour tout $v \in U^F$, l'élément $uv$ est unipotent.

Calculons alors :

$$< {}^*R_M^G\, R_T^G(\varphi)\ ,\ {}^*R_M^G\, R_T^G(1) >_{M^F} \quad ,$$

où $\varphi$ est un caractère de $T^F$. On obtient :

$$\sum_{s \in ZG^F} \varphi(s) \sum_{u \in U^F} |f(u)|^2 \quad .$$

Choisissons un caractère $\varphi \neq 1$ tel que la restriction de $\varphi$ à $ZG^F$ soit triviale (cf. remarque ci-dessous). Le produit scalaire calculé est nul car ${}^*R_M^G\, R_T^G(\varphi)$ et ${}^*R_M^G\, R_T^G(1)$ n'ont aucun composant irréductible en commun : si $\chi$ intervient dans ${}^*R_M^G\, R_T^G(1)$, alors $\chi$ est un caractère unipotent, de même que tous les composants irréductibles de $R_M^G\,\chi$. Or $R_T^G(\varphi)$ ne contient aucun caractère unipotent (cf. [DL], démonstration de la proposition 8.2).

On en déduit que $\sum_{u \in U^F} |f(u)|^2 = 0$. En particulier, pour tout élément $u$ unipotent, on a, d'après (2') : $({}^*R_M^G\, R_T^G(\theta))(su) = 0$. D'où le résultat.

Remarque 6.4 - Le choix d'un caractère $\varphi$ comme ci-dessus est toujours possible, sauf si $T^F = ZG^F$. Dans ce cas, le tore $T$ est nécessairement un tore déployé, mais alors l'hypothèse du lemme n'est pas vérifiée car $M$ contient un conjugué de $T$.

Remarquons que nous avons exclu les groupes de Ree et de Suzuki de notre étude. La plupart des résultats exposés sont vrais pour ces groupes, en particulier le théorème 6.1, mais la démonstration donnée ici n'est pas valable : il existe en effet dans ce cas un tore anisotrope $T$ tel que $T^F = \{1\}$ .

La formule de Mackey (M) que nous avons démontrée a été démontrée depuis dans un cadre plus général ($M$ est un sous-groupe de Levi rationnel d'un sous-groupe parabolique non nécessairement rationnel) par Deligne et Lusztig (cf. [DL2] , 7.1).

Avant de donner des conséquences du théorème 6.1, précisons quelques notations. Si $\chi$ est un caractère irréductible de l'algèbre générique $\bar{\mathcal{H}}$ , nous noterons $\chi \otimes \mathrm{sgn}$ (par abus de notation) le caractère de $\bar{\mathcal{H}}$ dont la spécialisation au groupe $W$ est $\chi_0 \otimes \mathrm{sgn}_0$ (on a noté sgn le caractère signature de $\bar{\mathcal{H}}$ , c'est-à-dire donné par $\mathrm{sgn}(a_w) = (-1)^{l(w)}$ ; ce caractère se spécialise en le caractère signature $\mathrm{sgn}_0$ de $W$ ; c'est un caractère $\bar{F}$-invariant).

Pour tout caractère $\chi \in \mathcal{E}$, il existe un signe $\varepsilon_{\tilde{\chi}}$ tel que, pour tout $w \in W$ ,

$$(\widetilde{\chi \otimes \mathrm{sgn}})_0\,(wF) = (\tilde{\chi}_0 \otimes \widetilde{\mathrm{sgn}}_0)(wF)\,\varepsilon_{\tilde{\chi}} \quad ;$$

en effet les deux extensions $(\widetilde{\chi \otimes \mathrm{sgn}})_0$ et $\tilde{\chi}_0 \otimes \widetilde{\mathrm{sgn}}_0$ de $(\chi \otimes \mathrm{sgn})_0$ diffèrent a priori d'une racine de l'unité sur l'élément $wF$ , mais le choix de $\tilde{\mathcal{E}}$ (cf. III,2) implique que cette racine de l'unité vaut $\pm 1$ .

Remarquons que nous pouvons choisir l'extension $\widetilde{\mathrm{sgn}}$ du caractère signature de $\bar{\mathcal{H}}$ de façon que $\widetilde{\mathrm{sgn}}(xF^i) = \mathrm{sgn}(x)$ pour tout $x \in \bar{\mathcal{H}}$ et tout $i$ , car sgn est un caractère de degré 1 . De même, si nous notons ind le caractère de $\bar{\mathcal{H}}$ qui se spécialise en l'identité de $W$ (on a $\mathrm{ind}(a_w) = X^{l(w)}$), on peut choisir l'extension $\widetilde{\mathrm{ind}}$ de façon que $\widetilde{\mathrm{ind}}(xF^i) = \mathrm{ind}(x)$ pour tout $x \in \bar{\mathcal{H}}$ et tout $i$ . Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons de tels choix faits.

<u>Corollaire</u> 6.5 - Soit $V$ un caractère unipotent de $G^F$. On sait qu'il existe un signe $\varepsilon_V = \pm 1$ tel que $V' = \varepsilon_V D_G V$ soit un caractère irréductible. Alors $V'$ est un caractère unipotent. De plus, pour tout caractère $\chi \in \mathcal{E}$, on a :

(i) $\quad (-1)^{\sigma(G)} \varepsilon_V c_{V',\chi} = c_{V,\chi \otimes \mathrm{sgn}} \varepsilon_{\tilde{\chi}}$ ,

(ii) $\quad D_G(\mathrm{Sh}^o U_\chi) = (-1)^{\sigma(G)} \varepsilon_{\tilde{\chi}} \mathrm{Sh}^o U_{\chi \otimes \mathrm{sgn}}$ .

Démonstration - Le théorème 6.1 montre immédiatement que $V'$ est unipotent. On a : $\mathrm{Sh}^o U_\chi = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \overline{\tilde{\chi}_o(wF)} R_w^1$ . Donc

$$(-1)^{\sigma(G)} D_G(\mathrm{Sh}^o U_\chi) = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \overline{\tilde{\chi}_o(wF)} \,\mathrm{sgn}(w) R_w^1 ,$$

car si $T$ est de type $w$, on a $(-1)^{\sigma(G) + \sigma(T)} = \mathrm{sgn}(w)$ . D'où

$$(-1)^{\sigma(G)} D_G(\mathrm{Sh}^o U_\chi) = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon_{\tilde{\chi}} \overline{(\widetilde{\chi \otimes \mathrm{sgn}})_o} (wF) R_w^1 = \varepsilon_{\tilde{\chi}} \mathrm{Sh}^o U_{\chi \otimes \mathrm{sgn}} ,$$

d'où (ii).

Pour montrer (i), faisons le produit scalaire des deux membres avec $V$ :

$$c_{V,\chi \otimes \mathrm{sgn}} = \langle \mathrm{Sh}^o U_{\chi \otimes \mathrm{sgn}} , V \rangle_{G^F} = \langle (-1)^{\sigma(G)} \varepsilon_{\tilde{\chi}} D_G(\mathrm{Sh}^o U_\chi), V \rangle_{G^F} ,$$

ce qui est égal, puisque $D_G$ est autoadjoint à $(-1)^{\sigma(G)} \langle \varepsilon_{\tilde{\chi}} \mathrm{Sh}_o U_\chi , D_G V \rangle_{G^F}$ , donc à $(-1)^{\sigma(G)} \varepsilon_{\tilde{\chi}} \varepsilon_V c_{V',\chi}$ .

<u>Corollaire</u> 6.6 - Avec les notations données avant le corollaire 6.5, on a :

(i) $\quad c_{V,\mathrm{ind}} = 0$ (resp. $c_{V,\mathrm{sgn}} = 0$) si $V$ est distinct de $I$ (resp. de $St$) ;

(ii) $\quad c_{I,\mathrm{ind}} = 1$ et $c_{St,\mathrm{sgn}} = 1$ ;

(iii) $\quad \mathrm{Sh}^o U_{\mathrm{ind}} = I$ et $\mathrm{Sh}^o U_{\mathrm{sgn}} = St$ ;

(iv) $c_{I,\chi} = 0$ (resp. $c_{St,\chi} = 0$) si $\chi$ est un caractère irréductible de $\bar{\mathcal{H}}$ différent de ind (resp. sgn).

(seuls les énoncés (ii) et (iii) supposent que les choix de $\widetilde{ind}$ et de $\widetilde{sgn}$ ont été faits comme indiqué précédemment).

Démonstration - La propriété (iii) est une conséquence immédiate de (i) et (ii). La propriété (iv) est une conséquence de (i) et (ii), et du corollaire 3.3.

Rappelons que le caractère identité de $G^{F^m}$ est $U_{ind_m}$ et que le caractère de Steinberg de $G^{F^m}$ est $U_{sgn_m}$ (pour $m$ multiple de $\delta$). Par définition de $Sh_{F^m/F}$, on voit a priori que $Sh_{F^m/F}\, U_{\widetilde{ind}_m}$ est un multiple de $I$, pour tout $m$ (multiple non nul de $\delta$), et, qu'avec le choix fait pour $\widetilde{ind}$, on a $Sh_{F^m/F}\, U_{\widetilde{ind}_m} = I$, ce qui donne bien les valeurs de $c_{V,ind}$ annoncées.

Nous allons maintenant utiliser le fait que le dual de Curtis de $I$ est $(-1)^{\sigma(G)}\, St$. D'après le corollaire 6.5, on a alors :

(1) $$(-1)^{\sigma(G)}\, \varepsilon_V\, c_{V',sgn} = c_{V,ind}\, \varepsilon_{\widetilde{sgn}} ,$$

pour tout caractère unipotent $V$ de $G^F$. On obtient alors immédiatement les résultats sur $c_{V',sgn}$ en remarquant que $\varepsilon_{\widetilde{sgn}} = 1$ avec les choix faits pour $\widetilde{sgn}$ et $\widetilde{ind}$, d'où le corollaire.

Remarquons que le corollaire 4.5 appliqué avec $w = 1$ et $V = I$ (resp. $V = St$) montre que, si 6.6 (i) est vrai, on a $c_{St,sgn} = \widetilde{sgn}(F)$ (resp. $c_{I,ind} = \widetilde{ind}(F)$), donc que le résultat (ii) sur $c_{St,sgn}$ (resp. $c_{I,ind}$) ne dépend que du choix de $\widetilde{sgn}$ (resp. de $\widetilde{ind}$).

<u>Remarque</u> 6.7 - Si $G$ est déployé, on peut retrouver facilement les résultats 6.6 en utilisant le fait évident que $Sh_{F/F}\, I = I$, d'où les valeurs de $c_{V,ind}$, et, d'après 6.5, les valeurs de $c_{V,sgn}$. On obtient le résultat (iv) en utilisant le corollaire 3.5 (iii).

## IV - DESCENTE DE SHINTANI DE $G^F$ à $G^F$ .

Les résultats du chapitre III montrent que l'étude de l'action de $Sh_{F/F}$ sur les caractères irréductibles de $G^F$ donne des informations précises sur la décomposition des $R_w^1$ lorsque $G$ est déployé. Le but de ce chapitre est l'étude de l'application $Sh_{F/F}$ , mais il sera plus commode de considérer l'application que nous noterons $Sh$ (ou $Sh_G$ quand nous aurons besoin de préciser le groupe) définie sur les fonctions centrales sur $G^F$ par :

$$Sh\ (f) = f \circ n_{F/F} ,$$

où $n_{F/F}$ est l'application définie sur les classes de conjugaison de $G^F$ par :

$$n_{F/F}(c) = N_{F/F}(c)^{-1} ,$$

application qui a l'avantage de fixer "presque toutes" les classes de $G^F$ (voir IV, 2.5 ci-dessous).

### 1. - Propriétés Générales.

Par définition, si $g \in c$ , $g = h^{-1}.{}^F h$ alors $n_{F/F}(c)$ est la classe de ${}^F h.h^{-1} = hgh^{-1}$ , donc $n_{F/F}$ permute les classes de $G^F$ incluses dans une classe de conjugaison géométrique. Pour étudier $Sh$ nous devons donc paramétrer les différentes classes de conjugaison de $G^F$ qui sont dans une classe de conjugaison donnée de $G$ . Si $g \in c$ , on écrira souvent $n_{F/F}(g)$ pour $n_{F/F}(c)$.

Proposition 1.1 - Les classes sous $G^F$ des éléments de $G^F$ géométriquement conjugués à $x \in G^F$ sont en bijection avec les classes de F-conjugaison de $Z_G(x)/Z_G(x)^o$ . La bijection induite par $n_{F/F}$ sur ces classes est la multiplication par $x$ .

Démonstration - Si $g \in G$ et ${}^g x \in G^F$ , alors $g^{-1}.{}^F g \in Z_G(x)$ . Il est facile de voir que si l'on associe à la classe sous $G^F$ de ${}^g x$ la classe de F-conjugaison de $g^{-1}.{}^F g$ dans $Z_G(x)$ on obtient une application bien définie, et qui est injective. C'est une surjection par le théorème de Lang, car $G$ est connexe. En appliquant encore le théorème de Lang, on peut voir enfin que les classes de F-conjugaison de $Z_G(x)$ sont en bijection avec celles de $Z_G(x)/Z_G(x)^o$ (cf. par exemple [SB] E, I, 2.6). D'autre part, si $y = {}^g x = h^{-1}.{}^F h$ alors $n_{F/F}\, y = {}^h y = {}^{hg} x$, donc correspond à la classe de F-conjugaison de $g^{-1}h^{-1}.{}^F h {}^F g = x\, g^{-1}.{}^F g$.

c.q.f.d.

Corollaire 1.2 - Si la caractéristique est bonne pour $G$, l'action de $n_{F/F}$ est donnée par la multiplication par la partie semi-simple de $x$ sur les classes de F-conjugaison de $Z_G(x)/Z_G(x)^o$. En particulier $n_{F/F}$ est l'identité sur les classes unipotentes.

Démonstration - en effet, la partie unipotente de $x$ est dans $Z_G(x)^o$ si la caractéristique est bonne (cf. [SB], E, III 1.14), d'où le résultat.

Corollaire 1.3 - L'ordre de $Sh$ est le plus petit $i$ tel que $x^i$ soit dans la classe de F-conjugaison de $1$ dans $Z_G(x)/Z_G(x)^o$ pour tout $x \in G^F$.

Exemples - (i) Si $G$ est le groupe linéaire ou unitaire, les centralisateurs de tous les éléments sont connexes, donc $Sh$ est l'identité.

(ii) Si $G$ est l'un des groupes $Sp_{2n}$, $SO_n^{\pm}$, les groupes de composantes connexes des centralisateurs sont des groupes d'exposant $2$, donc l'ordre de $Sh$ est $2$ (cf. IV, 3 ci-dessous).

Proposition 1.4 - Si $G$ et $H$ sont des groupes algébriques connexes définis sur $\mathbb{F}_q$ et si $f : G \longrightarrow H$ est un morphisme défini sur $\mathbb{F}_q$ alors on a : pour tout $g \in G^F$, $f(n_{F/F,G}(g)) \subset n_{F/F,H}(f(g))$.

Démonstration - si $g = h^{-1}.{}^F h$ alors $f(g) = f(h)({}^F f(h))^{-1}$ car $f$ commute à $F$ ; l'image par $f$ d'une classe de conjugaison de $G^F$ étant incluse dans une classe de conjugaison de $H^F$, on en déduit le résultat.

<u>Corollaire</u> 1.5 - L'application $n_{F/F}$ est l'identité sur les classes semi-simples.

Démonstration - Si $c$ est une classe semi-simple, $s \in c$ et si $T$ est un tore maximal contenant $s$, on a $n_{F/F}(s) = s$ puisque $T$ est un groupe abélien. On applique alors la proposition 1.4 au morphisme d'inclusion $f : T \hookrightarrow G$ et on voit que $n_{F/F}c$ est la classe de $G^F$ qui contient $n_{F/F,\,T}(s)) = f(\{s\}) = \{s\}$, d'où le résultat.

<u>Corollaire</u> 1.6 - L'application Sh commute avec l'opérateur $D_G$ (Dualité de Curtis, <u>cf</u>. III, 6).

Démonstration - Avec les notations de I, 5 il suffit de voir que Sh commute aux opérateurs ${}^*P_U$ et $\mathrm{Res}_{P^F}^{G^F}$ pour tout sous-groupe parabolique rationnel $P$. En effet, comme Sh est une isométrie, on en déduit que Sh commute aux adjoints de ces opérateurs, i.e. à $P_U$ et à $\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}$, donc aussi à $R_L^G$ et ${}^*R_L^G$, si $L$ est un sous-groupe de Lévi rationnel de $P$, ce qui implique clairement que Sh commute à $D_G$.

Il est facile de voir que Sh commute à ${}^*P_U$ (resp. à $\mathrm{Res}_{P^F}^{G^F}$) en appliquant la proposition 1.4 au morphisme de projection $f : P \longrightarrow L$ (resp. au morphisme d'inclusion $f : P \hookrightarrow G$).

<u>Corollaire</u> 1.7 - Si $G$ est un groupe déployé, on a, avec les notations de III, 6.5 : $\omega_{V'} = \omega_V$ .

Démonstration : Le dual de $U_\chi$ étant $(-1)^{\sigma(G)} U_{\chi\otimes\mathrm{sgn}}$, on a d'après le corollaire 1.6 : $D_G(\mathrm{Sh}\, U_\chi) = (-1)^{\sigma(G)} \mathrm{Sh}\, U_{\chi\otimes\mathrm{sgn}}$, et la même propriété est vraie en remplaçant Sh par $\mathrm{Sh}_{F/F}$. En remplaçant $\mathrm{Sh}_{F/F}\, U_\chi$ par sa valeur donnée dans III, début du paragraphe 3, on obtient donc :

$$D_G(\sum_{V\in\mathcal{U}} c_{V,\chi}\, \omega_V\, V) = (-1)^{\sigma(G)} \sum_{V\in\mathcal{U}} c_{V,\chi\otimes\mathrm{sgn}}\, \omega_V\, V \quad ,$$

d'où $\varepsilon_V\, c_{V,\chi}\, \omega_V = (-1)^{\sigma(G)} c_{V',\chi\otimes\mathrm{sgn}}\, \omega_{V'}$, ce qui, d'après III, 6.5, implique le résultat, car, comme le groupe est déployé, on a, pour tout et tout $\chi\in\mathcal{E}$ et tout $x\in\bar{\mathcal{H}}$, $\tilde{\chi}(xF) = \chi(x)$, donc $\varepsilon_{\tilde{\chi}} = 1$ .

<u>Proposition</u> 1.8 - Soit m l'exposant de $G^F$ et soit $\zeta_m$ une racine primitive m-ième de 1 . Le corps engendré par les coefficients $<\mathrm{Sh}\,\chi\,,\varphi>_{G^F}$, où $\chi$ et $\varphi$ parcourent les caractères irréductibles de $G^F$, est le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ fixé par les automorphismes $\sigma_i : \zeta_m \longmapsto \zeta_m^i$ pour les i tels que $x^{i-1}$ soit F-conjugué à 1 dans $Z_G(x)/Z_G(x)^0$ pour tout $x\in G^F$ .

En particulier, si F agit par l'identité sur $Z_G(x)/Z_G(x)^0$ pour tout $x\in G^F$, cette dernière condition devient $x^{i-1}\in Z_G(x)^0$ .

Démonstration - il est clair que $<\mathrm{Sh}\,\chi\,,\varphi>_{G^F} \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$. D'autre part, on a $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ où $t\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ agit par $\sigma_t$ . Nous devons déterminer pour quels t on a :

$$\sigma_t(<\mathrm{Sh}\,\chi\,,\varphi>_{G^F}) = <\mathrm{Sh}\,\chi\,,\varphi>_{G^F} \quad .$$

Pour $t\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, notons $\phi_t$ l'endomorphisme des fonctions centrales sur $G^F$ défini par : $(\phi_t\, f)(x) = f(x^t)$. Si $\chi$ est un caractère, on a : $(\phi_t\,\chi)(g) = \chi(g^t) = (\sigma_t\,\chi)(g)$ pour tout $g\in G^F$, et pour des fonctions centrales quelconques f et f' on a : $<\phi_t\, f\,,\phi_t\, f'>_{G^F} = <f\,,f'>_{G^F}$ car $x \longmapsto x^t$ est une bijection de $G^F$ sur $G^F$ .

On a donc : $<\mathrm{Sh}\,\chi, \varphi>_{G^F} = <\phi_t\, \mathrm{Sh}\chi, \phi_t\varphi>_{G^F} = <\phi_t\,\mathrm{Sh}\chi, \sigma_t\,\varphi>_{G^F}$

or : $\sigma_t\,(<\mathrm{Sh}\,\chi, \varphi>_{G^F}) = <\sigma_t(\mathrm{Sh}\,\chi), \sigma_t\,\varphi>_{G^F}$ donc il faut déterminer pour quels $t$ on a, pour tout caractère $\chi$ :

$\phi_t(\mathrm{Sh}\,\chi) = \sigma_t(\mathrm{Sh}\,\chi)$ , c'est-à-dire pour tout $x \in G^F$ : $(n_{F/F}x)^t = n_{F/F}(x^t)$.

Posons $x = h^{-1}.{}^Fh$ ; alors ${}^hx \in n_{F/F}x$ donc ${}^h(x^t) \in (n_{F/F}x)^t$ . Donc, par la correspondance de la proposition 1.1, $(n_{F/F}x)^t$ correspond à l'image de $x$ dans $Z_G(x^t)/Z_G(x^t)^o$ . Or $n_{F/F}(x^t)$ correspond à l'image de $x^t$ dans ce même groupe. Il faut donc chercher pour quels $t$ les éléments $x$ et $x^t$ sont F-conjugués dans $Z_G(x^t)/Z_G(x^t)^o = Z_G(x)/Z_G(x)^o$ (cette dernière égalité car $t$ est premier à l'ordre de $x$). Les éléments $x$ et $x^t$ étant dans le centre de $Z_G(x)$, ils sont F-conjugués si et seulement si $x^{t-1}$ est F-conjugué à $1$ , d'où l'énoncé.

<u>Exemple</u> - Dans les groupes $Sp_{2n}$ , $SO^{\pm}_{2n}$ , les groupes $Z_G(x)/Z_G(x)^o$ sont d'exposant $2$ et $F$ y agit trivialement (<u>cf</u>. IV, 3). Donc pour tout $i$ impair et premier à l'exposant de $G^F$ , on a : $x^{i-1} \in Z_G(x)^o$ . Or l'exposant $m$ de $G^F$ est pair, donc tous les $i \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ conviennent dans la proposition 1.8, donc $<\mathrm{Sh}\,\chi, \varphi>_{G^F} \in \mathbb{Q}$ pour tous les caractères irréductibles $\chi$ et $\varphi$ .

## 2. - <u>Descente de Shintani et foncteur de Lusztig</u>.

Nous donnons ici un résultat qui généralise le théorème de [DM2] .

Rappelons la définition du foncteur de Lusztig (cf. [L4]) : soit $L$ un sous-groupe de Lévi rationnel d'un sous-groupe parabolique $P$ (non nécessairement rationnel) de $G$ et $U$ le radical unipotent de $P$ .

Variétés de Deligne-Lusztig ; descente de Shintani

On pose $Y_U = \{x \mid x^{-1}.{}^F x \in {}^F U\}$. Cette variété est munie d'une action de $G^F$ par multiplication à gauche et de $L^F$ par multiplication à droite ; d'où une structure induite de $G^F \times L^F$-module sur la cohomologie $H_c^*(Y_U, \bar{Q}_l)$. Le foncteur de Lusztig $R_L^G$ associe à tout $L^F$-module virtuel $M$ le $G^F$-module virtuel $M \otimes_{L^F} (\oplus_i (-1)^i H_c^i(Y_U))$.

Le foncteur $R_L^G$ généralise les foncteurs $R_T^G$ (cf. I, 3.1) et $R_L^G$ (cf. I, 5).

On note ${}^*R_L^G$ le foncteur adjoint du foncteur $R_L^G$, et on appellera fonction de Green (cf. [DM4]) la fonction définie sur les éléments unipotents de $G^F \times L^F$ par :

$$(u,v) \longmapsto Q_L^G(u,v) = \mathrm{Trace}((u,v) \mid H_c^*(Y_U)) \quad .$$

Rappelons qu'on a (cf. [DM4] prop. 3.1) :

Proposition 2.1 - Pour tout caractère $\chi$ de $G^F$ et tout élément $l = tv$ (décomposition de Jordan) de $L^F$, on a :

$$({}^*R_L^G \chi)(l) = |Z_G(t)^{oF}|^{-1} \; |Z_L(t)^{oF}| \sum_{u \in Z_G(t)^o_u} Q^{Z_G(t)^o}_{Z_L(t)^o}(u, v^{-1}) \, \chi(tu)$$

où $Z_G(t)^o_u$ désigne l'ensemble des éléments unipotents de $Z_G(t)^o$.

En utilisant cette proposition nous allons démontrer :

Théorème 2.2 - Si la caractéristique est bonne pour $G$, on a :

$${}^*R_L^G \circ Sh_G = Sh_L \circ {}^*R_L^G \quad .$$

Démonstration - Soit $l = tv$ la décomposition de Jordan d'un élément de $L^F$. Pour calculer $n_{F/F}(l)$, posons $t = \tau^{-1}.{}^F\tau$ où $\tau$ est dans un tore de $Z_L(t)^o$, et posons $v = \eta^{-1}.{}^F\eta$ avec $\eta \in Z_L(t)^o$. On a :

$$tv = t\,\eta^{-1}.{}^F\eta = \eta^{-1}t.{}^F\eta = (\tau\,\eta)^{-1}.{}^F(\tau\,\eta) \quad \text{, donc :}$$

$$n_{F/F}(tv) = {}^F(\tau\,\eta)(\tau\,\eta)^{-1} = {}^F\tau\,(n_{F/F}\,v)\,\tau^{-1} = {}^F\tau\tau^{-1}\;{}^{\tau}(n_{F/F}\,v) = t\;.\;{}^{\tau}(n_{F/F}v)\;.$$

Si la caractéristique est bonne pour $G$ (donc pour $L$), on a $n_{F/F}\,v = v$ (cf. corollaire 1.2), donc $n_{F/F}(tv) = t\;{}^{\tau}v$ et $t\,{}^{\tau}v$ est la décomposition de Jordan de $n_{F/F}(tv)$. On a de même $n_{F/F}(tu) = t\;{}^{\tau}u$ pour tout $u \in Z_G(t)^o_u$.

On a donc : $((Sh_L \circ {}^*R^G_L)(\chi))\,(1) = ({}^*R^G_L\,\chi)(t\;{}^{\tau}v) =$

$$|Z_G(t)^{oF}|^{-1}\,|Z_L(t)^{oF}| \sum_{u\in Z_G(t)^o_u} \chi(tu)\; Q^{Z_G(t)^o}_{Z_L(t)^o}(u,{}^{\tau}v)$$

et d'autre part :

$$(({}^*R^G_L \circ Sh_G)(\chi))\,(1) = |Z_G(t)^{oF}|^{-1}\,|Z_L(t)^{oF}| \sum_{u\in Z_G(t)^o_u} (Sh\,\chi)(tu)\; Q^{Z_G(t)^o}_{Z_L(t)^o}(u,v)$$

$$= |Z_G(t)^{oF}|^{-1}\,|Z_L(t)^{oF}| \sum_{u\in Z_G(t)^o_u} \chi(t\;{}^{\tau}u)\; Q^{Z_G(t)^o}_{Z_L(t)^o}(u,v)$$

$$= |Z_G(t)^{oF}|^{-1}\,|Z_L(t)^{oF}| \sum_{u\in Z_G(t)^o_u} \chi(tu)\; Q^{Z_G(t)^o}_{Z_L(t)^o}({}^{\tau}u,v)\;.$$

Le théorème résulte donc du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.3 - Soient $(u,v)\in G^F\times L^F$ un couple d'éléments unipotents et $\tau\in L$ tel que $\tau^{-1}.{}^F\tau = z\in Z(G)^F$. Alors $Q^G_L(u,{}^{\tau}v) = Q^G_L({}^{\tau^{-1}}u,v)$.

Démonstration - il suffit (<u>cf</u>. I, 1) de montrer que pour tout $m>0$ tel que ${}^{F^m}U = U$ on a :

$$(1) \qquad \mathrm{Trace}((u,{}^{\tau}v)F^m \mid H^*_c(Y_U)) = \mathrm{Trace}(({}^{\tau^{-1}}u,v)F^m \mid H^*_c(Y_U))\quad .$$

Le premier membre de (1) est le cardinal de :

$$E = \{x \in G \mid x^{-1}.{}^F x \in {}^F U \quad \text{et} \quad u.{}^{F^m}x\,{}^{\tau}v = x\} \quad .$$

Posons $x = y\,\tau^{-1}$ ; on obtient :

$$E \cong \{y \in G \mid {}^{\tau}(y^{-1}.{}^F y)z^{-1} \in {}^F U \quad \text{et} \quad u.{}^{F^m}y.vz^{-m} = y\}$$

car $\quad \tau^{-1}.{}^{F^m}\tau = z.{}^F z.{}^{F^2}z \ldots {}^{F^{m-1}}z = z^m \quad .$

Comme $\tau$ normalise ${}^F U$ on a encore :

$$E \cong \{y \in G \mid (y^{-1}.{}^F y)z^{-1} \in {}^F U \quad \text{et} \quad u.{}^{F^m}y.v = y\,z^m\} \quad .$$

De même le deuxième membre de (1) est le cardinal de :

$$E' = \{x \in G \mid x^{-1}.{}^F x \in {}^F U \quad \text{et} \quad {}^{\tau^{-1}}u.{}^{F^m}x.v = x\}$$

et en posant $x = \tau^{-1}y$ on obtient :

$$E' \cong \{y \in G \mid (y^{-1}.{}^F y)z^{-1} \in {}^F U \quad \text{et} \quad u.{}^{F^m}y.v = y\,z^m\} \text{ , d'où le lemme.}$$

<u>Corollaire</u> 2.4 - $Sh_G \circ R_L^G = R_L^G \circ Sh_L$ .

Démonstration - C'est immédiat par adjonction.

<u>Corollaire</u> 2.5 - Pour toute fonction uniforme $f$ , on a : $Sh\, f = f$ .

Démonstration - Il suffit de montrer la propriété pour un caractère de Deligne-Lusztig $R_T^G(\theta)$. D'après le corollaire 2.4 on a :

$$Sh_G(R_T^G(\theta)) = R_T^G(Sh_T(\theta)) \quad .$$

Or $Sh_T(\theta) = \theta$ car, $T$ étant un groupe abélien, $n_{F/F}$ est l'identité sur $T$ .

3. - Les groupes symplectiques et orthogonaux.

On suppose ci-dessous que $G$ est le groupe symplectique (resp. orthogonal ou spécial orthogonal) d'un espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ où $V$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dim $2n$ (resp. $n$) muni d'une forme $h$ symplectique (resp. quadratique) non dégénérée. On supposera de plus la caractéristique bonne pour $G$, i.e. différente de $2$.

Notre but est d'étudier l'effet de $n_{F/F}$ sur les classes de $G^F$ où $G = Sp_{2n}$ ou $SO(h)$, mais nous déduirons le paramétrage des classes de $SO(h)$ de celui des classes de $O(h)$.

Rappelons les résultats de [SB], E, IV.2 ; ci-dessous on pose $G = Sp_{2n}$ ou $O(h)$.

Proposition 3.1 -

(i) Soit $x = su$ la décomposition en partie semi-simple et unipotente de $x \in G^F$. La classe de conjugaison géométrique de $x$ est paramétrée par la classe de $s$ et par la classe de $u$ dans $Z_G(s)^F$.

(ii) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_q[T]$, réciproques au signe près, et qui ne sont pas produits de deux tels polynômes (un élément de $\mathcal{F}$ est soit irréductible, soit produit de deux polynômes irréductibles réciproques l'un de l'autre à une constante près).

Les classes d'éléments semi-simples de $G^F$ sont paramétrées par la donnée de :

(1) une fonction $m : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :

(a) $\sum_{f \in \mathcal{F}} m(f) \deg f = \dim V$

(b) si $f = T \pm 1$ et $G = Sp_{2n}$, alors $m(f)$ est pair.

(2) si $G = O(h)$ et $f = T \pm 1$, le type de la restriction de $h$ au sous-espace propre de l'élément pour la valeur propre $\mp 1$ (certains types seulement peuvent être obtenus).

(iii) Soit $s$ un élément semi-simple de $G^F$ dont la classe est paramétrée comme ci-dessus. Alors $Z_G(s)$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe à : $\prod_{f\in\mathfrak{F}} G_f$ où :

(a) si $f \neq T \pm 1$, on a $G_f \simeq (Gl_{m(f)})^{(\deg f)/2}$ où $F$ permute cycliquement les $(\deg f)/2$ copies de $Gl_{m(f)}$ et est tel que $G_f^F \simeq U_{m(f)}(\mathbb{F}_{q^{\deg f}})$ si $f$ est irréductible et $G_f^F \simeq Gl_{m(f)}(\mathbb{F}_{q^{(\deg f)/2}})$ sinon.

(b) si $f = T \pm 1$ alors $G_f \simeq Sp_{m(f)}$ (resp. $O(h_f)$) si $G = Sp_{2n}$ (resp. $G = O(h)$) où $h_f$ est la restriction de $h$ au sous-espace propre de $s$ pour la valeur propre $\mp 1$.

De plus si $g = \prod_{f\in\mathfrak{F}} g_f \in Z_G(s)$, on a $\det(g) = \det(g_{T+1}) \det(g_{T-1})$

(iv) Nous appellerons $I$ l'ensemble des entiers impairs si $G = Sp_{2n}$, et des entiers pairs si $G = O(h)$. On posera dans les deux cas $J = \mathbb{N} - I$. Soit $u$ un élément unipotent de $G^F$. La classe de conjugaison géométrique de $u$ est paramétrée par une partition $\lambda$ de $\dim V$ telle que, en notant $r_i(\lambda)$ le nombre de parties de $\lambda$ de longueur $i$, alors $r_i(\lambda)$ soit pair pour $i$ dans $I$.

L'espace $V_j(u) = \mathrm{Ker}(u-1)^j/(\mathrm{Ker}(u-1)^{j-1} + (\mathrm{Im}(u-1)\cap \mathrm{Ker}(u-1)^j))$ est un espace de dimension $r_j(\lambda)$ sur lequel on définit une forme quadratique $h(j)$ naturellement associée à $u$ pour tout $j\in J$.

La classe de conjugaison dans $G^F$ de $u$ est paramétrée par la donnée en plus de $\lambda$ du type de ces formes, car les formes associées à deux éléments $u$ et $u'$ sont de même type si et seulement si $u$ et $u'$ sont conjugués sous $G^F$ (tous les types de formes peuvent être obtenus si $G = Sp_{2n}$, seulement certains pour $O(h)$).

(v) Le centralisateur dans $G$ d'un élément $u$ unipotent dont la classe est paramétrée par $(\lambda,h)$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe à :

$$K \rtimes [(\prod_{i\in I} Sp_{r_i(\lambda)}) \times (\prod_{j\in J} O(h(j)))]$$

où $K$ est le radical unipotent de $Z_G(u)$.

Si $g = g_K \times \prod_{i\in\mathbb{N}} g_i \in Z_G(u)$ on a :

$$\det(g) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \det(g_i)^i = \begin{cases} 1 & \text{si } G = Sp_{2n} \\ (-1)^{\#\{j \text{ tels que } g_j \notin O(h(j))^o\}} & \text{si } G = O(h). \end{cases}$$

Pour étudier $n_{F/F}$ dans les groupes $Sp_{2n}^F$ (resp. $SO(h)^F$) nous allons utiliser le corollaire 1.2 : si $x = su$ est la décomposition en parties semi-simple et unipotente de $x$, il faut étudier la multiplication par $s$ dans $Z_G(x)/Z_G(x)^o$. Rappelons que les classes de conjugaison géométriques de $SO(h)$ sont les classes de conjugaison géométriques de $O(h)$ qui sont dans $SO(h)$, et, si $x\in SO(h)^F$, on a : $Z_{O(h)}(x)^o = Z_{SO(h)}(x)^o$ et $Z_{SO(h)}(x) = \{g\in Z_{O(h)}(x) \text{ tels que } \det(g) = 1\}$.

Prenons $x$ dans $Sp_{2n}^F$ (resp. dans $SO(h)^F$) et posons $G = Sp_{2n}$ (resp. $O(h)$).

On a d'après (i) : $Z_G(x) = Z_{Z_G(s)}(u)$ .

D'où d'après (iii) : $Z_G(x) = \prod_{f\in\mathcal{F}} Z_{G_f}(u_f)$

où $u_f$ est la composante de $u$ dans $G_f$ .

D'où : $Z_G(x)/Z_G(x)^o = \prod_{f\in\mathcal{F}} Z_{G_f}(u_f)/Z_{G_f}(u_f)^o$ .

Les centralisateurs des éléments de $Gl_n$ étant connexes, on peut se limiter à $f = T \pm 1$ . Posons $G_+ = G_{T-1}$ , $u_+ = u_{T-1}$ et soit $(\lambda_+ , h_+)$ la classe de $u_+$ dans $G_+$ .

Le groupe symplectique et un groupe unipotent étant connexes, on a d'après (v) :

$$Z_{G_+}(u_+) / Z_{G_+}(u_+)^o \simeq \prod_{j\in J} O(h_+(j)) / O(h_+(j))^o \quad .$$

Faisant un raisonnement analogue pour $G_- = G_{T+1}$ , $u_- = u_{T+1}$ , etc... on obtient : $Z_G(x) / Z_G(x)^o \simeq \prod_{j\in J} A(h_+(j)).A(h_-(j))$ où, pour une forme quadratique $h$ , on a posé : $A(h) = O(h)/O(h)^o$ ; c'est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont on notera $1$ et $-1$ les éléments.

D'après les remarques faites sur le déterminant en (iii) et (v), on a, si $G = O(h)$ :

$$Z_{SO(h)}(x) / Z_{SO(h)}(x)^o = \Big\{ \prod_{j\in J} (x_j^+ \cdot x_j^-) \in \prod_{j\in J} (A(h_+(j)).A(h_-(j))) \tag{1}$$

ayant un nombre pair de composantes ($x_j^+$ ou $x_j^-$) égales à $-1$ $\Big\}$.

Remarquons que $s$ induit $1$ dans $A(h_+(j))$ et $(-1)^{r_j(\lambda_-)}$ dans $A(h_-(j))$ (car il induit $1$ dans $O(h_+(j))$ et $-1$ dans $O(h_-(j))$. D'autre part notons que $F$ n'agit pas sur $Z_G(x)/Z_G(x)^o$ car l'isomorphisme de (v) est défini sur $\mathbb{F}_q$ et $F$ agit trivialement sur $O(h)/O(h)^o$ .

Nous pouvons donc énoncer la :

<u>Proposition</u> 3.2 - Soit $x \in G^F$ où $G = Sp_{2n}$ (resp. $SO(h)$).

Les F-classes de $Z_G(x)/Z_G(x)^o$ sont en bijection avec $A = \prod_{j\in J} A(h_+(j))\, A(h_-(j))$ (resp. avec les éléments de $A$ qui ont un nombre pair de composantes non égales à 1). Si on paramètre les classes de conjugaison sous $G^F$ d'éléments conjugués géométriquement à $x$ par les éléments de $A$ comme dans la proposition 1.1, (où $x$ correspond à $1\in A$) alors $n_{F/F}$ agit par multiplication par :

$$\prod_{j\in J} (-1)^{r_j(\lambda_-)} \in \prod_{j\in J} A(h_-(j)) \quad .$$

Notons qu'une conséquence de (1) est qu'une classe de conjugaison de $O(h)^F$ se scinde dans $SO(h)^F$ (en deux composantes) si et seulement si $A$ est réduit à $\{1\}$ (car on a seulement dans ce cas $Z_G(x) \subset SO(h)$). Dans le cas contraire, les classes de conjugaison de $SO(h)^F$ géométriquement conjuguées à $x$ sont paramétrées comme celles de $O(h)^F$, donc on peut utiliser le paramétrage de la proposition 3.1, (iv) pour elles. La proposition suivante compare ce dernier paramétrage avec celui de 3.2.

Proposition 3.3 - Sous les hypothèses de la prop. 3.2 si $A \neq \{1\}$, soit $y$ un élément géométriquement conjugué à $x$ paramétré par $\prod_{j \in J} (x_j^+ . x_j^-) \in A$. Alors, pour le paramétrage de la proposition 3.1, (iv), la classe dans $G^F$ de $y$ est paramétrée de la même façon que celle de $x$ excepté que les formes $h_+(j)$ (resp. $h_-(j)$) pour $j$ tel que $x_j^+ = -1$ (resp. $x_j^- = -1$) sont de type opposé au type des formes correspondantes pour $x$.

Démonstration - Soit $z \in G$ conjugant $x$ en $y$ et soit $u'$ la partie unipotente de $y$. Par définition de $V_j(u)$ (cf. proposition 3.1, (iv)), on voit que $z$ envoie $V_j(u_+)$ sur $V_j(u'_+)$, et $z$ envoie les formes $h_+(j)$ correspondant à $x$ sur les formes $h_+(j)$ correspondant à $y$.

Si $z_j^+$ est l'application induite par $z : V_j(u_+) \longrightarrow V_j(u'_+)$, les formes correspondant à $x$ et $y$ sont équivalentes si et seulement si $(\det z_j^+)^2$ est un carré de $\mathbb{F}_q^\times$, i.e. $(\det z_j^+)^{q-1} = 1$, ou encore $\det({z_j^+}^{-1} . {}^F z_j^+) = 1$, c'est-à-dire si l'image de $z^{-1}.{}^F z$ dans $A(h_+(j))$ est $1$.

Le même raisonnement est valable pour $u_-$. On en déduit le résultat car l'image de $z^{-1}.{}^F z$ dans $A$ est l'élément de $A$ correspondant à la classe de $y$.

4. - Etude de Sh dans $Sl_n$ et $SU_n$ .

Nous noterons G le groupe $Gl_n$ muni d'une structure rationnelle sur $\mathbb{F}_q$ telle que l'on ait :

$$(A) \qquad G^F \simeq Gl_n(\mathbb{F}_q) \qquad \text{ou} \qquad (B) \qquad G^F \simeq U_n(\mathbb{F}_{q^2}) \quad .$$

Nous noterons G' le sous-groupe de G formé des éléments de déterminant 1 . On a donc :

dans le cas (A) $G'^F \simeq Sl_n(\mathbb{F}_q)$ et dans le cas (B) $G'^F \simeq SU_n(\mathbb{F}_{q^2})$ .

On désignera par $\mathfrak{F}$ :

dans le cas (A) , l'ensemble des polynômes de $\mathbb{F}_q[T]$ unitaires irréductibles, différents du polynôme T .

Dans le cas (B) , l'ensemble des polynômes de $\mathbb{F}_{q^2}[T]$ unitaires q-réciproques qui ne sont pas produit de tels polynômes (on appellera q-réciproque un polynôme f s'il est réciproque à une constante près du polynôme dont les coefficients sont les puissances q-ièmes des coefficients de f).

Enfin on posera $\varepsilon = 1$ dans le cas (A) et $\varepsilon = -1$ dans le cas (B).

Etudions d'abord les groupes de composantes connexes des centralisateurs dans G' :

Proposition 4.1 - Soit $x \in G'^F$ . Sa classe géométrique dans G' est l'intersection avec G' de sa classe géométrique dans G . Supposons que la classe de x dans G soit paramétrée par l'application $\nu$ de $\mathfrak{F}$ dans l'ensemble des partitions (telle que $\sum_{f \in \mathfrak{F}} |\nu(f)| \deg f = n$).

Alors $Z_{G'}(x)/Z_{G'}(x)^0$ s'identifie canoniquement au groupe $\mu_d$ des racines d-ièmes de l'unité où d est le p.g.c.d. des cardinaux de toutes les parties de tous les $\nu(f)$. L'action de F dans ce groupe de composantes connexes correspond à l'élévation d'une racine de l'unité à la puissance $\varepsilon q$ .

Démonstration - cette proposition est une conséquence des résultats de [SB], E, IV 1.8 et 1.10 que nous allons rappeler.

(i) Soit $s$ la partie semi-simple de $x$. Alors $Z_G(s)$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe à $\prod_{f\in\mathcal{F}} G_{|\nu(f)|}(\deg f)$ nous avons noté $G_n(\delta)$ un groupe $\overline{\mathbb{F}}_q$-isomorphe à $Gl_n^\delta$ où $F$ permute cycliquement les $\delta$ groupes $Gl_n$ de telle façon que l'on ait : $G_n(\delta)^F \simeq Gl_n(\mathbb{F}_{q^\delta})$ dans le cas (A) et dans le cas (B) si $\delta$ est pair, et $G_n(\delta)^F \simeq U_n(\mathbb{F}_{q^{2\delta}})$ dans le cas (B) si $\delta$ est impair).

Si $g\in Z_G(s)$ correspond à $\prod_{f\in\mathcal{F}} g_f$ alors $\det(g) = \prod_{f\in\mathcal{F}} \det(g_f)$.

(ii) Soit $u$ un élément unipotent de $Gl_n$ paramétré par la partition $\lambda$ de $n$. Alors $Z_{Gl_n}(u)$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe à $K \rtimes \prod_{i\in\mathbb{N}} Gl_{r_i(\lambda)}$, où $r_i(\lambda)$ est le nombre de parties de $\lambda$ égales à $i$ et où $K$ est un groupe unipotent connexe.

Si $g\in Z_{Gl_n}(u)$ correspond à $g_K \cdot \prod_{i\in\mathbb{N}} g_i$, alors $\det(g) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \det(g_i)^i$.

De (i) et (ii) on déduit :

(iii) $Z_G(x)$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe à :

$$H \rtimes \prod_{f\in\mathcal{F},\, i\in\mathbb{N}} G_{r_i(\nu(f))}(\deg f) \quad \text{où } H \text{ est un groupe unipotent}$$

et $Z_{G'}(x)$ est isomorphe à :

$$H \rtimes \{(g_{f,i})\in\prod G_{r_i(\nu(f))}(\deg f) \text{ tels que } \prod_{f\in\mathcal{F},\, i\in\mathbb{N}} (\det g_{f,i})^i = 1\}.$$

En effet $Z_G(x) = Z_{Z_G(s)}(u)$ où $x = su$ est la décomposition de $x$ en partie semi-simple et partie unipotente.

La première assertion de la proposition 4.1 résulte donc du :

<u>Lemme</u> 4.2 - La variété $\{(x_1,\dots,x_k)\in\bar{\mathbb{F}}_q^k$ tels que $\prod_i x_i^{d_i}=1\}$ a p.g.c.d.$(d_1,\dots,d_k)$ composantes connexes.

Démonstration - si les $d_i$ sont premiers entre eux, pour tout $\zeta\in\bar{\mathbb{F}}_q$, la variété d'équation $\prod_i x_i^{d_i}=\zeta$ est connexe : on peut en effet compléter $(d_1,\dots,d_k)$ en une base de $\mathbb{Z}^k$ et par un changement de variables ramener la variété à :

$$\{(x_1,\dots,x_k)\in\bar{\mathbb{F}}_q^k \text{ tels que } x_1=\zeta\}\quad .$$

D'autre part si $d=$ p.g.c.d.$(d_1,\dots,d_k)$ la variété de l'énoncé s'écrit :

$$\coprod_{\zeta\in\mu_d}\{(x_1,\dots,x_k)\in\bar{\mathbb{F}}_q^k \text{ tels que } \prod_i x_i^{d_i/d}=\zeta\}\quad\text{, d'où le lemme.}$$

On notera que d'après la démonstration du lemme, l'image de

$$g=g_H\cdot\prod_{i\in\mathbb{N},f\in\mathcal{F}}g_{f,i}\in Z_{G'}(x)\quad\text{dans }\mu_d\text{ est}\quad\prod_{i\in\mathbb{N},f\in\mathcal{F}}\det(g_{f,i})^{i/d}\quad .$$

En particulier l'image de $g=\lambda.1$ est $\lambda^{n/d}$ qui est un générateur de $\mu_d$ si $\lambda$ est un générateur de $\mu_n$. Pour voir l'action de $F$ sur $\mu_d$ il suffit donc de voir celle de $F$ sur $\lambda$, d'où la deuxième assertion de la proposition 4.1.

<u>Corollaire</u> 4.3 -

**Sous les hypothèses de la proposition 4.1,** les classes de conjugaison de $G'^F$ géométriquement conjuguées à $x$ sont paramétrées par $\mu_{d'}$, où $d'=$ p.g.c.d.$(d, q-\varepsilon)$. L'action de $n_{F/F}$ sur ces classes correspond à la multiplication par $\lambda(x)=\prod_{f\in\mathcal{F}}((-1)^{\deg f}f(0))^{|\nu(f)|/d'}$ .

Démonstration -

D'après la proposition 4.1, deux éléments de $Z_{G'}(x)/Z_{G'}(x)^0\simeq\mu_d$ sont dans la même F-classe si et seulement s'ils diffèrent par une puissance d/d'-ième. On peut donc paramétrer les F-classes de $\mu_d$, c'est-à-dire les classes de $G'^F$ géométriquement conjuguées à $x$, par $\mu_{d'}$ en envoyant $\lambda \in \mu_d$ sur $\lambda^{d/d'}$.

L'action de $n_{F/F}$ sur ces classes correspond à la multiplication par l'image de $s$ dans $\mu_d$ (cf. prop. 1.2). Or si $s = \prod_{f \in \mathfrak{F}, i \in \mathbb{N}} s_{f,i}$ on a

$$\det(s_{f,i}) = ((-1)^{\deg f} f(0))^{r_i(\nu(f))}\text{, d'où le résultat.}$$

Corollaire 4.4 - L'ordre de Sh est $r = \text{p.g.c.d.}(n, q-\varepsilon)$ ; l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les $\langle \mathrm{Sh}\,\chi, \varphi \rangle_{G'^F}$, où $\chi$ et $\varphi$ parcourent les caractères irréductibles, est l'extension engendrée par les racines $r$-ièmes de l'unité.

Démonstration - d'après le corollaire 4.3 l'ordre de Sh est le plus petit $i$ tel que pour tout $x \in G'^F$ on ait $\lambda(x)^i = 1$. Or, quand $x$ varie, $\lambda(x)$ parcourt toutes les racines $r$-ièmes de $1$ (il suffit de considérer le cas d'un seul polynôme de degré $1$ associé à la partition $\{n\}$). L'ordre de Sh est donc exactement $r$.

De même, d'après la proposition 1.8, le corps engendré par les $\langle \mathrm{Sh}\,\chi, \varphi \rangle_{G'^F}$ est le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta)$ (où $\zeta$ est une racine primitive de l'unité d'ordre l'exposant de $G'^F$) fixé par $\zeta \longmapsto \zeta^i$ où $i$ est tel que $\lambda(x)^{i-1} = 1$ pour tout $x \in G'^F$, c'est-à-dire que $i-1$ est multiple de $r$ ; c'est donc bien le sous-corps engendré par les racines $r$-ièmes de l'unité.

Sous les hypothèses de la proposition 4.1, nous allons préciser le paramétrage des classes de conjugaison géométriquement conjuguées à $x$, une fois choisi un isomorphisme :

$$Z_G(s) \simeq \prod_{f \in \mathfrak{F}} G_{|\nu(f)|}(\deg f) \quad .$$

Pour tous $n, \delta$ nous noterons $u_{n,\delta}$ un élément unipotent régulier de $G_n(\delta)^F$ et, pour $a \in \overline{\mathbb{F}}_q$ nous noterons $z(a)$ l'élément $(t, {}^F t, \dots, {}^{F^{\delta-1}} t) \in G_n(\delta)$ où $t = \mathrm{diag}(a^{1-n}, a, \dots, a) \in Gl_n$. Nous noterons enfin $u_{n,\delta}(a)$ l'élément $z(a)\, u_{n,\delta}\, z(a)^{-1}$.

<u>Proposition</u> 4.5 - Soit $x \in G'^F$. Sous les hypothèses de la propcsition 4.1, si $s$ est la partie semi-simple de $x$, si un représentant de la classe de $x$ est $s . \prod_{f \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}} u_{\nu_i(f), \deg f}$ et si $f_0 \in \mathcal{F}$ est tel que $|\nu(f_0)| \neq 0$, alors un représentant de la classe de $y$ géométriquement conjugué à $x$ correspondant à $\zeta \in \mu_{d'}$ est :

$$s . u_{\nu_1(f_0), \deg f_0}(a) \prod_{(f,i) \in \mathcal{F} \times \mathbb{N} - \{(f_0,1)\}} u_{\nu_i(f), \deg f} ,$$

si $a^{((\varepsilon q)^{\deg f_0} - 1)\, \nu_1(f_0)/d'} = \zeta$ .

Démonstration - posons $n = \nu_1(f_0)$ et $\delta = \deg f_0$ . Il faut vérifier que $u_{n,\delta}(a) \in G_n(\delta)^F$ , c'est-à-dire que $z(a).{}^F z(a)^{-1}$ centralise $u_{n,\delta}$ , puis que, si $z = z(a) . \prod_{(f,i) \in \mathcal{F} \times \mathbb{N} - \{(f_0,1)\}} 1$ , l'image de $z\,{}^F z^{-1}$ dans $\mu_d$ , via $Z_{G'}(x)/Z_{G'}(x)^0$ est $\zeta$ .

On a $z(a).{}^F z(a)^{-1} = (t^{-1} . {}^{F^\delta} t, 1, \dots, 1)$

et $t^{-1}\, {}^{F^\delta} t = ((a^{-1} . {}^{F^\delta} a)^{1-n}, (a^{-1} . {}^{F^\delta} a), \dots, (a^{-1} . {}^{F^\delta} a))$ , qui est un scalaire (et donc centralise $u_{n,\delta}$ ) si $(a^{-1} . {}^{F^\delta} a)^n = 1$ .

Or ${}^{F^\delta} a = a^{(\varepsilon q)^\delta}$, donc l'hypothèse du théorème sur a garantit la condition ci-dessus, et d'après le corollaire 4.3, l'image de $z\,{}^F z^{-1}$ dans $\mu_{d'}$ est $(a^{-1} . {}^{F^\delta} a)^{n/d'}$ , ce qui vaut $\zeta$ par hypothèse.

Proposition 4.6 - Dans le cas où $G_n(\delta)^F \simeq Gl_n(\mathbb{F}_{q^d})$ , si on note $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ une base du système de racines de $Gl_n$ et $u_\alpha$ l'homomorphisme du groupe additif dans $Gl_n$ correspond à la racine $\alpha$ , on peut prendre :

$$u_{n,\delta} = (v, {}^F v, \dots, {}^{F^{\delta-1}} v) \quad \text{où} \quad v = \prod_{\alpha \in \Pi} u_\alpha(1) .$$

On a alors $u_{n,\delta}(a) = (v(a), {}^F v(a), \dots, {}^{F^{\delta-1}} v(a))$ où

$$v(a) = u_{\alpha_1}(a^n) \prod_{\alpha \in \Pi - \{\alpha_1\}} u_\alpha(1) .$$

La démonstration est évidente.

## 5. - Etude de Sh dans les groupes de type $G_2$ .

Nous supposerons que $G$ est un groupe de type $G_2$ en caractéristique $p \neq 2,3$ . Nous utilisons la liste des classes de conjugaison et des centralisateurs établie dans [CH] et [CHR] .

D'après IV, 1.2 et 1.5, les classes des éléments semi-simples et unipotents sont invariantes par $n_{F/F}$. Les seules classes à considérer sont les classes restantes dont le centralisateur n'est pas connexe, qui sont les classes des éléments d'ordre $2p$ et $3p$ .

Proposition 5.1 - Il y a 3 classes d'éléments d'ordre $3p$ qui ne sont pas fixes par $n_{F/F}$. Ce sont les classes notées $k_{3,2}$ , $k_{3,3,1}$ et $k_{3,3,2}$ dans [CHR] qui sont permutées circulairement dans l'ordre indiqué ci-dessus.

Démonstration - soit $x$ un élément d'ordre $3p$. On a d'après [CH] : $x = h\,y$ où $h$ est un élément semi-simple d'ordre 3 dont le centralisateur $H$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe à $Sl_3$ si $q \equiv 1 \pmod{3}$ (resp. à $SU_3$ si $q \equiv -1 \pmod{3}$), et où $y$ est un élément unipotent de $H^F$.

De plus on a :

$$\text{Classe}_{G^F}(x) \cap H = \text{classe}_{H^F}(x) \quad .$$

Donc, pour étudier $n_{F/F}$ dans $G$ sur ces classes, il suffit d'étudier $n_{F/F}$ dans le groupe $H$. Nous poserons $\varepsilon = 1$ si $q \equiv 1 \pmod{3}$ (resp. $\varepsilon = -1$ si $q \equiv -1 \pmod{3}$). Nous pouvons appliquer les résultats de IV, 4 : l'élément $h$ est un élément central de $H$ dont le polynôme minimal est de degré $1$ ; les classes considérées sont donc associées à une partition de $3$. D'après le corollaire 4.3, l'application $n_{F/F}$ laisse fixe toute la classe dont la partition n'est pas la partition $\{3\}$, et dans ce dernier cas les classes considérées sont paramétrées par les racines cubiques de $1$ que nous noterons $\{1, \omega, \omega^2\}$ (car p.g.c.d.$(3, q-\varepsilon) = 3$ par hypothèse), et $n_{F/F}$ est la permutation circulaire définie par la multiplication par $\omega$.

D'après la proposition 4.5, les classes correspondant à $1$ (resp. $\omega$, $\omega^2$) sont $h\,u_{3,1}$ (resp. $h\,u_{3,1}(a)$, $h\,u_{3,1}(a^2)$) où $a^{\varepsilon q-1} = \omega$ ; ceci permet de les identifier aux classes énoncées dans la proposition.

<u>Proposition</u> 5.2 - Les deux classes d'éléments d'ordre $2p$ (notées $k_{2,3}$ et $k_{2,4}$ dans [CHR]) sont échangées par $n_{F/F}$.

Démonstration - nous noterons $\varphi_\alpha$ l'homomorphisme de $Sl_2$ dans $G$ associé à une racine $\alpha$ et $u_\alpha$ l'homomorphisme du groupe additif dans $G$ correspondant (on a $u_\alpha(t) = \varphi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). Nous noterons enfin $\{a,b\}$ une base du système de racines de $G$ où $b$ est la racine longue.

Pour $\lambda \in \mathbb{F}_q$ , posons : $x(\lambda) = k\, u_b(1)\, u_{2a+b}(\lambda)$

où $k = \varphi_b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \varphi_{2a+b} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est un élément semi-simple dont le centralisateur est le produit $K = \varphi_b(Sl_2)\, \varphi_{2a+b}(Sl_2)$ .

D'après [CH] , $x(\lambda)$ appartient à la classe $k_{2,3}$ si $\lambda$ est un carré de $\mathbb{F}_q^\times$ et à la classe $k_{2,4}$ si $\lambda$ est un non-carré de $\mathbb{F}_q^\times$ . Ces deux classes sont donc clairement géométriquement conjuguées. D'autre part on a :

$$Z_G(x(1)) = Z_G(k) \cap Z_G(u_b(1)\, u_{2a+b}(1)) = Z_K(\varphi_b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi_{2a+b} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) ,$$

et comme : $\varphi_b(Sl_2) \cap \varphi_{2a+b}(Sl_2) = \{1,k\}$ , tout élément de $Z_G(x)$ s'écrit donc de façon unique :

$$\varphi_b \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \varphi_{2a+b} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta ,\ \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_q \quad \text{et } \alpha = \pm 1 .$$

Donc $Z_G(x)/Z_G(x)^0$ est un groupe d'ordre 2 (correspondant aux deux valeurs possibles de $\alpha$ ) qui a donc nécessairement deux classes de F-conjugaison, et $x \notin Z_G(x)^0$ , d'où le résultat d'après la proposition 1.1.

## V - EXEMPLE DE $Gl_n$

Soient $V$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbf{F}_q$ , et $E = V \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q$ . On considère le groupe $G = Gl_n(E)$, muni de la structure rationnelle sur $\mathbf{F}_q$ définie par celle de $E$ . Nous utilisons les notations du I, et, en particulier, nous fixons un sous-groupe de Borel rationnel $B_0 = T_0 U_0$ . Nous allons décrire les variétés $X_w$ et $Y_{\dot{w}}$ en termes de drapeaux.

### 1. - Drapeaux, variétés $X_w$ .

Définition 1.1 - Nous appelons drapeau dans l'espace $E$ une suite $\mathfrak{D} = (V_1 ,\dots, V_n)$ de sous-espaces où $0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = E$ .

Le stabilisateur d'un drapeau dans $G$ est un sous-groupe de Borel, et $G$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux. La variété des drapeaux de $E$ est donc isomorphe à la variété $X$ des sous-groupes de Borel.

Définition 1.2 - On dit que $(e_1, e_2 ,\dots, e_n)$ est une base du drapeau $\mathfrak{D} = (V_1 ,\dots, V_n)$ si $V_i$ est engendré par $(e_1 ,\dots, e_i)$.

La notion de position relative de deux sous-groupes de Borel donne par transport de structure la notion de position relative de deux drapeaux. Soit $\mathfrak{D}_0$ le drapeau stabilisé par $B_0$ , et soit $(e_1^0 ,\dots, e_n^0)$ la base de $\mathfrak{D}_0$ (déterminée à des constantes près) stabilisée par $T_0$ . Le groupe de Weyl $W = N(T_0)/T_0$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{e_1^0 ,\dots, e_n^0\}$.

Proposition 1.3 - Deux drapeaux $\mathfrak{D}' = (V_i')$ et $\mathfrak{D}'' = (V_i'')$ sont en position relative $w \in W$ si et seulement si les conditions équivalentes suivantes sont réalisées :

(i) Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{D}'$ telle que $(e_{w(1)}, \ldots, e_{w(n)})$ soit une base de $\mathcal{D}''$ ;

(ii) Pour tout $i$ on a : $w(i) = \inf\{j \mid V''_i \not\subset V'_{j-1}$ et $V''_i \subset V'_j\}$ .

Démonstration - Par définition, les drapeaux $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont en position $w$ si le couple $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ est l'image par un élément de $G$ du couple $(\mathcal{D}_0, {}^w\mathcal{D}_0)$, où ${}^w\mathcal{D}_0$ est le drapeau de base $(e^0_{w(1)}, \ldots, e^0_{w(n)})$ ; d'où le (i) de la proposition.

Si (i) est vrai, alors (ii) est clairement vrai. Réciproquement, si (ii) est vrai, définissons $(e_1, \ldots, e_n)$ en prenant pour $e_{w(i)}$ un vecteur de $V''_i - V'_{w(i)-1}$ ; alors $(e_i)$ est une base de $\mathcal{D}'$ vérifiant (i).

D'après les définitions précédentes et la proposition 1.3, la variété $X_w$ est isomorphe à l'ensemble des drapeaux $\mathcal{D}$ tels que $\mathcal{D}$ et ${}^F\mathcal{D}$ soient en position relative $w$ . Les actions de $G^F$ et de $F$ sur $X_w$ sont induites par les actions naturelles de $G^F$ et de $F$ sur les drapeaux.

## 2. - Drapeaux avec données affines ; variétés $Y_{\dot{w}}$ .

Définition 2.1 - On appelle donnée affine sur un drapeau $\mathcal{D} = (V_1, \ldots, V_n)$, un élément $a \in \bigoplus_i V_i/V_{i-1}$ ayant toutes ses composantes non nulles.

Il est clair que $G$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux avec donnée affine. Le stabilisateur de $(\mathcal{D}_0, a_0)$, où $a_0$ est une donnée affine sur $\mathcal{D}_0$ est $U_0$ . Donc nous pouvons identifier la variété des drapeaux avec donnée affine au quotient $G/U_0$ . Cette identification dépend du choix de de $(\mathcal{D}_0, a_0)$.

<u>Définition</u> 2.2 - On dit que $(e_i)$ est une base de $(\mathfrak{D}, a)$ si $(e_i)$ est une base de $\mathfrak{D}$, et si l'image de $(e_i)$ dans $\oplus V_i/V_{i-1}$ est égale à a .

Dans la suite, nous fixons la base $(e_i^0)$ de $\mathfrak{D}_0$ de façon que les vecteurs $e_i^0$ soient stables par F .

<u>Définition</u> 2.3 - On appelle positions relatives de drapeaux munis de données affines les orbites de G dans l'ensemble des couples de drapeaux munis de données affines.

Les positions relatives sont donc en bijection avec les doubles classes $U_0 \backslash G/U_0$, donc avec $N(T_0)$.

<u>Proposition</u> 2.4 - Deux drapeaux avec donnée affine $(\mathfrak{D}', a')$ et $(\mathfrak{D}'', a'')$ sont en position $\dot{w} \in N(T_0)$ si et seulement s'il existe une base $(e_i)$ de $(\mathfrak{D}', a')$ telle que $(t_i\, e_{w(i)})$ soit une base de $(\mathfrak{D}'', a'')$, où $t \in T_0$ est tel que $t^{-1}\dot{w}$ soit une permutation de la base $(e_i^0)$ de $(\mathfrak{D}_0, a_0)$, et où $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ est la matrice de t dans cette base.

Cette proposition est immédiate d'après les définitions.

D'après les définitions précédentes et la proposition 2.4, la variété $Y_{\dot{w}}$ est isomorphe à la variété des drapeaux avec donnée affine $(\mathfrak{D}, a)$ tels que $(\mathfrak{D}, a)$ et ${}^F(\mathfrak{D}, a)$ soient en position relative $\dot{w}$ . Les actions de F et de $G^F$ sur cette variété sont induites par les actions naturelles de F et de G sur les drapeaux munis de données affines. L'action de $T_0^{wF}$ est définie par $(\mathfrak{D}, a) \xmapsto{t} (\mathfrak{D}, {}^{t^{-1}}a)$, où ${}^{t^{-1}}a = (t_i^{-1} a_i)$, si $a = (a_i) \in \bigoplus_i V_i/V_{i-1}$ et si $t \in T_0^{wF}$ a pour matrice $\mathrm{diag}(t_1 \ldots t_n)$ dans la base $(e_i^0)$.

## 3. - Calcul de $N_w^m$ pour les éléments de Coxeter.

Dans la suite, nous supposerons que $w$ est un élément de Coxeter du groupe de Weyl de $G$. Nous fixons pour $\dot{w}$ l'élément dont l'action sur la base $(e_i)$ est donné par (les éléments de Coxeter sont les n-cycles de $\mathfrak{S}_n$) :

$$\begin{cases} \dot{w}(e_i^0) = e_{i+1}^0 & (i = 1, \ldots, n-1) \\ \dot{w}(e_n^0) = (-1)^{n-1} e_1^0 & . \end{cases}$$

On déduit aussitôt de la proposition 2.4 (où $t$ est l'élément $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, (-1)^{n-1})$) que deux drapeaux avec donnée affine $(\mathfrak{D}', a')$ et $(\mathfrak{D}'', a'')$ sont en position relative $\dot{w}$ si et seulement s'il existe une base $(e_i)$ de $(\mathfrak{D}', a')$ telle que $(e_2, e_3, \ldots, e_n, (-1)^{n-1} e_1)$ soit une base de $(\mathfrak{D}'', a'')$.

Proposition 3.1 - Sous les hypothèses précédentes :

(i) La variété $X_w$ est isomorphe à l'ensemble des droites de $E$ qui ne sont contenues dans aucun sous-espace strict défini sur $\mathbb{F}_q$. L'action de $G^F$ sur cette variété est la restriction de l'action naturelle de $G^F$ sur les droites de $E$.

(ii) La variété $Y_{\dot{w}}$ est isomorphe à :

$$\{e \in E \mid D(e) = (-1)^n\} ,$$

où $D$ est le produit de toutes les formes linéaires non nulles à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. L'action de $G^F$ est donnée par l'action naturelle de $G^F$ sur $E$. Un élément $t$ de $T_0^{wF}$ agit par $e \longmapsto t^{-1}e$, si l'on identifie $T_0^{wF}$ à $\mathbb{F}_{q^n}^*$ en envoyant $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ sur $t_1$.

Démonstration - Soit $\mathcal{D}$ un drapeau de $X_w$ . D'après la proposition 1.3, il existe une base $(e_i)$ de $\mathcal{D}$ telle que $(e_2 ,\dots, e_n , e_1)$ soit une base de ${}^F\mathcal{D}$ . On a donc $< {}^Fe_1 ,\dots, {}^Fe_i > = < e_2, e_3 ,\dots, e_{i+1} >$ pour $i = 1 ,\dots, n-1$ . On en déduit par récurrence que $(e_1, {}^Fe_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}e_1)$ est une base de $\mathcal{D}$ . En effet, si $< e_1, {}^Fe_1 ,\dots, {}^{F^{i-1}}e_1 >$ est égal à $< e_1 ,\dots, e_i >$ , alors $< {}^Fe_1, {}^{F^2}e_1 ,\dots, {}^{F^i}e_1 > = < {}^Fe_1, {}^Fe_2 ,\dots, {}^Fe_i >$ $= < e_2 ,\dots, e_{i+1} >$ . Donc $< e_1, {}^Fe_1 ,\dots, {}^{F^i}e_1 > = < e_1, e_2 ,\dots, e_{i+1} >$ .

Réciproquement, si $(e_1, {}^Fe_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}e_1)$ est une base de $\mathcal{D}$ , alors $\mathcal{D}$ et ${}^F\mathcal{D}$ sont en position relative $w$ . On obtient alors l'isomorphisme de (i) en associant à $\mathcal{D}$ la droite $< e_1 >$ . En effet, le sous-espace $< e_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}e_1 >$ est stable par $F$ car nécessairement ${}^{F^n}e_1 \in < e_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}e_1 >$ . Donc les vecteurs $e_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}e_1$ sont indépendants si et seulement si le sous-espace $F$-stable qu'ils engendrent n'est pas strictement inclus dans $E$ , ce qui est clairement équivalent à la condition donnée dans (i).

De même, si $(\mathcal{D}, a)$ est un drapeau avec donnée affine de $Y_{\dot{w}}$ , il en existe une base $(f_i)$ telle que $(f_2, f_3 ,\dots, f_n, (-1)^{n-1}f_1)$ soit une base de ${}^F(\mathcal{D}, a)$. On voit par récurrence que $(f_1, {}^Ff_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}f_1)$ est une base de $(\mathcal{D}, a)$, car si ${}^{F^{i-1}}f_1 - f_i \in < f_1 ,\dots, f_{i-1} >$ alors ${}^{F^i}f_1 - {}^Ff_i \in < {}^Ff_1 ,\dots, {}^Ff_{i-1}> = < f_2 ,\dots, f_i >$ . Comme ${}^Ff_i - f_{i+1} \in < f_1 ,\dots, f_i >$ , on obtient ${}^{F^i}f_1 - f_{i+1} \in < f_1 ,\dots, f_i >$ .

De plus, $({}^Ff_1, {}^{F^2}f_1 ,\dots, {}^{F^n}f_1)$ et $(f_2, f_3 ,\dots, f_n, (-1)^{n-1}f_1)$ sont deux bases de ${}^F(\mathcal{D}, a)$. Donc ${}^{F^n}f_1 - (-1)^{n-1}f_1 \in < f_2 ,\dots, f_n > =$ $= < {}^Ff_1 ,\dots, {}^{F^{n-1}}f_1 >$ .

Réciproquement, si $e \in E$ vérifie ${}^{F^n}e-(-1)^{n-1}e \in \langle {}^Fe, \ldots, {}^{F^{n-1}}e\rangle$, il est clair que le drapeau avec donnée affine de base $(e, {}^Fe, \ldots, {}^{F^{n-1}}e)$ est un élément de $Y_{\dot{w}}$. Pour obtenir l'isomorphisme du (ii), il suffit d'associer à $(\mathfrak{D}, a)$ comme ci-dessus le vecteur $e = f_1$.

Traduisons la condition sur $e$ : Elle est équivalente à $\det({}^Fe, \ldots, {}^{F^{n-1}}e, {}^{F^n}e + (-1)^n e) = 0$, ce qui s'écrit $\det[{}^Fe] = \det[e]$, si on note $[e]$ la matrice des vecteurs $(e, {}^Fe, \ldots, {}^{F^{n-1}}e)$. Donc la condition est équivalente à $(\det[e])^{q-1} = 1$. Or $(\det[e])^{q-1} = (-1)^n D(e)$.

En effet $\det[e]$ est nul si et seulement si les vecteurs $(e, {}^Fe, \ldots, {}^{F^{n-1}}e)$ sont liés, c'est-à-dire, d'après la démonstration de (i), si et seulement s'ils sont liés sur $\mathbb{F}_q$. Donc il existe une constante $c \in \mathbb{F}_q^{\times}$ telle que $\det e = c \prod_{f \in \mathcal{E}} f(e)$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble de représentants des formes linéaires non nulles à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, modulo la multiplication par les éléments de $\mathbb{F}_q^{\times}$. Elevons cette égalité à la puissance $q-1$, on obtient :

$$(\det e)^{q-1} = \prod_{\mathcal{E}} (f(e))^{q-1} .$$

Or $D(e) = \prod_{f \in \mathcal{E}} (\prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^{\times}} \lambda f(e))$. Comme $\prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^{\times}} \lambda = -1$, que $|\mathcal{E}| = (q^n-1)/(q-1)$ et que $(-1)^{(q^n-1)/(q-1)} = (-1)^n$, on obtient le résultat. On peut identifier comme annoncé $T_0^{wF}$ à $\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ car si $(t_1, \ldots, t_n) \in T_0$, alors ${}^{wF}(t_1, \ldots, t_n) = ({}^Ft_2, {}^Ft_3, \ldots, {}^Ft_n, {}^Ft_1)$, donc $(t_1, \ldots, t_n)$ est dans $T_0^{wF}$ si et seulement si $t_1 = {}^{F^{i-1}}t_i$ pour tout $i$ ; donc $t_1 \in \mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ et $t_1$ détermine $(t_1, \ldots, t_n)$. D'où le (ii) de la proposition 3.1.

Soit $\theta$ un caractère $F^m$-invariant de $\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$. Alors $\theta$ est une fonction de $F^m$-classe car $\theta(x.y.{}^{F^m}x^{-1}) = \theta(x)\,\theta(y)\,\theta(x^{-1}) = \theta(y)$ pour tout $x$ et tout $y$ dans $\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$. Alors $\Theta = \mathrm{Sh}_{F^n/F^m}\,\theta$ est a priori une fonction de

$F^n$-classe sur $\mathbb{F}^{\times}_{q^m}$. Cette fonction est clairement multiplicative, donc est un élément de $\widehat{\mathbb{F}^{\times}_{q^m}}$.

Rappelons que $\Theta$ est défini par $\Theta(a^{1-q^n}) = \theta(a^{q^m-1})$ pour tout $a \in \overline{\mathbb{F}}_q$ tel que $a^{q^m-1} \in \mathbb{F}^{\times}_{q^n}$ (ce qui est équivalent à $a^{q^n-1} \in \mathbb{F}^{\times}_{q^m}$). On a :

<u>Proposition</u> 3.2 - Soit $\theta$ un caractère de $T_0^{wF}$ (identifié à $\mathbb{F}^{\times}_{q^n}$), tel que ${}^{F^m}\theta = \theta$. Soit $\Theta = \mathrm{Sh}_{F^n/F^m}\theta$, qui est un caractère de $\mathbb{F}^{\times}_{q^m}$. Alors, pour $g \in G^F$ :

$$N^m_{\dot w}(\theta)(g) = \theta(-1)^m (q^m-1)^{-1} \sum \overline{\Theta\ (D(x))} ,$$

où la somme porte sur $\{x \in E \mid D(x) \neq 0 \text{ et } g^{F^m}x = x\}$.

Démonstration - On a, pour $(g,t) \in G^F \times \mathbb{F}^{\times}_{q^n}$, $N^m_{\dot w}(g,t) = \#\{e \in E \mid D(e) = (-1)^n$ et $gt^{-1}\,{}^{F^m}e = e\}$, d'après la proposition 3.1. Posons $t = \tau^{-1}\,{}^{F^m}\tau$, et $t' = \tau.{}^{F^n}\tau^{-1}$, alors $N^m_{\dot w}(g,t) = \#\{e \in E \mid g^{F^m}(\tau^{-1}e) = \tau^{-1}e$ et $D(e) = (-1)^n\} = \{e' \in E \mid g.{}^{F^m}e' = e'$, et $D(e') = (-1)^n t'\}$, car $D(\tau^{-1}e) = t'\,D(e)$. Donc :

$$\begin{aligned} N^m_{\dot w}(\theta)(g) &= |T_0^{wF}|^{-1} \sum_{t \in T_0^{wF}} N^m_{\dot w}(g,t)\,\theta(t^{-1}) \\ &= (q^n-1)^{-1} \sum_{t \in \mathbb{F}^{\times}_{q^n}} \#\{x \in E \mid D(x) = (-1)^n \text{ et } gt^{-1}.{}^{F^m}x = x\}\ \overline{\theta(t)} \\ &= (q^m-1)^{-1} \sum_{t' \in \mathbb{F}^{\times}_{q^m}} \#\{x \in E \mid D(x) = (-1)^n t' \text{ et } g^{F^m}x = x\}\ \overline{\Theta\ (t')} \\ &= (q^m-1)^{-1} \sum \overline{\Theta\ ((-1)^n D(x))} , \end{aligned}$$

où la somme porte sur $\{x \in E \mid D(x) \neq 0$ et $g^{F^m}x = x\}$. D'où le résultat, car $\Theta((-1)^n) = \theta((-1)^m)$.

Corollaire 3.3 - Si $\theta_1$ et $\theta_2$ sont des caractères linéaires $F^m$-invariants de $T_0^{wF}$ (identifié comme précédemment à $\mathbb{F}^\times_{q^n}$) tels que $\theta_1 = \theta_2 \cdot (\psi \circ N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q})$, où $\psi$ est un caractère de $\mathbb{F}_q^\times$, alors :

$$N_{\dot{w}}^m(\theta_1) = N_{\dot{w}}^m(\theta_2) \cdot (\bar{\psi} \circ \det) \quad .$$

Démonstration - L'hypothèse implique que si $\overline{\Theta}_i = \mathrm{Sh}_{F^n/F^m}\,\theta_i$ $(i = 1,2)$ comme dans 3.2, on a $\bar{\Theta}_1 = \bar{\Theta}_2 \cdot (\psi \circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q})$. Donc $\bar{\Theta}_1(D(x)) = \bar{\Theta}_2(D(x))\ \psi(N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}(D(x)))$. Or l'égalité $g.{}^{F^m}x = x$ s'écrit matriciellement ${}^{F^m}[x].\,{}^tg = [x]$, donc $\det([x])^{q^m-1} = \det(g)^{-1}$, d'où $((-1)^n\, D(x))^{(q^m-1)/(q-1)} = \det(g)^{-1}$.

Donc $\psi(N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}(D(x))) = \psi(-1)^{mn}\ \psi(\det(g))^{-1}$.

Comme $\theta_1(-1)^m = \theta_2(-1)^m\ \psi(-1)^{mn}$, on obtient le résultat d'après 3.2 .

Nous allons maintenant calculer $N_{\dot{w}}^m(\theta)$ précisément, dans le cas où $\theta$ est F-invariant. Pour cela, rappelons le paramétrage des classes de conjugaison de $G^F$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles différents de $X$ de $\mathbb{F}_q[X]$, et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions des entiers positifs. On notera $d(f)$ le degré du polynôme $f$ et, pour $\nu \in \mathcal{P}$ on notera $\nu$ le nombre de parties de $\nu$, et $|\nu|$ la somme des parties de $\nu$. Les classes de conjugaison de $G^F$ sont en bijection avec l'ensemble des fonctions $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P}$ telles que $\sum_{f \in \mathcal{F}} |\nu(f)|\, d(f) = n$. Avec ces notations :

Théorème 3.4 - Soit $\theta$ un caractère F-invariant de $\mathbb{F}^\times_{q^n}$. Alors il existe $\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ tel que $\theta = \psi \circ N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}$ et la valeur de $N_{\dot{w}}^m(\theta)$ sur l'élément $g \in G^F$ est donnée par :

$$(1)\quad N_{\dot{w}}^{m}(\theta)(g) = q^{mn}(q^{m}-1)^{-1}\ \psi(\det(g))^{-1} \prod_{f\in\mathfrak{F}} \prod_{j=0}^{\#\nu(f)-1} (1-q^{d(f)(j-m)})$$

$$(2)\qquad = -\psi(\det g)^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} q^{mj} \sum_{i\in\mathfrak{I}_j} \prod_{f\in\mathfrak{F}} (-1)^{i(f)}\, q^{d(f)\binom{i(f)}{2}} \begin{bmatrix}\#\nu(f)\\ i(f)\end{bmatrix}(q^{d(f)}),$$

où la fonction $\nu$ paramètre la classe de $g$ comme indiqué ci-dessus. On a noté $\mathfrak{I}_j$ l'ensemble des fonctions $i : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que $i(f) \leqslant \#\nu(f)$ pour tout $f$ et $\sum_{f\in\mathfrak{F}} i(f).d(f) \geqslant n-j$ ; et on a noté $\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}(X)$ le polynôme (dit de Gauss) $\prod_{i=1}^{k} (X^{n+1-i})-1)/(X^{i}-1)$.

En particulier : (3) $N_{\dot{w}}^{m}(\theta)(1) = \prod_{j=1}^{n-1} (q^{m} - q^{j})$ .

Démonstration - Il est clair que l'hypothèse sur $\theta$ implique l'existence de $\psi$ .

D'après le corollaire 3.3, il suffit de calculer $N_{\dot{w}}^{m}(\theta)$ pour $\theta = 1$ , c'est-à-dire de calculer $\#\{x\in E \mid g.^{F^m}x = x \text{ et } D(x) \neq 0\}$ (cf. 3.2).

Rappelons que $E = V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ . On fait de $V$ un $\mathbb{F}_q[T]$-module en faisant opérer $T$ comme $g$ . Etant donné un $\mathbb{F}_q[T]$-sous-module $W$ de $V$ , on notera $\mathcal{L}(W)$ le treillis des sous-modules de $W$ ordonné par inclusion, et on pose :

$$Y_W = \{x\in W \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q \mid g.^{F^m}x = x\} ,$$

$$X_W = Y_W - \bigcup_{W'\in\mathcal{L}(W)-\{W\}} Y_{W'} .$$

<u>Lemme</u> 3.5 - $X_V = \{x\in E \mid g.^{F^m}x = x \text{ et } D(x) \neq 0\}$ .

En effet, le complémentaire dans $Y_V$ de l'ensemble de droite de l'égalité ci-dessus est formé des $x\in Y_V$ tels que $D(x) = 0$ , c'est-à-dire des $x$ de $Y_V$ annulés par une forme linéaire non nulle à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ , donc des $x\in Y_V$

qui sont dans un hyperplan rationnel de $E$ . Soit $W$ un tel hyperplan et soit $x \in W$ tel que $g^{F^m}x = x$ ; on a donc $g^i x = {}^{F^{-mi}}x \in W$ pour tout $i$ entier, donc $x \in \bigcap_i g^{-i}W$ qui est un sous-espace rationnel invariant par $g$ de $E$ , donc de la forme $W' \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ , où $W' \in \mathcal{L}(V) - \{V\}$ .

<u>Lemme</u> 3.6 - $|X_W| = \sum_{W' \in \mathcal{L}(W)} \mu(W',W)\, |Y_{W'}|$ où $\mu$ est la fonction de Möbius de $\mathcal{L}(W)$.

Cela résulte de la formule d'inversion de Möbius-Rota (<u>cf.</u> [RO]) et de la définition de $X_W$ qui implique que $Y_W$ est la réunion disjointe des $X_{W'}$ pour $W' \in \mathcal{L}(W)$.

<u>Lemme</u> 3.7 - $|Y_W| = q^{m \dim W}$ .

En effet, appliquons le théorème de Lang à la restriction $g'$ de $g$ à $W$ , dans le groupe $Gl(W \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q)$ : Il existe $h$ dans ce groupe tel que $g' = h^{-1}.{}^{F^m}h$ . On a alors :

$$Y_W = \{x \in W \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q \mid h^{-1}.{}^{F^m}(hx) = x\} = \{y \in W \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q \mid {}^{F^m}y = y\} = W \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m} .$$

<u>Lemme</u> 3.8 - Si $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ est la décomposition du $\mathbb{F}_q[T]$-sous-module $W$ de $V$ en composantes primaires, alors $|X_W| = \prod_{i \in I} |X_{W_i}|$ .

En effet $|Y_W|$ est multiplicatif par rapport aux sommes directes de sous-modules, et $\mathcal{L}(W) = \prod_{i \in I} \mathcal{L}(W_i)$ .

<u>Lemme</u> 3.9 - Si $W$ est un $\mathbb{F}_q[T]$-sous-module isotypique de $V$ ayant comme unique quotient simple $\mathbb{F}_q[T]/(f) \simeq \mathbb{F}_{q^d}$, où $f \in \mathcal{F}$ est de degré $d$, alors

Pour $W' \in \mathcal{L}(W)$, on a $\mu(W',W) = 0$ si $W' \not\supset fW$

$$= \mu'(W'/fW,\ W/fW) \text{ sinon,}$$

où $\mu'$ est la fonction de Möbius des $\mathbb{F}_{q^d}$-sous-espaces vectoriels de $W/fW$.

Démonstration - Cela résulte de la proposition 2 p. 349 de [RO] , car :

a) $W' \xmapsto{\gamma} W' + fW$ est une clôture au sens de Rota, i.e. une application non décroissante, idempotente, telle que $\gamma(W') \supset W'$ .

b) Le seul élément $W'$ de $\mathcal{L}(W)$ tel que $\gamma(W') = W$ est $W$.
Cela résulte du lemme de Nakayama (cf. [BBK 2] , §6, n° 2, cor. 3) car $fW$ est le radical de $W$. En effet, un sous-module maximal de $W$ a un quotient simple, donc annulé par $f$, et d'autre part $fW$ est l'intersection des sous-modules maximaux le contenant, car le treillis des sous-modules contenant $fW$ est isomorphe au treillis des sous-$\mathbb{F}_{q^d}$-espaces vectoriels de $W/fW$.

<u>Lemme</u> 3.10 (<u>cf.</u> [RO], p. 352) - La fonction de Möbius des sous-$\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $W$ est :

$$\mu(W',W) = (-1)^{\operatorname{codim} W}\ q^{\binom{\operatorname{codim} W}{2}} .$$

Démontrons maintenant le théorème. La composante primaire $W$ de $V$ de quotient simple $\mathbb{F}_q[T]/(f)$ est isomorphe à :

$$\bigoplus_{i=1}^{\#\nu(f)} \mathbb{F}_q[T]/(f^{e_i}) \text{ où les } e_i \text{ sont les parties de } \nu(f).$$

Par les lemmes 3.6, 3.9, et 3.10, on a :

$$|X_W| = \sum_{\{W' \in \mathcal{L}(W) \mid W' \supset fW\}} (-1)^{c(W')} q^{d(f)\binom{c(W')}{2}} |Y_{W'}| \quad ,$$

où $c(W')$ est la codimension de $W'/fW$ en tant que $\mathbb{F}_{q^{d(f)}}$-sous-espace de $W/fW$.

Or $W/fW$ est de dimension $\#\nu(f)$, et le nombre de $\mathbb{F}_{q^{d(f)}}$-sous-espaces de $W/fW$ de codimension $i$ est $\begin{bmatrix}\#\nu(f)\\ i\end{bmatrix}(q^{d(f)})$ ; d'où, d'après le lemme 3.7 :

$$|X_W| = \sum_{i=0}^{\#\nu(f)} (-1)^i q^{d(f)\binom{i}{2}} q^{md(f)(|\nu(f)|-i)} \begin{bmatrix}\#\nu(f)\\ i\end{bmatrix}(q^{d(f)}) \qquad (I) .$$

Posons $\theta_k(X,Y) = \prod_{i=0}^{k-1} (Y-X^i) \in \mathbb{Z}[X]$. On démontre facilement que :

$$\theta_k(X,Y) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \begin{bmatrix}k\\ i\end{bmatrix}(X)\ X^{\binom{i}{2}}\ Y^{k-i} \quad ,$$

en utilisant la formule de récurrence $\begin{bmatrix}k+1\\ i\end{bmatrix}(X) = X^i \begin{bmatrix}k\\ i\end{bmatrix}(X) + \begin{bmatrix}k\\ i-1\end{bmatrix}(X)$.

D'où :

$$|X_W| = q^{md(f)(|\nu(f)| - \#\nu(f))}\ \theta_{\#\nu(f)}(q^{d(f)}, q^{md(f)}) \qquad (II) .$$

De (II) et du lemme 3.8, on déduit immédiatement le (1) du théorème ; le (2) se déduit de (I) et du fait que la division par $q^m-1$ revient à la multiplication par $(-1-q^m-q^{2m}-\ldots)$ (on sait, d'après (1) que le résultat cherché est un polynôme en $q^m$).

<u>Corollaire</u> 3.11 -

(i) Si le nombre de $f \in \mathfrak{F}$ tels que $|\nu(f)| \neq 0$ est strictement plus grand que $1$, alors $R^1_W(g) = 0$. Sinon, si $f$ est l'unique tel élément de $\mathfrak{F}$, on a :

$$R_w^1(g) = d(f) \prod_{i=1}^{\#\nu(f)-1} (1 - q^{i\, d(f)})$$

(ii) Les valeurs propres de $F$ sur $H_c^*(X_w)$ sont $\{q^i \text{ , } i = 0 , \ldots, n-1\}$ .

Démonstration - (i) Il suffit de prendre la "limite pour $m=0$" de l'égalité (1) du théorème 3.4 (<u>cf</u>. I, Remarque 3.3)

(ii) Cela résulte immédiatement de l'égalité (2) du théorème.

Nous allons déduire d'autres corollaires du théorème 3.4, en utilisant la formule (ii) de III, 3.6 que nous rappelons :

$$N_w^m = \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{H}}} \chi_m(T_w)\, U_\chi \qquad (4) \quad .$$

<u>Lemme</u> 3.12 - Les caractères irréductibles de $H_m$ non nuls sur les éléments de Coxeter sont ceux correspondant aux partitions $(1^{n-i}, i)$ ; un tel caractère vaut $(-1)^{n-i}\, q^{m(i-1)}$ sur les éléments de Coxeter.

Démonstration - Le fait que les caractères cités valent $(-1)^{n-i}\, q^{m(i-1)}$ est assez facile à prouver. Les caractères correspondants de $\mathcal{H}$ sont les caractères des puissances extérieures de la représentation naturelle de $\mathcal{H}$ (<u>cf</u>. [CIK] , 9). Cette représentation, correspond à la partition $(1, n-1)$ et sa puissance extérieure i-ème à la partition $(1^i, n-i)$.

Matriciellement l'élément $a_{s_k}$ , où $s_k$ est la k-ième réflexion élémentaire agit par la matrice $M_k$ de dimension $(n-1, n-1)$, dont les seuls coefficients non nuls sont : $(M_k)_{i,i} = X$ si $i \neq k$

$(M_k)_{k,k-1} = 1$

$(M_k)_{k,k} = -1$

$(M_k)_{k,k+1} = X$

La puissance extérieure i-ème de cette représentation est définie en faisant opérer $a_{s_k}$ par $X^{1-i}\, M_k \wedge \ldots \wedge M_k$ (i facteurs). Donc, si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i$ est le polynôme caractéristique de $a_w$ dans la représentation naturelle, alors la trace de $a_w$ dans la puissance extérieure i-ème de cette représentation est $(-1)^i X^{-(i-1)l(w)} \lambda_{n-1-i}$. Or, pour $w$ de Coxeter, la matrice de $a_w$ dans la représentation naturelle est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & -X^{n-2} \\ X^{n-2} & 0 \;\cdots & 0 & -X^{n-2} \\ 0 & X^{n-2}\; 0 \;.. & 0 & -X^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & X^{n-2} & -X^{n-2} \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est $\sum_{i=0}^{n-1} t^i X^{(n-2)(n-1-i)}$, d'où les valeurs annoncées des caractères.

Montrer que ces caractères sont les seuls non nuls est plus difficile. On peut recourir à un argument indirect : Selon [L2] les espaces propres de $F$ sur $H_c^*(X_w)$ sont disjoints comme représentations de $G^F$. En comparant avec (4), on voit que les $\chi(a_w)$ doivent être des monômes en $X$, et par déformation sont nuls ceux qui ne correspondent pas aux partitions $(1^{n-i}, i)$. Nous n'utiliserons pas cette partie de l'énoncé 3.12.

Proposition 3.13 - Le caractère $U_\chi$ correspondant à la partition $(1^{n-j},j)$ vaut :

$$U_\chi(g) = (-1)^{n-1-j} \sum_{i\in \mathfrak{I}_{j-1}} \prod_{f\in\mathfrak{F}} (-1)^{i(f)}\, q^{d(f)\binom{i(f)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} \#\nu(f) \\ i(f) \end{bmatrix} (q^{d(f)}) .$$

Notons le cas particulier de la valeur de $U_\chi$ sur un élément unipotent :

$$\begin{bmatrix} \#\nu(T-1)-1 \\ n-j \end{bmatrix} (q) \cdot q^{\binom{n-j+1}{2}}$$

Notons celle du caractère de Steinberg $(j=1)$ :

$$U_\chi(g) = 0 \quad \text{si } g \text{ n'est pas semi-simple,}$$

$$= (-1)^{1+\sum_{f\in\mathfrak{F}} |\nu(f)|}\; q^{\sum_{f\in\mathfrak{F}} d(f)\binom{|\nu(f)|}{2}}$$

si $g$ est semi-simple.

Démonstration de 3.13 - Par le lemme 3.12, on connaît les valeurs des $\chi_m(T_w)$ dans la formule (4). On peut alors identifier l'égalité (2) du théorème 3.4 avec la formule (4), d'où le résultat.

Remarque 3.14 - cas où $\theta$ est en position générale.

En utilisant la proposition 3.2, nous allons calculer les valeurs propres de $F^n$ sur $H_c^*(Y_{\dot w})$ dans le cas où $\theta$ est en position générale, c'est-à-dire si $\theta$ n'est pas fixé par aucun élément du centralisateur de $w$ dans $W$. On sait (cf. [DL], Remarque 9.15.1) que dans ce cas $H_c^*(Y_{\dot w})$ est un $G^F$-module irréductible concentré en degré $l(w) = n-1$. On a donc :

$$N_{\dot w}^m(\theta) = \lambda^{m/n}\, R_w^\theta \quad ,$$

où $\lambda$ est l'unique valeur propre de $F^n$ sur $H_c^*(Y_{\dot w})_\theta$ .

En particulier,

$$\lambda = N_{\dot{w}}^{n}(\theta)(1) \, . \, R_{w}^{\theta}(1)^{-1} \quad .$$

Or, d'après la proposition 3.2, on a :

$$N_{\dot{w}}^{n}(\theta)(1) = \theta(-1)^{n} \, (q^{n}-1)^{-1} \sum_{\{x \in \mathbb{F}^{n} \mid {}^{F^{n}}x = x \text{ et } D(x) \neq 0\}} \overline{\theta(D(x))} \quad .$$

Les éléments $x$ qui interviennent dans cette sommation vérifient tous $D(x) = -1$ , car si ${}^{F^n}x = x$ , alors ${}^{F}(\det([x])) = (-1)^{n-1} \det([x])$, c'est-à-dire $\det([x])^{q-1} = (-1)^{n-1}$ , ou encore $D(x) = -1$ . En reportant, on obtient donc :

$$N_{\dot{w}}^{n}(\theta)(1) = \theta(-1)^{n-1} \, N_{\dot{w}}^{n}(1)(1) \quad , \text{ d'après 3.3} \ .$$

On obtient donc $\lambda = \theta(-1)^{n-1} \, N_{\dot{w}}^{n}(1)(1)/R_{w}^{\theta}(1) = \theta(-1)^{n-1} \, N_{\dot{w}}^{m}(1)(1)/R_{w}^{1}(1)$

$$= \theta(-1)^{n-1} \, q^{\binom{n}{2}} \quad ,$$

d'après l'égalité (1) du théorème 3.4 .

## VI - GROUPES DE TYPE $G_2$

A partir des théorèmes généraux de III, de la table des caractères de l'algèbre de Hecke d'un groupe de type $G_2$ et de la table des valeurs de $Sh^0U_\chi(1)$ (cf. tables 1 et 2 ci-dessous), nous allons, dans le cas où G est de type $G_2$, déterminer successivement la valeur des coefficients $c_{\overline{U_\psi,\chi}}$, puis le nombre de caractères unipotents, leurs dimensions, et les "valeurs propres" $\omega_V$ qui leur sont associées.

Pour faciliter la lecture de ce qui suit, nous allons rappeler certaines notations ainsi que les résultats qui nous serons utiles de III dont nous donnerons la version simplifiée sous les hypothèses que G est déployé, et que la constante $c_\chi$ de II, 3.4 vaut 1 pour tout $\chi \in \mathcal{E}$ (ces deux conditions sont évidemment vérifiées pour G de type $G_2$).

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{H} = H(W, X)$ et pour tout $\chi \in \mathcal{E}$ on note $\chi_m$ (resp. $\chi_o$) le spécialisé de $\chi$ à $H(W, q^m)$ (resp. à $\mathbb{C}[W]$). On note $U_{\chi_m}$ le caractère de $G^{F^m} \rtimes \langle F\rangle$ correspondant à $\chi_m$ dans $E_m$ (cf. III, 1.3 et remarque précédant 3.5), et on note simplement $U_\chi$ pour $U_{\chi_1}$ ; enfin on pose :

$$Sh^0U_\chi = |W|^{-1} \sum_{w\in W} \chi_o(w)\, R_w^1 \quad (\underline{\text{cf.}} \quad \text{III, 2.1}).$$

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des caractères unipotents de $G^F$, et pour $V \in \mathcal{U}$, on note $\omega_V$ la racine de l'unité égale aux valeurs propres de F associées à V dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, à une puissance de q près. Alors on a :

(A) $\quad Sh_{F^m/F}\, U_{\chi_m} = \sum_{V\in\mathcal{U}} c_{V,\chi}\, \omega_V^m\, V \quad$ où $\quad c_{V,\chi} = \langle Sh^0\, U_\chi, V\rangle_{G^F}$ (cf. III, 2.3)

(B) $\quad \sum_{\chi\in\mathcal{E}} c_{V,\chi}^2 \leq 1$ pour tout $V \in \mathcal{U}$ (cf. III, 3.3)

(C) $\quad c_{U_\chi,\psi} = c_{U_\psi,\chi}$ pour tous $\chi, \psi \in \mathcal{E}$ (cf. III, 3.5 (iii))

(D) pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on a :

(i) $\sigma(\omega_V) = \omega_{\sigma_V}$ (ii) $c_{V,\chi} = c_{\sigma_{V},\chi}$ (cf. III, 3.4 (i) et (ii))

(E) si w est dans un sous-groupe parabolique de W produit de groupes de type $A_i$, alors :

(i) $R_w^1 = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi_o(w)\, U_\chi$

(ii) $\sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi(a_w)\, c_{V,\chi} = \begin{cases} \chi(a_w) \text{ s'il existe } \chi \in \mathcal{E} \text{ tel que } V = U_\chi \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (cf. III 4.4 et 4.5)

(F) Pour toute suite $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ de réflexions élémentaires de W et pour tout $V \in \mathcal{U}$, $\sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi((1 + a_{s_1})\ldots(1 + a_{s_n}))c_{V,\chi}$ est un polynôme à coefficients entiers positifs (cf. III, 5.3 ; on a $\lambda_V = 1$ puisque $c_\chi = 1$ pour tout $\chi$, cf. III, 2.3 (i)).

(G) Posons $\mathcal{E} = \{\mathit{ind}\} \cup \{\mathit{sgn}\} \cup \mathcal{E}'$ où nous avons noté $\mathit{ind}$ (resp. $\mathit{sgn}$) le caractère de $\mathcal{H}$ qui se spécialise en le caractère identité (resp. signature) de W. Alors on a :

$c_{V,\chi} = 0$ si $\chi \in \{\mathit{ind}, \mathit{sgn}\}$ et V est distinct de l'identité et du caractère de Steinberg, St, et :

$c_{\mathrm{Identit\acute{e}},\chi} = \delta_{\chi,\mathit{ind}}$ et $c_{\mathrm{St},\chi} = \delta_{\chi,\mathit{sgn}}$ .

Remarquons que les caractères unipotents qui ne sont pas dans la série principale sont nécessairement cuspidaux, en effet, un caractère unipotent est cuspidal s'il est orthogonal aux $R_w^1$ pour w dans un sous-groupe parabolique propre ; or, les sous-groupes paraboliques propres de G de type $G_2$ étant de type $A_1$, on peut appliquer (E) qui prouve que de tels $R_w^1$ ne font intervenir que des caractères de la série principale.

Les résultats que nous obtenons ci-dessous suggèrent les conjectures qui seront développées au chapitre VII.Pour une table complète des caractères de $G^F$, on peut se référer à l'article de Chang et Ree [CHR].

D'après (G), pour déterminer les coefficients $c_{V,\chi}$, il suffit de nous limiter au cas où V est distinct de l'identité et de St et où $\chi \in \mathcal{E}'$.

Théorème 1.1 : *La matrice symétrique* $c_{U_\psi,\chi}$ *pour* $\psi, \chi \in \mathcal{E}'$ *est :*

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

*où les éléments de* $\mathcal{E}'$ *sont dans l'ordre* $\sigma$, $\tau$, A, B (cf. table 1).

Démonstration : Commençons par appliquer la propriété (F) :

Prenons $\underline{s} = (s, t)$. La table 1 donne :

(i) $3c_{V,A} + c_{V,B} \in \mathbb{N}$.

Pour $\underline{s} = (s, t, s, t)$ on obtient (i') $9c_{V,A} + c_{V,B} \in \mathbb{N}$, ce qui, en utilisant (i) donne :

(ii) $2c_{V,B} \in \mathbb{Z}$, et $6c_{V,A} \in \mathbb{Z}$.

Comme $6c_{V,A} \geq -6c_{V,B}/9 \geq -6/9$, (utilisant (i') et $|c_{V,B}| \leq 1$), on a donc :

(iii) $6c_{V,A} \in \mathbb{N}$.

Utilisons maintenant la propriété (E), (ii). Nous pouvons l'appliquer avec $w \in \{1, s, t\}$. On obtient :

si $V = U_A$ ou $U_B$, $c_{V,\sigma} = c_{V,\tau} = 1-c_{V,A}-c_{V,B}$ ; et $c_{U_\sigma,\sigma} = c_{U_\sigma,\tau} + 1 = 1-c_{U_\sigma,A}-c_{U_\sigma,B}$,

$c_{U_\tau,\sigma} = c_{U_\tau,\tau} -1 = -c_{U_\tau,A} -c_{U_\tau,B}$.

En combinant ces relations avec la symétrie de la matrice $c_{U_\psi,\chi}$ (propriété (C)), et en posant $a = c_{U_A,A}$, $b = c_{U_B,B}$, $c = c_{U_A,B} = c_{U_B,A}$, la matrice des $c_{U_\psi,\chi}$ peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} -1+2c+a+b & -2+2c+a+b & 1-a-c & 1-b-c \\ -2+2c+a+b & -1+2c+a+b & 1-a-c & 1-b-c \\ 1-a-c & 1-a-c & a & c \\ 1-b-c & 1-b-c & c & b \end{pmatrix}$$

Les relations (i), (ii) et (iii) deviennent :

(i") $3a+c \in \mathbb{N}$ , $3c+b \in N$

(ii") $2b \in \mathbb{Z}$ , $2c \in \mathbb{Z}$ ,

(iii") $6a \in \mathbb{N}$ , $6c \in \mathbb{N}$ .

On a donc $2c \in \mathbb{N}$ , d'où $c \in \{0, 1/2, 1\}$

Si $c = 1$, comme $Sh^O U_B$ est de carré scalaire 1,on obtient $Sh^O U_B = U_A$, ce qui est contredit par le fait que $Sh^O U_B(1) = U_A(1)$ n'est vérifié pour aucune valeur de $q > 1$ .

Si $c = 0$, alors (i") donne $b \in \mathbb{N}$. Si $b = 0$, alors $Sh^O U_B$ a un carré scalaire au moins égal à 2, ce qui est absurde. Si $b = 1$, on a $Sh^O U_B = U_B$ ce qui est absurde car $Sh^O U_B(1) = U_B(1)$ n'est vérifié pour aucune valeur de $q > 1$ .

On a donc $c = 1/2$ . Alors, par (i") et (ii"), on a $b = \pm 1/2$ . Si $b = -1/2$ , alors $Sh^O U_B$ a un carré scalaire supérieur à 5/2, ce qui est absurde. Donc $b = 1/2$ , et, par (i") et (iii"), on a: $a \in \{1/6, 1/2, 5/6\}$ . Si $a = 5/6$ , on a $c_{U_\sigma,\sigma} > 1$ , ce qui est impossible. Si $a = 1/2$ , on obtient $Sh^O U_\tau = U_\tau$ , ce qui est contredit par le fait que $Sh^O U_\tau(1) = U_\tau(1)$ n'est vérifié pour aucune valeur de q. La seule valeur possible pour la matrice des $c_{U_\psi,\chi}$ est celle annoncée dans le théorème.

<u>Remarque 1.2</u> : Indiquons comment il est possible de simplifier la démonstration du théorème 1.1 si q est assez grand ; la démonstration qui suit serait valable pour tout q si l'on savait à priori que les coefficients $c_{V,\chi}$ ne dépendent pas de q.

La fonction caractéristique de l'élément 1 étant uniforme (cf. [DL], 7.5), on a pour tout caractère unipotent V, en appliquant III, 2.2 :

$$\text{(iv)}\quad V(1) = \sum_{\chi\in\mathcal{E}} c_{V,\chi}\, \mathrm{Sh}^0 U_\chi(1) \quad .$$

Les coefficients $c_{V,\chi}$ étant de norme inférieure à 1 et de dénominateur inférieur à $|W|$ ont un nombre fini de valeurs possibles, donc, tout q assez grand appartient à un ensemble infini de valeurs de q pour lequel les coefficients $c_{U_\psi,\chi}$ sont constants, ce qui permet de considérer (iv) comme une égalité de polynômes en q et d'identifier les coefficients (les valeurs $U_\psi(1)$ sont données par la table 1 (pour $u \mapsto q$, $v \mapsto q$) et les valeurs $\mathrm{Sh}^0 U_\chi(1)$ par la table 2). On obtient ainsi des relations qui déterminent complètement les $c_{U_\psi,\chi}$ si l'on y rajoute les relations déduites de III, 4.5.

<u>Théorème 1.3</u> : *Il y a quatre caractères unipotents cuspidaux, que nous noterons* $U_+$, $U_-$, $U_j$, $U_{j^2}$ . *La matrice des* $c_{V,\chi}$ *où* V *est l'un de ces caractères et où* $\chi \in \mathcal{E}'$ *est :*

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

*où les caractères* $\chi$ *indexent les colonnes dans l'ordre* $\sigma$, $\tau$, A, B, *et les caractères cuspidaux* V *indexent les lignes dans l'ordre* $U_j$, $U_{j^2}$, $U_+$, $U_-$ .

Démonstration : Si V est unipotent cuspidal, on obtient, par (E) :

$$\text{(v)}\quad c_{V,\sigma} = c_{V,\tau} = -c_{V,A} - c_{V,B} \ .$$

D'après (ii), on a $c_{V,B} \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. Pour que le carré scalaire de $\mathrm{Sh}^0 U_B$ soit 1, on voit qu'il doit exister deux caractères unipotents cuspidaux, que nous noterons $U_+$ et $U_-$, tels que $c_{V,B} \in \{\pm 1/2\}$, les autres caractères unipotents cuspidaux vérifiant $c_{V,B} = 0$ . Ecrivons provisoirement U pour l'un des caractères $U_+$ ou $U_-$ . D'après (i) et (iii), on a $c_{U,A} \in \{1/6, 1/2, 5/6\}$, mais 5/6 est exclu car il donne un carré scalaire trop grand pour $Sh^0 U_A$ . Si $c_{U,B} = 1/2$ , tenant compte de (v), on voit qu'il n'y a aucune valeur de $c_{U,A}$ telle que la propriété (B) soit vérifiée.

Donc $c_{U_+,B} = c_{U_-,B} = -1/2$ . En écrivant que $Sh^0 U_A$ et $Sh^0 U_B$ sont orthogonaux, on obtient : $1/3 + \sum_V c_{V,A}\, c_{V,B} = 0$ ,

où V décrit les caractères unipotents cuspidaux. Ce qui s'écrit :

$$c_{U_+,A} + c_{U_-,A} = 2/3 .$$

En tenant compte des valeurs possibles pour $c_{U,A}$ , on voit, qu'à la permutation près de $U_+$ et de $U_-$, on a $c_{U_+,A} = 1/6$ et $c_{U_-,A} = 1/2$ . Si V est un autre caractère unipotent cuspidal, on a $c_{V,B} = 0$ et $c_{V,A} \in \{0, 1/3, 2/3\}$, d'après (i) et (iii). Mais $c_{V,A} = 0$ est exclu car sinon V serait orthogonal à $Sh^0 U_\chi$ pour tout $\chi$ par (v), donc à tous les caractères $R_w^1$ , ce qui est impossible. D'autre part, d'après (v), la propriété (B) est contredite si $c_{V,A} = 2/3$ . Comme le carré scalaire de $Sh^0 U_A$ vaut 1, il y a exactement deux autres caractères unipotents cuspidaux (qui vérifient $c_{V,A} = 1/3$ et $c_{V,B} = 0$). Nous les noterons $U_j$ et $U_{j^2}$ , d'où le théorème.

<u>Corollaire 1.4</u> : *Les dimensions des caractères unipotents cuspidaux sont :*

$$U_-(1) = q(q-1)^2\,(q^2+q+1)/2 \quad , \quad U_+(1) = q(q-1)^2\,(q^2-q+1)/6$$

$$U_j(1) = U_{j^2}(1) = q(q^2-1)^2/3 .$$

Démonstration : C'est immédiat par application de (iv).

<u>Théorème 1.5</u> : *On a* $\omega_{U_-} = -1$ , $\omega_{U_+} = 1$ , $\omega_{U_j} = j$ , $\omega_{U_{j^2}} = j^2$ .

Démonstration : En utilisant (D),(ii) et en inspectant les matrices des théorèmes 1.3 et 1.1, on voit que les caractères $U_+$ et $U_-$ sont invariants par tout élément de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Donc, d'après (D), (i) , on a $\omega_{U_+} \in \mathbb{Q}$ et $\omega_{U_-} \in \mathbb{Q}$ . Donc

$\{\omega_{U_+}, \omega_{U_-}\} \subset \{+1, -1\}$. De même, on voit que $\omega_{U_j}$ et $\omega_{U_{j^2}}$ ont au plus deux conjugués distincts sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, donc appartiennent à l'ensemble $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm j^2\}$.

Nous allons utiliser l'égalité :

$$\text{(vi)} \quad U_\chi(1) = \mathrm{Sh}_{F/F}\, U_\chi(1) = \sum_{V \in \mathcal{U}} c_{V,\chi}\, \omega_V\, V(1) \quad ;$$

pour $\chi = B$ , cette égalité donne :

$$(q^2+1)(3\omega_{U_-} + \omega_{U_+}) + q(3\omega_{U_-} - \omega_{U_+}) = -2(q+1)^2 .$$

Compte tenu des valeurs possibles pour $\omega_{U_-}$ et $\omega_{U_+}$ , et de ce que q est entier positif, il faut que $\omega_{U_-} = -1$ , et $\omega_{U_+} = 1$ .

De même, en appliquant (vi) pour $\chi = \sigma$ , on obtient $\omega_{U_j} + \omega_{U_{j^2}} = 1$ . En tenant compte des valeurs possibles de $\omega_{U_j}$ et $\omega_{U_{j^2}}$, la seule solution, à permutation près de $U_j$ et $U_{j^2}$ , est $\omega_{U_j} = j$ et $\omega_{U_{j^2}} = j^2$ ;nous supposerons que le paramétrage $U_j$ et $U_{j^2}$ , a été fait de telle façon que ces valeurs aient lieu.

Remarque 1.6 : D'après les théorèmes 1.1 et 1.3,la matrice des coefficients $c_{V,\chi}$ est égale à :

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2
\end{pmatrix}$$

où les lignes sont indexées par les caractères $1, sgn, \sigma, \tau, A, B$ , dans cet ordre et les colonnes par les caractères $U_{ind}$ (identité), $U_{sgn}$ (caractère de Steinberg), $U_\sigma, U_\tau, U_A, U_B, U_j, U_{j^2}, U_-, U_+$ dans cet ordre.

Une interprétation de cette matrice sera donnée dans VII.1 (les caractères unipotents autres que $U_{ind}$ et $U_{sgn}$ seront associés à $\mathcal{M}(\mathcal{G}_3)$) .

Table 1 : Caractères de l'algèbre de Hecke générique de $G_2$

| élément | *ind* | *sgn* | $\sigma$ | $\tau$ | A($\varepsilon$=1) et B($\varepsilon$=-1) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $a_s$ | $u$ | $-1$ | $u$ | $-1$ | $u-1$ |
| $a_t$ | $v$ | $-1$ | $-1$ | $v$ | $v-1$ |
| $a_{st}$, $a_{ts}$ | $uv$ | 1 | $-u$ | $-v$ | $\varepsilon\sqrt{uv}$ |
| $a_{sts}$ | $u^2v$ | $-1$ | $-u^2$ | $v$ | $(v-1)u + (u-1)\varepsilon\sqrt{uv}$ |
| $a_{tst}$ | $uv^2$ | $-1$ | $u$ | $-v^2$ | $(u-1)v + (v-1)\varepsilon\sqrt{uv}$ |
| $a_{stst}$, $a_{tsts}$ | $u^2v^2$ | 1 | $u^2$ | $v^2$ | $-uv$ |
| $a_{ststs}$ | $u^3v^2$ | $-1$ | $u^3$ | $-v^2$ | $u(v-1)\varepsilon\sqrt{uv}$ |
| $a_{tstst}$ | $u^2v^3$ | $-1$ | $-u^2$ | $v^3$ | $v(u-1)\varepsilon\sqrt{uv}$ |
| $a_{ststst}$ | $u^3v^3$ | 1 | $-u^3$ | $-v^3$ | $-2uv\varepsilon\sqrt{uv}$ |
| Degré générique | 1 | $u^3v^3$ | $v^3\dfrac{1+uv+u^2v^2}{u^2+uv+v^2}$ | $u^3\dfrac{1+uv+u^2v^2}{u^2+uv+v^2}$ | $\dfrac{uv(1+u)(1+v)(1+uv+\varepsilon\sqrt{uv})}{2(u+v+\varepsilon\sqrt{uv})}$ |
| Spécialisé $u, v \mapsto q$ | 1 | $q^6$ | $\dfrac{q(q^4+q^2+1)}{3}$ | $\dfrac{q(q^4+q^2+1)}{3}$ | $\dfrac{q(q+1)^2(1+\varepsilon q+q^2)}{2(2+\varepsilon)}$ |

Polynôme de Poincaré $\mathcal{P} = (1+u)(1+v)(1+uv+u^2v^2)$

Dans cette table, on a posé $u = X_s$, $v = X_t$. Cette table a été déterminée comme suit :

Les caractères de degré 1 sont déterminés par leur valeur sur $a_s$ qui est $-1$ ou $u$ et leur valeur sur $a_t$ qui est $-1$ ou $v$.

Pour les caractères de degré 2 : les vecteurs propres pour la valeur propre $-1$ de $a_s$ et $a_t$ ne sont pas colinéaires, sinon la représentation ne serait pas irréductible. Dans une base formée de ces vecteurs propres, on a :

$$a_s \mapsto \begin{pmatrix} -1 & S \\ 0 & u \end{pmatrix} \qquad a_t \mapsto \begin{pmatrix} v & 0 \\ T & -1 \end{pmatrix}$$

où S ou T est non nul (sinon la représentation ne serait pas irréductible).

En tenant compte de la relation $(a_s a_t)^3 = (a_t a_s)^3$ on obtient :

$$ST = u + v + \varepsilon\sqrt{uv} \quad .$$

Table 2 : Valeur des $Sh^o U_\chi(1)$ et $|T_w^F|$ .

| $\chi$ | *ind* | *sgn* | $\sigma$ | $\tau$ | A | B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Sh^o U_\chi(1)$ | 1 | $q^6$ | $q^3$ | $q^3$ | $q^5+q$ | $q^4+q^2$ |

| w | 1 | s | t | st | stst | ststst |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|T_w^F\|$ | $(q-1)^2$ | $q^2-1$ | $q^2-1$ | $q^2-q+1$ | $q^2+q+1$ | $(q+1)^2$ |

Ces tables sont obtenues comme suit : on a $|T_w^F| = \det(q\rho(w)-1)$ , où $\rho$ est la représentations de W sur $X(T_o)\otimes\mathbb{R}$ , et on a :

$Sh^o U_\chi(1) = |W|^{-1} \sum_{w\in W} \chi_o(w)\ R_w^1(1)$ , et $R_w^1(1) = \mathit{sgn}(w)\ |G^F|_{p'}/|T_w^F|$ .

## VII - DÉCOMPOSITION DES DESCENTES DE SHINTANI - RÉSULTATS ET CONJECTURES

### 1. Préliminaires.

Lusztig ([L5], [L6]) a montré que, pour q assez grand, l'ensemble $\mathcal{U}_q$ des caractères unipotents de $G(\mathbb{F}_q)$ est paramétré par un ensemble de symboles indépendants de q. Plus précisément, il existe des groupes finis $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ qui ne dépendent que du type de G, tels que $\mathcal{U}_q$ soit en bijection avec $\coprod_{i=1}^{r} \mathcal{M}(\Gamma_i)$, où, pour un groupe fini $\Gamma$, on note :

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{(x,\chi) \mid x \in \Gamma,\ \chi \in \widehat{Z_\Gamma(x)}\}/\Gamma ,$$

où $\Gamma$ agit par conjugaison.

On notera $U_{c,q}$ (ou $U_c$ s'il n'y a pas d'ambigüité qur q) le caractère unipotent associé à $c \in \mathcal{M}(\Gamma_i)$.

Nous appelerons famille de symboles un ensemble $\mathcal{M}(\Gamma)$ comme ci-dessus, et famille de caractères unipotents l'ensemble des caractères paramétrés par une famille de symboles.

Lusztig ([L7], [L8], [L9]) a de plus montré que, si q est assez grand, pour un ensemble $\tilde{\mathcal{E}}$ convenablement choisi d'extensions à $\overline{\mathcal{H}} \rtimes \langle \overline{F} \rangle$ des caractères irréductibles $\overline{F}$-invariants de $\overline{\mathcal{H}}$ ($\tilde{\mathcal{E}}$ vérifiant l'hypothèse de III, 2), on a :

Si $\tilde{\chi} \in \tilde{\mathcal{E}}$, il existe $\Gamma$ et $c \in \mathcal{M}(\Gamma)$ (dans le cas des groupes déployés c est donné par $U_\chi = U_c$ ) tels que :

$$(1) \quad Sh^0 U_\chi = \sum_{c' \in \mathcal{M}(\Gamma)} \{c, c'\}\, U_{c'}$$

où

$$(2) \quad \{c, c'\} = \sum_{\{g \in \Gamma \mid {}^g y \in Z_\Gamma(x)\}} |Z_\Gamma(x)|^{-1}\, |Z_\Gamma(y)|^{-1}\, \bar{\psi}({}^{g^{-1}}x)\, \chi({}^g y) ,$$

si $c = (x, \chi)$ et $c' = (y, \psi)$ .

Remarque 1.1 : L'égalité (2) peut se réécrire :

$$(3)\qquad \{(x,\chi),(y,\psi)\} = \sum_{\{(y',\psi')\Sigma(y,\psi),\ y'\in Z_\Gamma(x)\}} \overline{\psi}'(x)\ \chi(y')\ |Z_\Gamma(x)|^{-1}$$

où la somme porte sur tous les couples $(y',\psi')$ conjugués sous $\Gamma$ à $(y,\psi)$, et tels que $y'\in Z_\Gamma(x)$.

Remarque 1.2 : Les groupes qui interviennent dans le paramétrage des caractères unipotents des groupes de Chevalley simples appartiennent à l'ensemble :
$\{\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n\ (n \geq 0)\}$.

Dans toute la suite, nous supposons le groupe G simple. Les résultats pour tous les groupes s'en déduisent.

Remarque 1.3 : Si l'on compare les résultats (1) et (2) ci-dessus avec le théorème III, 2.3, on voit qu'il existe un ensemble $\tilde{\mathcal{E}}$ d'extensions à $\mathcal{H} \rtimes \langle\overline{F}\rangle$ des caractères irréductibles $\overline{F}$-invariants de $\mathcal{H}$ tel que, si $U_\chi = U_c$ $(c \in \mathcal{M}(\Gamma))$, on ait :

$$(4)\qquad \mathrm{Sh}_{F^m/F}\ U_{\tilde{\chi}_m} = \sum_{c'\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{c,c'\}\ \omega^m_{U_{c'}}\ U_{c'}\ ,$$

pour tout m multiple non nul de $\delta$.

Définition 1.4 : Dans la suite, nous dirons qu'une famille de caractères unipotents est exceptionnelle si elle contient un caractère $U_\chi$ de la série principale associé à un caractère $\chi$ non rationnel de l'algèbre de Hecke (cf. II, 3.1), c'est-à-dire un caractère de degré 512 dans le cas d'un groupe de type $E_7$, ou un caractère de degré 4096 dans le cas d'un groupe de type $E_8$. Les caractères d'une telle famille sont paramétrés par $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_2)$.

Les résultats de Lusztig ( [L7], [L8], [L9]), d'Asai ([AS1]) et nos méthodes (cf. paragraphe 2, ci-dessous) permettent de vérifier la proposition suivante (rappelons que $\omega_V$ désigne la valeur à une puissance de $q^{1/2}$ près de la valeur propre de F associée au caractère V ; cf. III, 2.3) :

**Proposition 1.5** : *Soit* $\mathcal{M}(\Gamma)$ *une famille de symboles et soit* $c = (x, \chi) \in \mathcal{M}(\Gamma)$. *Si* $q$ *est assez grand, on a :*

(i) *Si* $G$ *est déployé et si la famille de caractères paramétrée par* $\mathcal{M}(\Gamma)$ *n'est pas exceptionnelle, alors* $\omega_{U_c} = \chi(x)/\chi(1)$ .

(ii) *Si la famille paramétrée par* $\mathcal{M}(\Gamma)$ *est exceptionnelle, alors :*

$$\omega_{U_{(x,\ \chi)}} = \chi(x)/\chi(1) \quad \text{si } x = 1 ,$$

$$\omega_{U_{(x,\ \chi)}} = i\ \chi(x)/\chi(1) \quad \text{sinon} .$$

(iii) *Si* $G$ *n'est pas déployé, on a* $\omega_{U_c} = \pm\chi(x)/\chi(1)$ .

(iv) *Sous les hypothèses de* (i) *ou* (iii), *on a, pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ :

$$^{\sigma}U_{(x,\chi)} = U_{(x,\ ^{\sigma}\chi)} .$$

(v) *Sous les hypothèses de* (iv), *si* $e_\Gamma$ *désigne l'exposant de* $\Gamma$, *les caractères* $U_c$ ($c \in \mathcal{M}(\Gamma)$) *sont à valeurs dans* $\mathbb{Q}[\zeta]$ *où* $\zeta$ *est une racine primitive* $e_\Gamma$*-ième de l'unité.*

Notons que (v) est une conséquence immédiate de (iv). D'après la remarque 1.2 et (v), tous les caractères unipotents sont à valeurs dans $\mathbb{Q}[\zeta_{60}]$ où $\zeta_{60}$ est une racine primitive 60-ème de l'unité. Dans la suite, nous écrivons $\omega_c$ pour $\omega_{U_c}$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur la famille de caractères paramétrés par $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Il est naturel de supposer qu'une décomposition analogue à celle de la remarque 1.3 est valable pour les descentes de Shintani de tous les caractères unipotents. Divers arguments, dont, en particulier, le cas $m=1$ et une conjecture apparentée due à Kawanaka (cf. ci-dessous, paragraphe 4), nous ont amenés à :

Conjecture 1.6 : (i) *Si* G *est déployé, les caractères unipotents de* $G^{F^m}$ *sont* F-*invariants et tout caractère unipotent* $U_{c,q^m}$ *de* $G^{F^m}$ *a une extension* $\tilde{U}_{c,q^m}$ *à* $G^{F^m} \rtimes \langle F\rangle$ *telle que pour tout* $m \geq 1$ :

$$(5) \qquad \omega_c^m \, Sh_{F^m/F} \, \tilde{U}_{c,q^m} = \sum_{c'\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{c, c'\} \, \omega_{c'}^m \, {}^{f(m)}U_{c',q} \quad , \quad -$$

*où* $\mathcal{M}(\Gamma)$ *est la famille contenant* c , et où f(m) est l'élément du groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}[\zeta_{60}]/\mathbb{Q})$ défini par $\zeta_{60} \to \zeta_{60}^{1+m^2-m^4}$ (Cet élément n'agit pas sur $U_{c',q}$ sauf si G est de type $E_8$, si $\Gamma=\mathfrak{S}_5$, si m est congru à 2 ou 3 modulo 5 et si $c' = (g_5, \chi)$ où $g_5$ est un élément d'ordre 5, auquel cas f(m) agit par la conjugaison complexe).

(ii) *Si* G *n'est pas déployé, pour tout* m *multiple non nul de* $\delta$, *il existe une bijection* $\phi_m$ *des caractères unipotents de* $G^F$ *sur les caractères unipotents* F-*invariants de* $G^{F^m}$ *telle que tout caractère unipotent* F-*invariant* $\phi_m(U_{c,q})$ *de* $G^{F^m}$ *ait une extension* $\widetilde{\phi_m(U_{c,q})}$ *à* $G^{F^m} \rtimes \langle F\rangle$ *vérifiant :*

$$(6) \qquad (\pm\omega_c)^m \, Sh_{F^m/F} \, \widetilde{\phi_m(U_{c,q})} = \sum_{c'\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{c, c'\} \, (\pm\omega_{c'})^m \, U_{c',q} \quad ,$$

*où* $\mathcal{M}(\Gamma)$ *est la famille contenant* c.

Définition 1.7 :

$$Sh^0 U_{c,q} = \sum_{c'\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{c, c'\} \, U_{c',q} \ .$$

Pour les caractères unipotents de la série principale, cette définition coïncide avec celle de III, d'après l'égalité (1) ci-dessus.

Nous verrons au paragraphe 3 que si la conjecture 1.6 est vraie pour m=1, les fonctions centrales $Sh^0 U_{c,q}$ sont valeurs propres de l'opérateur Sh pour la valeur propre $\omega_c$ .

2. Valeurs propres de F dans le cas d'un groupe de type $E_8$ .

**Nous allons montrer comment nos méthodes permettent de prouver la proposition 1.5 dans le cas où G est de type $E_8$ .**

**Nous partons des faits suivants (lemmes 2.1 à 2.4) pour G quelconque :**

Lemme 2.1 : *Le terme de plus bas degré en* q *dans la dimension de* $U_{(x,\chi)}$ *est de degré constant quand* $(x,\chi)$ *parcourt une famille* $\mathcal{M}(\Gamma)$, *et son coefficient vaut* $\chi(1)/|Z_\Gamma(x)|$ .

**Cela se vérifie cas par cas d'après les résultats de [L5] et [L6].**

Lemme 2.2 : *Si* G *est déployé, on a, pour tout* q *assez grand :*

$$(7) \qquad \chi(1)|Z_\Gamma(x)|^{-1} = \sum_{(y,\psi)\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{(x,\chi),(y,\psi)\}\, \omega_{U_{(y,\psi)}} \psi(1)|Z_\Gamma(y)|^{-1} ,$$

*pour toute famille indexée par* $\mathcal{M}(\Gamma)$, *et tout* $(x,\chi)\in\mathcal{M}(\Gamma)$ *tel que* $U_{(x,\chi)}$ *intervienne dans la série principale.*

Démonstration : On fait m=1 dans (4), et on prend les dimensions des deux membres. On obtient une égalité de deux polynômes en q, dont les termes de plus bas degré sont les deux membres de (7).

Lemme 2.3 : *Pour toute famille* $\mathcal{M}(\Gamma)$, *et tout* $(x, \chi) \in \mathcal{M}(\Gamma)$ , *on a :*

$$(8) \qquad \chi(x)|Z_\Gamma(x)|^{-1} = \sum_{(y,\psi)\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{(x, \chi), (y, \psi)\} \psi(y)|Z_\Gamma(y)|^{-1} ;$$

Remarque : Si l'on prend les dimensions des deux membres de (5), pour $m=1$, d'après le lemme 2.1, on obtient (8), compte tenu de la valeur de $\omega_{U_{(x,\chi)}}$ donnée par la proposition 1.5 (dans le cas où G est déployé et où la famille n'est pas exceptionnelle).

Démonstration du lemme 2.3 : Utilisons la remarque 1.1 pour réécrire le membre de droite de (8), en remarquant que dans (3), on a : $\psi(y) = \psi'(y')$ .

On obtient :

$$\sum_{y'\in Z_\Gamma(x)} \sum_{\psi'\in\widehat{Z_\Gamma}(y')} \overline{\psi}'(x)\ \chi(y')\ \psi'(y')\ |Z_\Gamma(x)|^{-1}\ |Z_\Gamma(y')|^{-1} .$$

La somme intérieure vaut 0 si $y'$ n'est pas conjugué à $x$ sous $Z_\Gamma(y')$, c'est-à-dire si $y'$ est différent de $x$. On obtient donc :

$$\sum_{\psi'\in\widehat{Z_\Gamma}(x)} \overline{\psi}'(x)\ \chi(x)\ \psi'(x)\ |Z_\Gamma(x)|^{-2} = \chi(x)|Z_\Gamma(x)|^{-1} \quad ,$$

d'où le résultat.

Lemme 2.4 (Lusztig, cf. [L1], 3.33) : *Si* V *est un caractère unipotent de* $L^F$ *où* L *est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique rationnel de* G, *et si* $\langle U_c , R_L^G(V)\rangle \neq 0$ *alors* $\omega_{U_c} = \omega_V$ .

Démontrons maintenant la proposition 1.5 pour un groupe de type $E_8$ . D'après le lemme 2.4, on est ramené à étudier le cas où $U_c$ est cuspidal, car pour les autres caractères, on vérifie le résultat, car on connaît $\omega_{U_c}$ . On connaît aussi $\omega_{U_c}$ si $U_c$ intervient dans $R^1_{cox}$ où cox est l'élément de Coxeter de W (cf. [L2]), et on vérifie le résultat dans ce cas.

Remarquons que si $U_{(x,\ \chi)}$ intervient dans la série principale, on a $\chi(x) = \chi(1)$ ; les égalités (7) et (8) ont donc même premier membre dans ce cas. Egalons alors les seconds membres de ces égalités ; on obtient :

$$(9) \qquad \sum_{(y,\psi)\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{(x,\ \chi),\ (y,\ \psi)\}\ \psi(1)\ |Z_\Gamma(y)|^{-1}\ (\omega_{U_{(y,\psi)}} - \psi(y)/\psi(1)) = 0$$

Nous savons de plus, d'après les remarques qui précèdent que les termes de (9) sont nuls, sauf peut-être si $(y,\ \psi)$ est dans $\mathcal{E}_1$ , où

$\mathcal{E}_1 = \{(y,\ \psi) \in \mathcal{M}(\Gamma)\,|\,U_{(y,\psi)}$ est cuspidal et n'intervient pas dans $R^1_{cox}\}$ .

Enfin, remarquons que le nombre de conjugués sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ d'un caractère de $\mathcal{E}_1$ est majoré par le nombre de caractères de $\mathcal{E}_1$ de même dimension. Les résultats de [L5] montrent que $\mathcal{E}_1$ est inclus dans une famille paramétrée par $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_5)$, et que les caractères $U_\chi$ de la dite famille vérifient $c_\chi = 1$ (cf. II, 3.4). On en déduit, d'après III, 2.3 (i) que $\lambda_U = 1$ , pour tout $U \in \mathcal{E}_1$ . Les considérations précédentes et le corollaire III, 3.4 (ii) montrent que le nombre de conjugués sous le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de $\omega_U$ (pour $U \in \mathcal{E}_1$) est majoré par le nombre s de caractères de $\mathcal{E}_1$ de même dimension que U. Donc $\omega_U$ est une racine de l'unité d'ordre t où $\phi(t) \leq s$.

Appliquons (9) avec $x=1$ et $\chi \in \widehat{\mathfrak{S}}_5 - \{sgn\}$, ce qui est possible car tous les caractères $U_{(1,\ \chi)}$ pour $\chi \in \widehat{\mathfrak{S}}_5 - \{sgn\}$ interviennent dans la série principale.

Pour $x=1$, on a $\{(1,\ \chi),\ (y,\ \psi)\} = \psi(1)\ \chi(y)\ |Z_\Gamma(y)|^{-1}$ , donc (9) devient :

$$(10) \qquad \sum_{(y,\psi)\in\mathcal{E}_1} (\psi(1)|Z_\Gamma(y)|^{-1})^2\ \chi(y)\ (\omega_{U_{(y,\psi)}} - \psi(y)/\psi(1)) = 0 \ .$$

D'après [L5] et ce qui précède, on a la table suivante :

| $(y,\psi) \in \mathcal{E}_1$ | $\lvert Z_\Gamma(y)\rvert$ | $\psi(y)$ | $\psi(1)$ | s | ordres possibles pour $\omega_{U_{(y,\psi)}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(g_2g_2',\varepsilon)$ | 8 | 1 | 1 | 1 | 1 , 2 |
| $(1,\mathit{sgn})$ | 120 | 1 | 1 | 1 | 1 , 2 |
| $(g_2,-\rho)$ | 12 | -1 | 1 | 1 | 1 , 2 |
| $(g_3,\varepsilon j)$ | 6 | $j$ | 1 | 2 | 1 , 2 , 3 , 4 , 6 |
| $(g_3,\varepsilon j^2)$ | 6 | $j^2$ | 1 | 2 | 1 , 2 , 3 , 4 , 6 |
| $(g_4,i)$ | 4 | $i$ | 1 | 2 | 1 , 2 , 3 , 4 , 6 |
| $(g_4,-i)$ | 4 | $-i$ | 1 | 2 | 1 , 2 , 3 , 4 , 6 |

On a noté $g_2$ et $g_2'$ , deux transpositions qui commutent. On a noté $g_3$ (resp. $g_4$) un 3-cycle (resp. un 4-cycle) de $\mathfrak{S}_5$ . Le centralisateur de $g_2g_2'$ est un groupe diédral d'ordre 8, et on désigne par $\varepsilon$ le caractère de degré 1 de ce groupe qui provient du caractère non trivial du quotient par le sous-groupe cyclique d'ordre 4, c'est-à-dire qui vaut -1 sur $g_2$ et $g_2'$ et 1 sur les éléments d'ordre 4.

Le centralisateur de $g_2$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3$ , et on note $-\rho$ le caractère de ce groupe dont la restriction à $\mathfrak{S}_3$ est irréductible de degré 2, et la restriction à $\mathfrak{S}_2$ est le caractère non trivial de $\mathfrak{S}_2$ (en particulier $-\rho(g_2) = -1$ ) .

Enfin, le centralisateur de $g_3$ est le produit d'un groupe d'ordre 3 par un groupe d'ordre 2, et on note $\varepsilon j$ (resp. $\varepsilon j^2$) le caractère produit du caractère non trivial du groupe d'ordre 2 par le caractère du groupe d'ordre 3 qui vaut $j$ (resp. $j^2$) sur $g_3$ ; de même, on note $i$ (resp. $-i$) le caractère du groupe engendré par $g_4$ qui vaut $i$ (resp. $-i$) sur $g_4$.

Reportons ces valeurs dans (10). On obtient :

$$(1/8)^2\ \chi(g_2g_2')[\omega_{(g_2g_2',\ \varepsilon)} - 1] + (1/120)^2\ \chi(1)[\omega_{(1,\ \mathit{sgn})} - 1] +$$

$$+ (1/12)^2\ \chi(g_2)[\omega_{(g_2,\ -\rho)} + 1] + (1/6)^2\ \chi(g_3)[\omega_{(g_3,\ \varepsilon j)} + \omega_{(g_3,\ \varepsilon j^2)} + 1] +$$

$$+ (1/4)^2\ \chi(g_4)[\omega_{(g_4,\ i)} + \omega_{(g_4,\ -i)}] = 0 \quad , \text{ pour tout } \chi \in \widehat{\mathfrak{S}}_5 - \{\mathit{sgn}\} \ .$$

Le cas $\chi = 1$ , et les limitations sur les ordres des $\omega_{(y,\psi)}$ suffisent à conclure que dans cette somme, tous les termes entre crochets sont nuls. Ceci donne les valeurs des $\omega_{(y,\psi)}$ , à ambigüité près entre $(g_3, \epsilon j)$ et $(g_3, \epsilon j^2)$ d'une part, et entre $(g_4, i)$ et $(g_4, -i)$ d'autre part.

L'échange de ces caractères ne change pas les coefficients $\{c, c'\}$, et on peut supposer que le paramétrage a été fait de telle sorte que les $\omega_{U_c}$ aient les valeurs annoncées.

3. Conséquences de notre conjecture ; conjecture de Kawanaka.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que la conjecture 1.6 confirme une conjecture de Kawanaka ([K2] remarque 4.4), démontrée pour m premier à $|G^F|$ (cf. [K3] ). Pour cela, nous allons exprimer les différents opérateurs qui interviennent dans une base commode de l'espace engendré par les caractères unipotents.

Fixons d'abord quelques notations :

Soit $\Gamma$ un groupe fixé, paramétrant une famille (cf. II, 1), et notons M l'espace vectoriel complexe de base $\{U_c | c \in \mathcal{M}(\Gamma)\}$. Pour tout m multiple non nul de 6 identifions M à l'espace engendré par les extensions $\widetilde{U}_{c,q^m}$ (ou $\widetilde{\Phi_m(U_{c,q})}$) de la conjecture 1.6 .

Sur l'espace M, nous définissons les opérateurs linéaires suivants :

$$T(U_c) = \sum_{c' \in \mathcal{M}(\Gamma)} \{c, c'\}\, U_{c'} ,$$

$$\Omega(U_c) = \omega_c\, U_c$$

$$\Delta_\sigma(U_c) = {}^\sigma U_c \text{ , pour tout } \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) .$$

On écrit $\Delta$ pour $\Delta_\sigma$ si $\sigma$ est la conjugaison complexe.

Avec ces notations, et d'après la conjecture 1.6, nous pouvons identifier l'opérateur $Sh_{F^m/F}$ à l'opérateur $\Omega^m \circ \Delta_{f(m)} \circ T \circ \Omega^{-m}$ sur M(m multiple de 6) et, pour G déployé, Sh à l'opérateur $Sh_{F/F} \circ \Delta$ , c'est-à-dire à $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1} \circ \Delta$ .

Nous allons exprimer les opérateurs $\Omega$ , T, et $\Delta$ dans une autre base de M, plus commode que la base formée des $U_c$ .

Posons $\mathcal{N}(\Gamma) = \{(x,z) \in \Gamma\times\Gamma \mid xz = zx\} /\Gamma$ , le groupe $\Gamma$ agissant par conjugaison. Les ensembles $\mathcal{M}(\Gamma)$ et $\mathcal{N}(\Gamma)$ ont évidemment même cardinal. Si $(x, z) \in \mathcal{N}(\Gamma)$ , on définit un élément $e_{(x,z)}$ de M par :

$$e_{(x, z)} = \sum_{\chi\in\widehat{Z_\Gamma(x)}} \chi(z)\, U_{(x, \chi)} .$$

Notons que si la famille paramétrée par $\mathcal{M}(\Gamma)$ n'est pas exceptionnelle, les fonctions centrales $e_{(x,z)}$ sont à valeurs entières. En effet, leurs valeurs sont clairement des entiers algébriques, et elles sont invariantes par tout automorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$ , d'après 1.5 (iv).

<u>Proposition 3.1</u> : *On a* : $T\, e_{(x, z)} = e_{(z^{-1}, x^{-1})}$ *pour tout* $(x, z) \in \mathcal{N}(\Gamma)$.

Démonstration : Par définition de T et de $e_{(x, z)}$ , on a :

$$T\, e_{(x, z)} = \sum_{\chi\in\widehat{Z_\Gamma(x)}} \chi(z) \sum_{(y, \psi)\in\mathcal{M}(\Gamma)} \{(x, \chi), (y, \psi)\}\, U_{(y, \psi)} =$$

$$= \sum_{\chi\in\widehat{Z_\Gamma(x)}} \chi(z) \sum_{(y,\psi)\in\mathcal{M}(\Gamma)} \sum_{\{(y',\psi')\in(y,\psi) \mid y'\in Z_\Gamma(x)\}} \overline{\psi'(x)}\, \chi(y')\, |Z_\Gamma(x)|^{-1}\, U_{(y,\psi)} ,$$

d'après la remarque 1.1. Echangeons les sommations, on trouve (en remarquant que $(y, \psi)$ et $(y', \psi')$ sont égaux dans $\mathcal{M}(\Gamma)$ :

$$T\, e_{(x, z)} = \sum_{y'\in Z_\Gamma(x)} \sum_{\psi'\in\widehat{Z_\Gamma(y')}} \overline{\psi'(x)} \sum_{\chi\in\widehat{Z_\Gamma(x)}} \chi(z)\, \chi(y')\, |Z_\Gamma(x)|^{-1}\, U_{(y', \psi')} .$$

$$\text{Or} \quad \sum_{\chi\in\widehat{Z_\Gamma(x)}} \chi(z)\, \chi(y') = \begin{cases} |Z_\Gamma(x) \cap Z_\Gamma(z)| & \text{si } y' \text{ et } z^{-1} \text{ sont conjugués dans } Z_\Gamma(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où :

$$T\, e_{(x,z)} = \sum_{\{y'\sim z^{-1} \text{ dans } Z_\Gamma(x)\}} \sum_{\psi'\in\widehat{Z_\Gamma(y')}} \overline{\psi'(x)}\, |Z_\Gamma(x)|^{-1}\, |Z_\Gamma(x) \cap Z_\Gamma(z)|\, U_{(y',\psi')} .$$

Or si $\chi$ est un caractère de $Z_\Gamma(z)$ conjugué à $\psi'$ sous $Z_\Gamma(x)$, on a $\psi'(x) = \chi(x)$ .

Si on note $\chi$ un caractère de $Z_\Gamma(z)$ tel que $(z^{-1}, \chi)$ soit conjugué à $(y', \psi')$ sous $Z_\Gamma(x)$, on obtient :

$$T\, e_{(x,\, z)} = \sum_{\{y' \sim z^{-1} \text{ dans } Z_\Gamma(x)\}} \ \sum_{\chi \in \widehat{Z_\Gamma(z)}} \overline{\chi(x)}\ |Z_\Gamma(x)|^{-1} |Z_\Gamma(x) \cap Z_\Gamma(z)|\ U_{(z^{-1},\, \chi)} .$$

Les termes de la somme ci-dessus ne dépendent pas de $y'$. Comme on a :

$$\# \{y' \in Z_\Gamma(x) \mid y' \text{ conjugué à } z^{-1} \text{ dans } Z_\Gamma(x)\} = |Z_\Gamma(x)|\ |Z_\Gamma(x) \cap Z_\Gamma(z)|^{-1} ,$$

on obtient :

$$T\, e_{(x,\, z)} = \sum_{\chi \in \widehat{Z_\Gamma(z)}} \overline{\chi(x)}\ U_{(z^{-1},\, \chi)} \text{ , d'où le résultat.}$$

Proposition 3.2 : *Supposons que la famille de caractères considérés, paramétrée par $\mathcal{M}(\Gamma)$, ne soit pas exceptionnelle. Soit $\zeta$ une racine primitive $e_\Gamma$-ième de l'unité et soit $\sigma$ l'automorphisme de $\mathbb{Q}[\zeta]$ tel que* $\sigma_t(\zeta) = \zeta^t$ (cf. 1.5, (v)) ; *alors, pour tout* $(x, z) \in \mathcal{N}(\Gamma)$, *on a :*

$$\Delta_{\sigma_t} e_{(x,\, z)} = e_{(x,\, z^{t'})} \quad \text{, où } t' \text{ est l'inverse de } t \text{ modulo } e_\Gamma$$

$$\Omega\, e_{(x,\, z)} = e_{(x,\, xz)} .$$

On obtient facilement cette proposition d'après 1.5, (i), (iv) et (v).

Remarquons que le groupe $Gl_2(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathcal{N}(\Gamma)$, l'action de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z})$ étant définie par $(x, z) \to (x^a z^b, x^c z^d)$ pour tout $(x, z) \in \mathcal{N}(\Gamma)$ (en effet, si $(x, z)$ est un élément de $\mathcal{N}(\Gamma)$, alors $x$ et $z$ commutent). D'après les énoncés 3.1 et 3.2, on a la correspondance suivante entre éléments de $Gl_2(\mathbb{Z})$ et opérateurs sur l'espace engendré par les caractères unipotents :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to T \ , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \Omega \ , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \Delta \ , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix} \to \Delta_{\sigma_t} .$$

Ceci permet de déterminer des relations entre opérateurs, telles que :

(1) $\quad T \circ \Omega^{-1} \circ T \circ \Omega = \Delta \circ \Omega \circ T$ .

Remarque 3.3 : Soit $t$ un entier inversible modulo $e_\Gamma$, alors les éléments $(x^t, z^t)$ et $(x, z)$ de $\mathcal{N}(\Gamma)$ sont égaux (c'est une propriété des groupes $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 8$).

On voit donc que la représentation de $Gl_2(\mathbb{Z})$ considérée ci-dessus se factorise par une représentation de $PGl_2(\mathbb{Z}/e_\Gamma\mathbb{Z})$. En particulier, on a : $T \circ \Delta = \Delta \circ T$, et la relation (1) peut se réécrire :

(2) $\quad (\Omega \circ T \circ \Omega^{-1} \circ \Delta) \circ T = T \circ \Omega$ .

Si la famille de caractères est exceptionnelle, la proposition 3.2 est fausse, mais on vérifie que la relation (2) est vraie, à l'aide des valeurs données dans 1.5 .

Proposition 3.4 : *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La conjecture* 1.6 *est vraie pour* m=1 .

(ii) *La fonction centrale* $Sh^0U_c$ *est vecteur propre de l'opération* Sh *pour la valeur propre* $\omega_c$ *, pour tout* $c \in \mathcal{M}(\Gamma)$ .

Démonstration : L'assertion (i) se réécrit $Sh_{F/F} = \Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$, c'est-à-dire $Sh = \Omega \circ T \circ \Omega^{-1} \circ \Delta$ . D'après (2), cette relation est équivalente à $Sh \circ T = T \circ \Omega$, c'est-à-dire à (ii) .

Remarque 3.5 : Dans le cas où G est de type $G_2$ , nous verrons au paragraphe 4 que les assertions (i) et (ii) de la proposition 3.4 sont vérifiées. Les fonctions $Sh^0U_j$, $Sh^0U_{j^2}$ , $Sh^0U_+$ et $Sh^0U_-$ ne sont autres que les fonctions $Y_3$, $Y_4$, $Y_1$, $Y_2$ de [CHR], dans cet ordre.

La relation $Sh(Sh^0V) = \omega_V\, Sh^0V$ peut dans ce cas se vérifier directement en utilisant les résultats de IV, 5 et la table de [CHR] (les fonctions $Sh^0V$ où V est cuspidal sont nulles "presque partout", en particulier sur les classes de conjugaison dont la fonction caractéristique est uniforme, comme on peut le voir en utilisant le fait que ces fonctions sont orthogonales aux fonctions $Sh^0U_\chi$ , ces dernières formant une base de l'espace des fonctions uniformes combinaisons linéaires de caractères unipotents).

Remarque 3.6 : Soit $\zeta$ une racine primitive $e_\Gamma$-ième de l'unité, et pour tout $t \in (\mathbb{Z}/e_\Gamma\mathbb{Z})^\times$ , soit $\sigma_t$ l'élément de $Gal(\mathbb{Q}[\zeta], \mathbb{Q})$ défini par $\sigma_t(\zeta) = \zeta^t$ . On a :

$\sigma_t(\{(x, \chi), (y, \psi)\}) = \{(x, \chi), (y^t, {}^{\sigma_t}(\psi))\}$ . Donc les coefficients $\{c, c'\}$ sont rationnels si et seulement si pour tout $t \in (\mathbb{Z}/e_\Gamma\mathbb{Z})^\times$ et tout $(y, \psi) \in \mathcal{M}(\Gamma)$, on a $(y^t, {}^{\sigma_t}(\psi)) = (y, \psi)$. Cette condition équivaut à $(x^t, z^{t'}) = (x, z)$ pour tout élément $(x, z)$ de $\mathcal{N}(\Gamma)$ où $t'$ désigne l'inverse de $t$ modulo $e_\Gamma$ . D'après la remarque 3.3, cette dernière propriété est vraie si et seulement si $z^t$ et $z^{t'}$ sont conjugués dans $Z_\Gamma(x)$. Si $\Gamma = \mathfrak{S}_n$ avec $1 \leq n \leq 4$ , l'exposant $e_\Gamma$ divise 12, donc $t = t'$ modulo $e_\Gamma$ (propriété vraie modulo 12), et les coefficients $\{c, c'\}$ sont rationnels. Par contre, si $\Gamma = \mathfrak{S}_5$ , les coefficients $\{c, c'\}$ ne sont pas tous rationnels ; néanmoins les coefficients $\{c, c'\}$ où $U_c$ est dans la série principale sont rationnels (comme la remarque 1.3 et les résultats de III l'impliquent).

Nous allons maintenant étudier la conjecture de Kawanaka. Rappelons-en l'énoncé : Kawanaka ([K2]) note $t_a(x)$ la classe de conjugaison de $G^F$ associée $a \in Z_G(x)/Z_G(x)°$ (cf. IV proposition 1.1). Puis, il pose $e = \text{ppcm}\{\text{exposants de } Z_G(x)/Z_G(x)° \mid x \in G^F\}$ , et appelle "admissibles" les entiers premiers à $e$ . Si $t$ et $m$ sont deux entiers inverses l'un de l'autre modulo $e$, on dit que $(t, m)$ est un couple admissible. On définit l'application $t_\sigma$ sur les classes de conjugaison de $G^F$ par $t_\sigma(x) = t_{\bar{x}^t}(x)$ , où $\bar{x}$ est l'image de $x$ dans $Z_G(x)/Z_G(x)°$ .

D'après IV, 1.1, on a donc $t_\sigma = (n_{F/F})^t$ .

Si $y \in G^{F^m}$ s'écrit $\alpha^{-1}.{}^F\alpha$ , Kawanaka pose $n_\sigma(y)$ = classe de ${}^{F^m}\alpha.\alpha^{-1}$ (dans $G^F$). On a donc $n_\sigma = D \circ N_{F^m/F}$ où $D$ est l'application $x \to x^{-1}$ sur les classes de conjugaison de $G^F$ . Enfin, Kawanaka pose $N_\sigma = t_\sigma^{-1} \circ n_\sigma$ , donc $N_\sigma = (n_{F/F})^{-t} \circ D \circ N_{F^m/F}$ . La conjecture de Kawanaka s'énonce alors :

Conjecture 3.7 ([K2]4.4) : *Pour tout couple admissible* $(t,m)$ *et tout caractère* $\chi$ *irréductible* $F$*-invariant de* $G^{F^m}$ *, il existe une extension* $\tilde{\chi}$ *de* $\chi$ *à* $G^{F^m} \rtimes \langle F\rangle$ *telle que l'application définie par* $x \to \tilde{\chi}(N_\sigma^{-1}(x)F)$ *sur* $G^F$ *soit un caractère irréductible.*

Avec nos notations, la conjecture se traduit donc par :

*L'application* $Sh^t \circ \Delta \circ Sh_{F^m/F}$ *envoie la fonction de* F-*classe restriction de* $\tilde{\chi}$ *à* $G^{F^m}.F$ *sur un caractère irréductible de* $G^F$.

Nous pouvons donc, si la conjecture 1.6 est vraie, énoncer la conjecture de Kawanaka sous la forme (pour les caractères unipotents) :

*L'opérateur* $S = (\Omega o T o \Omega^{-1} o \Delta)^t \, o \Delta o \Omega^m o \, \Delta_{f(m)} \, o \, T \, o \Omega^{-1}$ *permute la base* $U_c$ *de* M, *à des racines de l'unité près.*

D'autre part, on vérifie facilement cas par cas, pour les groupes de Chevalley que l'exposant commun e des groupes $Z_G(x)/Z_G(x)°$ est égal à l'exposant commun des groupes $\Gamma$ qui interviennent dans le paramétrage des caractères unipotents (cf. ci-dessus paragraphe 1).

Le calcul dans la base $\{e_{(x,\, z)}\}$ permet de vérifier que si $\Gamma$ est l'un des groupes $(Z/2Z)^n$ , $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$ on a S=1.

En effet, un calcul simple montre que, dans la représentation de $PGl_2(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$ associée (cf. 3.3), l'opérateur S correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} t(1+m^2-m^4)'-tm^2+m & tm-1 \\ (1+m^2-m^4)' - m^2 & m \end{pmatrix}$$

où $(1+m^2-m^4)'$ désigne l'inverse de $(1+m^2-m^4)$ modulo e .

Comme, modulo 60, on a tm=1, $(1+m^2-m^4)^2=1$ et $m^4=1$ si m est inversible, on voit que cette matrice vaut

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

dont l'image dans $PGl_2(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$ est l'identité.

4. Démonstration de notre conjecture dans le cas des petits groupes $\Gamma$ .

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer la conjecture 1.6 pour un certain nombre de groupes déployés, en utilisant la base $\{e_{(x,\ z)} \mid (x,\ z) \in \mathcal{M}(\Gamma)\}$ définie dans le paragraphe 3.

Asaï ([AS2],[AS3],[AS4]) a récemment prouvé cette conjecture en toute généralité, quand $m=1$.

Fixons une famille $\mathcal{F}$ de caractères unipotents de $G^F$ paramétrée par $\mathcal{M}(\Gamma)$, et soit M l'espace vectoriel engendré par ces caractères. Soient T, $\Omega$ et $\Delta$ les opérateurs sur M définis au paragraphe 3. Alors le cas m=1 de la conjecture 1.6 est équivalent à :

$$(Sh_{F/F})|_M = \Omega \circ T \circ \Omega^{-1} .$$

La méthode que nous utilisons pour démontrer cette égalité est la suivante : Soit $M_1$ le sous-espace de M engendré par les caractères de $\mathcal{F}$ qui sont dans la série principale. Les restrictions de $Sh_{F/F}$ et de $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$ à $M_1$ sont égales d'après le cas m=1 de la remarque 1.3 si l'on suppose q assez grand pour que

l'égalité (1) du paragraphe 1 soit vraie. Les opérateurs $Sh_{F/F}$ et $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$ étant des involutions, on en déduit que les restrictions de $Sh_{F/F}$ et de $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$ à $\Omega T\Omega^{-1}(M_1)$ sont encore égales. Enfin, supposons que la caractéristique est bonne pour G ; alors on a $Sh\, Sh^{o}V = Sh^{o}V$, si V est un caractère de la série principale (cf. IV, 2.5), c'est-à-dire que la restriction de $Sh_{F/F} \circ \Delta$ à $T(M_1)$ est l'identité. Or, d'après la relation (2) de 3.3 (qui est vraie même pour les familles exceptionnelles), que nous pouvons appliquer si nous supposons q assez grand pour que la proposition 1.5 soit vraie, on a :
$\Delta = \Omega \circ T \circ \Omega^{-1} \circ T \circ \Omega \circ T$ . Donc la restriction de :
$Sh_{F/F} \circ \Omega \circ T \circ \Omega^{-1} \circ T \circ \Omega \circ T$ à $T(M_1)$ est l'identité.
Comme $T^2 = 1$ et que la restriction de $\Omega$ à $M_1$ est l'identité, on obtient l'égalité des restrictions de $Sh_{F/F}$ et de $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$ à $T(M_1)$. Posons :
$M' = M_1 + \Omega T\Omega^{-1}(M_1) + T(M_1)$ . Si $M' = M$ , on a démontré le résultat.

Pour $\Gamma$ fixé, l'ensemble des symboles de $\mathcal{M}(\Gamma)$ associés à des caractères de la série principale dépend de G et de la famille de caractères considérée, mais comprend toujours certains symboles dont nous donnons la liste ci-dessous.

Nous adoptons les mêmes notations pour $\mathcal{M}(\Gamma)$ qu'au paragraphe 3 et que dans [L9].

<u>Proposition 4.1</u> : *L'ensemble des symboles de $\mathcal{M}(\Gamma)$ paramétrant des caractères de la série principale contient :*

(i) $(1, \chi)$ *pour tout* $\chi \in \hat{\Gamma} - \{sgn\}$,

(ii) $(g_2, 1\bullet\chi)$ *pour tout* $\chi \in \hat{Z}_2$ , *où* $Z_\Gamma(g_2) = \langle g_2\rangle \times Z_2$ *(On a* $Z_2 = \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$, *pour* $\Gamma = \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5$ *respectivement)*,

(iii) $(g_3, 1\bullet\chi)$ *pour tout* $\chi \in \hat{Z}_3$ , *où* $Z_\Gamma(g_3) = \langle g_3\rangle \times Z_3$ *(On a* $Z_3 = \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$, *pour* $\Gamma = \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5$ *respectivement)*,

(iv) $(g_2', \chi)$ *pour tout caractère* $\chi$ *de degré* 1 *distinct de sgn de* $Z_2'$ , *si* $\Gamma = \mathfrak{S}_4$ *ou* $\mathfrak{S}_5$ *et si* $Z_2' = Z_\Gamma(g_2')$ *(groupe de Coxeter de type* $B_2$*)*,

(v) $(x, 1)$ *pour tout* $x \in \Gamma$ .

Remarque 4.2 : (i) Si $\Gamma = \mathfrak{S}_2$ , l'espace $M_1$ contient aussi $U_{(1,\, sgn)}$, sauf si la famille est exceptionnelle.

(ii) Si $\Gamma = \mathfrak{S}_3$ , l'espace $M_1$ contient aussi $U_{(1,\, sgn)}$ , sauf si G est de type $G_2$ .

(iii) Le groupe $\Gamma = \mathfrak{S}_4$ (resp. $\mathfrak{S}_5$) intervient seulement si G est de type $F_4$ (resp. $E_8$) et pour une seule famille de caractères unipotents.

On obtient facilement, à partir de 4.1 la proposition suivante :

Proposition 4.3 : *Les sous-espaces de* $M_1$ *correspondant aux symboles donnés dans 4.1 sont engendrés respectivement par les vecteurs suivants dans la base* $\{e_{(x,z)}\}$

(i) $\{e_{(1,\, 1)} - sgn(x)\; e_{(1,\, x)} \mid x \in \Gamma - \{1\}\}$ ,

(ii) $\{e_{(g_2,\, \sigma)} + e_{(g_2,\, g_2\sigma)} \mid \sigma \in Z_2\}$ ,

(iii) $\{e_{(g_3,\, g_3^2\sigma)} + e_{(g_3,\, g_3\sigma)} + e_{(g_3,\, \sigma)} \mid \sigma \in Z_3\}$ ,

(iv) $\{e_{(g_2',\, 1)} + e_{(g_2',\, g_2')} - sgn(x)\; e_{(g_2',\, x)} \mid x \in Z_2' - \{1,\, g_2'\}\}$ ,

(v) $\{\sum_{z \in Z_\Gamma(x)} e_{(x,\, z)} \mid x \in \Gamma\}$ .

Démontrons alors le théorème annoncé :

Théorème 4.4 : *Si* G *est un groupe déployé en bonne caractéristique, d'un des types* $B_n$ $(n \leq 5)$, $C_n (n \leq 5)$, $D_n$ $(n \leq 8)$, $E_6$, $E_7$, $F_4$ *ou* $G_2$, *et si* q *est assez grand pour que la proposition* 1.5 *et l'égalité* (1) *du paragraphe* 1 *soient vraies, alors la conjecture* 1.6 *est vraie pour* m=1.

Démonstration : Nous allons montrer que sous ces hypothèses, on a $M' = M$ .

De $T\, e_{(x,\, z)} = e_{(z^{-1},\, x^{-1})}$ et $\Omega T \Omega^{-1}\, e_{(x,\, z)} = e_{(xz^{-1},\, z^{-1})}$ on déduit que M' contient :

(i') $\{e_{(1,\ 1)} - \mathit{sgn}(x)\ e_{(x,\ 1)} | x \in \Gamma\}$ ,

(i") $\{e_{(1,\ 1)} - \mathit{sgn}(x)\ e_{(x,\ x)} | x \in \Gamma\}$ .

Si on compare 4.3 (ii) pour $\sigma = 1$ et (i') et (i") pour $x = g_2$ , on voit que $e_{(1,\ 1)}$ est dans M', donc :

(α) $\{e_{(1,\ x)},\ e_{(x,\ 1)},\ e_{(x,\ x)} | x \in \Gamma\} \subset M'$ .

Ceci suffit à prouver l'égalité M'= M si $\Gamma = \mathfrak{S}_2$ .

En utilisant (α) et 4.3, (iii) avec $\sigma = 1$ , on obtient :

(β) $e_{(g_3,\ g_3^2)} \in M'$ .

Si $\Gamma = \mathfrak{S}_3$ , les propriétés (α) et (β) suffisent à prouver l'égalité M'= M .

En utilisant (α) et 4.3 (iv), on voit que $e_{(g_2',\ x)}$ est dans M' pour tout $x \in Z_2'$ .
En appliquant T et $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$ , on en déduit :

(γ) $\{e_{g_2',g_4)},\ e_{(g_2',\ g_2)},\ e_{(g_2',g_2g_4)},\ e_{(g_4,g_2')},\ e_{(g_2,g_2')},\ e_{(g_4,g_4^3)},\ e_{(g_2,g_2g_2')}\} \subset M'$.

où nous avons supposé dans les notations que les représentants $g_2$, $g_2'$, et $g_4$ sont choisis de façon que $g_2' = g_4^2$ et que $g_2$ et $g_2'$ commutent.

Les propriétés (α), (β) et (γ) suffisent à prouver l'égalité M'= M pour $\Gamma = \mathfrak{S}_4$ , d'où le théorème.

<u>Remarque 4.5</u> : Pour $\Gamma = \mathfrak{S}_5$ , il est facile de vérifier que M' est engendré par les vecteurs cités dans la démonstration de 4.4 et par :

(1) $e_{(g_2,\ g_6)} + e_{(g_2,\ g_3)}$ , $e_{(g_3,\ g_2)} + e_{(g_3,\ g_6)} + e_{(g_3,\ g_6^5)}$

(2) $e_{(g_6,\ g_2)} + e_{(g_3,\ g_2)}$ , $e_{(g_2,\ g_3)} + e_{(g_6,\ g_3)} + e_{(g_6,\ g_3^2)}$

(3) $e_{(g_3,\ g_6)} + e_{(g_6,\ g_3)}$ , $e_{(g_6,\ g_2)} + e_{(g_2,\ g_6)} + e_{(g_2,\ g_6^5)}$

(4) $e_{(g_5,\ g_5^2)} + e_{(g_5,\ g_5^3)} + e_{(g_5,\ g_5^4)}$ ,

(on obtient (1) en utilisant 4.3, (ii) avec $\sigma = g_3$ et (iii) avec $\sigma = g_2$ , et on en déduit (2) et (3) par application de T et de $\Omega \circ T \circ \Omega^{-1}$), les représentants $g_2$, $g_3$, $g_6$ étant supposés choisis de façon que $g_6 = g_2 g_3$ .

## APPENDICE

Nous donnons ci-dessous les démonstrations des trois lemmes arithmétiques utilisés dans [DM1] pour démontrer le théorème principal du chapitre III (théorème III, 2.3), ainsi que du lemme (A4) utilisé dans la démonstration du théorème II, 3.1.

Lemme A.1 - Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Z} - \{0,1,-1\}$. On suppose que $P$ n'est pas un monôme, alors l'ensemble des facteurs premiers de $P(r^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ est infini.

Démonstration - Supposons que l'ensemble en question est fini, et notons-le $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. On peut supposer que $r$ n'est divisible par aucun des $p_i$ : en effet, si $p_i$ divise $r$, alors $p_i$ divise le terme constant $a_0$ de $P$. Si $a_0$ est nul, on peut remplacer $P$ par $P/X$. Si $a_0$ est non nul, on peut remplacer $P$ par $P(rX)/\mathrm{pgcd}(a_0, r)$, et aucun $p_i$ ne divise le terme constant de ce polynôme.

Notons $(\alpha_{ij})_{j=1,\ldots,k_i}$ les zéros de $P$ dans l'anneau des entiers $p_i$-adiques.

On peut écrire :

$$P(X) = h_i(X) \prod_{j=1}^{k_i} (X - \alpha_{ij}) \quad ,$$

où $h_i$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}_{p_i}$, sans zéro dans $\mathbb{Z}_{p_i}$. Donc : $\sup\{v_{p_i}(h_i(x)) \mid x \in \mathbb{Z}_{p_i}\} < \infty$, si on note $v_{p_i}$ la valuation $p_i$-adique. Ceci montre que si la valuation de $P(x)$ est assez grande, alors $x$ est proche d'un des $\alpha_{ij}$, plus précisément, si $m_i = \sup\limits_{\mathbb{Z}_{p_i}} v_{p_i}(h_i(x))$, on a :

Si $v_{p_i}(P(x)) \geqslant M_i$, il existe $j$ tel que $v_{p_i}(x - \alpha_{ij}) \geqslant (M_i - m_i)/k_i$.

Or, par hypothèse, si $n$ est assez grand, il existe $i$ tel que $v_{p_i}(P(r^n)) \geqslant M_i$.

On a donc montré qu'il existe des $n_i = (M_i - m_i)/k_i$ et un rang $n_0$ tels que :

Pour tout $n \geq n_0$, il existe $i$ et $j$ tels que $v_{p_i}(r^n - \alpha_{ij}) \geq n_i$. Remarquons que si $v_{p_i}(r^n - \alpha_{ij}) \geq n_i$ et $v_{p_i}(r^{n'} - \alpha_{ij}) \geq n_i$, alors $v_{p_i}(r^{n-n'} - 1) \geq n_i$, car $r$ est premier à $p_i$. Cette dernière inégalité implique que $n$ est congru à $n'$ modulo l'ordre de $r$ dans $\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$. Si on choisit $M_i$ (donc $n_i$) assez grand pour que cet ordre soit strictement supérieur à $N = \sum_i k_i$, on voit qu'il existe $N$ progressions arithmétiques de raisons strictement supérieures à $N$ telles que tout entier au moins égal à $n_0$ appartienne à l'une d'elles, ce qui est impossible.

<u>Lemme</u> A.2 - Soient $P \in \mathbb{Q}(X) - \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{Z} - \{0,1,-1\}$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $P(r^n)\gamma^n$ soit un entier algébrique. Alors :

(i) $P \in \mathbb{Q}[X,X^{-1}]$.

(ii) Si $a_0 = \inf\{a \in \mathbb{Z} \mid X^a P \in \mathbb{Q}[X]\}$, alors $r^{-a_0}\gamma^n$ est un entier algébrique.

Démonstration - Ecrivons $P$ sous la forme $C/D$ où $C$ et $D$ sont des éléments de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux. Il existe donc des polynômes $h$ et $k$ de $\mathbb{Z}[X]$, et un entier $l$ tels que $hC + kD = l$. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\gamma)$ divisant $D(r^n)$ et ne divisant pas $\gamma$, l'hypothèse montre que $\mathfrak{p}$ doit diviser $C(r^n)$, donc doit diviser $l$. Or, si $D$ n'est pas un monôme, d'après le lemme A.1, l'ensemble des facteurs premiers des $D(r^n)$ est infini. D'où une contradiction. Donc $P$ est un polynôme en $X$ et $1/X$. On a donc : $P(r^n)\gamma^n = r^{na_0}P(r^n)(r^{-a_0})^n$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier tel que la valuation $\mathfrak{p}$-adique de $r^{-a_0}$ soit inférieure à $-1$. Alors la valuation $\mathfrak{p}$-adique de $r^{na_0}P(r^n)$ est au moins égale à $n$. Or $X^{a_0}P = Q$ est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ à terme constant non nul. On a $Q(r^n) = rQ$ $Q(r^n) = rQ(r^{n-1}) + q_0(1-r)$. Donc la valuation $\mathfrak{p}$-adique de $q_0(1-r)$ est supérieure à $n-1$ pour tout $n$, ce qui est contradictoire. D'où le lemme.

<u>Lemme</u> A.3 - Soient $P_i$ $(i \in I)$ des polynômes de $\mathbb{Q}[X,X^{-1}]$, $(\gamma_i)_{i\in I}$ des réels positifs, et $r \in \mathbb{Z} - \{0,1,-1\}$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on ait :

$$\sum_{i\in I} P_i(r^n)^2 \ \gamma_i^n = 1 \quad ,$$

alors les $P_i$ sont des monômes, et $\gamma_i = r^{-2 \deg P_i}$ .

Démonstration - Dans la somme ci-dessus, regroupons les termes de la façon suivante : Nous dirons que $i$ est équivalent à $j$ si $\gamma_i$ et $\gamma_j$ diffèrent d'une puissance entière de $r$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence ; on a :

$$\sum_{c\in\mathcal{C}} \ \sum_{i\in c} \gamma_i^n \ P_i(r^n)^2 = 1 \qquad \text{pour tout } n \geq 1 \ .$$

Ceci implique, à cause de l'indépendance linéaire des caractères de $\mathbb{Z}$, que la somme sur chaque classe $c$ est nulle, sauf pour la classe où les $\gamma_i$ sont des puissances de $r$. Or, à une constante multiplicative près, la somme sur une classe est de la forme :

$$\sum_{i\in c} r^{nj_i} \ P_i(r^n)^2 \quad ,$$

où les $j_i$ sont des entiers. Une telle somme ne peut être nulle que si tous les $P_i$ $(i\in c)$ sont nuls. Donc il n'y a qu'une classe dans $\mathcal{C}$, et on peut poser $\gamma_i = r^{h_i}$. On a :

$$\sum_i r^{nh_i} \ P_i(r^n)^2 = 1 \quad , \qquad \text{pour tout } n \geq 1 \quad ,$$

ce qui n'est possible que si les $P_i$ sont des monômes. On a alors :

$$P_i(X) = a_i X^{-e_i} \quad \text{et} \quad h_i = 2e_i \quad , \text{ d'où le résultat.}$$

<u>Lemme</u> A.4 - L'anneau $\mathbb{Z}[X,Y,\sqrt{XY}]$ est intégralement clos.

Démonstration - Posons $Z = \sqrt{XY}$. Les anneaux $\mathbb{Z}[X, X^{-1}, Z]$ et $\mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, Z]$ sont intégralement clos. Montrons que leur intersection est $\mathbb{Z}[X, Y, \sqrt{XY}]$.
On a :

$$(1) \qquad \mathbb{Z}[X, X^{-1}, Z] = \mathbb{Z}[X, X^{-1}, Y] \oplus \mathbb{Z}[X, X^{-1}, Y] . Z \quad .$$

$$(2) \qquad \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, Z] = \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, X] \oplus \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, X] . Z \quad .$$

Il est clair que : $\mathbb{Z}[X, X^{-1}, Y] \cap \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, X] = \mathbb{Z}[X,Y]$, d'où, d'après (1) et (2) : $\mathbb{Z}[X, X^{-1}, Z] \cap \mathbb{Z}[Y, Y^{-1}, Z] = \mathbb{Z}[X,Y] \oplus \mathbb{Z}[X,Y].Z = \mathbb{Z}[X,Y, \sqrt{XY}]$.
L'anneau considéré est donc intégralement clos comme intersection d'anneaux intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[A] D. ALVIS Duality in the Character Ring of Finite Chevalley Groups. Proc. of Symposia in Pure Mathematics, vol.37 pp.353-357 .

[AS1] T. ASAI On the Zeta Functions of the Varieties X(w) of the Split Classical Groups and the Unitary Groups, Osaka Math. J. 20 (1983) pp.21-32 .

[AS2] " Unipotent Class Functions of Split Orthogonal Groups $SO^+_{2n}$ over Finite Fields. Communications in Algebra, 12 (1984) pp. 517-615.

[AS3] " The Unipotent Class Functions on the Symplectic and Odd Orthogonal Groups over Finite Fields. Communications in Algebra, 12 (1984) pp.617-645.

[AS4] " Unipotent Class Functions of Exceptionnal Groups over Finite Fields. Communications in Algebra, 12 (1984) pp.2729-2857.

[BBK1] N. BOURBAKI Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres IV, V, VI (Hermann).

[BBK2] " " " Algèbre, Chapitre VIII (Hermann).

[BC] C.T. BENSON C.W. CURTIS On the Degree and Rationality of Certain Characters of Finite Chevalley Groups. Transaction of the American Mathematical Society, 165 (1972) pp.251-273.

[BT] A. BOREL et J. TITS Groupes Réductifs. Publications Mathématiques de l'IHES n°27 (1965) pp.55-160 .

[C] C.W. CURTIS Truncation and Duality in the Character Ring of a Finite Group of Lie Type. J. of Algebra, 62 (1980) pp.320-332 .

[CH] B. CHANG The Conjugacy Classes of Chevalley Groups of Type $G_2$ . J. of Algebra 9 (1968) pp.190-211 .

[CHR] B. CHANG et R. REE — The Characters of $G_2(q)$. Symp. Math. 13, Gruppi Abeliani, Gruppi e loro Rappresent. Convegni 1972 pp.395-413 .

[CIK] C.W. CURTIS, N. IWAHORI, R. KILMOYER — Hecke Algebras and Characters of Parabolic Type of Finite Groups with (B,N) Pairs. Publ. Math. de l'IHES n°40 pp.81-116 .

[CR1] C.W. CURTIS, I. REINER — Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras (Interscience 1966).

[CR2] " " " — Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders, Volume I (Interscience 1981).

[D] M. DEMAZURE — Désingularisation des Variétés de Schubert Généralisées. Annales de l'ENS tome 7 (1974) pp.53-88 .

[DL] P. DELIGNE, G. LUSZTIG — Representations of Reductive Groups over Finite Fields. Annals of Math. 103 (1976) pp.103-161 .

[DL2] " " " — Duality for Representations of a Reductive Group over a Finite Field II. J. of Algebra 81 (1983) pp.540-545 .

[DM1] F. DIGNE et J. MICHEL — Descente de Shintani des Caractères d'un Groupe de Chevalley Fini. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t.291 (17 novembre 1980) pp.571-574 .

[DM2] " " " — Descente de Shintani des Caractères de Deligne-Lusztig. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t.291 (15 décembre 1980) pp.651-653 .

[DM3] " " " — Remarque sur la Dualité de Curtis. J. of Algebra 79 (1982) pp. 151-160 .

[DM4] " " " — Théorie de Deligne-Lusztig et Caractères des Groupes Linéaires et Unitaires. Publications de l'Equipe de la Théorie des Groupes Finis (ERA 944, Université Paris VII et ENSJF) février 1983 . A paraître au J. of Algebra.

[DM5] " " " — Nombre de Points Rationnels des Variétés de Deligne-Lusztig et Caractères de l'Algèbre de Hecke. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t.287 (6 novembre 1978) pp.811-814 .

[FR] J.S. FRAME The Classes and Representations of the Groups of 27 Lines and 28 Bitangents. Annali di Matematica 32 (1951) pp.83-169 .

[K1] N. KAWANAKA On the Irreducible Characters of Finite Unitary Groups. J. of Math. Society of Japan 29 (1977) pp.425-450 .

[K2] " " " Lifting of Irreducible Characters of Finite Classical Groups I. J. Faculty of Science, Univ. Tokyo 28 (1982) pp.851-861 .

[K3] " " " Lifting of Irreducible Characters of Finite Classical Groups II. Journal of the Faculty of Science Univ. of Tokyo 30 (1984) pp.499-516.

[L1] G. LUSZTIG Representations of Finite Chevalley Groups. CBMS Regional Conference Series in Math. n°39 AMS, 1978.

[L2] " " " Coxeter Orbits and Eigenspaces of Frobenius. Inventiones Math. 28 (1976) pp.101-159 .

[L3] " " " Characters of Reductive Groups over a Finite Field. Annals of Math. Studies 107 Princeton University Press.

[L4] " " " On the Finiteness of the Number of Unipotent Classes. Inventiones Math. 34 (1976) pp.201-213 .

[L5] " " " Unipotent Representations of a Finite Chevalley Group of Type $E_8$ . Quarterly Journal of Math. Oxford 30 (1979) pp.315-338 .

[L6] G. LUSZTIG Irreducible Representations of Finite Classical Groups. Inventiones Math. 43 (1977) pp.125-175 .

[L7] " " " Unipotent Characters of the Symplectic and Odd Orthogonal Groups over a Finite Field. Inventiones Math. 64 (1981) pp.263-296 .

[L8] " " " Unipotent Characters of the Even Orthogonal Groups Over a Finite Field. Transactions of the American Math. Society n°2 pp.733-751 .

[L9] " " " On the Unipotent Characters of the Exceptionnal Groups Over Finite Fields. Inventiones Math. 60 (1980) pp.173-192.

[LS] G. LUSZTIG et N.SPALTENSTEIN Induced Unipotent Classes. J. of the London Math. Society 19 (1979) pp.41-52.

[RO] G. C. ROTA Theory of Möbius Functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2 (1964) pp.340-368 .

[SB] A.BOREL et al. Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups. Lecture Notes in Mathematics n°131 (Springer).

[SGA] SGA 4½ et SGA 5 Cohomologie Etale, Lecture Notes in Math. n°569 ; Cohomologie l-adique et Fonctions L, Lecture Notes in Math.n°589.

[SH] T. SHINTANI Two Remarks on Irreducible Characters of Finite General Linear Groups. J. Math. Society of Japan 28 (1976) pp.396-414 .

[ST] B. SRINIVASAN Representations of Finite Chevalley Groups. Lecture Notes in Mathematics n°764 (Springer).

[ZH] A. ZHELEVINSKI Representations of Finite Classical Groups. Lecture Notes in Math. n°869 (Springer).