MÉMOIRES DE LA S. M. F.

WILFRID HODGES

Groupes nilpotents existentiellement clos de classe fixée

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 16 (1984), p. I-10
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__R1_0>

Société Mathématique de France
2° série, mémoire n° 16, 1984, p. 1-10

GROUPES NILPOTENTS EXISTENTIELLEMENT CLOS DE CLASSE FIXEE

Wilfrid Hodges

Résumé. *Nous démontrons que pour chaque $k \geqslant 2$, il y a une famille continupotente de groupes existentiellement clos nilpotents de classe k, telle que si* G *et* H *sont deux groupes distincts dans la famille, alors il existe une proposition du 1er ordre et de la forme* $\exists\forall\exists$, *qui est vraie dans* G *mais pas dans* H. *La forme* $\exists\forall\exists$ *est la meilleure possible.*

Summary. *We show that if $k \geqslant 2$, then there is a family of existentially closed nilpotent groups of class k which has the cardinality of the continuum, such that if* G *and* H *are two distinct groups in the family, then there is an* $\exists\forall\exists$ *first-order sentence which is true in* G *but not in* H. *The form* $\exists\forall\exists$ *is best possible.*

Soit $\mathcal{N}_k$ la classe des groupes nilpotents de classe k. On dit qu'un groupe $G \in \mathcal{N}_k$ est e.c. (pour existentiellement clos) dans $\mathcal{N}_k$ si pour tout groupe $H \in \mathcal{N}_k$ avec $G \subseteq H$, et tout système fini E d'équations et d'inéquations avec paramètres dans G, si E est satisfait dans H alors E est satisfait dans G.

THEOREME. Pour tout $k \geqslant 2$, il y a 2^ω groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$, G_α ($\alpha < 2^\omega$), tels que si $\alpha \neq \beta$, alors il existe une proposition ϕ de la forme $\exists\forall\exists$ qui est vraie dans G_α mais pas dans G_β. (La forme $\exists\forall\exists$ est $\exists\bar{x}\forall\bar{y}\exists\bar{z}\psi$ avec ψ sans quanteurs.)

On sait déjà: (1) Le théorème est vrai avec 2 pour 2^ω (Saracino [10]). (2) Il y a 2^ω groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$, G_α ($\alpha < 2^\omega$), tels que si $\alpha \neq \beta$ alors $G_\alpha \not\equiv G_\beta$ (Hodges [6]). (3) Si G, H sont e.c. dans $\mathcal{N}_k$, alors pour toute proposition ϕ de la forme $\forall\exists$, ϕ est vraie ou bien dans G et H, ou bien dans aucun des deux (cf. Prop. 1.14 dans Hirschfeld & Wheeler [5]). (Voir aussi Maier [9].) Le théorème remplit la lacune entre ces résultats. Au même temps sa démonstration

0037-9484/84 03 01 10/$ 3.00/

donne quelque substance algébrique au résultat (2).

Pour les groupes e.c., au lieu des groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$, le théorème au-dessus est un résultat bien connu de Belegradek [3] et Ziegler [12]. Pour les groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$ qui sont périodiques, le théorème est tout à fait faux. Il n'y a qu'un groupe dénombrable et périodique qui soit e.c. dans $\mathcal{N}_2$ (Theorem 3.5 de Saracino & Wood [11], cf. aussi Apps [1].

Nous procédons en deux coups. La première étape, c'est de bâtir 2^{ω} groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$ qui "représentent" différents ensembles d'entiers. Et puis au second coup nous trouvons des formules ϕ_X qui expriment qu'un ensemble X est représenté dans un groupe e.c. Nous écrivons G' pour le sousgroupe dérivé de G. $[x_1,\ldots,x_n]$ est le commutateur $[\ldots[x_1,x_2],x_3\ldots,x_n]$ de poids n. G*H est le produit libre de G et H dans le sens de $\mathcal{N}_k$. Pour plusiers détails je renvoie à Hodges [6]. Nous fixons $k \geqslant 2$.

1. Construction d'un ensemble continupotent de groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$

LEMME 1. Soient p un nombre premier, $G \in \mathcal{N}_k$ et b un élément de G. Alors (a), (b) sont équivalents:

(a) Il y a un groupe $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$, avec des éléments $h_2, \ldots, h_k$ tels que $[b,h_2,\ldots,h_k] \neq 1$ et $h_k^p = 1$.

(b) Dans G il n'y a pas d'élément a tel que $a^pb^{-1} \in G'$.

Démonstration. Soit F le groupe k-nilpotente libre de générateurs $x_2, \ldots, x_{k-1}$. Considérons $K = G*F*Z_p$, où x_k engendre le groupe cyclique Z_p d'ordre p. La condition (a) est équivalente à

$$(1) \qquad [b,x_2,\ldots,x_k] \neq 1.$$

Supposons d'abord que (b) soit fausse. Prenant a tel que $a^pb^{-1} = c \in G'$, nous avons par les lois de $\mathcal{N}_k$:

$$[b,x_2,\ldots,x_k] = [c^{-1}a^p,x_2,\ldots,x_k] = [a,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k^p] = 1,$$

qui contredit (1). Puis supposons que (1) soit fausse. Alors d'après des faits connus sur $\mathcal{N}_k$, puisque aucun des $x_2, \ldots, x_k$ n'est de la forme y^p modulo K', b est de cette forme modulo G'. (Cf. Lemma 2(a) de Hodges [6].) □

D'après le lemme 1, nous avons:

LEMME 2. Soit G e.c. dans $\mathcal{N}_k$, soit b un élément de G et soit p un nombre premier. Alors les conditions suivantes sont équivalents:

(a) b est de la forme a^p modulo G'.

(b) $G \models \forall x_2 \ldots x_k (x_k^p = 1 \rightarrow [b, x_2, \ldots, x_k] = 1)$. □

Maintenant soient $G \in \mathcal{N}_k$, b un élément de G et X un ensemble de nombres premiers. Nous disons que b <u>représente</u> X dans G si pour tout nombre premier p,

(2) $p \in X \Rightarrow$ b est de la forme a^p modulo G', et

(3) $p \notin X \Rightarrow$ il y a $h_2, \ldots, h_k \in G$ avec $h_k^p = 1$ et $[b, h_2, \ldots, h_k] \neq 1$.

Puisque les seconds membres de (2), (3) sont existentielles, il est clair que si b représente X dans G, alors b représente X aussi dans chaque $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$.

L'ensemble X de nombres premiers étant donné, nous construisons un groupe G_X avec un élément g_1^X qui représente X, comme suit. Soit Q_X le groupe des nombres rationnels q tels que si un nombre premier p divise le dénominateur de q, alors $p \in X$. Soit g_1^X le nombre 1 dans Q_X. Soit F le groupe libre $\in \mathcal{N}_k$ sur k-1 générateurs $g_2^X, \ldots, g_k^X$. (Les éléments $g_2^X, \ldots, g_{k-1}^X$ suffisent ici, mais on a besoin de g_k^X plus tard.) Soit B_X le groupe $\bigoplus\{Z_p : p \text{ premier} \notin X\}$. Alors G_X sera $Q_X * F * B_X$. On voit que g_1^X représente X dans G_X (c'est le Lemma 5 de Hodges [6]).

Notre but est de construire un groupe e.c. dans $\mathcal{N}_k$, dans lequel certains ensembles récursifs de nombres premiers sont représentés, et certains autres ne le sont pas. Pour ceci nous employons le forcing fini de Abraham Robinson (Barwise & Robinson [2]), pour omettre les ensembles que nous voulons laisser. Il faut ajouter quelques items aux définitions de Barwise & Robinson. Par exemple, dans le forcing correspondant à une théorie T, si ϕ_i $(i < \omega)$ sont des propositions universelles du premier ordre, alors une condition π force $\bigwedge_{i<\omega} \phi_i$ ssi $T \cup \pi \vdash \phi_i$ pour tout $i < \omega$. (Pour justifier cela, et pour d'autres faits sur le forcing que nous ne démontrons pas ici, voir Hodges [7] ou Ziegler [12].) Nous écrivons A pour le modèle construit par forcing.

Soit E un ensemble dénombrable d'ensembles infinis de nombres premiers. Nous écrivons G_E pour la somme directe $\bigoplus\{G_X : X \in E\}$. Alors G_E est dénombrable. Soit Δ_E le diagramme de G_E, et soit T la théorie de $\mathcal{N}_k$.

LEMME 3. Dans le forcing correspondant à $T \cup \Delta_E$, la condition $\emptyset$ force que le modèle A construit soit un groupe e.c. dans $\mathcal{N}_k$ contenant G_E comme sousgroupe. □

Or, grâce aux lemmes 2, 3, la propriété "c est de la forme a^p modulo A'" équivaut (pour A) à

$$\forall x_2 \ldots x_k (x_k^p = 1 \rightarrow [c, x_2, \ldots, x_k] = 1). \tag{4}$$

On remarque que (4) est une proposition universelle, et de là, si π est une condition de forcing qui force (4), alors $T \cup \Delta_E \cup \pi$ l'implique. Le même est vrai pour la propriété "c n'est pas de la forme a^p modulo A'", utilisant un nombre infini de propositions universelles.

LEMME 4. Dans le forcing correspondant à $T \cup \Delta_E$, soit c une constante de forcing (un témoin), soit π une condition, et soit Y un ensemble infini de nombres premiers, tel qu'il existe une infinité de nombres premiers $\notin$ Y. Alors si π force "c représente Y", il y a $X \in E$ tel que $Y \setminus X$ soit fini.

<u>Démonstration</u>. Soient c, $d_1, \ldots, d_m$ les constantes de forcing qui apparaissent dans π. Soit K le groupe $\in \mathcal{N}_k$ présenté par l'ensemble d'equations dans $\Delta_E \cup \pi$. Puisque π est une condition, $T \cup \Delta_E \cup \pi$ a un modèle, d'où $\Delta_E \cup \pi$ toute entière est vérifiée dans K. Alors $G_E \subseteq K$ sans perte de généralité, et K est engendré sur G_E par c, $d_1, \ldots, d_m$. Or pour chaque $p \in Y$, soit θ_p la proposition (4). Alors $T \cup \Delta_E \cup \pi \vdash \theta_p$, d'ou nous deduirons que si $H \supseteq K$, $H \in \mathcal{N}_k$, alors $H \models \theta_p$ aussi. D'après le lemme 1 il suit que c est de la forme a^p modulo K' pour chaque $p \in Y$. Mais pareillement si q est un nombre premier $\notin Y$, alors c n'est pas de la forme a^q modulo K'.

Passons maintenant à K/K'. Soit a^* l'image dans K/K' d'un élément a de K. Alors K/K' est un groupe abélien finiment engendré sur G_E/G_E' par les generateurs $c^*, d_1^*, \ldots, d_m^*$. Puisqu'il y a une infinité de nombres premiers qui ne divisent pas c^* dans K/K', c^* est d'ordre infini. Dans $(K/K')/(G_E/G_E')$, qui est une somme directe finie de groupes cycliques, l'image de c^* est divisible par une infinité de nombres premiers. Alors il existe j tel que $jc^* \in G_E/G_E'$.

Or, par la construction de G_E, il y a des ensembles $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$, des entiers $\ell_1, \ldots, \ell_n \leq k$, et un element t d'ordre fini, tels que

$$jc^* = \alpha_1 g_{\ell_1}^{X_{i_1}} + \ldots + \alpha_n g_{\ell_n}^{X_{i_n}} + t \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Puisque jc^* est d'ordre infini, $n \geq 1$; nous prenons n aussi petit que possible. Considérons $p \in Y$ tel que p ne divise pas l'ordre de t. Si $p \notin X_{i_1}$, alors par la construction de G_E, il y a des éléments $h_2, \ldots, h_k$ tels que $h_k^p = 1$ et $[c^j, h_2, \ldots, h_k] \neq 1$. Par le lemme 1, ce contredit le fait que p divise jc^* dans K/K'. On déduit que $p \in X_{i_1}$. Donc $Y \setminus X_{i_1}$ est fini. □

Soit $\{P_n : n < \omega\}$ une partition de l'ensemble des nombres premiers en ensembles recursifs infinis. On sait qu'il existe une famille $\{S_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ de sous-ensembles S_α de ω, telle que si $\alpha \neq \beta$ alors $S_\alpha \setminus S_\beta \neq \emptyset$. Pour chaque $\alpha < 2^\omega$, soit E_α l'ensemble de tous P_n avec $n \in S_\alpha$. Dans le forcing relatif à $T \cup \Delta_{E_\alpha}$, il résulte des lemmes 3, 4 (et de faits standards sur le forcing) que nous avons un groupe G_α e.c. dans $\mathcal{N}_k$, qui contient G_{E_α} comme sousgroupe, et dans lequel aucun des ensembles P_n ($n \notin S_\alpha$) n'est représenté par un élément.

On peut ajouter: les groupes G_α ($\alpha < 2^\omega$) sont dénumerables, et si $\alpha \neq \beta$ alors G_α n'est pas isomorphe à aucun sousgroupe de G_β.

2. Propositions exprimant la différence entre les groupes

Il nous faut trouver, pour chaque ensemble récursif Y de nombres premiers, une proposition ϕ_Y qui exprime que "L'ensemble Y est représenté dans le groupe". Nous réussirons à le faire pour les groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$ et avec une notion de représentation qui est légèrement plus forte qu'auparavant. La clé en est l'interprétation de l'arithmétique dans les groupes nilpotents, due à Mal'cev [8].

Comme dans Hodges [6], un k-<u>uple de Mal'cev</u> dans le groupe $G \in \mathcal{N}_k$ est un k-uple $g_1, \ldots, g_k$ d'éléments de G, tel que $[g_1, \ldots, g_k]$ est d'ordre infini. Nous disons que le k-uple de Mal'cev $g_1, \ldots, g_k$ <u>représente</u> l'ensemble Y si g_1 le représente.

LEMME 5. Pour les groupes G_α définis dans la section 1, on a pour chaque ensemble P_n de nombres premiers: $n \in S_\alpha$ ssi il existe un k-uple de Mal'cev dans G_α qui représente P_n.

<u>Démonstration</u>. Dans la construction de G_α, le sousgroupe G_X contient un k-uple de Mal'cev, $g_1^X, \ldots, g_k^X$, qui représente X. (C'est ici qu'on utilise g_k^X;

voir Lemma 2(b) de Hodges [6] pour la preuve que c'est un k-uple de Mal'cev.) Le reste est clair. □

LEMME 6. Soit G un groupe e.c. dans $\mathcal{N}_k$, et soit g un élément de G. Sont équivalents:

(a) g est d'ordre infini modulo G'.

(b) $G \models \forall y_1 \ldots y_k \exists z_1 \ldots z_{k-1}\ [y_1,\ldots,y_k] = [z_1,\ldots,z_{k-1},g]$.

<u>Démonstration</u>. Voir Lemma 4 de Hodges [6]. □

LEMME 7. Soit G un groupe e.c. dans $\mathcal{N}_k$, et soient g, h des éléments de G. Sont équivalents:

(a) g est une puissance de h modulo G'.

(b) $G \models \forall y_1 \ldots y_{k-1}([y_1,\ldots,y_{k-1},h] = 1 \rightarrow [y_1,\ldots,y_{k-1},g] = 1)$.

<u>Démonstration</u>. Voir Lemma 3 de Hodges [6]. □

LEMME 8. Il y a une formule $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ de la forme $\forall\exists$ telle que pour tout groupe G e.c. dans $\mathcal{N}_k$ et tous éléments $g_1, \ldots, g_k$ de G, $g_1, \ldots, g_k$ est un k-uple de Mal'cev ssi $G \models \psi(g_1,\ldots,g_k)$.

<u>Démonstration</u>. $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ dit que:

(x_1 est d'ordre infini modulo G') $\wedge$ $\forall y$(y est une puissance de x_1 modulo G' $\wedge$ $[y,x_2,\ldots,x_k] = 1 \rightarrow y \in G'$).

C'est de la forme $\forall\exists \wedge \forall y(\forall \rightarrow \forall)$, c'est-a-dire $\forall\exists$. □

Etant donné un k-uple de Mal'cev $g_1, \ldots, g_k$ dans un groupe G e.c. dans $\mathcal{N}_k$, nous interprétons l'anneau Z des entiers, en interprétant n comme g_1^n, de la manière suivante:

(6) $\|x \in Z\| \equiv$ (x est puissance de g_1 mod G') $(\forall)$

(7) $\|x = n\| \equiv (xg_1^{-n} \in G')$ $(\forall)$

(8) $\|x+y = z\| \equiv (xyz^{-1} \in G')$ $(\forall)$

(9) $\|x.y = z\| \equiv \exists w$(w est puissance de g_k modulo G' $\wedge\ [x,g_2,\ldots,g_k] = [g_1,g_2,\ldots,g_{k-1},w]$ $\wedge\ [z,g_2,\ldots,g_k] = [y,g_2,\ldots,g_{k-1},w]$) $(\exists\forall)$

D'apres le théorème de Matiyasevič (cf. par ex. Chapter 6 de Bell & Machover [4]), si Y est un ensemble récursivement énumerable d'entiers, alors il y a une formule $\theta_Y(x)$ de la forme

$$(\exists y_1 \in Z)\ldots(\exists y_m \in Z)\ \theta'(x,y_1,\ldots,y_m),$$

ou θ' est une conjonction de formules de la forme $x = n$, $x+y = z$ ou $x.y = z$, et pour tout $n \in Z$, $n \in Y$ ssi $\theta_Y(n)$ est vraie dans Z. Interprétant θ_Y par (6)-(9), nous avons

(10) $\qquad \|x \in Y\| \equiv$ une formule $\chi_Y(x)$ de la forme $\exists\forall$.

Finalement nous avons besoin de formules $\psi(g_1,x)$ qui expriment que "$(g_1)^{1/p}$ existe modulo G', où x est l'interprétation du nombre premier p", de la forme $\exists\forall$ et aussi de la forme $\forall\exists$. La forme $\exists\forall$ n'offre aucune difficulté:

(11)
$$\begin{aligned}&\exists y(g_1 \text{ est puissance de } y \bmod G' \wedge \exists w(w \text{ est puissance de } g_k \bmod G'\\ &\quad\wedge [x,g_2,\ldots,g_k] = [g_1,\ldots,g_{k-1},w]\\ &\quad\wedge [g_1,\ldots,g_k] = [y,g_2,\ldots,g_{k-1},w])).\end{aligned}$$

Pour la forme $\forall\exists$ nous utilisons le lemme qui suit:

LEMME 9. Soit G un groupe e.c. dans $\mathfrak{N}_k$ et soient a, $b_1, \ldots, b_k$, c des éléments de G, tels que a est d'ordre infini modulo G'. Alors sont équivalents:

(a) Pour tout entier n, si $[b_1,\ldots,b_k]^n = 1$ alors $c.a^{-n} \notin G'$.

(b) $G \models \exists w_2\ldots w_k([a,w_2,\ldots,w_k] = [b_1,\ldots,b_k] \wedge [c,w_2,\ldots,w_k] \neq 1)$.

<u>Démonstration.</u> (b) implique (a) par multilinearité des commutateurs $[x_1,\ldots,x_k]$ dans $\mathfrak{N}_k$. Pour la réciproque, supposons (a); puisque G est e.c. dans $\mathfrak{N}_k$, il suffit de trouver un groupe $H \supseteq G$, $H \in \mathfrak{N}_k$, avec des éléments $w_2, \ldots, w_k$ comme dans (b). Soit F le groupe $\in \mathfrak{N}_k$ libre de générateurs $x_2, \ldots, x_k$. Dans G*F, soit N le sousgroupe normal engendré par $[a,x_2,\ldots,x_k][b_1,\ldots,b_k]^{-1}$. Il faut montrer que $G\cap N = \{1\}$, et que $[c,x_2,\ldots,x_k] \notin N$.

Tous les éléments de N ont la forme

(12) $$([a,x_2,\ldots,x_k][b_1,\ldots,b_k]^{-1})^m \qquad (m \in Z)$$

puisque les commutateurs de poids k sont centraux. Supposons que (12) soit égal à un élément h de G. Alors $[a,x_2,\ldots,x_k]^m \in G$, ça qui implique que $[a,x_2,\ldots,x_k]^m = 1$ (envoyez $x_2, \ldots, x_k$ sur 1). Puisque a est d'ordre infini modulo G', m = 0 (voir Lemma 2(b) de Hodges [6]), et alors h = 1 comme demandé.

Maintenant supposons que $[c,x_2,\ldots,x_k] = ([a,x_2,\ldots,x_k][b_1,\ldots,b_k]^{-1})^m$. Alors $[b_1,\ldots,b_k]^m = [a^m c^{-1},x_2,\ldots,x_k]$, et comme ci-dessus on déduit que $[a^m c^{-1},x_2,\ldots,x_k] = 1$, d'où $a^m c^{-1} \in G'$ (voir Lemma 2 de Hodges [6]). Par (a), cela implique que $[b_1,\ldots,b_k]^m \neq 1$; contradiction. □

En conséquence nous avons une formule de la forme ∀∃ qui équivaut a (11) dans le groupe G e.c. $\in \mathfrak{N}_k$ avec le k-uple de Mal'cev $g_1, \ldots, g_k$. D'après le lemme 2 et les lois de $\mathfrak{N}_k$, nous pouvons exprimer (11) comme

(13) $$\bigwedge_{m\in Z}(xg_1^{-m} \in G' \to \forall y_2\ldots y_k(y_k^m \in G' \to [g_1,y_2,\ldots,y_k] = 1)).$$

Arrangée de nouveau, ce devient:

(14) $$\forall y_2\ldots y_k(\bigwedge_{m\in Z}(y_k^m \in G' \to xg_1^{-m} \notin G') \vee [g_1,y_2,\ldots,y_k] = 1),$$

ou en utilisant le lemme 7 et les lois de $\mathfrak{N}_k$,

(15) $$\forall y_2\ldots y_k(\exists z_1\ldots z_{k-1}\bigwedge_{m\in Z}([z_1,\ldots,z_{k-1},y_k]^m = 1 \to xg_1^{-m} \notin G') \vee [g_1,y_2,\ldots,y_k] = 1).$$

D'apres le lemme 9, la conjonction infinie dans (15) peut être remplacée par une formule existentielle, ce qui donne une forme ∀∃ pour (11).

Finalement nous exprimons, pour chaque ensemble récursif Y de nombres premiers, que $g_1, \ldots, g_k$ est un k-uple de Mal'cev dans lequel g_1 représente Y:

(16) $$(g_1,\ldots,g_k \text{ est un k-uple de Mal'cev}) \wedge \forall x(\|x \text{ est premier}\| \to ((11) \to \|x \in Y\|) \wedge (\neg\|x \in \omega\setminus Y\| \to (15))).$$

Par (10) et le lemme 8, c'est une formule $\phi'_Y(g_1,\ldots,g_k)$ de la forme ∀∃. Alors la proposition $\exists y_1\ldots y_k\phi'_Y(y_1,\ldots,y_k)$ exprime qu'il y a un k-uple de Mal'cev qui représente Y, et cette proposition ϕ_Y est de la forme ∃∀∃.

Par la construction de la section 1, il y a une famille $\{G_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$

de groupes e.c. dans $\mathfrak{N}_k$, telle que si $\alpha \neq \beta$ alors il existe Y tel que $G_\alpha \models \phi_Y$ et $G_\beta \models \neg\phi_Y$. Le théorème est démontré.

Il y a des questions naturelles.

(1) Quels sont les ensembles E d'ensembles de nombres premiers, tels qu'il existe un groupe G e.c. dans $\mathfrak{N}_k$, pour quel E est l'ensemble des ensembles de nombres premiers qui sont représentés (par des k-uples de Mal'cev) dans G?

(2) Peut-on caractériser un groupe G denombrable e.c. dans $\mathfrak{N}_k$ par les ensembles de nombres premiers qui sont représentés (a) par des éléments et (b) par des k-uples de Mal'cev dans G? Si non, alors quelle information complémentaire est nécessaire pour caractériser G?

J'exprime mes remerciements à Gabriel Sabbagh et aux autres organisateurs de la table ronde de logique à Paris (Octobre 1983); au British Council qui a soutenu une visite à Paris; et à Bruno Poizat pour ses corrections linguistiques (ce qui était très nécessaire).

REFERENCES

[1] A. B. Apps, On $\aleph_0$-categorical class two groups, J. Algebra 82 (1983) 516-538.

[2] Jon Barwise & Abraham Robinson, Completing theories by forcing, Ann. Math. Logic 2 (1970) 119-142.

[3] O. B. Белеградек (O. V. Belegradek), Элементарные свойства алгебраически замкнутых групп, Fundamenta Math. 98 (1978) 83-101.

[4] J. L. Bell & M. Machover, A course in mathematical logic, North-Holland, Amsterdam 1977.

[5] Joram Hirschfeld & William H. Wheeler, Forcing, Arithmetic, Division rings, Lecture Notes in Mathematics 454, Springer, Berlin 1975.

[6] Wilfrid Hodges, Interpreting number theory in nilpotent groups, Arch. Math. Logik Grundlag. 20 (1980) 103-111.

[7] Wilfrid Hodges, Building models by games, Cambridge U.P. (à apparaître).

[8] A. I. Mal'cev, A correspondence between rings and groups, dans The metamathematics of algebraic systems, collected papers, North-Holland, Amsterdam 1971, pp. 124-137.

[9] Berthold Maier, On existentially closed and generic nilpotent groups (à apparaître).

[10] D. Saracino, Existentially complete nilpotent groups, Israel J. Math. 25 (1976) 241-248.

[11] Dan Saracino & Carol Wood, Periodic existentially closed nilpotent groups, J. Algebra 58 (1979) 189-207.

[12] Martin Ziegler, Algebraisch abgeschlossene Gruppen, dans Word Problems II, The Oxford Book, ed. S. I. Adian et al., North-Holland, Amsterdam 1980, pp. 449-576.

Wilfrid Hodges
Bedford College
Regent's Park

LONDON NW1 4NS