MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOISE DELON

Corps équivalents à leur corps de séries

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 16 (1984), p. 95-103
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__95_0>

Société Mathématique de France
2° série, mémoire n° 16, 1984, p.95-103

CORPS ÉQUIVALENTS A LEUR CORPS DE SÉRIES

Françoise Delon

Les équivalences élémentaires qui suivent se réfèrent au langage $\{0,1,+,.\}$. Si K est un corps de caractéristique nulle, dès qu'on a $K \equiv K((X))$, le théorème d'Ax-Kochen-Eršov implique $K \equiv K((X_1))\ldots((X_p))$ pour tout entier $p\geq 1$. Nous montrons ici la réciproque de ce résultat:

Théorème. Si K est un corps de caractéristique 0 et si pour un entier $p\geq 1$, on a $K((X_1))\ldots((X_p)) \equiv K$, on a alors $K \equiv K((X))$.

On montre aussi que, sous les mêmes hypothèses, si on considère K comme corps de constantes de son corps de séries $K((X))$, K est existentiellement clos dans $K((X))$.

Des résultats de même nature et plus complets sont exposés dans [D] mais le cadre plus général y complique sensiblement les preuves; au contraire on a essayé de donner ici des démonstrations élémentaires, ne faisant appel qu'à peu de connaissances extérieures. Ainsi on n'utilise des travaux de Gurevič sur les groupes abéliens ordonnés qu'un corollaire, dont on donne une preuve directe - qui m'a été indiquée par Peter Schmitt - et on fait sur la théorie des valuations les rappels nécessaires à la compréhension de cet exposé.

1. Groupes abéliens ordonnés (g.a.o.)

Dans cette catégorie, les sous-groupes convexes jouent un rôle essentiel (une partie A d'un ordre I est convexe lorsque $a,b \in A$, $i \in I$ et $a < i < b$ impliquent $i \in A$): si H est un sous-groupe convexe d'un g.a.o. G, les classes modulo H sont convexes et sont donc naturellement ordonnées par la relation

$$x/H < y/H \quad \text{ssi} \quad (x \not\equiv y \text{ (modulo H) et } x < y).$$

Si G_1 et G_2 sont deux g.a.o. on appelle produit lexicographique de G_1 et G_2 le

0037-9484/84 03 95 09/$ 2.90/ © Gauthier-Villars

groupe produit $G_1 \times G_2$ muni de l'ordre

$$(x_1,x_2) < (y_1,y_2) \quad \text{ssi} \quad x_1 < y_1 \quad \text{ou} \quad (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2)$$

pour $x_1, y_1 \in G_1$ et $x_2, y_2 \in G_2$; le plongement canonique de G_2 dans le g.a.o. $G_1 \times G_2$ en fait un sous-groupe convexe et on a un isomorphisme de g.a.o. entre G_1 et $(G_1 \times G_2)/G_2$; ce produit lexicographique est associatif. Plus généralement, pour un bon ordre I et des g.a.o. G_i , $i \in I$, le produit lexicographique $\dot{\prod}_{i \in I} G_i$ s'obtient en munissant le groupe produit de l'ordre

$$(x_i)_{i \in I} < (y_i)_{i \in I} \quad \text{ssi} \quad x_{i_\circ} < y_{i_\circ}$$

où $i_\circ$ est le premier indice i tel que $x_i \neq y_i$; si les I_j , $j \in J$, recouvrent I, sont disjoints, convexes pour l'ordre de I et vérifient $I_j < I_{j'}$ ssi $j < j'$, alors (J et les I_j sont bien ordonnés et) on a un isomorphisme de g.a.o.

$$\dot{\prod}_{i \in I} G_i = \dot{\prod}_{j \in J} \left(\dot{\prod}_{i \in I_j} G_i \right) .$$

Les sous-groupes convexes d'un produit $\dot{\prod}_{i \in I} G_i$ sont les sous-groupes de la forme $\dot{\prod}_{i < i_\circ} \{0\} \times H_{i_\circ} \times \dot{\prod}_{i > i_\circ} G_i$, pour un $i_\circ \in I$ et un sous-groupe convexe $H_{i_\circ}$ de $G_{i_\circ}$. Le produit lexicographique est un cas simple du produit de Hahn explicitement donné par Feferman et Vaught comme exemple de produit auquel s'applique leur principe de transfert d'équivalence élémentaire ([FV] exemple 4.9); en conséquence $G_i \equiv G'_i$ pour tout $i \in I$, implique $\dot{\prod}_{i \in I} G_i \equiv \dot{\prod}_{i \in I} G'_i$, ces équivalences étant dans le langage des groupes ordonnés.

<u>Lemme</u> 1. [Gu]. Soit H un sous-groupe convexe d'un g.a.o. G ; alors les g.a.o. G et $(G/H) \times H$ sont élémentairement équivalents.

Démonstration. Il est connu que, dès qu'un groupe abélien est ω_1-saturé, il est facteur direct dans toute extension où il est pur (H pur dans G signifie ici $nG \cap H = nH$ pour tout entier n), voir [Sa] ou [Sh] . Dans un g.a.o. un sous-groupe convexe est toujours pur, donc si on prend un couple $H' \subset G'$ équivalent au couple $H \subset G$ dans le langage $\{0,+,<,H\}$ et ω_1-saturé, les groupes $(G'/H') \times H'$ et G' sont isomorphes; on vérifie immédiatement que cet isomorphisme respecte aussi l'ordre si l'on munit G'/H' de l'ordre quotient (H' reste convexe dans G') puis $(G'/H') \times H'$ de l'ordre produit. Par notre choix de G' et H', H et H' d'une part, G/H et G'/H' d'autre part, sont des g.a.o. équivalents; par Feferman et Vaught, on en déduit $(G/H) \times H \equiv (G'/H') \times H'$; ce dernier g.a.o. est isomorphe à G', lui-même équivalent à G, d'où $(G/H) \times H \equiv G$.

<u>Définition</u>. Pour $i \leq \omega$, appelons i-<u>groupe</u> un g.a.o. G admettant une famille $(G_n)_{n \leq i}$ de sous-groupes convexes vérifiant

$G_\circ = G$, $G_i = \{0\}$

pour chaque $n \in i$, $G_n \supset G_{n+1}$ et $G_n/G_{n+1} \equiv \mathbb{Z}$

. si $i = \omega$, alors $\bigcap_{n\in i} G_n = \{0\}$.

Exemple. $\mathbb{Z}^i$.

Lemme 2. Pour $i \in \omega$, G est un i-groupe ssi $G \equiv \mathbb{Z}^i$; les i-groupes constituent donc une classe élémentaire complète.

Démonstration. Soient $(G_n)_{0\le n\le i}$ les sous-groupes convexes de $\mathbb{Z}^i$, avec $G_n \cong \mathbb{Z}^{i-n}$; nous montrons d'abord que chaque G_n est définissable dans $\mathbb{Z}^i$. Considérons le sous-ensemble G(a) définissable avec le paramètre a

$$G(a) = \{ x \; ; -a < 2x < a \}$$

et le prédicat H

$$H(a) \leftrightarrow [\ G(a) \text{ est un groupe }]$$

Prenons $a \in \mathbb{Z}^i$, $\mathbb{Z}^i \models H(a)$ (par exemple $a \equiv 1$ (modulo G_{n+1}) pour un $n<i$); soit $n \in \{0,\dots i-1\}$ tel que $a \in G_n - G_{n+1}$; G(a) est alors un sous-groupe convexe propre de G_n contenant G_{n+1} donc $G(a) = G_{n+1}$. L'élimination des paramètres se fait sans difficulté: on a l'équivalence, pour $1 \le n \le i$, $x \in G_n$ ssi $\mathbb{Z}^i \models \psi_n(x)$ où $\psi_n(x)$ est la formule

$$\exists\, a_1,\dots a_i \ \bigwedge_{j=1}^{i} H(a_j) \wedge [\ G(a_1) \supsetneq G(a_2) \supsetneq \dots \supsetneq G(a_i)\ ] \wedge [\ x \in G(a_n)\ ].$$

Soit maintenant $G \equiv \mathbb{Z}^i$; alors G contient i+1 sous-groupes convexes définissables, lui-même et les sous-groupes définis par les ψ_n , $1 \le n \le i$; si $G_n = \{ x \; ; G \models \psi_n(x) \}$, on a $G_{n+1}/G_n \equiv \mathbb{Z}$, ce qui prouve que G est un i-groupe.

La réciproque se montre par récurrence sur i,

- si $i = 1$, par définition, un i-groupe est un g.a.o. équivalent à $\mathbb{Z}$,
- si $i > 1$, G_1 est un (i-1)-groupe, donc équivalent à $\mathbb{Z}^{i-1}$ par hypothèse d'induction; par le lemme 1 on a $G \equiv (G/G_1)\times G_1 \equiv \mathbb{Z}\times G_1$ (par Feferman-Vaught) $\equiv \mathbb{Z}^i$.

Remarque. Cette propriété ne s'étend pas aux ω-groupes: deux ω-groupes ne sont en général pas équivalents et un g.a.o. équivalent à un ω-groupe n'en est pas nécessairement un. On peut néanmoins faire la remarque suivante: si G est un ω-groupe et $(G_n)_{n\in\omega}$ ses sous-groupes convexes correspondants ordonnés comme précédemment, chaque G_n est définissable: $x \in G_n$ ssi $G \models \chi_n(x)$ où $\chi_n(x)$ est la formule ($0 < n < \omega$)

$$\exists\, a_1,\dots a_n \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{i=1}^{n} H(a_i) \wedge [\ G \supsetneq G(a_1) \supsetneq \dots \supsetneq G(a_n)\ ] \\ \wedge\ \forall a \left[[H(a) \wedge [G(a) \supset G(a_n)]] \rightarrow \bigvee [G(a) = G(a_i)] \right] \\ \wedge\ [x \in G(a_n)] \end{array} \right.$$

et pour un g.a.o. G' équivalent à G, si $\chi_n(G')$ est l'interprétation de χ_n dans G', les χ_n constituent une famille de sous-groupes convexes emboîtés, le quotient de deux termes successifs étant équivalent à $\mathbb{Z}$; donc si on pose $H = \bigcap_{n\in\omega} \chi_n(G')$, G'/H est un ω-groupe.

Proposition 1. [O]. Si G est un g.a.o. vérifiant $\mathbb{Z}^p \times G \equiv G$ pour un entier $p > 0$, on a $\mathbb{Z} \times G \equiv G$.

Démonstration. Avec ces hypothèses, il existe un ultrafiltre U qu'on peut prendre dénombrablement incomplet, pour lequel on a un isomorphisme de g.a.o. entre $(\mathbb{Z}^p \times G)^U$ et G^U, c'est-à-dire entre $(\mathbb{Z}^p)^U \times G^U$ et G^U. Cela permet de construire une chaîne $(G_n)_{n\in\omega}$ de sous-groupes convexes de G^U et des sous-groupes Z_n de G^U vérifiant, en tant que g.a.o.

$$G_n \cong G^U$$
$$G_n = Z_n \times G_{n+1}$$
$$Z_n \cong (\mathbb{Z}^p)^U .$$

Chaque G_n est définissable: on a $G_n = G(a)$ pour un $a \in G$ comme dans la preuve du lemme 2; $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ est un sous-groupe convexe de G et, par le lemme 1, on a

$$G^U \equiv (G^U/\cap G_n) \times (\cap G_n) ;$$

l'application qui à $g \in G^U$ associe $(g_n)_{n\in\omega} \in \Pi Z_n$ définie par les relations, pour tout entier n,

$$g \equiv g_1 + g_2 + \ldots + g_n \ (\text{modulo } G_n)$$

est surjective par ω_1-saturation de G^U et définissabilité des G_n ; elle a pour noyau $\cap G_n$, donc

$$G^U/\cap G_n \equiv \Pi Z_n \cong ((\mathbb{Z}^p)^U)^\omega \equiv (\mathbb{Z}^p)^\omega \cong \mathbb{Z}^\omega$$
$$G^U \equiv \mathbb{Z}^\omega \times (\cap G_n) \cong \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}^\omega \times (\cap G_n)) \equiv \mathbb{Z} \times G^U$$

et enfin $G \equiv \mathbb{Z} \times G$.

2. Application aux corps valués

Une référence agréable est le livre de P. Ribenboim [R].

a) Si (K,v) est un corps valué, la connaissance de l'anneau de valuation A_v permet de récupérer v : le groupe vK est le quotient du groupe multiplicatif K^* de K par le sous-groupe des unités U_{A_v} de A_v et v est la projection canonique de K^* sur K^*/U_{A_v}. On définit sur l'ensemble V(K) des valuations sur K un ordre: pour u,v dans V(K), on pose

$$v \leq w \ (\text{"w plus fine que v"}) \text{ ssi } A_v \supset A_w .$$

Dans une telle situation, si on note M_v l'idéal maximal de A_v, on a

$$M_v \subset M_w \subset A_w \subset A_v ,$$

M_v est un idéal premier de A_w et A_v est le localisé de A_w en M_v. Réciproquement si P est un idéal premier de A_w, le localisé de A_w en P est l'anneau d'une valuation w_P sur K plus grossière que w . On met ainsi en bijection les ensembles ordonnés suivants, si $w \in V(K)$ est fixée:

- l'ensemble des valuations sur K moins fines que w , muni de l'ordre de finesse
- les idéaux premiers de A_w ordonnés par l'inclusion.

Dans un anneau de valuation les idéaux sont totalement ordonnés par l'inclusion; en conséquence, dans $(V(K),\leq)$ l'ensemble des minorants d'un élément est totalement ordonné, on dit que $(V(K),\leq)$ est un arbre. Remarquons aussi que dans cet ensemble il y a des bornes inférieures: soient $v_i \in V(K)$ pour $i\in I$; alors l'anneau engendré par les A_{v_i} dans K est un anneau de valuation. A l'opposé, deux éléments de V(K) admettent un majorant commun ssi ils sont comparables.

b) On peut préciser la correspondance établie ci-dessus: si P est un idéal premier de A_w , $w(A_w-P) \cup [-w(A_w-P)]$ est un sous-groupe convexe T_P de wK , et w_P est la composée de w avec la projection de wK sur wK/T_P (Notation: $w_P = w/T_P$). Le a) exprime que toute valuation plus grossière que w est ainsi obtenue à partir de w par passage au quotient modulo un sous-groupe convexe de wK .

En résumé, les ensembles ordonnés mis en correspondance sont les suivants, pour $w \in V(K)$ fixée:

- les valuations sur K moins fines que w
- les idéaux premiers de A_w ordonnés par l'inclusion
- les sous-groupes convexes de wK ordonnés par l'ordre inverse de l'inclusion.

c) Soit $u,v \in V(K)$, $u \leq v$, r_v le passage au reste $A_v \twoheadrightarrow K/v$ (Notation: $K/v = A_v/M_v$); on a $A_v \subset A_u$ donc $r_u(A_v) \subset r_u(A_u) = K/u$ et il est facile de vérifier que $r_u(A_v)$ est un anneau de valuation de K/u ; on note v/u la valuation associée; si $x \in A_u$, v/u vérifie $v/u(x/u) = v(x)$ et est donc à valeurs dans le sous-groupe convexe de vK associé à u . Inversement, soit $u \in V(K)$ et $\bar{v} \in V(K/u)$; alors $r_u^{-1}(A_{\bar{v}})$ est un anneau de valuation de K ; on note $u\times\bar{v}$ la valuation associée; on a pour $x \in K$, $u\times\bar{v}(x) \geq 0$ ssi [$u(x) > 0$ ou $u(x) = 0$ et $\bar{v}(x/u) \geq 0$] ; trivialement $u\times\bar{v} \geq u$. Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre en ce sens que $(u\times\bar{v})/u = \bar{v}$ et $u\times(v/u) = v$. Il est classique que, pour $u \leq v$ sur K , (K,v) est henselien ssi (K,u) et (K/u, v/u) le sont.

d) Si G est un g.a.o. et k un corps, on note k((G)) le corps de séries formelles généralisées à exposants dans G et coefficients dans k (voir par exemple [F] p.134)

$$k((G)) = \{ \sum_{g\in I} a_g X^g \ ; \text{ I partie bien ordonnée de G , } a_g \in k \}$$

avec la somme et le produit habituels sur les séries et la valuation $v(\Sigma a_g X^g) =$ le premier g tel que $a_g \neq 0$. Si G_1 et G_2 sont deux g.a.o., il y a un isomorphisme de corps valués entre $k((G_1\times G_2))$ muni de la valuation associée à $G_1\times G_2$ et

$(k((G_2)))((G_1))$ muni du produit de la valuation associée à G_1 et de la valuation associée à G_2 sur le corps de restes par rapport à G_1.

e) Pour finir donnons un résultat qui va nous être utile:

Proposition 2. Soit $i \in \omega+1$; alors un corps K porte au plus une valuation henselienne à valeurs dans un i-groupe. Si $i \in \omega$, une telle valuation est définissable dans la seule structure de corps de K .

Démonstration. Elle se fait par induction sur i ;

1) $i = 1$; c'est un résultat d'Ax [A] : si T est un élément de K de valuation 1 et si la caractéristique résiduelle ne divise pas l'entier m , on a

$$x \in A_v \quad \text{ssi} \quad \exists y\ (1+Tx^m=y^m)$$

Pour éliminer le paramètre T et le problème de caractéristique, on définit les prédicats $A_m(t)$

$$x \in A_m(t) \quad \text{ssi} \quad \exists y\ (1+tx^m=y^m)\ .$$

On a alors, si (K,v) est henselien

$$x \in A_v \quad \text{ssi} \quad \exists t\ [\ \forall y\ (t \neq y^2)\ ] \wedge \Big\{ [(A_2(t) \text{ est stable par multiplication}) \wedge (x \in A_2(t))] \vee [(A_3(t) \text{ est stable par multiplication}) \wedge (x \in A_3(t))] \Big\}$$

2) pour $i \in \omega$, soit v à valeurs dans un (i+1)-groupe G . Alors G contient un sous-groupe convexe H qui est un i-groupe; il lui correspond une valuation $w < v$ sur K , à valeurs dans $G/H \equiv Z$, et une valuation v/w sur K/w à valeurs dans $H \equiv Z^i$; pour $x \in K$ on a

$$v(x) \geq 0 \quad \text{ssi} \quad w(x) > 0 \quad \text{ou} \quad w(x) = 0 \wedge v/w(x/w) \geq 0$$

ce qui se dit au premier ordre dans la seule structure de corps par hypothèse de récurrence et par le cas $i = 1$.

3) Si v est à valeurs dans un ω-groupe G , G contient les sous-groupes convexes $(G_n)_{n\in\omega}$, auxquels sont associées des valuations v_n , v_n à valeurs dans $G/G_n \equiv Z^n$; pour chaque n , v_n est henselienne donc unique, les v_n sont croissantes et v est leur borne supérieure, définie par $A_v = \bigcap_{n\in\omega} A_{v_n}$.

3. Démonstration du théorème

Le principe d'Ax-Kochen-Eršov nous dit que, pour des corps valués henseliens (K,v) et (K',v') de caractéristique résiduelle nulle, on a $(K,v) \equiv (K',v')$ ssi $K/v \equiv K'/v'$ en tant que corps et $vK \equiv v'K'$ en tant que g.a.o., et que dans le cas où $(K,v) \subset (K',v')$, on a $(K,v) \prec (K',v')$ ssi $K/v \prec K'/v'$ et $vK \prec vK'$. Supposons que K est un corps de caractéristique 0, équivalent à $K((X_1))\dots((X_p))$ c'est-à-dire à $K((\mathbb{Z}^p))$; par itération, en appliquant le théorème d'Ax-Kochen-Eršov, on a $K \equiv K((\mathbb{Z}^{pn}))$ pour tout entier $n \geq 1$; $K((\mathbb{Z}^{pn}))$ porte naturellement une valuation henselienne à valeurs dans $\mathbb{Z}^{pn}$ et donc par la proposition 2 cette propriété se transporte par équivalence élémentaire: K porte une valuation v_n henselienne et à valeurs dans $H_n \equiv \mathbb{Z}^{pn}$; à cause de l'unicité d'une telle valuation à n fixée, ces valuations sont nécessairement de plus en plus fines, et elles admettent pour borne supérieure la valuation v définie par $A_v = \bigcap_{n\in\omega} A_{v_n}$; chaque v_n est plus grossière que v et $G = vK$ contient donc une famille de sous-groupes convexes décroissants $(G_n)_{n\in\omega}$ de façon à ce qu'on ait, pour tout $n\in\omega$, $G/G_n = H_n$. Parce que chaque v_n est henselienne, v l'est aussi et parce que tous les K/v_n sont de caractéristique 0 (parce qu'équivalents à K), K/v l'est aussi (K/v_n de carac. 0 $\Leftrightarrow$ $M_{v_n} \cap \mathbb{Q} = \{0\}$ et $M_v \cap \mathbb{Q} = (\cup M_{v_n}) \cap \mathbb{Q} = 0$). Par le théorème d'Ax-Kochen-Eršov, on a $K \equiv k((G))$ si on a posé $k = K/v$; mais par hypothèse, $K \equiv K((\mathbb{Z}^p))$ donc $K \equiv k((G))((\mathbb{Z}^p))$; grâce à l'isomorphisme entre $k((G))((\mathbb{Z}^p))$ et $k((\mathbb{Z}^p\times G))$, nous arrivons à l'équivalence (des corps) $k((G)) \equiv k((\mathbb{Z}^p\times G))$. Prenons un ultrafiltre U tel que $[k((G))]^U \cong [k((\mathbb{Z}^p\times G))]^U$; soit L ce corps; L porte deux valuations henseliennes, v à valeurs dans G^U et w à valeurs dans $(\mathbb{Z}^p\times G)^U \cong (\mathbb{Z}^p)^U \times G^U$; G^U n'est pas un ω-groupe mais contient un sous-groupe convexe $H = \cap(G_n^U)$ tel que G^U/H en soit un (voir la remarque finale du 1.); à H est associée la valuation v/H sur L à valeurs dans G^U/H ; de même pour un certain sous-groupe convexe de wL qu'on note aussi H parce qu'il lui est isomorphe, wL/H est un ω-groupe, et w/H est à valeurs dans wL/H ; on en déduit l'égalité $v/H = w/H$ donc $vL/H = wL/H$ et $(vL/H)\times H = (wL/H)\times H$; or le premier g.a.o. est équivalent à vL et le deuxième à wL ; donc $G^U \equiv (\mathbb{Z}^p\times G)^U$ et $G \equiv \mathbb{Z}^p\times G$. La proposition 1 nous dit qu'alors $G \equiv \mathbb{Z}\times G$; par Ax-Kochen-Eršov on a $k((G)) \equiv k((\mathbb{Z}\times G)) \cong k((G))((X))$, soit $K \equiv K((X))$.

4. Étude de l'inclusion de K dans K((X))

Considéré comme corps de constantes de $K((X))$, K n'en est jamais sous-structure élémentaire: on a vu dans la proposition 2 que $K[[X]]$ est définissable sans paramètre dans $K((X))$, disons par une formule E ; si K était sous-structure élémentaire de $K((X))$, l'interprétation de E dans K serait la trace de son interprétation dans $K((X))$, ce qui est contradictoire avec les relations $K \subset K[[X]] \subsetneq K((X))$. En général K n'est même pas existentiellement clos dans $K((X))$, par exemple l'équation de Fermat

$$\exists x,y,z,t\ (x^3+y^3=1) \wedge (xz=1) \wedge (yt=1)$$

admet une solution dans $\mathbb{Q}((X))$ et non dans $\mathbb{Q}$. Mais pour $K \equiv \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$, K est existentiellement clos dans $K((X))$: en effet, pour un tel corps, K est sous-structure élémentaire de son corps de séries de Puiseux $K((X^{\frac{1}{\infty}})) = \bigcup_{n\in N} K((X^{(\frac{1}{n!})}))$ (voir par exemple [C]) et il est trivial que, pour un corps quelconque, K est existentiellement clos dans $K((X))$ ssi il l'est dans $K((X^{\frac{1}{\infty}}))$. C'est, plus généralement, le cas des corps que nous avons considérés:

Proposition 3. Si K est de caractéristique nulle et élémentairement équivalent à $k((G))$ pour un corps k et un g.a.o. $G \neq 0$, alors K est existentiellement clos dans $K((X))$.

Démonstration. On étudie d'abord le cas $K = k((G))$ avec G ω_1-saturé, on achèvera la démonstration en prouvant que le fait d'être existentiellement clos dans son corps de séries est une propriété du premier ordre.

Soit donc $K = k((G))$, G ω_1-saturé et G^U une ultrapuissance $|G|^+$-saturée; on considère le plongement diagonal de G dans G^U et on prend un sous-groupe H de G^U isomorphe à $\mathbb{Z}$, tel que les groupes $G \cdot H$ et $G \times \mathbb{Z}$ soient isomorphes, et vérifiant $\{ h \in H \ ; \ h > 0 \} > G$; les g.a.o. $H.G$ et $\mathbb{Z} \times G$ sont alors isomorphes au-dessus de G, et les corps valués $k((H.G))$ et $k((G))((\mathbb{Z}))$ sont isomorphes au-dessus de $k((G))$ (on utilise 2.d). Or $k((G)) \prec k((G^U))$ par le principe d'Ax-Kochen-Eršov. Si un système d'équations et d'inéquations à coefficients dans K admet une solution dans $K((X))$, il en admet une dans $k((H.G))$, donc dans $k((G^U))$ et enfin dans $k((G)) = K$.

Nous cherchons maintenant à traduire au premier ordre sur un corps L le fait qu'il est existentiellement clos dans $L((X))$; d'abord L est existentiellement clos dans $L((X))$ ssi il l'est dans $L[[X]]$; ensuite si E est un système de n équations en m variables et de degré d , si s est un entier, Greenberg a prouvé dans [Gr] qu'il existe un entier N, ne dépendant que de n, m, d et s tel que E admet une solution $\vec{y}$ dans $L[[X]]$ ssi il en admet une $\vec{x}$ modulo X^N, et qu'on peut alors choisir $\vec{y}$ coïncidant avec $\vec{x}$ modulo X^s. Donc L est existentiellement clos dans $L((X))$ ssi, pour tous entiers m, n, d, r et s, il satisfait l'énoncé

$\forall$ (les coefficients d'un système E borné en nombre de variables, d'équations et en degré respectivement par m, n et d)

$\forall$ ($Q \in L[X_1,\ldots X_n]$ de degré $\leq r$)

$$\left\{ \left[\text{E admet dans } L[[X]] \text{ une solution } \vec{x} \text{ modulo } X^N \text{ avec } Q(\vec{x}) \neq 0 \text{ (modulo } X^s) \right] \longrightarrow \left[\ \exists \vec{x} \ \ E(\vec{x}) \wedge Q(\vec{x}) \neq 0 \ \right] \right\} .$$

La réciproque de cette proposition est fausse: un corps K pseudo-algébriquement clos (appelé aussi régulièrement clos, voir [CDM]) est existentiellement clos dans toute extension régulière, donc dans $K((X))$; s'il est, en tant que corps, élémentairement équivalent à k((G)) avec $G \neq 0$, il a, par le théorème de Keisler-Shelah, une ultrapuissance portant une valuation henselienne non triviale et est donc algébriquement clos [D]; un corps pseudo-algébriquement clos et non algébriment clos fournit ainsi un contre-exemple à cette réciproque.

Bibliographie

[A] J. Ax, On the undecidability of power series fields, Proc. AMS 16^2(1965), p. 846.

[AK] J. Ax et S. Kochen, Diophantine problems over local fields III, Ann. of Math. 83 (1966), pp. 437-456.

[C] G. Cherlin, Model Theoretic Algebra-Selected Topics, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976, LNM n° 521.

[CDM] G. Cherlin, L. van den Dries et A. Mac Intyre, The Elementary Theory of Regularly Closed Fields, à paraître.

[D] F. Delon, Périodicité des théories élémentaires des corps de séries formelles itérées, à paraître.

[E] J. L. Eršov, On the elementary theory of maximal normed fields, English translation, Soviet Math. Dokl. 6^2 (1965), pp. 1390-1393.

[F] L. Fuchs, Partially ordered systems, Pergamon Press, Oxford London New-York Paris 1963.

[FV] S. Feferman et R. Vaught, The first-order properties of products of algebraic systems, Fund. Math. XLVII (1959), pp. 57-103.

[Gr] M. Greenberg, Lectures on forms in many variables, IHES Publications Mathématiques 31 (1966), pp. 59-64.

[Gu] Y. Gurevič, Elementary properties of ordered abelian groups, AMS Translations 46 (1965), pp. 165-192.

[O] F. Oger, Produits lexicographiques de groupes ordonnés, isomorphisme et équivalence élémentaire, à paraître.

[R] P. Ribenboim, Théorie des valuations, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1964.

[Sa] G. Sabbagh, Aspects logiques de la pureté dans les modules, C.R.A.S. Paris, t. 271 (9 nov. 1970), Série A, pp. 909-912.

[Sh] S. Shelah, The lazy model-theorician's guide to stability, in Six Days of Model Theory [...], ed. P. Henrard, Castella, Albeuve 1977.

Françoise Delon

Université de Paris 7
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55 - 5ème étage
2, Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05