MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CHRISTIAN U. JENSEN

Théorie des modèles pour des anneaux de fonctions entières et des corps de fonctions méromorphes

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 16 (1984), p. 23-40

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__23_0>

Société Mathématique de France
2° série, mémoire n° 16, 1984, p. 23-40

THÉORIE DES MODÈLES POUR DES ANNEAUX DE FONCTIONS ENTIÈRES ET DES CORPS DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

Christian U. Jensen

Résumé. Pour un sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ soit $E(K)$ le sous-anneau de $K[[X]]$ formé des séries formelles dont le rayon de convergence est infini. Si $\rho \in \underline{\underline{R}}^+$ ou $\rho = \infty$ on désigne par E_ρ l'anneau des fonctions entières d'ordre $< \rho$. On pose $E_\rho(K) = E_\rho \cap E(K)$. On montre entre autres choses que l'anneau des polynômes $K[X]$ est définissable dans $E_\rho(K)$ si $\rho < \infty$ ou $K = \underline{\underline{R}}$ ou $K = \underline{\underline{C}}$. En particulier, ces anneaux sont indécidables. De plus, si $K = \underline{\underline{R}}$ ou $K = \underline{\underline{C}}$, alors $E_\rho(K) \equiv E_\sigma(K)$ entraine $\rho = \sigma$. Soit $M_\rho(K)$ le corps des fractions de $E_\rho(K)$. Si $\rho > 0$ les corps $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ sont indécidables, et l'on peut même interpréter l'arithmétique du second ordre dans ces corps. Si $\rho \leqq 1$ et K est un sous-corps pythagoricien de $\underline{\underline{R}}$, les corps $M_\rho(K)$ sont indécidables. Si $\rho > 1$ le sous-anneau de $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ formé des fonctions sans pôles réels est définissable dans $M_\rho(\underline{\underline{R}})$.

Summary. For a subfield K of $\underline{\underline{C}}$ let $E(K)$ be the subring of $K[[X]]$ consisting of all formal power series of infinite convergence radius. If $\rho \in \underline{\underline{R}}^+$ or $\rho = \infty$ we denote by E_ρ the ring of all entire functions of order $< \rho$. We set $E_\rho(K) = E_\rho \cap E(K)$. It is shown that the polynomial ring $K[X]$ is definable in $E_\rho(K)$ if $\rho < \infty$ or $K = \underline{\underline{R}}$ or $K = \underline{\underline{C}}$. In particular, these rings are undecidable. Moreover, if $K = \underline{\underline{R}}$ or $K = \underline{\underline{C}}$, then $E_\rho(K) \equiv E_\sigma(K)$ implies $\rho = \sigma$. Let $M_\rho(K)$ be the quotient field of $E_\rho(K)$. The fields $M(\underline{\underline{R}})$ are undecidable, and it is even possible to interpret second order number theory in these fields. If $\rho \leqq 1$ and K is a Pythagorean subfield of $\underline{\underline{R}}$ the fields $M_\rho(K)$ are undecidable. If $\rho > 1$ the subring of $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ consisting of all functions with no real poles is definable in $M_\rho(\underline{\underline{R}})$.

0037-9484/84 03 23 18/$ 3.80/ © Gauthier-Villars

1. ANNEAUX DES FONCTIONS ENTIÈRES.

1.1. Préliminaires. Soit E l'anneau des fonctions entières complexes d'une variable complexe. Pour un sous-corps K de $\mathbb{C}$ soit $E(K)$ l'anneau des fonctions entières à coefficients dans K, c.-à-d. le sous-anneau de $K[[X]]$ formé des séries formelles dont le rayon de convergence est infini. Évidemment $E = E(\mathbb{C})$.

$E(K)$ est un anneau intègre non-noethérien, mais $E(K)$ est un anneau de Bézout, c.-à-d. tout idéal de type fini est principal. Dans le cas $K = \mathbb{C}$ ce résultat est dû à Wedderburn (14) et dans le cas général il est dû a Helmer (5).

Nous allons esquisser la démonstration d'un résultat plus précis qui est dû à Rubel (12) dans le cas $K = \mathbb{C}$.

Proposition 1.1. Pour tout corps $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \not\subseteq \mathbb{R}$, l'anneau $R = E(K)$ est un anneau de Bézout dont le rang stable est égal à 1, c.-à-d. pour tout couple (f,g) de fonctions de R il existe une fonction $h \in R$ telle que $Rf + Rg = R(f+gh)$[1].

Pour la démonstration on a besoin d'un lemme d'interpolation.

Lemme 1.2. Soit $\{\alpha_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$ une partie discrète de $\mathbb{C}$ et soit $p_n = \sum_{j=0}^{t_n} a_{nj}(x-\alpha_n)^j$ un polynôme en $(x-\alpha_n)$ à coefficients complexes Si $\alpha_n = 0$ on suppose $a_{n,0},\ldots,a_{n,t_n} \in K$. De plus, si $K \subseteq \mathbb{R}$, on suppose $p_n = \overline{p}_m$ lorsque $\alpha_n = \overline{\alpha}_m$. Alors, il existe $f \in E(K)$ telle que

$$f \equiv \sum_{j=0}^{t_n} a_{nj}(x-\alpha_n)^j \mod (x-\alpha_n)^{t_n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En ce qui concerne la preuve du lemme nous remarquons que l'on procède comme dans le cas classique $K = \mathbb{C}$ en utilisant le fait suivant (cf. 5, 6).

Soit f une fonction entière et K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Si $K \subseteq \mathbb{R}$ on suppose $f \in E(\mathbb{R})$. Alors, il existe une fonction entière g telle que $f \exp(g) \in E(K)$.

Retournons maintenant à la démonstration de la proposition 1.1. Ici et dans ce qui suit nous désignons par $Z(f)$, $f \in E$, l'ensemble des zéros de f.

Pour vérifier l'assertion de la proposition on peut se restreindre au cas où $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$.

Soit $Z(g) = \{\beta_n\}$ et soit t_n la multiplicité de β_n en tant que zéro de g. Puisque $f(\beta_n) \neq 0$ on construit - en considérant $\log f$ en β_n - un polynôme $u_n = \sum_{j=0}^{t_n-1} a_{j,n}(x-\beta_n)^j$ tel que

$$f - \exp(u_n) \equiv 0 \mod (x-\beta_n)^{t_n} .$$

Par le lemme 1.2 il existe une fonction $u \in E(K)$ telle que $f - \exp(u) \equiv 0 \bmod g$; donc pour une fonction convenable $h \in E(K)$ la fonction $f+gh$ est inversible dans $E(K)$.

On dit qu'une fonction entière f est d'ordre fini s'il existe deux nombres réels a et c tels que

$$|f(x)| \leq c \exp(|x|^a) \qquad (*)$$

pour tout $x \in \underline{\underline{C}}$.

La borne inférieure ρ des nombres a pour lesquels (*) est satisfait pour une constante c (dépendante de a) est appelée l'ordre de la fonction f. (Pour de plus amples détails voir (3,13).)

On peut montrer qu'une fonction entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est d'ordre fini ρ si et seulement $\liminf \log(1/|a_n|) / n \log n = 1/\rho$. (Si la borne ci-dessus est ∞ (resp. 0) la fonction f est d'ordre 0 (resp. ∞).)

Rappelons le théorème de factorisation de Hadamard. Soit f une fonction entière d'ordre $\rho < \infty$ et $Z(f) = \{\alpha_j\}$. Alors f est de la forme

$$f(x) = \exp(h(x))\ x^n \prod_{\alpha_j \neq 0} (1-x/\alpha_j)\exp(1+x/\alpha_j + \ldots + \frac{1}{[\rho]} (x/\alpha_j)^{[\rho]}) ,$$

où $[\rho]$ est le plus grand entier $\leq \rho$, $h(x)$ un polynôme de degré $\leq \rho$, et $n = 0$, si 0 n'est pas un zéro de f.

Pour une suite $\{\alpha_n\}$, $n \in \underline{\underline{N}}$, de nombres complexes l'exposant de convergence est défini comme la borne inférieure des nombres positifs p tels que $\sum_{\alpha_n \neq 0} |\alpha_n|^{-p} < \infty$.

Alors, c'est un résultat classique qu'une partie discrète $\{\alpha_j\}$ de $\underline{\underline{C}}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction d'ordre $\leq \rho$ si et seulement si l'exposant de convergence de la suite $\{\alpha_j\}$ est $\leqq \rho$.

Pour un nombre donné ρ les fonctions d'ordre $< \rho$ (resp. $\leqq \rho$) forment un sous-anneau E_ρ $(\overline{E}_\rho)$ de E. L'anneau $E_\infty = \bigcup_{\rho<\infty} E_\rho$ est formé par toutes les fonctions entières d'ordre fini.

Pour un sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ on définit $E_\rho(K) = E_\rho \cap E(K)$, $0 < \rho \leqq \infty$, et $\overline{E}_\rho(K) = \overline{E}_\rho \cap E(K)$, $0 \leq \rho < \infty$.

La structure des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ est plus compliquée que celle des anneaux $E(K)$. Comme $E(K)$ les anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ ne sont pas noethériens, mais à la différence de $E(K)$ aucun des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ n'est un anneau de Bézout. (Il existe même deux fonctions f et g d'ordre zéro telles que l'idéal $E_\infty f + E_\infty g$ n'est pas principal dans E_∞.) De plus, c'est une question ouverte de savoir quel est le rang stable des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$.

Cependant, c'est une conséquence facile du théorème de factorisation que chacun des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ est complètement intégralement clos dans son corps des fractions. La preuve s'appuie sur le fait suivant. Si R désigne un des anneaux $E_\rho(K)$ ou $\overline{E}_\rho(K)$, alors une fonction $f \in R$ divise une fonction $g \in R$ dans R si f divise g dans E. Ceci signifie que E/R est un R-module sans torsion.

Nous finissons cette section en mentionnant quelques résultats concernant la dimension globale et la dimension de Krull (notée K-dim) de ces anneaux.

<u>Théorème 1.3</u>. Soit R un sous-anneau de E contenant $E_0(\underline{\underline{R}})$ et supposons que E/R soit un R-module sans torsion. Alors:

gl.dim $R \geqq 3$; de plus, l'énoncé "gl.dim $R = \infty$" est compatible avec ZFC + MA. (MA = l'axiome de Martin.)

K-dim $R \geqq 2^{\aleph_0}$; de plus, l'énoncé "K-dim $R = 2^{2^{\aleph_0}}$" est compatible avec ZFC + MA.

Si l'on suppose de plus que R est un anneau de Bézout, alors pour tout t, $3 \leqq t \leqq \infty$, l'énoncé "gl.dim $R = t$" est compatible avec ZFC + MA.

De même, dans le cas où R est un anneau de Bézout, soient P, Q et P' trois idéaux premiers de R tels que $P \subsetneqq Q \subsetneqq P'$.

Alors, les idéaux premiers entre P et P' forment une chaîne de longueur $\geq 2^{\aleph_0}$. Il est compatible avec ZFC + MA de supposer que cette chaîne est de longueur $2^{2^{\aleph_0}}$.

(Une partie de ces résultats se trouvent dans (7, 8), les détails seront publiés ultérieurement.)

1.2. Définissabilité et indécidabilité des anneaux $E_\rho(K)$ et $\bar{E}_\rho(K)$

Dans cette section on montre entre autres choses que $\mathbb{N}$ est définissable dans $E_\rho(K)$ et $\bar{E}_\rho(K)$ pour tout $0 < \rho < \infty$ et tout sous-corps K de $\mathbb{C}$. Il se trouve que même l'anneau de polynômes $K[X]$ est définissable dans $E_\rho(K)$, $\bar{E}_\rho(K)$ et $E(K)$.

D'abord nous donnons une caractérisation élémentaire des fonctions linéaires de ces anneaux.

Lemme 1.2.1. Pour chaque sous-corps K de $\mathbb{C}$ et tout nombre ρ $0 < \rho \leq \infty$, les fonctions linéaires, $ax+b$, $a \in K \setminus 0$, $b \in K$, sont définissables (sans paramètre) dans $E_\rho(K)$ par une formule qui ne dépend ni de K ni de ρ. En effet, si $f \in E_\rho(K)$, alors f est linéaire ssi f est non-inversible et $E_\rho(K)(f-k)$ est un idéal premier de $E_\rho(K)$ pour tout $k \in K$.

Démonstration. Par le théorème de Picard les constantes sont définissables; donc, la description plus haut est une caractérisation élémentaire des fonctions linéaires.

Il suffit de montrer que f est linéaire si f est non-inversible et l'idéal principal engendré par f est un idéal premier. Mais cette assertion est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1.2.2. Soient A une partie discrète de $\mathbb{C}$, f une fonction de E_ρ, $f(0) = 1$, et K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Si $K \subseteq \mathbb{R}$ on suppose de plus que $f \in E_\rho(\mathbb{R})$. Alors il existe une fonction $g \in E(K)$ telle que $f | g$ (dans E) et $Z(g/f) \cap A = \emptyset$.

Démonstration. (Esquissée) On construit g en ajoutant à $f(x) = \sum_n a_n x^n$ des facteurs $(1-x^n/b_n)$, où (b_n) est une suite "rapidement" croissante. Les nombres b_n sont construits par récurrence sur n tels que les coefficients du produit appartiennent à K.

Par la même méthode on montre

Lemme 1.2.3. Pour chaque sous-corps K de $\underline{\mathbb{C}}$ et tout nombre ρ, $0 \leq \rho \leq \infty$ les fonctions linéaires de $\overline{E}_\rho(K)$ sont définissables (sans paramètre) dans $\overline{E}_\rho(K)$ par une formule qui ne dépend ni de K ni de ρ.

Proposition 1.2.4. Si f est une fonction linéaire de $E_\rho(K)$, $0 < \rho < \infty$, les $n^{\text{èmes}}$ puissances de f sont définissables dans $E_\rho(K)$ avec le seul paramètre f, où n parcourt les nombres naturels divisibles par $m = [\rho+1]p^2$, p étant un nombre premier plus grand que $\rho + 1$. La formule définissant ces puissances ne dépend que de ρ et est indépendante de K.

Démonstration. Sans restriction on peut supposer $f = x$.

L'ensemble suivant est définissable dans $E_\rho(K)$:

$$\mathcal{D} = \{g^m | x|g \;\&\; d|g \to d|1 \vee x|d\} .$$

Par le théorème de Hadamard $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $\exp(h(x))x^n$, où $m|n$ et $h(x)$ est un polynôme dans $K[X]$ de degré $\leq \rho$.

Il est évident que x^m-1 divise x^n-1 si m divise n.

On prouve la proposition en établissant que réciproquement toute fonction H de $\mathcal{D}$ telle que $x^m-1|H-1$ est forcément une puissance x^n, $m|n$.

En effet, considérons une fonction $\exp(h(x))x^n$, $h(x)$ étant un polynôme dans $K[X]$ de degré $\leq \rho$, et supposons que

$$\exp(h(x))x^n \equiv 1 \text{ modulo } (x^m-1) \text{ dans l'anneau } E_\rho(K) .$$

Nous allons en déduire que $h(x)$ est une constante $2\pi i b$, $b \in \underline{\mathbb{Z}}$.
Posons $t = [\rho+1]$ et

$h(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{t-1} x^{t-1}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1} \in K$.

Alors $h(\varepsilon) \equiv 0$ modulo $2\pi i \underline{\underline{Z}}$ si ε est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité. En particulier, si ε_t est une racine primitive $t^{\text{ème}}$ de l'unité et si l'on pose $a_j = b_j(2\pi i)$, $0 \leq j < t$, alors

$$b_0 + b_1 \varepsilon_t^k + \ldots + b_{t-1} (\varepsilon_t^k)^{t-1} \equiv 0 \text{ modulo } \underline{\underline{Z}}, \quad 0 \leq k < t .$$

Puisque le déterminant

$$\det_{0 \leq k,j<t} (\varepsilon^k)^j = \prod_{0 \leq k<j<t} (\varepsilon_t^j - \varepsilon_t^k) \neq 0$$

il s'ensuit que tout nombre b_j, $0 \leq j < t$, appartient au corps cyclotomique $\underline{\underline{Q}}(\varepsilon_t)$.

De plus, si l'on pose $\varepsilon = \varepsilon_{p^2}$, où ε_{p^2} est une racine primitive $(p^2)^{\text{ème}}$ de l'unité, on obtient

$$b_0 + b_1 \varepsilon_{p^2} + \ldots + b_{t-1} \varepsilon_{p^2}^{t-1} \in \mathbb{Z} .$$

Puisque le degré de ε_{p^2} par rapport à $\underline{\underline{Q}}(\varepsilon_t)$ est $\geq p > t$, on conclut que $b_1 = b_2 = \ldots = b_{t-1} = 0$ et $b_0 \in \underline{\underline{Z}}$, c.q.f.d.

<u>Théorème 1.2.5</u>. Pour tout sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ l'anneau de polymômes $K[X]$ est élémentairement définissable (sans paramètre) dans $E_\rho(K)$ $(0 < \rho < \infty)$ par une formule qui ne dépend que de ρ .

<u>Démonstration</u>. Il suffit de définir $K[X]$ dans $E_\rho(K)$ avec le paramètre x, puisque on peut éliminer ce paramètre grâce au lemme 1.2.1.

On remarque qu'une fonction $f \in E(K)$ est un polynôme si et seulement s'il existe une puissance x^n telle que $x^n f(1/x)$ soit une fonction entière.

En vertu de la proposition 1.2.4 les puissances x^n, n étant divisible par le nombre m de la proposition, forment un ensemble P définissable dans $E_\rho(K)$. On en déduit une définition élémentaire de $K[X]$ dans $E_\rho(K)$:

Une fonction $f \in E_\rho(K)$ appartient à $K[X] \Leftrightarrow \exists p \in P\ \exists g \in E_\rho(K)$ $(\forall \alpha \in K \setminus \{0\}, \exists \beta,\gamma \in K\ (x-\alpha^{-1}) \mid f-\beta \wedge (x-\alpha \mid p-\gamma) \wedge (x-\alpha) \mid g-\beta\gamma))$.

De façon analogue on montre

Théorème 1.2.6. Pour tout sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ l'anneau de polynômes $K[X]$ est élémentairement définissable (sans paramètre) dans $\overline{E}_\rho(K)$ $0 \leq \rho < \infty$ par une formule que ne dépend que de ρ.

Remarque 1.2.7. La démonstration ci-dessus laisse voir qu'il existe pour tout couple ρ,σ de nombres réels une formule qui définit $K[X]$ dans $E_\rho(K)$, $E_\sigma(K)$, $\overline{E}_\rho(K)$ et $\overline{E}_\sigma(K)$. En vertu d'un résultat de Robinson (10) il s'ensuit que $\underline{\underline{N}}$ est définissable (sans paramètre) par la même formule dans $E_\rho(K)$, $E_\sigma(K)$, $\overline{E}_\rho(K)$ et $\overline{E}_\sigma(K)$.

Corollaire 1.2.8. Pour tout sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ les anneaux $E_\rho(K)$ $0 < \rho < \infty$, et $\overline{E}_\rho(K)$, $0 \leq \rho < \infty$, sont indécidables.

Corollaire 1.2.9. Soient K et L deux sous-corps de $\underline{\underline{C}}$ et ρ un nombre positif réel. Alors $E_\rho(K) \equiv E_\rho(L)$ entraîne $K \equiv L$ (où "$\equiv$" désigne l'équivalence élémentaire.) De même, $\overline{E}_\rho(K) \equiv \overline{E}_\rho(L)$ entraîne $K \equiv L$ si $0 \leq \rho < \infty$.

Remarque 1.2.10. Les implications réciproques ne subsistent pas. Par exemple, (de façon analogue à un résultat dans (7)) $E_\rho(K) \not\equiv E_\rho(\underline{\underline{C}})$ pour tout sous-corps propre K de $\underline{\underline{C}}$ et tout nombre réel positif ρ.

Remarque 1.2.11. Soit R un sous-anneau de $E_\rho = E_\rho(\underline{\underline{C}})$, $0 < \rho < \infty$, contenant l'anneau de polynômes $\underline{\underline{C}}[X]$. Supposons de plus que E_ρ/R soit un R-module sans torsion. En modifiant les arguments utilisés plus haut on trouve que $\underline{\underline{C}}[X]$ est définissable (sans paramètre) dans R par une formule qui ne dépend que de ρ.

Pour traiter le cas des anneaux $E_\infty(K)$ et $E(K)$ nous avons besoin du résultat suivant, dont la démonstration repose sur les arguments, légèrement modifiés, de l'analyse classique.

Lemme 1.2.12. Soit K un sous-corps de $\underline{\underline{C}}$. Toute partie infinie discrète de $\underline{\underline{C}}$ contient un sous-ensemble infini $\{\alpha_n\}$, $n \in \underline{\underline{N}}$, tel qu'il existe une fonction $f \in \overline{E}_0(K)$ pour laquelle $f(\alpha_n) = n$ pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$.

Proposition 1.2.13. Soit K un sous-corps de $\underline{\underline{C}}$ et désignons par R un des anneaux $E_\rho(K)$, $0 < \rho \leq \infty$, ou $E(K)$. Si $\underline{\underline{N}}$ est définissable dans R, alors $K[X]$ est définissable par une formule qui ne dépend que de la formule qui définit $\underline{\underline{N}}$ dans R.

Démonstration. Les constantes sont définissables dans R. $K[X]$ peut être défini comme suit. Si $f \in R$, alors:

$$f \in K[X] \Leftrightarrow \forall k \in K\ \forall g \in R(\exists n \in \mathbb{N}\ \ (R(f-k) + R(g-n) = R)$$

" $\Rightarrow$ " : Si $f \in K[X]$, f n'a qu'une nombre fini de zéros, et l'énoncé est une conséquence du fait que l'idéal $Rg+Rh$ est principal pour chaque polynôme h et un générateur est un plus grand commun diviseur de g et h.

" $\Leftarrow$ " : Si $f \notin K[X]$, alors f a une singularité essentielle dans ∞ et en vertu du second théorème de Picard il existe $k \in K$ telle que $f+k$ a un ensemble infini de zéros. Ensuite on applique le lemme 1.2.12.

Si $R = E(K)$ il est bien connu que $\underline{\underline{N}}$ est définissable dans R. Donc, on obtient

Corollaire 1.2.14. Pour tout sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ l'anneau de polynômes $K[X]$ est définissable (sans paramètre) dans $E(K)$ par une formule qui ne dépend pas de K.

Si $K = \underline{\underline{R}}$ ou $K = \underline{\underline{C}}$ une modification immédiate d'un argument de Robinson (10) montre que $\underline{\underline{N}}$ est définissable dans $E_\rho(K)$, $\rho \geq 1$, par une formule qui ne dépend pas de ρ. Si $\rho < 1$, l'anneau $K[X]$ est définissable uniformément dans $E_\rho(K)$ grâce au théorème 1.2.5 (et la remarque 1.2.7). En combinant ces deux formules [(2)], on arrive à

Théorème 1.2.15. Si $K = \underline{\underline{R}}$ ou $\underline{\underline{C}}$ il existe une formule qui définit (sans paramètre) l'anneau des polynômes $K[X]$ dans chacun des anneaux $E_\rho(K)$, $0 < \rho \leq \infty$. En particulier, il existe une formule qui définit $\underline{\underline{N}}$ dans chacun des anneaux $E_\rho(K)$, $0 < \rho \leq \infty$.

Nous en déduisons un résultat qui répond à une question posée par Becker, Henson et Rubel (2).

<u>Théorème 1.2.16</u>. Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $0 < \rho \leq \infty$, $0 < \sigma < \infty$, alors $E_\rho(K) \equiv E_\sigma(K)$ entraîne $\rho = \sigma$.

<u>Démonstration</u>. Il existe des formules qui définissent uniformément $\mathbb{N}$ dans $E_\rho(K)$ et $E_\sigma(K)$, le corps des constantes K dans $E_\rho(K)$ et $E_\sigma(K)$, et l'ensemble L des fonctions linéaires dans $E_\rho(K)$ et $E_\sigma(K)$.

Supposons $\rho < \sigma$ et soit p/q $(p,q \in \mathbb{N})$ un nombre rationel tel que $\rho < p/q < \sigma$.

La suite $(n^{q/p})$, $n \in \mathbb{N}$, est l'ensemble des zéros d'une fonction de E_σ, mais pas d'une fonction de E_ρ.

Considérons l'énoncé élémentaire suivant:

$$\varphi: (\exists f \in L \wedge \exists g \neq 0 (f | g \vee \forall \alpha \in K(f-\alpha | g) \rightarrow \exists \beta \in \mathbb{N},\ \gamma \in K$$

$$\beta^q = \alpha^p \wedge (\beta+1)^q = \gamma^p \wedge (f-\gamma) | g) .$$

<u>L'énoncé</u> φ <u>est satisfait dans</u> $E_\rho(K)$:

On peut choisir $f = x$, et puisque l'exposant de convergence de la suite $(n^{q/p})$, $n \in \mathbb{N}$, est p/q il existe une fonction $g \in E_\sigma(K)$ dont l'ensemble des zéros est $(n^{q/p})$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>L'énoncé</u> φ <u>n'est pas satisfait dans</u> $E_\sigma(K)$:

Sans restriction on peut supposer que $f = x$. L'ensemble $Z(g)$ devait contenir 0 ainsi qu'une suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ où $z_n = n^{q/p} \varepsilon_n$, ε_n étant une racine $p^{\text{ème}}$ de l'unité. Puisque l'exposant de convergence de cette suite est égal à p/q, aucune fonction de E_ρ ne contient les nombres 0 et z_n, $n \in \mathbb{N}$, dans son ensemble des zéros. Par conséquent φ n'est pas satisfait dans E_ρ. Ceci achève la démonstration du théorème 1.2.16.

<u>Remarque 1.2.17</u>. Avec une légère modification on montre que $\rho = \sigma$ si $\bar{E}_\rho(K) \equiv E_\sigma(K)$, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $0 \leq \rho < \infty$. De même, $\bar{E}_\rho(K) \not\equiv E_\rho(K)$ pour tout nombre ρ rationnel.

2. CORPS DES FONCTIONS MÉROMORPHES.

Pour un sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ soit $M(K)$ le corps des fractions de $E(K)$. On appelle $M(K)$ le corps des fonctions méromorphes à coefficients dans K. De même, désignons par $M_\rho(K)$, resp. $\overline{M}_\rho(K)$, le corps des fractions de $E_\rho(K)$, resp. $\overline{E}_\rho(K)$.

<u>Théorème 2.1</u>. Soit ρ un nombre réel positif. L'ensemble $\underline{\underline{N}}$ des nombre naturels est définissable dans chaque corps F entre $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ et $M(\underline{\underline{R}})$ par une formule qui ne dépend que de ρ. En particulier, un tel corps F est indécidable.

<u>Démonstration</u>. Puisque le genre de la courbe $X^4 = 1 + Y^4$ est plus grand que 1, le théorème d'uniformisation de Picard implique que $\underline{\underline{R}}$ est définissable dans F par la formule

$$\underline{\underline{R}} = \{\xi \in F \mid \exists\eta \in F\ (\eta^4 = 1 + \xi^4)\} .$$

En particulier, l'ensemble $\underline{\underline{R}}^+$ des nombres réels positifs est definissable dans F.

Par une modification facile de (9. prop.2) on prouve qu'une fonction $f = f(x) \in M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $\rho > 0$, est une somme de deux carrés dans $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ si (et seulement si) $f(x) \geqq 0$ pour tout nombre réel x qui n'est pas un pôle de f.

Pour $\alpha \in \underline{\underline{R}}$ et $f,g \in F$ on définit la formule $\Phi(\alpha,f,g)$:

$$\exists c \in \underline{\underline{R}}^+\ \exists p,q \in F(c(g-\alpha)^2 - \frac{f^2}{1+f^2} = p^2 + q^2) .$$

Soit t un entier tel que $t > \rho^{-1}$. Puisque $\underline{\underline{R}}$ et $\underline{\underline{R}}^+$ sont définissables dans F, la définissabilité de $\underline{\underline{N}}$ dans F est une conséquence de l'énoncé suivant:

Si $\alpha \in \underline{\underline{R}}^+$, alors $\alpha \in \underline{\underline{N}} \Leftrightarrow \forall f,g \in F$

$$(\Phi(1,f,g) \wedge [\forall\beta \in \underline{\underline{R}}^+(\Phi(\beta^t,f,g) \rightarrow \Phi((\beta+1)^t,f,g)]) \rightarrow \Phi(\alpha^t, f,g) .$$

L'implication " $\Rightarrow$ " est évidente.

" $\Leftarrow$ " : Posons $g = x$ et $f = f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x/n^t)$, qui appartient à $E_\rho(\underline{\underline{R}}) \subset M_\rho(\underline{\underline{R}}) \subset F$, puisque l'exposant de convergence de la suite (n^t), $n \in \underline{\underline{N}}$, est $< \rho$. D'après la remarque plus haut on déduit

$$\Phi(\gamma,f(x),x) \Leftrightarrow f(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = n^t \quad \text{où} \quad n \in \underline{\underline{N}} .$$

Nous en concluons que $\alpha^t = n^t$ pour un nombre $n \in \underline{\underline{N}}$, et, puisque $\alpha \in \underline{\underline{R}}^+$ nous obtenons $\alpha \in \underline{\underline{N}}$.

<u>Théorème 2.2</u>. Soit ρ un nombre réel positif. L'ensemble $\underline{\underline{N}}$ des nombres naturels est définissable dans chaque corps F entre $\underline{\underline{R}}(X)$ et $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ par une formule que ne dépend que de ρ. En particulier, tout corps $\overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 \leq \rho < \infty$, est indécidable.

<u>Démonstration</u>. Comme plus haut $\underline{\underline{R}}$ est définissable dans F. D'abord nous définissons $\underline{\underline{N}}$ avec le paramètre X. Choisissons un entier t tel que $t > \rho$.

Si $\alpha_1,..,\alpha_n$ sont des nombres réels distincts deux à deux, il existe un nombre réel positif c tel que

$$f(x) = \frac{c(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)}{1+(x-\alpha_1)^2\ldots(x-\alpha_n)^2}$$

satisfait aux conditions

$$f(x)^2 \leq (x-\alpha_j)^2 \quad \text{pour tout} \quad x \in \underline{\underline{R}} \quad \text{et tout} \quad j,\ 1 \leq j \leq n .$$

Donc, $(x-\alpha)^2 - f(x)^2 = p^2 + q^2$ pour deux fonctions convenables, p et q, de $\underline{\underline{R}}(X)$. Pour $\alpha \in \underline{\underline{R}}$, $f,g \in F$ introduisons la formule

$$\varphi(\alpha,f,g) : \exists p,q \in F \quad ((g-\alpha)^2 - f^2 = p^2 + q^2) .$$

La définition de $\underline{\underline{N}}$ se fait comme suit:

$$\beta \in \underline{\underline{N}} \Leftrightarrow \beta \in \underline{\underline{R}}^+ \wedge (\exists f \neq 0(\varphi(0,f,x) \wedge \forall \alpha \in \underline{\underline{R}}^+(\varphi(\alpha,f,x)$$

$$\rightarrow \alpha^t = \beta \vee \exists\gamma \in \underline{\underline{R}}^+ \ (\gamma^t = 1 + \alpha^t) \wedge \varphi(\gamma,f,x) .$$

Vérifions d'abord " $\Rightarrow$ " : Si $\beta = n \in \underline{\underline{N}}$ prenons pour la fraction construit plus haut avec $j = n+1$ et $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2^{1/t},..,\alpha_{n+1} = n^{1/t}$. Alors, il est clair que f satisfait à la condition désirée.

Pour vérifier l'implication réciproque " $\Leftarrow$ " supposons $\beta \notin \underline{\underline{N}}$. Dans ce cas, il n'existe pas une fonction f satisfaisant à la condition ci-dessus, parce que l'ensemble $Z(f)$ devait alors contenir les nombres $0, 1, 2^{1/t},..,n^{1/t},..$, dont l'exposant de convergence est $t > \rho$.

Finalement, un argument de Robinson (11) montre que $\underline{\underline{N}}$ est définissable sans paramètre.

Par une modification de la démonstration du théorème 2.2, et en utilisant un argument de (9) on obtient

<u>Théorème 2.3</u>. Il existe une formule qui définit $\underline{\underline{N}}$ dans chaque corps F intermédiaire entre $K(X)$ et $M_1(K)$, où K est un sous-corps pythagoricien quelconque de $\underline{\underline{R}}$.

<u>Remarque 2.4</u>. En utilisant des arguments de Becker, Henson, Rubel (2) et Delon (4) on déduit par une modification de la démonstration du théorème 2.2 que l'arithmétique du second ordre est interprétable dans la théorie élémentaire des corps $M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 < \rho \leq \infty$, et $M(\underline{\underline{R}})$.

C'est une question ouverte (et vraisemblablement assez délicate) de savoir si E ou $E(\underline{\underline{R}})$ sont définissables dans leur corps des fractions. Dans cet ordre d'idées nous n'avons que des résultats fragmentaires.

<u>Théorème 2.5</u>. Soit F un des corps $M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $1 < \rho < \infty$, $\overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $1 \leq \rho < \infty$, ou $M(\underline{\underline{R}})$. Alors le sous-anneau A de F formé de toutes les fonctions $f \in F$ telles que $f_{res,\underline{\underline{R}}}$ soit une fonction continue de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{R}}$ (c.-à-d. f n'a pas de pôles réels) est définissable (sans paramètre) dans F par une formule qui ne dépend pas de ρ.

Pour la démonstration nous aurons besoin du résultat suivant

<u>Proposition 2.6</u>. Retenons les notations du théorème 2.5, et soit S l'ensemble des fonctions $f \in F$, dont la restriction à $\underline{\underline{R}}$ est une fonction monotone ayant tout nombre réel comme valeur avec la multiplicité 1. Alors S est définissable dans F.

Puisque $\underline{\underline{R}}$ est définissable dans F il en est de même des sous-ensemble suivants:

$$P = \{f \mid \exists\ p_1, p_2 \in F\ ,\ f = p_1^2 + p_2^2\}$$

$$A = \{f \mid \forall\ a,b \in \underline{\underline{R}}\ ,\ a \neq b\ ,\ (f-a)(f-b) \notin P\}$$

$$B = \{f \mid f \in A \wedge (\forall g \in F,\ g \notin P, -g \notin P,\ 1-g^2 \in P) \exists \alpha,\ c \in \underline{R}$$
$$c(f-\alpha)^2 - g^2 \in P\}$$

Pour chaque $f \in A$ l'image $f(\underline{\underline{R}})$ est manifestement un sous-ensemble dense de $\underline{\underline{R}}$. Nous affirmons que $S = B$.

Si $g \notin P, -g \notin P$ et $1-g^2 \in P$ la fonction g a un zero réel β. Si $f \in S$, on a l'inégalité $(g(x))^2 \leq c(f(x) - f(\beta))^2$ pour tout nombre réel x et un nombre positif c convenable. Par conséquent, $c(f(x) - f(\beta))^2 - (g(x))^2 \in P$. Ceci montre l'inclusion $S \subseteq B$.

L'inclusion réciproque est vérifiée en trois étapes.

1. Toute fonction $f \in B$ est injective en tant que fonction de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{R}}$.

Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in \underline{\underline{R}}$, $x_1 \neq x_2$. La fonction $g = g(x) = \tanh(x-x_1)$ (où tanh désigne la tangente hyperbolique) appartient à $E_1(\underline{\underline{R}}) \subseteq F$ et $g \notin P, -g \notin P,\ 1-g^2 \in P$. Donc, il existe deux nombres réels c et α tels que

$$(g(x))^2 \leq c(f(x) - \alpha)^2 \qquad (*)$$

pour tout nombre réel x qui n'est pas un pôle de f.

Parce que $f(\underline{\underline{R}})$ est dense dans $\underline{\underline{R}}$ il existe une suite (x_n) de nombres réels telle que $f(x_n) \to \alpha$. Puisque $(g(x))^2 \to 1$ si $|x| \to \infty$, la suite (x_n) est bornée et sans restriction on peut supposer que (x_n) a un point limite $\gamma \in \underline{\underline{R}}$; ici γ n'est pas un pôle de f et $f(\gamma) = \alpha$. De l'inégalite (*) on déduit $g(\gamma) = 0$; par conséquent $\gamma = x_1$ et $f(\gamma) = f(x_1) = f(x_2)$. En posant $x = x_2$ dans (*) on obtient la contradiction désirée.

2. Toute fonction $f \in \mathcal{B}$ est surjective en tant que fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En vertu de 1. il suffit de vérifier que f n'a pas de pôles réels. Supposons que β est un pôle réel de f ; d'après 1. β devrait alors être le seul pôle réel de f et $|\lim_{x\to\infty} f| < \infty$ et $|\lim_{x\to-\infty} f| < \infty$. Comme plus haut il devrait exister des nombres réels α et c tels que

$$(\tanh(x-\beta))^2 \leqq c(f(x)-\alpha)^2 .$$

Puisque $(\tanh(x-\beta))^2 \to 1$ si $x \to \infty$ et $x \to -\infty$ il existe un nombre réel $\gamma \neq \beta$ tel que $f(\gamma) = \alpha$. On obtient une contradiction en posant $x = \gamma$.

3. Toute fonction $f \in \mathcal{B}$ prend toute valeur dans $\mathbb{R}$ avec la multiplicité 1.

Si une valeur de f était prise au point $x = \beta$ avec une multiplicité > 1 l'inégalité $(\tanh(x-\beta))^2 \leqq c(f(x)-\alpha)^2$ $(x \in \mathbb{R})$ ne serait satisfaite par aucun nombre c et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nous retournons maintenant à la démonstration du théorème 2.5.

La définition élémentaire de A dans F est la suivante:

$$A = \{g \in F \mid \forall f \in S\ \forall\alpha \in \mathbb{R}\ \exists\beta, c \in \mathbb{R}\quad (c(f-\alpha))^2 - \frac{(g-\beta)^2}{1+(g-\beta)^2} \in P)\} \tag{$\dagger$}$$

Si $g \in A$ et $f \in S$ alors $\alpha = f(\gamma)$ pour un nombre $\gamma \in \mathbb{R}$. Pour une constante convenable $c \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité

$$\frac{(g(x)-g(\gamma))^2}{1+(g(x)-g(\gamma))^2} \leqq c(f(x)-\alpha)^2 , \qquad x \in \mathbb{R}$$

et par conséquent $(\dagger)$ est satisfait avec $\beta = g(\gamma)$.

Réciproquement, supposons que g satisfait à la condition $(\dagger)$. En posant $f = x$ cette condition implique que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction g n'a pas de pôle en α , et donc $g \in A$.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.5.

En ce qui concerne l'inéquivalence des corps $M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $\overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$ et $M(\underline{\underline{R}})$ nous n'avons que des résultats fragmentaires.

Théorème 2.7. Le corps $M(\underline{\underline{R}})$ n'est élémentairement équivalent à aucun des corps $M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 < \rho \leqq \infty$, ou $\overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 \leqq \rho < \infty$.

Démonstration. Supposons que $M(\underline{\underline{R}}) \equiv F$ où $F = M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 < \rho \leqq \infty$ ou $F = \overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 \leqq \rho < \infty$.

La formule qui définit $\underline{\underline{N}}$ dans $M(\underline{\underline{R}})$ définit dans F un sous-ensemble ordonné N' de $\underline{\underline{R}}$ qui est $\equiv \underline{\underline{N}}$, et donc, puisque $\underline{\underline{R}}$ est archimédien, $N' = \underline{\underline{N}}$.

Si $F = M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $1 < \rho \leqq \infty$, ou $F = \overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $1 \leqq \rho < \infty$, l'ensemble défini dans la démonstration de la proposition 2.6 est égal à l'ensemble S des fonctions bijectives de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{R}}$ telles que toute valeur réelle est prise avec la multiplicité 1.

Dans le cas $F = M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 < \rho \leqq 1$ ou $F = \overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 \leqq \rho < 1$ l'ensemble correspondant défini par la même formule contient manifestement les fonctions bijectives de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{R}}$ pour lequelles toute valeur est prise avec la multiplicité 1.

L'énoncé

$$\Phi\colon \forall f \in \mathcal{B}\ \exists g \neq 0 (\forall n \in \underline{\underline{N}}\ \exists c \in \underline{\underline{R}}^+,\ c(f-n)^2 - \frac{g^2}{1+g^2} \in \mathcal{P})$$

est satisfait dans $M(\underline{\underline{R}})$.

En effet, chaque $f \in \mathcal{B}$ est une fonction continue monotone de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{R}}$; la suite (a_n), $n \in \underline{\underline{N}}$, définie par $f(a_n) = n$ est une partie discrète de $\underline{\underline{R}}$ et par conséquent l'ensemble des zéros d'une fonction entière $g \in E(\underline{\underline{R}}) \subset M(\underline{\underline{R}})$. Maintenant, on vérifie aisément que la partie entre parenthèses de Φ est satisfaite par cette fonction g.

Cependant, Φ n'est satisfait dans aucun des corps F ci-dessus. Si $F = M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $1 < \rho \leqq \infty$, ou $F = \overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $1 \leqq \rho < \infty$, la fonction $f = f(x) = \sinh(x)$, (où $\sinh$ désigne le sinus hyperbolique) appartient à $\mathcal{B}$, mais il n'existe aucune fonction méromorphe g d'ordre fini dont l'ensemble des zéros est égal à la suite $\sinh^{-1}(n) = (\log(n+\sqrt{1+n^2}))$, $n \in \underline{\underline{N}}$, parce que l'exposant de convergence de cette suite est infini.

Si $F = M_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 < \rho \leqq 1$ ou $F = \overline{M}_\rho(\underline{\underline{R}})$, $0 \leqq \rho < 1$ on considère la fonction $f = x$ et on utilise le fait que la suite (n), $n \in \underline{\underline{N}}$, n'est pas l'ensemble des zéros d'une fonction méromorphe d'ordre < 1.

Remarque 2.8. On déduit facilement d'un résultat de Bauval (1) que tout corps infini K contient un sous-corps dénombrable K' tel que $K(X) \equiv K'(X)$. L'assertion correspondante pour les corps M(K) n'est pas vraie: Pour tout sous-corps propre K de $\mathbb{R}$ on a $M(K) \not\equiv M(\mathbb{R})$. On peut distinguer M(K) et $M(\mathbb{R})$ en exprimant que l'ensemble $\mathcal{B}$ défini ci-dessus est vide si $K \subsetneq \mathbb{R}$.

Bibliographie

1. A. BAUVAL, La théorie du premier ordre des anneaux de polynômes sur des corps, Thèse 3ème cycle, Univ. Paris VII, 1983.
2. J. BECKER, C.W. HENSON, L.A. RUBEL, First-order conformal invariants, Ann. of Math., 112 (1980), 123-178.
3. É. BOREL, Leçons sur les fonctions entières, Gauthier-Villars, Paris, 1921.
4. F. DELON, Indécidabilité de la théorie des anneaux de séries formelles à plusieurs indéterminées, Fund. Math., 112 (1981), 215-229.
5. O. HELMER, Divisibility properties of integral functions, Duke Math. J., 6 (1940), 38-47.
6. A. HURWITZ, Über beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen, Acta Math., 14 (1890), 211-215.
7. C.U. JENSEN, Propriétés homologiques et logiques des anneaux de fonctions entières, C.R. Acad. Sci. Paris 291 (1980), 515-517.
8. C.U. JENSEN, La dimension globale de l'anneau des fonctions entières, C.R. Acad. Sci. Paris, 294 (1982), 385-386.
9. C.U. JENSEN, L'indécidabilité d'une classe de corps des fonctions méromorphes, C.R. Acad. Sci. Canada, 5 (1983), 69-74.
10. R. ROBINSON, Undecidable rings, Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 137-159.
11. R. ROBINSON, The undecidability of pure transcendental extensions of real fields, Z. Math. Logik Grundlagen Math., 10 (1964), 275-282.

12. L.A. RUBEL, Solution of Problem 6117, Amer. Math. Monthly, 85 (1978), 505-506.

13. E.C. Tichmarsch, The theory of functions, Oxford University Press, 1939.

14. J.H.M. WEDDERBURN, On matrices whose coefficients are functions of a single variable, Trans. Amer. Math. Soc., 16 (1915), 328-332.

Matematisk Institut
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø
DANEMARK

Notes

(1) Pour $K \subseteq \underline{\underline{R}}$, l'anneau $E(K)$ est un anneau de Bézout de rang stable égal à 2 .

(2) Soit R l'anneau $E_\rho(K)$, $0 < \rho \leq \infty$, $K = \underline{\underline{R}}$ ou $K = \underline{\underline{C}}$; l'ensemble K des constantes et celui $\mathscr{L}$ des fonctions linéaires non nulles sont définissables dans R ; alors $\underline{\underline{N}}$ est définissable dans R par la formule en α

$$(\alpha \in K) \wedge \Big\{ (\forall u \in \mathscr{L})\ (\forall v)\ \Big[[(u \mid v) \wedge (\forall p \in K)((u+p \mid v) \rightarrow (u+p+1 \mid v))] \rightarrow (u+\alpha \mid v) \Big] \Big\}$$

$$\wedge \Big\{ (\exists f \in \mathscr{L})\ (\exists g \neq 0))\ (f \mid g) \wedge (\forall \gamma \in K)\ \big[(f+\gamma \mid g) \rightarrow ((f+\gamma+1 \mid g) \vee (\gamma = \alpha)) \big] \Big\}$$

Preuve: $\Rightarrow$ Clair (on prend $f = X$, $g = X(X+1)\ldots(X+\alpha)$).

$\Leftarrow$ Soit α vérifiant cette formule;

-pour $\rho \geq 1$, en prenant $u = X$ et v une fonction de R ayant $\underline{\underline{N}}$ pour ensemble de zéros, on voit que $\alpha \in \underline{\underline{N}}$.

-pour $\rho < 1$, supposons $\alpha \notin \underline{\underline{N}}$, alors il existerait $g \in R$, $g \neq 0$, ayant tous les entiers pour zéros; c'est impossible pour une fonction d'ordre 1 .