MÉMOIRES DE LA S. M. F.

M. S. KHALGUI

Caractères des représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 219-253

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__219_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n°15,1984,p. 219-253

CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE CONNEXE

M. S. KHALGUI

FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CAMPUS UNIVERSITAIRE
1060 TUNIS
TUNISIE

RÉSUMÉ :

Soient G un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et T une représentation factorielle normale de G dont le noyau dans $C^*(G)$ est égal au noyau de l'une des représentations irréductibles de G construites par Duflo.

On associe à T une R-orbite Ω dans le dual de $\mathfrak{g}$. Dans le cas où la sous-algèbre $\mathfrak{g}(g)$ $(g \in \Omega)$ est nilpotente, on montre que T a un caractère distribution relativement au bicommutant $T(G)''$ si et seulement si Ω est tempérée.

Dans ce cas, on a une formule de caractère de Kirillov. Ces résultats généralisent les résultats analogues obtenus dans le cas où G est résoluble et dans le cas où T est irréductible normale.

ABSTRACT :

Let G be a real connected Lie group, $\mathfrak{g}$ it's Lie algebra, T a factor normal representation of G such that the kernel of T in $C^*(G)$ is equal to the kernel of one of the irreducible representations of G constructed by Duflo. We associate to T a R-orbit Ω in the dual of $\mathfrak{g}$. When the stabilizer $\mathfrak{g}(g)$ of g $(g \in \Omega)$ in $\mathfrak{g}$ is nilpotent, we prove that T has a distribution character if and only if Ω is tempered, and in this case we have a Kirillov's character formula. These results generalise the results obtained in the case G solvable and the case T irreducible normal representation of G.

CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES

PLAN

- INTRODUCTION

0 - TABLE DES NOTATIONS

I - PRÉLIMINAIRES

II - R-ORBITES DANS $\mathfrak{g}^*$

III - CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES D'UN GROUPE DE LIE ([Kh,3])

IV - REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE [Pu,5].

V - CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE.

INTRODUCTION

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$, T une représentation (unitaire) irréductible de G. Kirillov a conjecturé le résultat suivant : Il existe une G-orbite Ω pour l'action de la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, et une fonction P_Ω G-invariante, de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}$ et telle que $P_\Omega(0) = 1$ de telle sorte que l'on ait :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{tr}\, T(\exp X) = \int_\Omega P_\Omega(X)^{-1} e^{i\langle g,x\rangle} d\beta_\Omega(g) \qquad \text{(T.14)}$$

au voisinage de l'origine dans $\mathfrak{g}$.

Cette formule a été démontrée progressivement et sous des hypothèses convenables dans les cas suivants : dans le cas nilpotent [Ki], dans le cas compact [Ki] ; [Pu,1], dans le cas résoluble [Pu,2], [Di,1], [Kh,1], dans le cas réductif [Ro], dans le cas moyennable [Kh,2] et dans le cas général [Kh,3].

Dans le chapitre III, on donne un énoncé plus général que celui de [Kh,2] et [Kh,3]. Plus précisément, soient g une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X_G^{irr}(g)$ (cet ensemble est défini au §. III), $T = T^G_{g,\tau}$ la représentation associée à (g,τ) par M. DUFLO, et $\Omega = G \cdot g$. Supposons $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$ (T.11) et $\dim(\tau) < +\infty$. Alors l'orbite Ω est tempérée (T.18) si et seulement si T a un caractère distribution, et dans ce cas, on a la formule suivante au voisinage de l'origine :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{tr}(T(\exp X)) = \dim(\tau) \int_\Omega j(X)^{-1} e^{i\langle g,X\rangle} d\beta_\Omega(g)$$

où j est la fonction définie sur $\mathfrak{g}$ par :

$$j(X) = \left(\det\left(\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ad}X/2)}{\mathrm{ad}X/2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Dans [Kh,1], suivant une suggestion de L. Pukanszky, on a montré dans le cas d'un groupe de Lie résoluble connexe, que la formule (1) reste encore valable pour une représentation factorielle normale T de G associée à une R-orbite Ω (comme dans [Pu,3]) tempérée dans $\mathfrak{g}^*$ (T.18).

Le but du présent travail est de montrer que ce résultat s'étend aux représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe quelconque.

Plus précisément, soit T une représentation factorielle normale de G telle que $\ker T = \ker T^{G}_{g,\tau}$ où g est une forme linéaire admissible, bien polarisable sur $\mathfrak{g}$, $\tau \in X^{irr}_{G}(g)$, et $T^{G}_{g,\tau}$ est la représentation irréductible associée à (g,τ) par DUFLO. Cette représentation est unique à quasi-équivalence près. On note Ω la R-orbite contenant g . La R-orbite Ω ne dépend que de T et elle est appelée la R-orbite associée à T (cf. V.1). Sur Ω , il existe une mesure de Radon positive G-invariante $d\beta$ unique à une constante > 0 près (cf. II.2).

Supposons $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$. Alors la R-orbite Ω est tempérée si et seulement si la représentation T a un caractère distribution relativement au bicommutant $T(G)''$ de $T(G)$. De plus, dans ce cas si t est une trace (normale fidèle semi-finie) sur $T(G)''$, il existe une normalisation de $d\beta$ sur Ω de telle sorte que l'on ait :

$$t(T(\Psi)) = \int_{\Omega} (\Psi j^{-1})^{\wedge} (g)\, d\beta(g) \tag{3}$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V_{\varepsilon})$ (T.5) , où V_{ε} est un voisinage convenable de 0 dans $\mathfrak{g}$ (cf. th. V).

Pour prouver ces résultats, on utilise les résultats de Pukanszky [Pu,5] (cf. IV) sur les représentations factorielles normales et leurs caractères qui permettent de ramener ce problème au problème analogue (traité dans [Kh,2], [Kh,3], [Kh,4]) pour les représentations irréductibles normales d'un groupe de Lie connexe.

Le résultat précédent généralise le résultat analogue dans le cas résoluble [Kh,1] . Dans ce dernier cas la condition $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$ est inutile, par contre dans le cas général si cette condition n'est pas satisfaite les formules (1), (2), (3) ne sont pas vraies en général [Kh,2].

Dans le cas où T est une représentation irréductible normale, la R-orbite Ω est une G-orbite, la mesure $d\beta$ est proportionnelle à $d\beta_\Omega$ (T.14), la trace t est proportionnelle à la trace usuelle, et la formule (3) n'est autre que la formule (2) à la constante près en moins.

Je suis heureux de remercier M. DUFLO pour les multiples remarques et conseils qui m'ont aidé dans ce travail.

§. 0.- TABLE DES NOTATIONS

On utilise souvent dans ce texte les notations suivantes sans y faire référence.

T.1.- Si H est un groupe topologique, H_o désigne la composante connexe de l'élément neutre.

T. 2.- Soient H un groupe et K un sous-groupe de H, on note $[H : K]$ l'indice de K dans H.

T. 3.- Soient K un sous-groupe d'un groupe H, π la représentation unitaire de K et $h \in H$. On note $h \bullet \pi$ la représentation unitaire de $K' = h K h^{-1}$ définie par $k' \mapsto \pi(h^{-1}k' h)$ pour $k' \in K'$.

T. 4.- On note $\hat{H}$ l'espace des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de H.

On note $\widehat{H}$ l'espace des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de H.

On note $\widehat{H}_{norm}$ l'espace des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales de H.

T. 5.- On note $\mathcal{K}(H)$ l'espace des fonctions φ continues sur H à support compact.

Si H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et U est un ouvert dans H ou dans $\mathfrak{h}$, on note $\mathcal{D}(U)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans U.

T. 6.- Si Π est une représentation de H, $\varphi \in \mathcal{K}(H)$ et $d\mu_H$ est une mesure de

Haar à gauche sur H, on note $\Pi(\varphi) = \int_H \Pi(x)\varphi(x)\,d\mu_H(x)$. Si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H, $\Psi \in \mathcal{K}(\mathfrak{h})$ et dx est une mesure de Haar sur $\mathfrak{h}$, on note $\Pi(\Psi) = \int_{\mathfrak{h}} \Psi(x)\,\Pi(\exp x)\,dx$.

T. 7.- Soient H un groupe localement compact, $C^*(H)$ la C^*-algèbre de H, Π une représentation unitaire de H, on note encore Π la représentation associée à Π sur $C^*(H)$, $\ker \Pi$ son noyau dans $C^*(H)$ et $R(\Pi)$ l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\Pi(C^*(H))$ (cf [Di]).

T. 8.- On note $\mathrm{Prim}(H)$ l'ensemble des idéaux bilatères primitifs dans $C^*(H)$ (cf [Di]).

T. 9.- Soient H un groupe localement compact, $d\mu_H$ une mesure de Haar à gauche sur H, Δ_H la fonction module sur H et $\varphi \in \mathcal{K}(H)$. On note φ^* la fonction définie par :

$$\varphi^*(h) = \Delta_H(h)^{-1}\,\overline{\varphi(h^{-1})} \quad \text{pour } h \in H .$$

Si $\Psi \in \mathcal{K}(H)$, on note $\varphi * \Psi$ la fonction définie par :

$$\varphi * \Psi(h_o) = \int_H \varphi(h)\,\Psi(h^{-1}h_o)\,d\mu_H(h) \quad \text{pour } h_o \in H .$$

T. 10.- Soient H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, $d\mu_H$ une mesure de Haar à gauche sur H et dx une mesure de Haar sur $\mathfrak{h}$. On dit que ces deux mesures se correspondent si

$$d\mu_H(\exp x) = \det\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}x}}{\mathrm{ad}x}\right) dx .$$

T. 11.- Soient H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, agissant dans un espace V et $v \in V$ fixé. On note $H \cdot v$ l'orbite de v, $H(v)$ le stabilisateur de v dans H, et $\mathfrak{h}(v)$ l'algèbre de Lie de $H(v)$.

T. 12.- Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note V^* son dual. Si W est un sous-espace vectoriel de V, on note $W^{\perp}$ l'othogonal de W dans V^*. Si V est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ l'espace complexifié de V.

T. 13.- Si H est un groupe localement compact, on note $X(H)$ le groupe des homomorphismes continus de H dans le tore à une dimension. Si K est un sous-groupe fermé de H, on note $X(H/K)$ les éléments de $X(H)$ triviaux sur K.

T. 14.- Si H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et Ω une H-orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de la représentation coadjointe de H, on note $d\beta_\Omega$ la mesure canonique sur Ω normalisée comme en [Be, p. 18-19-20].

T. 15.- Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie et $h \in \mathfrak{h}^*$. On note B_h la forme bilinéaire antisymétrique définie par $B_h(X,Y) = h([X,Y])$ pour X et $Y \in \mathfrak{h}$. On note aussi B_h la forme bilinéaire non dégénérée associée par passage au quotient par le noyau.

T. 16.- Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. D'après le théorème d'Ado, on peut identifier $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie de telle sorte que les éléments du plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ soient nilpotents. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique contenant $\mathfrak{g}$. Alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$. On note $\tilde{G}$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors G est fermé dans $\tilde{G}$ et on a $[\tilde{G}, \tilde{G}] = [G, G]$ (cf [Ch]).

T. 17.- Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G, et R une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathrm{Ind}_H^G(R)$ la représentation induite de R. Elle est définie par translations à gauche dans l'espace des fonctions φ de G dans $\mathcal{H}$ mesurables et vérifiant les relations suivantes :

$$\text{(i)} \qquad \varphi(xy) = \delta(y)^{\frac{1}{2}}\, R(y)^{-1}\, \varphi(x) \quad \text{pour } x \in G \text{ et } y \in H$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{G/H} |\varphi(x)|^2\, dx < +\infty$$

où δ est le quotient des fonctions modules de G et H (cf par exemple [Be, chap. V]).

T. 18.- Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$,

Ω un sous-espace localement fermé muni d'une mesure de Radon positive G-invariante $d\beta$. On dit que Ω est tempérée s'il existe un nombre $M > 0$ et une norme $\| \ \|$ sur $\mathfrak{g}^*$ de telle sorte que :

$$\int_\Omega (1 + \|g\|)^{-M} d\beta(g) < +\infty$$

T. 19.- Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, et m une mesure de Radon positive sur V. Si $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, on définit $\hat{\varphi}$ sur V^* par :

$$\hat{\varphi}(v) = \int_V \varphi(x)\, e^{iv(x)}\, dm(x) \quad .$$

La mesure duale m^* de m est la mesure de Radon positive sur V^* définie par :

$$\varphi(0) = \int_{V^*} \hat{\varphi}(v)\, dm^*(v)$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

§. 1.- PRÉLIMINAIRES

I.1.- Soit G un groupe de Lie algèbrique linéaire dans $GL(E)$ où E est un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si ε est un réel > 0, on note $\mathcal{V}_\varepsilon = \{ X \in \mathfrak{g}$; les valeurs propres x de adX dans E vérifient $|\mathrm{Im}\, x| < \varepsilon \}$. Soit K un sous-groupe algébrique de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$.

Lemme 1 : Il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de K) tel que :

$$(X \in \mathcal{V}_\varepsilon \quad \text{et} \quad \exp X \in K) \longrightarrow X \in \underline{k} \quad .$$

Démonstration :

a) D'après un théorème de Chevalley (cf [Bo], p. 161), il existe une représentation rationnelle φ de G dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et un sous-espace D de dimension 1 dans F tel que :

$$K = \{x \in G \ / \ \varphi(x)\, D = D\}$$

$$k = \{x \in \mathfrak{g} / \ d\varphi(x)\, D \subset D\} \quad .$$

De plus par la construction de Chevalley de l'espace F, les valeurs propres de X dans F sont de la forme $y = x_{i_1} + \ldots + x_{i_\ell}$ où $x_1, \ldots, x_p$ sont les valeurs propres de X dans E. On choisit $\varepsilon = \frac{\pi}{\max p}$. Si $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$, les valeurs propres y de X dans F vérifient $|\mathrm{Im}\, y| < \pi$. On va montrer qu'alors le lemme 1 est satisfait avec ce voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon$.

b) Soit $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$ tel que $\exp X \in K$. On sait que $X = X_s + X_n$ où X_s est la composante semi-simple de X et X_n est la composante nilpotente de X, et en plus $\exp X = \exp X_s \exp X_n$, $\exp X_s \in K$ et $\exp X_n \in K$. (cf [Ch] par exemple).
On a : $X_n \in \underline{k}$. En effet, on a, d'après a), $\varphi(\exp X_n) \cdot D = D$ puisque $\exp X_n \in K$; et donc, si $d \in D$, on a $(\exp X_n) \cdot d = \lambda d$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Vu que X_n est nilpotent, $\exp X_n$ est unipotent, et par conséquent, on a $(\exp X_n) \cdot d = d$ pour tout $d \in D$. Comme $X_n \in \mathcal{V}_\varepsilon$, ceci prouve que $X_n \in \underline{k}$ ([Be], p. 4).
Ce qui précède nous permet de nous ramener au cas où X est semi-simple.

c) Supposons que X est semi-simple, $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$ et $\exp X \in K$.
Comme X est semi-simple, on a $F_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} F_\lambda$, où Σ est l'ensemble des valeurs propres de X deux à deux distinctes. Si λ et μ sont différentes dans Σ, $\exp \lambda$ et $\exp \mu$ sont alors des valeurs propres différentes de $\exp X$.
En effet si $\exp \lambda = \exp \mu$, on a $\mathrm{Re}\, \lambda = \mathrm{Re}\, \mu$ et $\mathrm{Im}\, \lambda - \mathrm{Im}\, \mu \in 2\pi\, \mathbb{Z}^*$, et ceci est en contradiction avec $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Pour tout $\lambda \in \Sigma$, F_λ est donc l'espace propre de $\exp X$ correspondant à $\exp \lambda$. Comme $\exp X \in K$, d'après a), $\exp X$ laisse invariant D, et donc il existe $\lambda \in \Sigma$ tel que $D \subset F_\lambda$.
On a donc $d\varphi(X)\, D \subset D$, et par conséquent d'après a), on a $X \in \underline{k}$. <u>cqfd</u>

I.2.- Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent dans $\mathfrak{g}$, $\mathcal{L} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$, L le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathcal{L}$, $g \in \mathfrak{g}^*$, $G(g)$ le stabilisateur de g dans G, K un sous-groupe fermé de G tel que $G(g)_o L \subset K \subset G(g)L$. L'algèbre de Lie $\underline{k}$ de K est égale à $\mathfrak{g}(g) + \mathcal{L}$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note $V_\varepsilon = \{X \in \mathfrak{g}$; les valeurs propres x de $\mathrm{ad}X$ vérifient $|\mathrm{Im}\, x| < \varepsilon\}$.

__Lemme 2__ : Il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(X \in V_\varepsilon \text{ et } \exp X \in K) \Longrightarrow X \in \underline{k} \ .$$

De plus on peut choisir ε ne dépendant que de $g|_{\mathfrak{L}}$ car $G(g)L$ ne dépend que de $g|_{\mathfrak{L}}$.

__Démonstration__ :

Utilisant (T.16), on voit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie algébrique. D'après [Ch, p. 228], $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Soit $\bar{G}$ le groupe adjoint algébrique de G , et soit $\bar{L}$ l'adhérence algébrique de AdL dans $\bar{G}$. On note $\bar{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\bar{G}$ et $\bar{\mathfrak{L}}$ l'algèbre de Lie de $\bar{L}$. Il est facile de voir qu'on a $\bar{\mathfrak{L}} = \mathrm{ad}(\mathfrak{L})$. On note H le groupe $\bar{G}(g)\bar{L}$. C'est un sous-groupe fermé (au sens de Zariski) dans $\bar{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{g}}(g) + \bar{\mathfrak{L}}$.

D'après le lemme 1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la condition $(X \in V_\varepsilon$ et $\exp(\mathrm{ad}\, X) \in H)$ entraîne $\mathrm{ad}\, X \in \mathfrak{h}$. Par hypothèse supposons que $X \in V_\varepsilon$ et $\exp X \in K$. Il en résulte que $\exp(\mathrm{ad}\, X) = \mathrm{Ad}(\exp X) \in \mathrm{Ad}\, K$. Comme $\mathrm{Ad}\, K$ est inclus dans H , ce qui précède montre que $\mathrm{ad}\, X \in \mathfrak{h}$.

Comme $X \in \mathfrak{g}$ et comme $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap (\bar{\mathfrak{g}}(g) + \bar{\mathfrak{L}}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L})$ et $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{g}}(g) + \bar{\mathfrak{L}}$, on a $\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L})$. Puisque par définition $\mathfrak{L}$ contient le centre de $\mathfrak{g}$, on obtient $X \in \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L}$, ce qui permet de conclure puisque $\underline{k} = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L}$. __cqfd__

I.3.- Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathfrak{gl}(E)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de E , et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(E)$. Soit $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, algèbrique dans $\mathfrak{gl}(E)$ et contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On pose $\underline{k} = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L}$ (T.11) , $k = g|_{\underline{k}}$, $\ell = g|_{\mathfrak{L}}$.

Lemme 3 : L'algèbre de Lie $\mathcal{G}(g)$ est nilpotente si et seulement si l'algèbre de Lie $\underline{k}(k)$ est nilpotente.

Démonstration :

a) Utilisant l'égalité $\underline{k} = \mathcal{G}(g) + \mathcal{L}$, il est facile de voir que $\mathcal{L}(k) = \mathcal{L}(\ell)$, et donc que $\underline{k}(k) = \mathcal{G}(g) + \mathcal{L}(\ell)$.

Il est alors clair que si $\underline{k}(k)$ est nilpotente, $\mathcal{G}(g)$ est nilpotente.

Supposons dans la suite que $\mathcal{G}(g)$ est nilpotente, et montrons qu'alors $\underline{k}(k)$ est nilpotente.

b) Comme $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie algébrique, $\mathcal{L}(\ell)$ est aussi algébrique.

Alors $\mathcal{L}(\ell)$ est égal à $\underline{r} + \underline{u}$ où $\underline{u}$ est le radical unipotent de $\mathcal{L}(\ell)$ et $\underline{r}$ est un facteur réductif de $\mathcal{L}(\ell)$ (cf [Mo]).

Comme $[\underline{r}, \mathcal{L}]$ est inclus dans $\mathcal{L}$, il existe un sous-espace supplémentaire $\underline{p}$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{G}$ tel que $[\underline{r}, \underline{p}]$ soit inclus dans $\underline{p}$. Comme $\mathcal{L}$ contient $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, on a $[\underline{r}, \underline{p}] = \{0\}$. Ceci prouve que $\underline{r}$ est inclus dans $\mathcal{L}(g)$, et par conséquent $\mathcal{L}(\ell) = \mathcal{L}(g) + \underline{u}$.

D'autre part, comme $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est inclus dans $\mathcal{L}$, $[\mathcal{G}(\ell), \mathcal{G}(\ell)]$ est inclus dans $\mathcal{L}(g)$.

Ces deux dernières remarques montrent que $\mathcal{L}(\ell) = \mathcal{L}(g) + \underline{u}$, et de plus $\mathcal{L}(g)$ et $\underline{u}$ sont des idéaux dans $\mathcal{L}(\ell)$.

Par hypothèse $\mathcal{G}(g)$ est nilpotente, donc $\mathcal{L}(g)$ est nilpotente. Donc $\mathcal{L}(\ell)$ est nilpotente, car elle est somme de deux idéaux nilpotents. On a vu dans a) que $\underline{k}(k)$ est égale à $\mathcal{G}(g) + \mathcal{L}(\ell)$. Utilisant la relation $[\mathcal{G}(\ell), \mathcal{G}(\ell)] \subset \mathcal{L}(g)$, on voit que $\mathcal{G}(g)$ et $\mathcal{L}(\ell)$ sont des idéaux dans $\underline{k}(k)$. On a prouvé plus haut que $\mathcal{L}(\ell)$ est nilpotente, et par hypothèse $\mathcal{G}(g)$ est nilpotente. Par conséquent $\underline{k}(k)$ est somme de deux idéaux nilpotents, et donc $\underline{k}(k)$ est nilpotente.

<u>cqfd</u>

I.4.- Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$ un idéal dans $\mathcal{G}$, L le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathcal{L}$, $g \in \mathcal{G}^*$ et $\ell = g|_{\mathcal{L}}$.

D'après ([Pu, 6], p. 10 et p. 30), on a le lemme suivant :

Lemme 4 :

a) $L(\ell)_o \bullet g = g + (\mathcal{L} + \mathfrak{g}(\ell))^{\perp}$ (T.11, T.12, T.1)

b) Si de plus $\mathcal{L}$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a :

$$G(\ell)_o \bullet g = g + (\mathcal{L} + \mathfrak{g}(g))^{\perp} \quad .$$

§ II.- R-ORBITE DANS $\mathfrak{g}^*$.

II.1.- Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient G' un revêtement simplement connexe de G , et $\tilde{G}$ le groupe de Lie associé à G' comme en (T.16).

Si g est dans $\mathfrak{g}^*$ (T.12), l'orbite $G \bullet g$ est égale à $G' \bullet g$ et donc est incluse dans $\tilde{G} \bullet g$. De plus l'orbite $\tilde{G} \bullet g$ est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$, puisque l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de G est algébrique (cf par exemple [Bo, p. 98]).

Comme dans [Pu, 3, p. 521], on définit une unique relation d'équivalence R sur $\mathfrak{g}^*$ vérifiant ce qui suit :

1) Deux éléments g_1 et g_2 dans $\mathfrak{g}^*$ sont R-équivalents si $g_1 \in \overline{G \bullet g_2}$ où $\overline{G \bullet g_2}$ est l'adhérence de $G \bullet g_2$ dans $\tilde{G} \bullet g_2$.

2) Toute R-orbite Ω est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$ de plus, pour tout $g \in \Omega$, $G \bullet g$ est dense dans Ω , et on a $G \bullet g = \Omega$ si et seulement si la G-orbite $G \bullet g$ est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$.

3) Soit Ω une R-orbite. Pour $g \in \Omega$, notons G_1 la composante neutre de l'adhérence (pour la topologie ordinaire) de $\tilde{G}(g)G'$ dans $\tilde{G}$. Alors G_1 est indépendant du choix de g dans Ω , et on a : $\Omega = G_1 \bullet g$.

II.2.- **Lemme 5** : ([Pu, 3]) Soit Ω une R-orbite dans $\mathfrak{g}^*$. Il existe alors une mesure $d\beta$ sur Ω de Radon, positive, non nulle, G-invariante, et unique à une constante strictement positive près.

Démonstration :

a) D'après II.1, Ω est localement fermé dans $\mathfrak{g}^*$, et $\Omega = G_1 \cdot g (g \in \Omega)$. La R-orbite Ω est alors homéomorphe à $G_1/G_1(g)$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une mesure de Radon, positive, G-invariante, non nulle, et unique à une constante strictement positive près sur $G_1/G_1(g)$.

b) Soient $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie de G_1 et $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$. On a $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$ (T.16). Notons $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et H le sous-groupe de $\tilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Si x est un élément de $G_1(g)$, on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1} x) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}} x) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} x)$$

et

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1(g)} x) = \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}(g)} x = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}(g)} x) .$$

Par conséquent, pour tout $x \in G_1(g)$, on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(g)} x) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)} x) .$$

Vu que $B_g : (X,Y) \mapsto g([X,Y])$ définit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$ une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée, pour tout x dans $G_1(g)$ on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)} x) = 1 .$$

Ce qui précède montre qu'alors pour tout x dans $G_1(g)$ on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(g)} x) = 1 .$$

Par conséquent, il existe une mesure de Radon positive non nulle G_1 - invariante sur $G_1/G_1(g)$ unique à un scalaire positif près.

c) Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit de prouver que si μ est une mesure G-invariante sur $G_1/G_1(g)$, alors μ est une mesure G_1-invariante. Remarquons que puisque $\mathfrak{h}$ est algébrique, l'orbite $H \cdot g$ est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$ (cf [Bo, p. 98]) . Donc le groupe $G_1(g)H$, qui est le stabilisateur de $H \cdot g$ dans G_1 , est fermé dans G_1 . D'après b), on a pour tout $x \in G_1(g)$:

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(g)}(x)) = 1 \quad .$$

En identifiant $G_1(g)H/G_1(g)$ et $H/H(g)$, on en déduit qu'il existe une mesure λ sur $H/H(g)$ non nulle et invariante par $G_1(g)H$. Dans ces conditions à la mesure μ (d'après [Be, II.3.4]) on peut associer une mesure ν sur le groupe $G_1/G_1(g)H$ telle que l'on ait, pour tout φ $d\mu$- intégrable sur $G_1/G_1(g)$:

$$\int_{G_1/G_1(g)} \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{G_1/G_1(g)H} \left(\int_{H/H(g)} \varphi(xy)\, d\lambda(y)\right) d\nu(x).$$

La mesure μ est invariante par G , par conséquent la mesure ν est invariante par l'image de G dans $G_1/G_1(g)H$ par l'application canonique de G_1 dans $G_1/G_1(g)H$. Comme $G \cdot g$ est dense dans $G_1 \cdot g$ et $G_1 \cdot g/H$ est homéomorphe à $G_1/G_1(g)H$, l'image de G dans $G_1/G_1(g)H$ est dense dans $G_1/G_1(g)H$. Il résulte de ceci l'invariance de ν par $G_1/G_1(g)H$, et donc l'invariance de μ par G_1 , ce qui permet de conclure.

II.3.- Supposons de plus G simplement connexe. Soient $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{L} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$, et L le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ dans G .
Soient Ω une R-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, $g \in \Omega$, $\underline{k} = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L}$, $K_o = G(g)_o L$, $k = g|_{\underline{k}}$, $\ell = g|_{\mathfrak{L}}$, $\Omega_{K_o} = K_o \cdot k$. Notons M le groupe $G(\ell)_o\, G_1(g)\, L$.

Lemme 6 :

1°) Le groupe M est indépendant du choix de g dans l'image réciproque dans $\mathfrak{g}^*$ de $\tilde{G} \cdot \ell$ (et en particulier du choix de g dans Ω) .

2°) Soit $H = G_1(k)$. Alors on a : $H = G(\ell)_o\, G_1(g)$.
De plus, on a : $M = HK_o = K_oH$.

3°) Le groupe M est fermé dans G_1 .

Démonstration :

a) Remarquons tout d'abord que, si g_1 et g_2 sont dans $\mathcal{G}^*$ et la restriction de g_1 à $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ est égale à la restriction de g_2 à $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$, alors on a pour tout $x \in \tilde{G}$, $x \bullet g_1 - g_1 = x \bullet g_2 - g_2$. Il en résulte l'égalité $G_1(g_1) = G_1(g_2)$, ce qui permet de prouver le 1°) du lemme.

b) D'après le lemme 4, on a : $G(\ell)_o \bullet g = g + \underline{k}^{\perp}$ (T.12). On en déduit l'égalité $G_1(k) = G(\ell)_o\, G_1(g)$. On peut alors conclure pour le 2°) du lemme.

c) L'orbite Ω_{K_o} est égale à $L \bullet k$ (puisque $K_o = G(g)_o\, L$). Comme l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est algébrique (T.16), on en déduit que Ω_{K_o} est localement fermée dans $\underline{k}^*$. Le stabilisateur de Ω_{K_o} dans G_1 est alors fermé. Il est égal à $G_1(k)K_o$ (= M d'après 2°)). Ceci montre le 3°) du lemme. <u>cqfd</u>

D'après le lemme précédent le sous-groupe M est fermé dans G_1. De plus il contient le sous-groupe L. Le quotient G_1/M est donc un groupe et de plus il existe une mesure de Radon positive G_1-invariante sur G_1/M, unique à une constante positive près.

Soient dX et dY des mesures de Haar respectivement sur $\mathcal{G}$ et $\underline{k}$ et $d\zeta$ la mesure de Haar sur $\underline{k}^{\perp}$ (T.12) duale (T.19) de la mesure quotient dX/dY.

On note $d\beta_{\Omega_{K_o}}$ la mesure canonique sur Ω_{K_o} (T.14).

Dans ces conditions, on a le lemme suivant :

<u>Lemme 7</u> : Soit $d\tilde{\mu}$ une mesure de Radon, positive, G_1-invariante sur G_1/M. Il existe alors une seule mesure de Radon $d\beta$, positive, G-invariante sur Ω telle qu'on ait pour toute fonction θ $d\beta$-intégrable sur Ω :

$$\int_{\Omega} \theta(g')\, d\beta(g') = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} \theta(x \bullet (k'' + \sigma))\, d\zeta(\sigma)$$

(où k'' est un représentant de k' dans $\mathcal{G}^*$).

Démonstration :

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 5.1.5 de [Kh, 1] en remplaçant le groupe $\mathfrak{g}$ de [Kh, 1] par G_1. On va la rappeler brièvement. D'après le lemme 4, on a : $H \bullet g = g + \underline{k}^{\perp}$. On identifie alors $H/G_1(g)$ et $g + \underline{k}^{\perp}$. Soient $d\mu_{G_1(g)}$ et $d\mu_H$ des mesures de Haar à gauche sur $G_1(g)$ et H respectivement. D'après [Be, II.4.5], $d\mu_{H,G_1(g)}$ est une mesure H-invariante sur $H/G_1(g)$ (ceci découle du fait que H opère par translation dans $g + \underline{k}^{\perp}$). Les deux mesures suivantes ν_1 et ν_2 sont invariantes par H :

$$\nu_1 : \varphi \mapsto \int_{\underline{k}^{\perp}} \varphi(g + \sigma)\, d\zeta(\sigma)$$

$$\nu_2 : \varphi \mapsto \int_{H/G_1(g)} \varphi(x \bullet g)\, d\mu_{H/G_1(g)}(\dot{x}) .$$

Elles sont donc proportionnelles. Pour $d\mu_{G_1(g)}$ fixée, on peut donc choisir $d\mu_H$ telle que :

$$\int_{\underline{k}^{\perp}} \varphi(g + \sigma)\, d\zeta(\sigma) = \int_{H/G_1(g)} \varphi(x \bullet g)\, d\mu_{H,G_1(g)}(\dot{x})$$

pour toutes les fonctions φ $d\zeta$-intégrables sur $g + \underline{k}^{\perp}$.
D'après le lemme 5, $G_1/G_1(g)$ possède une mesure G_1-invariante. D'après [Be, II.4.6], G_1/H possède une mesure G_1-invariante. Puisque G_1/M possède une mesure G_1-invariante, $M/G_1(g)$ et M/H possèdent des mesures M-invariantes. Utilisant $M = HK_o = K_oH$ (lemme 6), on peut identifier M/H et $K_o/K_o(k)$. D'autre part on peut identifier $K_o/K_o(k)$ et Ω_{K_o}. On peut choisir dans ces conditions une mesure de Haar à gauche $d\mu_M$ sur M telle que $d\beta_{\Omega_{K_o}}$ soit l'image de $d\mu_{M,H}$ par l'isomorphisme qui identifie M/H et Ω_{K_o}. De ces conditions, si $d\mu_{M,G_1(g)}$ est la mesure induite par $d\mu_M$ et $d\mu_{G_1(g)}$ sur $M/G_1(g)$, on a l'égalité suivante :

$$(1) \qquad \int_{M/G_1(g)} \Psi(x \bullet g)\, d\mu_{M,G_1(g)}(\dot{x}) = \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} \Psi(k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma)$$

pour toute fonction Ψ définie sur $M \cdot g$ et telle que $(x \mapsto \Psi(x \cdot g))$ soit $d\mu_{M,G_1(g)}$ - intégrable sur $M/G_1(g)$ (où k'' est un représentant de k' dans $\mathfrak{g}^*$). D'après ce qui précède on a une mesure M-invariante $d\mu_{M,G_1(g)}$ sur $M/G_1(g)$. Par hypothèse, on a une mesure $d\tilde{\mu}$ sur G_1/M invariante par G_1. Il existe donc une seule mesure de Haar à gauche $d\mu_{G_1}$ sur G_1 de telle sorte que la mesure $d\mu_{G_1,G_1(g)}$ sur $G_1/G_1(g)$ vérifie la condition suivante :

$$(2) \quad \int_{G_1/G_1(g)} \alpha(x)\, d\mu_{G_1,G_1(g)}(\dot{x}) = \int_{G_1/M} \left(\int_{M/G_1(g)} \alpha(xy)\, d\mu_{M,G_1(g)}(\dot{y})\right) d\tilde{\mu}(\dot{x})$$

pour toute fonction α sur $G_1/G_1(g)$ $d\mu_{G_1,G_1(g)}$ - intégrable. On identifie Ω et $G_1/G_1(g)$, et on note $d\beta$ l'image de la mesure $d\mu_{G_1,G_1(g)}$ sur Ω. En utilisant (1) et (2), on voit que l'on peut conclure. cqfd

§ III.- CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES D'UN GROUPE DE LIE G [Kh, 3].

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que V soit G-invariant, tel que l'application $X \mapsto \exp X$ soit un difféomorphisme de V sur $\exp(V)$ et tel que pour tout $X \in V$ on ait $|\mathrm{Im}(x)| < \pi$ pour toute valeur propre x de $\mathrm{ad}(X)$.

Remarquons que cette hypothèse est vérifiée en particulier avec $V = \{X \in \mathfrak{g} / \mathrm{Im}(x) < \pi$ pour toute valeur propre x de $\mathrm{ad}X\}$ si la composante neutre du centre de G_o (T.1) est simplement connexe, et en particulier si G_o est simplement connexe.

Rappelons que si $g \in \mathfrak{g}^*$, on note $G(g)$ le stabilisateur de g dans G, $\mathfrak{g}(g)$ l'algèbre de Lie de $G(g)$, $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ le groupe symplectique associé à la forme bilinéaire induite par g (T.15), $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$, le groupe métaplectique associé à $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ si $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$ et $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)) = \{\pm 1\}$ si $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g) = \{0\}$, $G(g)^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x,m) dans $G(g) \times Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ tel que l'image de x et l'image de m dans

$Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ soient égales. Le groupe $G(g)^{\mathfrak{g}}$ est un revêtement à deux feuillets de $G(g)$. On note p la projection naturelle de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ sur $G(g)$, et ε l'élément non trivial du noyau de p. On dit que g est admissible s'il existe un caractère unitaire χ_g de $G(g)_o^{\mathfrak{g}} = p^{-1}(G(g)_o)$ de différentielle $ig|_{\mathfrak{g}(g)}$ et tel que $\chi_g(\varepsilon) = -1$. On note $X_G(g)$ (resp $X_G^{irr}(g)$) l'ensemble des classes de représentations unitaires (resp. unitaires irréductibles) τ de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ telles que la restriction de τ à $G(g)_o^{\mathfrak{g}}$ soit un multiple de χ_g. On dit que g est bien polarisable s'il existe une polarisation résoluble dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (T.12) en g vérifiant la condition de Pukanszky (complexe) (cf. [Du, 2] pour ces notions).

Au couple (g,τ) où g est admissible et bien polarisable et $\tau \in X_G(g)$, M. DUFLO associe une classe de représentations unitaires de G notée $T_{g,\tau}^G$ (cf [Du, 2]). En particulier $\tau \in X_G^{irr}(g)$ si et seulement si $T_{g,\tau}^G$ est irréductible.

Pour (g,τ) fixé, où g est une forme admissible et bien polarisable et $\tau \in X_G^{irr}(g)$, on note $T = T_{g,\tau}^G$. On note $\Omega = G \cdot g$, $d\beta_\Omega$ la mesure canonique sur Ω (T.14).

Dans ces conditions, on a le résultat suivant :

__Théorème__ : Supposons $\dim \tau < +\infty$ et $\mathfrak{g}(g)$ (T.11) nilpotente ($g \in \Omega$). Alors la représentation T a un caractère distribution si et seulement si l'orbite Ω est tempérée. Dans ce cas, on a l'identité suivante :

$$(*) \qquad \operatorname{tr} T(\Psi) = \dim(\tau) \int_\Omega (\Psi j^{-1})^\wedge(g)\, d\beta_\Omega(g)$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)$ (T.5, T.6), où j est la fonction définie dans l'introduction.

__Démonstration__ :

Ce théorème est démontré essentiellement dans [Kh, 3]. En effet dans [Kh,3], on démontre que si l'orbite Ω est tempérée et en plus l'orbite Ω est fermée, alors T a un caractère distribution et la formule (*) est vraie. Ce résultat reste vrai sans l'hypothèse Ω fermée. Cette dernière a été posée pour appliquer le lemme 6 de [Du, 2] à un idéal contenant l'algèbre dérivée. L'hypothèse Ω fermée dans ce lemme est utilisée pour pouvoir déduire, avec les notations de [Du, 2], $B(f_1) \cdot f = f + \underline{k}^{\perp}$, or cette égalité est toujours vraie pour un idéal contenant l'algèbre dérivée d'après le lemme 4 du § I., et donc le lemme 6 de [Du, 2] est vrai pour un tel idéal. La même démonstration que [Kh, 2] et [Kh, 3] permet alors de conclure que si l'orbite Ω est tempérée alors T a un caractère distribution et (*) est vraie. Réciproquement, supposons que T a un caractère distribution. Les mêmes démonstrations que ([Kh, 2], p. 352) et ([Kh, 3], p. 69) permettent de prouver qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel qu'on ait :

$$\int_\Omega \hat{\Psi}(g)\, d\beta_\Omega(g) < +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} T(\Psi j) = \dim(\tau) \int_\Omega \hat{\Psi}(g)\, d\beta_\Omega(g)$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(U)$. En utilisant le théorème 7.2 de [Di, Ma], on montre qu'alors :

$$\int_\Omega \hat{\Psi}(g)\, d\beta_\Omega(g) < +\infty$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$, et donc $\int_\Omega \theta(g)\, d\beta_\Omega(g) < +\infty$ pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$. D'après le théorème du graphe fermé, l'application $(\theta \mapsto \theta|_\Omega)$ est continue de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $L^1(\Omega, d\beta_\Omega)$, et donc l'application $(\theta \mapsto \int_\Omega \theta(g)\, d\beta_\Omega(g))$ est une distribution tempérée. D'après ([Sc], p. 242), l'orbite Ω est alors tempérée.

cqfd

§ IV.- REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES ET CARACTÈRES D'UN GROUPE DE LIE G (d'après L. PUKANSZKY).

Soient G un groupe de Lie connexe, $\widehat{G}_{norm}$ l'espace des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales de G (T.4), $\mathrm{Prim}(G)$ l'espace des idéaux primitifs de la C^*-algèbre de G (T.8). D'après [Pu, 5], l'application $T \mapsto \ker T$ de $\widehat{G}_{norm}$ dans $\mathrm{Prim}(G)$ est une bijection.

On sait aussi que $\widehat{G}_{norm}$ est en bijection canonique avec l'ensemble des caractères de G définis à une constante multiplicative strictement positive près (cf [Di]).

Supposons de plus G simplement connexe. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soient $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie algébrique choisie comme en (T.16) telle que $\mathfrak{g}$ soit une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$, $[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et $\tilde{G}$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors G est fermé dans $\tilde{G}$ et $[G, G] = [\tilde{G}, \tilde{G}]$ (T.16). Soient $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{L} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$, N et L les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{L}$ respectivement. Alors L est un sous-groupe fermé invariant connexe de type I dans G et dans $\tilde{G}$ ([Pu, 5]). Soit E une $\tilde{G}$-orbite dans $\hat{L}$. Pukanszky définit un sous-groupe fermé $K(E)$ de G contenant L qui a en particulier la propriété que tout $\lambda \in E$ s'étend en une représentation irréductible ρ de $K(E)$ telle que $\mathrm{Ind}_{K(E)\uparrow G}\, \rho$ soit une représentation factorielle de G ([Pu, 5], p. 86).

Posons $F(E) = \{\rho \in \widehat{K(E)} \;/\; \rho|_L \in E\}$ et $U = \bigcup_E F(E)$. Il existe alors une relation d'équivalence Σ sur U telle que $\rho_1 \,\Sigma\, \rho_2$ si et seulement s'il existe $E \in \hat{L}/\tilde{G}$ telle que ρ_1 et $\rho_2 \in F(E)$ et $\rho_2 \in \overline{G \cdot \rho_1}$ (adhérence dans $F(E)$ qui est un sous-espace localement compact séparé dans $\widehat{K(E)}$). Soit $\rho \in U$, on note $J(\rho) = \ker(\mathrm{Ind}\, \rho)$ dans $\mathrm{Prim}(G)$ (T.7, T.8). L'application $\rho \mapsto J(\rho)$ est surjective de U dans $\mathrm{Prim}(G)$, et on a $J(\rho_1) = J(\rho_2)$ si et seulement si $\rho_1 \,\Sigma\, \rho_2$. Soit $J \in \mathrm{Prim}(G)$, on pose $\mathcal{R}(J) = \{\rho \in U \;/\; J(\rho) = J\}$. C'est une Σ-orbite dans U. Soit $E = E(J)$ la $\tilde{G}$-orbite dans $\hat{L}$ associée à cette Σ-orbite. Le sous-groupe $K(E)$ sera noté $K(J)$. Alors $\mathcal{R}(J)$ est un sous-espace localement compact dans $\widehat{K(J)}$ ($\mathcal{R}(J) \subset F(J) = F(E)$). De plus $\mathcal{R}(J)$ est invariant sous l'action de G, et porte une mesure de Radon, positive, G-invariante μ unique à une constante > 0 près ([Pu, 5], p. 106).

D'après [Pu, 5], il existe une sous-algèbre B involutive, dense dans $C^*(G)$, contenant $\mathfrak{X}(G)$ (T.5) et vérifiant ce qui suit. Si T est une représentation factorielle normale de G, l'ensemble des opérateurs de la forme $T(f)$ $(f \in B^+ = B \cap C^*(G)^+)$ de trace finie engendre l'algèbre de Von Neumann $R(T)$ (T.7) . De plus, si t est une trace (normale fidèle semi-finie) sur $R(T)$ et $J = \ker T$ (T.7) , on peut normaliser la mesure μ sur $\mathcal{A}(J)$ de telle sorte que l'on ait :

$$t(T(f)) = \int_{\mathcal{A}(J)} tr(\rho(f|_{K(J)}))\, d\mu(\rho)$$

pour tout $f \in \mathfrak{X}(G)^+ = \mathfrak{X}(G) \cap C^*(G)^+$.

§ V.- CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE CONNEXE.

Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, g une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X_G^{irr}(g)$ et $T_{g,\tau}^G$ la représentation irréductible associée par M. DUFLO à (g,τ) (cf. III) . On note $J = \ker T_{g,\tau}^G$ (T.7) et $T = \mathcal{T}_{g,\tau}$ la classe de quasi-équivalence de représentations factorielles normales associées à J par la bijection de Pukanszky (cf IV), et t une trace (normale fidèle semi-finie) sur $R(T)$ (T.7) .

V.1.- R-orbite associée à T

On note Ω la R-orbite contenant g dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ (cf II).

Proposition et Définition : La R-orbite Ω ne dépend que de T . Plus précisément si (g,τ) et (g', τ') sont deux couples tels que $\mathcal{T}_{g,\tau} = \mathcal{T}_{g',\tau'}$ $(= T)$, alors g et g' sont dans la même R-orbite. Cette R-orbite est appelée la R-orbite associée à T .

On démontrera la proposition plus bas (cf V.3) en même temps que d'autres résultats nécessaires pour la suite.

V.2.- Supposons de plus G simplement connexe. On utilise dans la suite les notations de IV. On pose $E = E(J)$, $K = K(J)$, $F = F(J)$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(J)$. Soient $\underline{k}$ l'algèbre de Lie de K , et $\underline{k}^*$ le dual de $\underline{k}$. On note ℓ la

restriction de g à $\mathcal{L}$ et k la restriction de g à $\underline{k}$. D'après ([Kh, 4], IV.3.3), on peut associer à τ une représentation $\sigma \in X_L^{irr}(\ell)$ et une représentation $\tau_K \in X_K^{irr}(k)$ de telle sorte que $E = \tilde{G} \cdot T_{\ell,\sigma}^L$ où $T_{\ell,\sigma}^L$ est la représentation irréductible de L associée à (ℓ,σ), de plus si $T_{k,\tau}^K$ est la représentation irréductible de K associée à (k, τ_K), on a $T_{k,\tau_K}^K\big|_L = T_{\ell,\sigma}^L$, et les représentations $T_{g,\tau}^G$ et $\operatorname{Ind}_{K\uparrow G}(T_{k,\tau_k}^K)$ ont même noyau dans $C^*(G)$ (égal à J), et donc T_{k,τ_K}^K est dans $\mathcal{A}$. Soient K_o la composante connexe de l'unité dans K et $F_o = \{\rho_o \in \hat{K}_o \; ; \; \rho_o|_L \in E\}$. De la même façon que pour F, on montre que F_o est un sous-espace localement compact séparé dans $\hat{K}_o$, et de plus on a :
$F_o = \{\rho_o \in \hat{K}_o \; ; \text{ il existe } \rho \in F \text{ pour lequel } \rho|_{K_o} = \rho_o\}$ (cf [Pu, 5]).
Posons $\mathcal{A}_o = \{\rho_o \in \hat{K}_o \; ; \text{ il existe } \rho \in \mathcal{A} \text{ tel que } \rho|_{K_o} = \rho_o\}$.

<u>**Lemme 8**</u> : Pour tout $\rho_o \in \mathcal{A}_o$, on a : $\mathcal{A}_o = \overline{G \cdot \rho_o}$ (l'adhérence de $G \cdot \rho_o$ dans F_o).

<u>**Démonstration du lemme 8**</u> :

Il est facile de voir que si deux éléments ρ et ρ' de F ont la même restriction à K_o, il existe un caractère unitaire $\eta \in X(K/K_o)$ (T.13) tel que $\rho' = \eta\rho$. Ceci prouve que l'application $\rho \mapsto \rho_o = \rho|_{K_o}$ est une application propre de F sur F_o. Par conséquent $\mathcal{A}_o$ est fermé dans F_o et $\mathcal{A}_o = \overline{G \cdot \rho_o}$ puisque $\mathcal{A}$ est fermé dans F et $\mathcal{A} = \overline{G \cdot \rho}$. <u>cqfd</u>

<u>**Lemme 9**</u> : Pour tout $\rho_o \in \mathcal{A}_o$, on a $\mathcal{A}_o = G_1 \cdot \rho_o$ (où G_1 est le groupe défini en II.1).

<u>**Démonstration du lemme 9**</u> :

(1) Rappelons d'abord que, si H est le groupe des points réels d'un groupe algébrique agissant rationnellement dans l'ensemble X des points réels d'une variété (ie $(h,x) \mapsto h \cdot x$ est un morphisme de $H \times X$ sur X), chaque H-orbite dans X est localement fermée dans X et son bord est réunion d'orbites de dimension strictement plus petite (cf [Bo]).

(ii) Soit $\mathfrak{g} = \tilde{G} \times \Sigma$ où Σ est l'ensemble des formes linéaires sur $\underline{k}$ nulles sur $\mathcal{L}$. Ce groupe opère dans $\hat{K}_o$. D'après ([Pu, 5]), F_o est égal à $\mathfrak{g} \bullet \rho_o$ pour tout $\rho_o \in F_o$, et de plus F_o est homéomorphe à $\mathfrak{g} / \mathfrak{g}(\rho_o)$. D'après ([Kh, 4], IV, corollaire), on en déduit que :

$$\rho_o = T^{K_o}_{k',\tau'_{K_o}} \quad \text{où } k' \in \underline{k}^* \ , \ \tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(k') \ .$$

De plus, si $\ell' = k'|_{\mathcal{L}}$ et $\sigma' = \tau'_{K_o}\Big|_{L(\ell')\mathcal{K}}$, le couple (ℓ', σ') est conjugué par un élément de $\tilde{G}$ du couple (ℓ, σ).

Si $(x,v) \in \mathfrak{g}$ et $\tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(k')$, on définit $(x,v) \bullet \tau'_{K_o}$ par $((x,v)\ \tau'_{K_o})(\tilde{h}) = \chi_v(h)\ \tau'_{K_o}(x^{-1}\ \tilde{h}\ x)$ pour $\tilde{h} \in K(k')^{\underline{k}}$ où χ_v est la restriction du caractère unitaire de K_o dont la différentielle est égale à iv. Remarquons qu'alors $(x,v) \bullet \tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(x \bullet k' + v)$. Si de plus $(x,v) \in \mathfrak{g}(k')$, $(x,v)\ \tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(k')$. On notera alors $\mathfrak{g}(k')_{\tau'_{K_o}}$ le stabilisateur de τ'_{K_o} dans $\mathfrak{g}(k')$. On déduit de ce qui précède que $\mathfrak{g}(\rho_o)$ est égal à $\mathfrak{g}(k')_{\tau'_{K_o}}\ K_o$.

D'après ([Kh, 4], IV), K_o est égal à $G(g')_o L$ où g' est une forme linéaire sur $\mathcal{G}$ prolongeant k'. Utilisant le lemme III.8.1. et III.1.3. de [Kh, 4], on en déduit le fait que $\mathfrak{g}(k')_{\tau'_{K_o}}$ est égal à $\mathfrak{g}(k')_{\sigma'}$, et que $\mathfrak{g}(k')_{\sigma'}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{g}(k')$, et que $[\ \mathfrak{g}(k') : \mathfrak{g}(k')_{\sigma'}]$ est indépendant du choix de ρ_o dans F_o. Il en résulte que $\mathfrak{g}(\rho_o) = L\ \mathfrak{g}(k')_{\sigma'}$ et $[\ \mathfrak{g}(k')L : \mathfrak{g}(\rho_o)] < +\infty$.

(iii) D'après i), l'orbite $\tilde{G} \bullet \ell'$ $(= \tilde{G} \bullet \ell)$ est localement fermée dans $\mathcal{L}^*$, et par conséquent $\mathfrak{g} \bullet k'$ est localement fermée dans $\underline{k}^*$ (c'est l'image réciproque de $\tilde{G} \bullet \ell$ par l'application $k \mapsto k|_{\mathcal{L}}$ de $\underline{k}^*$ dans $\mathcal{L}^*$). L'orbite $\mathfrak{g} \bullet k'$ est alors homéomorphe à $\mathfrak{g} / \mathfrak{g}(k')$. D'autre part d'après i) l'orbite $\tilde{G} \bullet k'$ est localement fermée dans $\underline{k}^*$, et par conséquent elle est localement fermée dans $\mathfrak{g} \bullet k'$. Vu que les $\tilde{G}$-orbites dans $\mathfrak{g} \bullet k'$ ont toutes la même dimension, on en déduit d'après i) que l'orbite $\tilde{G} \bullet k'$ est fermée dans $\mathfrak{g} \bullet k'$. Il en résulte le fait que le groupe $\tilde{G}\ \mathfrak{g}(k')$ est fermé dans $\mathfrak{g}$. D'après ii), le groupe $\tilde{G}\ \mathcal{G}(\rho_o)$ est égal à $\tilde{G}\ \mathcal{G}(k')_{\sigma'}$, et il est d'indice fini dans $\tilde{G}\ \mathcal{G}(k')$. Le groupe $\tilde{G}\ \mathcal{G}(\rho_o)$ est ouvert dans $\tilde{G}\ \mathcal{G}(k')$ et par conséquent il est fermé dans $\tilde{G}\ \mathcal{G}(k')$. Le groupe $\tilde{G}\ \mathcal{G}(\rho_o)$ est donc fermé dans $\mathcal{G}$ et par conséquent $\tilde{G}\ \mathcal{G}(\rho_o)/\ \mathcal{G}(\rho_o)$ est fermé dans $\mathcal{G}/\ \mathcal{G}(\rho_o)$. Ceci permet de conlure que l'orbite $\tilde{G} \bullet \rho_o$ est fermée dans F_o . Comme $\mathcal{R}_o = \overline{G \bullet \rho_o}$ (d'après le lemme 8), et on a : $G \bullet \rho_o \subset \tilde{G} \bullet \rho_o \subset F_o$ (pour tout $\rho_o \in \mathcal{R}_o$) , le fait que $\tilde{G} \bullet \rho_o$ est fermée dans F_o permet de conclure que $\mathcal{R}_o$ est inclus dans $\tilde{G} \bullet \rho_o$ (pour tout $\rho_o \in \mathcal{R}_o$) .

(iv) On pose $G_1' = \overline{G\ \tilde{G}(\rho_o)}$. D'après ce qui précède, on peut en déduire l'égalité $\mathcal{R}_o = G_1' \bullet \rho_o$ $(\rho_o \in \mathcal{R}_o)$. On pose $\tau_{K_o} = \tau_K\big|_{K_o(k)\underline{k}}$ et $\rho_o = T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ la représentation associée à (k, τ_{K_o}) . Il est facile de voir que :

$$T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}} = T^K_{k,\tau_K}\Big|_{K_o} \quad \text{et} \quad T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}} \in \mathcal{R}_o \quad .$$

Comme dans iii), on montre que $\tilde{G}(\rho_o) = \tilde{G}(k)_\sigma\, L$ et que $[\tilde{G}(k)L : \tilde{G}(\rho_o)] < +\infty$. D'après le lemme 4, $\tilde{G}(k)$ est égal à $G(\ell)_o\, \tilde{G}(g)$. Ceci entraîne l'égalité $\tilde{G}(k)G = \tilde{G}(g)G$, et la relation $[\tilde{G}(g)G : \tilde{G}(\rho_o)G] < +\infty$. Utilisant $G_1' = \overline{\tilde{G}(\rho_o)G}$ et $G_1'' = \overline{\tilde{G}(g)G}$, on en déduit alors $[G_1'' : G_1'] < +\infty$. Rappelons que par définition G_1 est la composante connexe de l'élément neutre de G_1'' . On peut alors en déduire que G_1 est aussi la composante connexe de l'unité dans G_1' . Utilisant la connexité de $\mathcal{R}_o$, on peut alors conclure que $\mathcal{R}_o = G_1 \bullet \rho_o$. Ceci termine la démonstration du lemme 9. <u>cqfd</u>

V.3.- <u>Démonstration de la proposition V.1.</u>

Supposons d'abord que G est simplement connexe.

Soient deux couples (g,τ) et $g',\tau')$ dans X_G^{irr} tels que $\ker T^G_{g,\tau} = \ker T^G_{g',\tau'}$. Comme dans V.2, on associe à (g,τ) et (g',τ') respectivement deux couples (k, τ_K) et $(k', \tau_K') \in X_K^{irr}$ tels que :

$$\ker(T^G_{g,\tau}) = \ker[\mathrm{ind}(T^K_{k,\tau_K})] \quad \text{et} \quad \ker(T^G_{g',\tau'}) = \ker[\mathrm{ind}(T^K_{k',\tau_K'})] \ .$$

Ceci permet de prouver que T^K_{k,τ_K} et T^K_{k',τ'_K} sont des éléments de $\mathcal{A}$, et donc $T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ et $T^{K_o}_{k',\tau'_{K_o}}$ sont des éléments correspondants dans $\mathcal{A}_o$, où τ_{K_o} et τ'_{K_o} sont les restrictions de τ_K et τ'_{K_o} respectivement à $K_o(k)^{\underline{k}}$ et $K(k')^{\underline{k}}$. D'après le lemme 9, il existe alors un élément $x \in G_1$ tel que $x \cdot T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}} = T^{K_o}_{k',\tau'_{K_o}}$. Quitte à multiplier x par un élément de K_o, ceci entraîne l'égalité $x \cdot k = k'$. Utilisant le lemme 4, on obtient $x \cdot g = g'$, quitte à multiplier x par un élément de $G(\ell)_o$.
Utilisant $\Omega = G_1 \cdot g$ (cf. II.1) on peut alors conclure que g et g' sont dans la même R-orbite Ω, ce qui termine la démonstration de la proposition de V.1, dans le cas où G est simplement connexe.

Revenons au cas où G est connexe (mais pas nécessairement simplement connexe). Soient G' le revêtement simplement connexe de G, et Π la projection de G' sur G. Soient $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}'$ les représentations induites sur $G'(g)^{\mathfrak{g}}$ et $G'(g')^{\mathfrak{g}}$ par τ et τ'. On a alors $T^{G'}_{g,\bar{\tau}} = T^G_{g,\tau} \circ \Pi$ et $T^{G'}_{g',\bar{\tau}'} = T^G_{g',\tau'} \circ \Pi$. Il est facile de voir qu'alors $\ker T^{G'}_{g',\bar{\tau}'} = \ker T^{G'}_{g,\bar{\tau}}$ puisque $\ker T^G_{g',\tau'} = \ker T^G_{g,\tau}$.
D'après le cas précédent, on en déduit que g et g' sont dans la même R-orbite. <u>cqfd</u>

V.4.- Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, T une représentation factorielle normale de G telle que $\operatorname{Ker} T = \ker T^G_{g,\tau}$ où g est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X^{irr}_G(g)$ et $T^G_{g,\tau}$ la représentation irréductible de G associée à (g,τ) (cf. III). Soient t une trace sur $R(T) = T(G)''$ (T.7), Ω la R-orbite associée à T (cf. V.1), $d\beta$ une mesure de Radon positive G-invariante sur Ω.

Théorème V.4. : Supposons $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$.
Alors la R-orbite Ω est tempérée si et seulement si la représentation T a un caractère distribution relativement à $R(T)$. Dans ce cas si t est une trace

fixée, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une normalisation de $d\beta$ sur Ω tels que l'on ait :

(*) $$t(T(\Psi)) = \int_{\Omega} (\Psi j^{-1})^{\wedge} \, d\beta$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V_{\varepsilon})$ (T.5, T.6) où V_{ε} est le voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ défini en I.2.

Démonstration du théorème V.4. :

Supposons de plus G simplement connexe. On choisit $V = V_{2\varepsilon}$ de telle sorte que le lemme I.2 soit vrai pour V et $2\varepsilon < \pi$. Dans ce cas l'application $X \mapsto \exp X$ est un difféomorphisme de V sur $\exp V$. A un élément $\Psi \in \mathcal{D}(V)$, on associe $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)$ défini comme suit :

$$\varphi(\exp X) = \Psi(X) \left(\det\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}\,X}\right)\right)^{-1} \qquad (X \in V).$$

Soit dX une mesure de Haar sur $\mathfrak{g}$, et soit $d\mu_G$ la mesure de Haar à gauche correspondante (T.10). On a alors $T(\varphi) = T(\Psi)$ (T.6).

On note $\mathcal{D}(\mathfrak{g})^{+}$ l'espace des fonctions $\Psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ telles que $\Pi(\Psi)$ soit un opérateur positif pour toute représentation unitaire continue Π de G (T.6), et on note $\mathcal{D}(V)^{+} = \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{D}(\mathfrak{g})^{+}$. Il est alors facile de voir que si $\Psi \in \mathcal{D}(V)^{+}$, la fonction φ associée à Ψ est dans $\mathcal{D}(\exp V)^{+} = \mathcal{D}(\exp V) \cap C^{*}(G)^{+}$.

On utilise dans la suite les notations de V.2. D'après Pukanszky (cf. IV), il existe une mesure de Radon $d\mu$, positive, G-invariante sur $\mathcal{X}$ et telle que :

(1) $$t(T(\varphi)) = \int_{\mathcal{X}} \mathrm{tr}(\rho(\varphi|_K)) \, d\mu(\rho)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)^{+}$.

L'application $\rho \mapsto \rho_0 = \rho|_{K_0}$ est une surjection continue de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{X}_0$ et son noyau est un sous-groupe fermé du groupe compact $X(K/K_0)$ (T.13) qu'on notera X'. On peut identifier $\mathcal{X}/X'$ et $\mathcal{X}_0$, et si on choisit une mesure de masse totale 1 sur X', il existe alors une mesure de Radon $d\mu_0$ sur $\mathcal{X}_0$

positive et G-invariante telle que :

(2) $$\int_{\mathcal{R}} \alpha(\rho)\, d\mu(\rho) = \int_{\mathcal{R}_o} \left(\int_{X'} \alpha(\chi\, \rho)\, d\chi\right) d\mu_o(\rho_o)$$

pour toute fonction α sur $\mathcal{R}$ $d\mu$-intégrable.

Utilisant la relation $K_o = G(g)_o L \subset K \subset G(g)L$ (cf. [Kh, 4], IV) et le lemme 2, on voit qu'alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)$, la restriction $\varphi|_K$ de φ à K est à support dans $\exp(V) \cap K = \exp(V \cap \underline{k})$. On a donc pour tout $\rho \in \mathcal{R}$, $\rho(\varphi|_K) = \rho_o(\varphi|_{K_o})$. En utilisant (1) et (2), on trouve :

(3) $$t(T(\varphi)) = \int_{\mathcal{R}_o} tr(\rho_o(\varphi|_{K_o})\, d\mu_o(\rho_o)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)^+$.

Soit $\rho_o = T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ l'élément de $\mathcal{R}_o$ défini en V.2 et V.3. D'après le lemme 9, $\mathcal{R}_o$ est égal à $G_1 \bullet \rho_o$ et il est homéomorphe à $G_1/G_1(\rho_o)$. En identifiant $\mathcal{R}_o$ et $G_1/G_1(\rho_o)$, on obtient à partir de (3) la relation suivante :

(4) $$t(T(\varphi)) = \int_{G_1/G_1(\rho_o)} tr(x \bullet \rho_o(\varphi|_{K_o}))\, d\mu_o(\dot{x}) \quad .$$

Notons $M' = G_1(\rho_o)$. De la même façon que dans la démonstration du lemme 9, on montre que $M' = G_1(k)_\sigma L$ et $G_1(k)_\sigma$ est d'indice fini dans $G_1(k)$. Soit M le groupe défini dans le lemme 6. On voit qu'alors $[M : M'] < +\infty$, et de plus il est facile de voir que $[M : M']$ est indépendant du choix de ρ_o dans $\mathcal{R}_o$.

Soient dY une mesure de Haar sur $\underline{k}$ et $d\mu_{K_o}$ la mesure de Haar à gauche correspondante sur K_o (T.10). Pour $x \in \tilde{G}$, on note φ^x et Ψ^x les fonctions définies sur G et $\mathcal{G}$ respectivement par :

$$\varphi^x(y) = \Delta^{-1}(x)\, \varphi(xy\, x^{-1}) \quad \text{et} \quad \Psi^x(Y) = \Delta^{-1}(x)\, \Psi(x \bullet Y)$$

où Δ est définie sur $\tilde{G}$ par $d(x \bullet Z) = \Delta(x)\, dZ$ pour une mesure de Haar dZ sur $\tilde{\mathcal{G}}$. Utilisant le fait que $\varphi|_{K_o}$ est à support dans $\exp(\underline{k} \cap V)$ et l'invariance de $\underline{k}$ et V par $\tilde{G}$, on voit qu'alors $\varphi^x|_{K_o}$ est à support dans $\exp(\underline{k} \cap V)$ et de plus $\Psi^x|_{\underline{k}}$ est la fonction associée à $\varphi^x|_{K_o}$ dans

$\mathcal{D}(V \cap \underline{k})$. D'après (4) on obtient alors la relation suivante :

(5) $$t(T(\varphi)) = \int_{G_1/M'} tr(\rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}))\, d\mu_o(\dot{x}) \quad .$$

Ayant remarqué que $[M : M'] < +\infty$, si on munit le groupe M/M' de la mesure de masse 1 en tout point, on peut associer à $d\mu_o$ une mesure de Radon $d\tilde{\mu}$, positive, G-invariante sur G_1/M et telle que :

(6) $$\int_{G_1/M'} \theta(\dot{x})\, d\mu_o(\dot{x}) = \int_{G_1/M} \left(\int_{M/M'} \theta(x\,\dot{y})\, d\dot{y}\right) d\tilde{\mu}(\dot{x})$$

pour toute fonction θ $d\mu_o$-intégrable sur G_1/M' .

Notons $\Omega_{K_o} = K_o \bullet k$, $d\beta_{\Omega_{K_o}}$ la mesure canonique sur Ω_{K_o} (T.14) .

Les mesures de Haar dX et dY respectivement sur $\mathcal{G}$ et $\underline{k}$ induisent une mesure dX/dY sur $\mathcal{G}/\underline{k}$. On note $d\zeta$ la mesure duale de cette mesure sur $\underline{k}^\perp$ (T.12, T.19).

Dans ces conditions, d'après le lemme 7, à la mesure $d\tilde{\mu}$ on peut associer une mesure de Radon positive et G-invariante $d\beta$ de telle sorte que :

(7) $$\int_\Omega \theta(g)\, d\beta(g) = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} \theta(x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma)$$

pour toute fonction θ $d\beta$-intégrable sur Ω , où k'' est une forme linéaire sur $\mathcal{G}$ prolongeant k' .

Supposons Ω tempérée. L'application $(g \mapsto (\Psi\, j^{-1})^\wedge(g))$ est alors $d\beta$-intégrable sur Ω et la formule (7) entraîne :

$$\int_\Omega (\Psi\, j^{-1})^\wedge\, d\beta = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge\, (x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$.

Utilisant (6) et l'égalité précèdente, on obtient :

(8) $$\int_\Omega (\Psi\, j^{-1})^\wedge\, d\beta = \frac{1}{[M:M']} \int_{G_1/M'} d\mu_o(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi j^{-1})^\wedge (x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \quad .$$

D'autre part, en utilisant la relation (7), l'hypothèse Ω tempérée montre qu'alors l'orbite Ω_{K_o} est tempérée. D'après le lemme 3 l'hypothèse $\mathcal{G}(g)$ nilpotente entraîne le fait que $\underline{k}(k)$ est nilpotente. Comme on a $\rho_o = T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ et $\dim(\tau_{K_o}) < +\infty$, d'après les résultats de III, on obtient l'égalité suivante pour tout $x \in \tilde{G}$:

$$(9) \qquad \mathrm{tr}(\rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} (\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge_{\underline{k}}\,(k')\, d\beta_{\Omega_{K_o}}(k')$$

où $\Psi \in \mathcal{D}(V)$, $(\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge_{\underline{k}}\,(k') = \int_{\underline{k}} \Psi^x(Y)\, j_{\underline{k}}^{-1}(Y)\, e^{i<k',y>}\, dY$, et

$$j_{\underline{k}}(Y) = (\det (\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ad}_{\underline{k}}Y/2)}{\mathrm{ad}_{\underline{k}}Y/2}))^{\frac{1}{2}} \quad (Y \in \underline{k}) \quad .$$

Vu que $\underline{k}$ est un idéal dans $\mathcal{G}$, on a : $j_{\underline{k}} = j|_{\underline{k}}$. On a alors pour tout $x \in \tilde{G}$:

$$(\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge(k') = \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi^x\, j^{-1})^\wedge(k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \; .$$

L'invariance de j sous l'action de $\tilde{G}$ permet alors d'obtenir :

$$(\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge(k') = \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge(x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \quad .$$

La formule (9) s'écrit alors :

$$(10) \quad \mathrm{tr}\, \rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge(x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \quad .$$

Les formules (5) et (10) entraînent la formule suivante pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$:

$$(11) \; t(T(\Psi)) = \int_{G_1/M'} [\dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge(x \bullet k''+\sigma)\, d\zeta(\sigma)]\, d\mu_o(\dot{x}) \; .$$

Utilisant cette formule et la formule (8) , on en déduit la formule suivante pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$:

$$(12) \qquad t(T(\Psi)) = \dim(\tau_{K_o})\, [M : M'] \int_{\Omega} (\Psi\, j^{-1})^\wedge\, d\beta \quad .$$

En remarquant que les nombres $\dim(\tau_{K_o})$ et $[M : M']$ ne dépendent que de T , on peut alors normaliser $d\beta$ sur Ω de telle sorte que l'on ait :

(13) $$t(T(\Psi)) = \int_{\Omega} (\Psi\, j^{-1})^{\wedge}\, d\beta\, (g)$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$.

De plus vu que le membre de droite de (13) est fini, l'opérateur $T(\Psi)$ est alors traçable relativement à $R(T)$ pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$, et donc $T(\varphi)$ est alors traçable relativement à $R(T)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)^+$.

Soit $U = \exp V_{\varepsilon}$. Il est facile de voir qu'alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, on a $\varphi * \varphi^* \in \mathcal{D}(\exp V)^+$, et donc d'après ce qui précède l'opérateur $T(\varphi)$ est de Hilbert-Schmidt relativement à $R(T)$. D'après la proposition de ([Kh, 2], p. 361), T a un caractère distribution relativement à $R(T)$.

D'autre part, en utilisant le théorème 3.1 de [Di - Ma] , on peut montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\varphi_i * \varphi_i^*$ avec $\varphi_i \in \mathcal{D}(U)$. Soient Ψ la fonction dans $\mathcal{D}(V')$ associée à φ (où V' est égal à V_{ε}) , et Ψ_i la fonction associée à $\varphi_i * \varphi_i^*$ dans $\mathcal{D}(V)$. Il est clair que $\Psi_i \in \mathcal{D}(V)^+$ et que Ψ est une combinaison linéaire des Ψ_i . Utilisant la formule (13) on peut alors conclure que (13) est valable pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V')$.

Nous avons démontré dans ce qui précède que si la R-orbite Ω est tempérée alors T a un caractère distribution relativement à $R(T)$ et de plus pour une trace t fixée, on peut normaliser la mesure $d\beta$ sur Ω de telle sorte que la formule (*) soit satisfaite pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V')$.

Réciproquement, supposons que T a un caractère distribution relativement à $R(T)$. Soit V' un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ choisi comme plus haut. Si $\Psi \in \mathcal{D}(V')$ en utilisant le théorème 3.1 de [Di - Ma], on montre qu'alors Ψ est combinaison linéaire de fonctions $\Psi_i \in \mathcal{D}(V)^+$. Utilisant la formule (5) et le fait que T a un caractère distribution on montre qu'alors (5) est vraie pour $\Psi \in \mathcal{D}(V')$, et qu'alors pour presque tout x , $\rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}})$ est traçable. Il existe alors un voisinage V_1 de 0 dans $\underline{k}$ de telle sorte que $\rho_o(\Psi_1)$ soit traçable pour tout $\Psi_1 \in \mathcal{D}(\underline{k})$. D'après les résultats de III, Ω_{K_o} est alors tempérée et pour un voisinage V_1 de 0 dans $\underline{k}$, on a :

$$\operatorname{tr} \rho_o(\Psi_1) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} (\Psi_1 j_{\underline{k}}^{-1})^{\wedge}_{\underline{k}} \, d\beta_{\Omega_{K_o}} .$$

Quitte à changer le voisinage V' de 0 dans $\mathcal{G}$, il en résulte que pour $x \in G_1$ et $\Psi \in \mathcal{D}(V')$ on a la formule suivante :

$$\operatorname{tr} \rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} (\Psi^x|_{\underline{k}} \, j_{\underline{k}}^{-1})^{\wedge}_{\underline{k}} \, d\beta_{\Omega_{K_o}} .$$

Utilisant la définition de la mesure $d\zeta$ sur $\underline{k}^{\perp}$, et le fait que $j_{\underline{k}} = j|_{\underline{k}}$, on en déduit la formule suivante pour $x \in G_1$ et $\Psi \in \mathcal{D}(V')$:

$$\operatorname{tr} \rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} (\Psi^x j^{-1})^{\wedge}(k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

En écrivant cette formule pour Ψj à la place de Ψ, on obtient :

(14) $$\operatorname{tr} \rho_o((\Psi j)^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} \hat{\Psi}(x \cdot k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

Soit V'' un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$ tel qu'on ait pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V'')$; $\Psi * \Psi^* \in \mathcal{D}(V')$.

Les formules (5) et (14) écrites pour $(\Psi * \Psi^*)j$ entraînent l'égalité suivante :

(15) $$\operatorname{tr}(T((\Psi * \Psi^*)j)) = \int_{G_1/M'} [\dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge}(x \cdot k'' + \sigma) d\zeta(\sigma)] \, d\mu_o(\dot{x}) .$$

Remarquons que $(\Psi * \Psi^*)^{\wedge} = |\hat{\Psi}|^2$ et donc cette fonction est positive partout, et par conséquent en utilisant (7) pour $\theta = (\Psi * \Psi^*)^{\wedge}|_{\Omega}$ on trouve la formule suivante :

$$\int_{\Omega} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge} \, d\beta = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge}(x \cdot k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

La formule (6) permet alors d'obtenir :

(16) $$\int_{\Omega} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge} \, d\beta = \frac{1}{[M:M']} \int_{G_1/M'} d\mu_o(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge}(x \cdot k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

Les formules (15) et (16) montrent qu'alors :

$$\int_{\Omega} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge} \, d\beta < +\infty$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V'')$.

En utilisant le théorème 3.1 de [Di - Ma], on montre alors que pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V'')$ $\int_{\Omega} \hat{\Psi} \, d\beta < +\infty$. Comme dans la remarque et la démonstration de III, on peut alors conclure que la R-orbite Ω est tempérée. Ceci termine la démonstration du théorème dans le cas où G est simplement connexe.

Supposons que G est connexe mais pas nécessairement simplement connexe. Soient G' le revêtement simplement connexe de G , Π la projection canonique de G' sur G , $\Gamma = \ker \Pi$ et $T' = T \circ \Pi$.

Il est facile de voir que si $\varphi \in \mathcal{K}(G')$ (T.5), la fonction $\tau(\varphi)$ définie par $\tau(\varphi)(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(x\,\gamma)$ est dans $\mathcal{K}(G)$. De plus, tout $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ est de la forme $\tau(\varphi')$ avec $\varphi' \in \mathcal{K}(G')$. On peut alors en déduire que $T(\mathcal{K}(G)) = T'(\mathcal{K}(G'))$, et par conséquent que $T(C^*(G)) = T'(C^*(G))$ et $R(T) = R(T')$ (T.7) . Par conséquent la trace t est une trace associée à T et T' . De plus si $\Psi \in \mathcal{D}(V)$ et φ est la fonction associée à Ψ dans $\mathcal{D}(\exp V)$ où $\exp V \subset G'$, on a $\tau(\varphi) \in \mathcal{D}(\exp V)$ où $\exp V \subset G$. Dans ces conditions, on a $T'(\Psi) = T'(\varphi) = T(\tau(\varphi)) = T(\Psi)$ (T.6). Utilisant les résultats obtenus dans le cas simplement connexe, on peut alors conclure. cqfd

BIBLIOGRAPHIE

[Be] P. Bernat et Al. Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod 1972.

[Bo] A. Borel. Linear algebraic groups. Benjamin, New York 1969.

[Ch] C. Chevalley. Théorie des groupes de Lie, vol. II, groupes algébriques, Act. Sc. Ind N° 1152 Paris Hermann (1951).

[Di] J. Dixmier. Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-villars, Paris 1964.

[Di-Ma] J. Dixmier et P. Malliavin. Factorisations de fonctions et vecteurs indéfiniment différentiables. Bulletin Sciences Math. 2ème Série 102, (1978), 305-330.

[Du,1] M. Duflo. Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles. Annales de l'E.N.S., t. 3, (1970), 23-70.

[Du,2] M. Duflo. Opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie. Annales de l'E.N.S., t. 10, (1977), 265-288.

[Du,3] M. Duflo. Construction des représentations unitaires d'un groupe de Lie. Cours d'été du CIME. Cortona 1980, Liguori ed. Napoli 1982.

[DU,4] M. Duflo. Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques. Acta Mathematica, vol. 149, (1982), 153-213.

[Kh,1] M. S. Khalgui. Sur les caractères des groupes de Lie résolubles. Publication de Paris VII, vol. 2, (1978), 7-44.

[Kh,2] M. S. Khalgui. Sur les caractères des groupes de Lie à radical co-compact. Bull. Soc. Math. France, 109, (1981), 331-372.

[Kh,3] M. S. Khalgui. Caractères des groupes de Lie. Journal of Functional Analysis, 47, (1982), 64-77.

[Kh,4] M. S. Khalgui. Extensions des représentations des groupes de Lie construites par M. Duflo. Math. Annalen, 265, 343-375 (1983).

[Ki] A. A. Kirillov. Characters of unitary representations of Lie groups. Functional Analysis and its applications, vol. 2, (1968), 40-55 et vol. 3, (1969), 36-47.

[Mo] G. D. Mostov. Fully reducible subgroups of algebraic groups. Amer. J. Math., 78, (1956), 200-221.

[Pu,1] L. Pukanszky. On the characters and Plancherel formula of nilpotent Lie groups. J. of. Funct. Analysis, vol. 1, (1967), 255-280.

[Pu,2] L. Pukanszky. Characters of algebraic solvable groups. J. of. Funct. Analysis, vol. 3, (1968), 435-491.

[Pu,3] L. Pukanszky. Unitary representations of solvable Lie groups. Annales de l'E.N.S., 4 série (1971), 457-608.

[Pu,4] L. Pukanszky. Action of algebraic groups of automorphisms on the dual of class of type I groups. Annales de l'E.N.S., 5 (1972), 379-396.

[Pu,5] L. Pukanszky. Characters of connected Lie groups. Acta Math. 133, (1974), 82-137.

[Pu,6] L. Pukanszky. Unitary representations of co-compact radical Lie groups. Trans. Amer. Soc. 236, 1978, 1-50.

[Ro] W. Rossmann. Kirillov's character formula for reductive Lie groups. Inv. Math., 48, (1978), 207-220.

[Sc] L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.