MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL DUFLO
GERRIT HECKMAN
MICHELE VERGNE

Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 65-128
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__65_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 65-128

PROJECTION D'ORBITES, FORMULE DE KIRILLOV

ET FORMULE DE BLATTNER

Michel DUFLO, *Gerrit* HECKMAN *et Michèle* VERGNE

Michel DUFLO,
UER de Mathématiques,
2, place Jussieu, PARIS VII
75251 PARIS Cédex 05, FRANCE

Gerrit HECKMAN (*)
Department of Mathematics
University of Leiden
Wassernaarseweg 80, Postbus 9512
2300 RA Leiden
The Netherlands

Michèle VERGNE
Department of Mathematics
MIT Cambridge
MA 02139 U.S.A.

(*) Partially supported by NSF Grant MCS - 8203769.

M. DUFLO, G. HECKMAN et M. VERGNE

RÉSUMÉ

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe, K l'image réciproque d'un sous-groupe compact maximal de AdG. Soit Ω une orbite de G dans le dual $\underline{g}^*$ de son algèbre de Lie $\underline{g}$, munie de sa mesure de Liouville β_Ω. L'image directe de β_Ω sur $\underline{k}^*$ par la projection orthogonale est une mesure tempérée sur $\underline{k}^*$. Nous la calculons lorsque Ω est régulière et elliptique. Supposons de plus Ω admissible et soit T_Ω la représentation unitaire irréductible de G associée par Harish-Chandra. Nous démontrons une formule, dans le style de celle de Kirillov, permettant de calculer le caractère de T_Ω en fonction de transformées de Fourier d'orbites, dans G tout entier. Comme application, nous donnons une nouvelle démonstration de la formule de Blattner décrivant la restriction de T_Ω à K.

SUMMARY

Let G be a connected semi-simple Lie group and let K be the inverse image of a maximal compact subgroup of AdG. Let Ω be an orbit of G in the dual $\underline{g}^*$ on the Lie algebra $\underline{g}$ of G. Let β_Ω be its Liouville measure. The push-forward of β_Ω by the orthogonal projection on $\underline{k}^*$ is a tempered measure on $\underline{k}^*$. We compute this measure when Ω is regular and elliptic. Suppose moreover that Ω is admissible, and let T_Ω be the unitary irreducible representation of G associated to Ω by Harish-Chandra. We prove a Kirillov type formula which gives the character of T in term of Fourier transform of orbits, everywhere in G. As an application, we give a new proof of Blattner's formula, which describes the restriction of T_Ω to K.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : Application moment et projection de mesures de Liouville.

CHAPITRE II : Une généralisation de la formule du caractère de Kirillov.

CHAPITRE III : Une démonstration de la conjecture de Blattner.

APPENDICE : Rappels sur les fonctions généralisées.

RÉFÉRENCES.

PROJECTION D'ORBITES

A la mémoire d'Harish-Chandra

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Soient $\underline{g}$ son algèbre de Lie et $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ une décomposition de Cartan de $\underline{g}$. Nous supposons que $\underline{g}$ et $\underline{k}$ ont le même rang. Dans le dual $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$ nous choisissons une orbite Ω de G, régulière et elliptique. Comme il est bien connu, c'est une variété symplectique (cf. [Ki]), et sa mesure de Liouville β_Ω, considérée comme mesure sur $\underline{g}^*$, est tempérée.

Dans le premier chapitre de cet article, nous étudions la mesure $J_*(\beta_\Omega)$ sur $\underline{k}^*$, image directe de la mesure β_Ω par la restriction J de la projection de $\underline{g}^*$ sur $\underline{k}^*$ parallèlement à $\underline{p}^*$. Soit K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$. L'action de K sur Ω est hamiltonienne, et l'application J est précisément l'application moment correspondante. La description de $J_*(\beta_\Omega)$ nécessite quelques notations.

Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$.

Soient $\Delta \subset it^*$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$,

$\Delta_c \subset \Delta$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$,

$\Delta_n \subset \Delta$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_{\mathbb{C}}$.

On note W le groupe de Weyl de Δ_c. On identifie $\underline{t}^*$ à l'orthogonal de $[\underline{t},\underline{g}]$ dans $\underline{g}^*$. Alors $\Omega \cap \underline{t}^*$ est une orbite de W. Notons λ un point de cette orbite. Nous notons Δ^+ le système de racines positives pour lequel $\Lambda = i\lambda$ est dominant.

Si $\xi \in \underline{t}^*$ est un élément non nul, nous notons H_ξ la mesure d'Heaviside sur $\underline{t}^*$:

$$(1) \qquad H_\xi(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t\xi)dt.$$

Nous posons, si $\Delta^+ \cap \Delta_n = \{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$,

$$(2) \qquad Y^+ = H_{-i\alpha_1} * \dots * H_{-i\alpha_p}$$

(Y^+ est une mesure tempérée, homogène, localement polynômiale, ne dépendant que de la chambre déterminée par Λ),

$$(3) \qquad B_\lambda = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)$$

(B_λ est une mesure W-anti-invariante sur $\underline{t}^*$).

Pour tout élément $\xi \in \underline{t}^*$, régulier dans $\underline{k}^*$, nous posons

$s_+(\xi) = \varepsilon(\sigma)$, où $\sigma \in W$ est l'élément tel que $i\sigma\xi$ soit Δ_c^+-dominant.

De plus, si φ est une fonction C^∞ sur $\underline{k}^*$, nous posons

$$(4) \qquad A^+(\varphi)(\xi) = \frac{1}{\# W} s_+(\xi) \int_{K\xi} \varphi(f) d\beta_{K\xi}(f)$$

où $\beta_{K\xi}$ est la mesure de Liouville sur l'orbite $K\xi$ de ξ dans $\underline{k}^*$.

En fait, $A^+(\varphi)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\underline{t}^*$, W-anti-invariante, et A^+ ne dépend que de la chambre déterminée par Λ.

Le résultat principal du chapitre I est le suivant, qui calcule $J_*(\beta_\Omega)$.

<u>THÉORÈME A</u>.- Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\underline{k}^*)$. On a

$$(5) \qquad \int_\Omega \varphi(Jf) d\beta_\Omega(f) = \int_{\underline{t}^*} A^+(\varphi)(\xi) dB_\lambda(\xi).$$

Du théorème A, on déduit facilement une formule pour la transformée de Fourier (sur $\underline{k}$) de $J_*(\beta_\Omega)$, qui n'est autre que la restriction à $\underline{k}$ de la transformée de Fourier $\hat{\beta}_\Omega$ (sur $\underline{g}$) de β_Ω (*). Comme corollaire, on obtient une nouvelle démonstration de la formule de Rossmann [R] qui calcule la restriction de $\hat{\beta}_\Omega$ à l'ouvert $\underline{k} \cap \underline{g}'$ de $\underline{k}$ formé des éléments de $\underline{k}$ réguliers dans $\underline{g}$. Rappelons quelle est cette formule. Dans $\underline{g}'$, $\hat{\beta}_\Omega$ est une fonction C^∞ G-invariante. Pour la calculer dans $\underline{g}' \cap \underline{k}$, il suffit donc de la calculer sur $\underline{t} \cap \underline{g}'$.

Si $X \in \underline{t} \cap \underline{g}'$, on a

$$(6) \qquad \hat{\beta}_\Omega(X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}} \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w\Lambda(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} \alpha(X)}$$

Outre celle de Rossmann [R], on trouvera des démonstrations de la formule

----

(*) La transformée de Fourier de β_Ω est la fonction généralisée sur $\underline{g}$ définie par la formule

$$\hat{\beta}_\Omega(X) = \int_{\underline{g}^*} e^{if(X)} d\beta_\Omega(f)$$

Les notions de fonction généralisée et de restriction de fonctions généralisées à des sous-variétés sont rappelées dans l'appendice.

(6) dans [Ve], [B.Vo][Be-Ve.1] .

Le deuxième chapitre est indépendant du premier (à l'utilisation près de la formule de Rossmann). On suppose que l'orbite Ω est admissible, et on note θ la fonction généralisée sur G associée par Harish-Chandra à Ω [H-C.3] . C'est le caractère d'une représentation unitaire irréductible de G, de carré intégrable modulo le centre de G [H-C. 4], mais nous n'aurons pas à nous servir de ce fait.

Si $X \in \underline{g}$, on pose

$$(8) \qquad j_{\underline{g}}(X) = \det\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\operatorname{ad} X} - e^{-\frac{1}{2}\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\right) .$$

La formule de Kirillov, dans le cas considéré ici, est l'identité suivante entre fonctions généralisées dans un voisinage de 0 dans $\underline{g}$:

$$(9) \qquad j_{\underline{g}}^{\frac{1}{2}}(X)\,\theta(e^X) = \hat{\beta}_\Omega(X) .$$

Elle résulte de la définition de θ et de la formule de Rossmann (6). Le défaut principal de (9) est de ne donner de renseignements sur θ que dans un voisinage de 1 dans G. Pour y remédier, Harish-Chandra a introduit la méthode de descente. Soit s un élément de K. On pose $\underline{z} = \ker(1 - \operatorname{ad} s)$, $\underline{q} = \operatorname{Im}(1 - \operatorname{ad} s)$. Dans un voisinage de 0 dans $\underline{z}$, on peut définir une fonction généralisée par la formule :

$$(10) \quad \tilde{\theta}_s(X) = j_{\underline{z}}(X)^{\frac{1}{2}}\, |\det(1 - \operatorname{ad}(se^X))|_{\underline{q}}|^{\frac{1}{2}} |\det(1 - \operatorname{ad} s)|_{\underline{q}}|^{-\frac{1}{2}}\, \theta(se^X) .$$

Soit Z le centralisateur de s dans G. Par construction (voir [H-C.3]) $\tilde{\theta}_s$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$. Nous calculons cette combinaison linéaire.

Posons $\Omega_s = \Omega \cap \underline{z}^*$: c'est l'ensemble des points fixes de s dans Ω, et c'est une sous-variété symplectique de Ω, réunion d'un nombre fini d'orbites de Z^o. Sur Ω_s, nous définissons une fonction φ_s, localement constante. Le résultat principal du second chapitre généralise la formule (9) :

THÉORÈME B.- Dans un voisinage de 0 dans $\underline{z}$, on a l'identité de fonctions généralisées

$$(11) \qquad \tilde{\theta}_s(X) = \int_{\Omega_s} \varphi_s(f)\, e^{if(X)}\, d\beta_{\Omega_s}(f) .$$

Nous pensons que la formule (11) est "universelle" au même titre que la formule de Kirillov (9) : elle devrait se généraliser à toutes les représentations unitaires irréductibles suffisamment génériques de tous les groupes de Lie.

Dans le troisième chapitre, nous calculons la restriction de θ à K. Le résultat est donné par une formule conjecturée de Blattner, démontrée pour la première fois par Hecht et Schmid [He-S.1] Une autre démonstration est due à Enright [E]. Contrairement aux deux démonstrations citées ci-dessus, la nôtre n'utilise pas le fait que θ est le caractère d'une représentation, et, a fortiori, pas non plus de réalisation de la représentation en question (*).

Résumons brièvement notre démonstration : au voisinage de 1 dans G, la formule (9) montre que l'on peut remplacer le calcul de la restriction de θ à K par celui de $\widehat{\beta_\Omega}$ à $\underline{k}$. On utilise alors le théorème A. Le théorème B permet de procéder de même au voisinage de chaque point s de K.

(*) Notons qu'inversement la connaissance de la formule de Blattner facilite notablement la démonstration des théorèmes de réalisation.

I.- APPLICATION MOMENT ET PROJECTION DE MESURES DE LIOUVILLE

I.1.- APPLICATION MOMENT D'UN GROUPE COMPACT K

Soit Ω une variété C^{∞}. Soit $\mathfrak{A}(\Omega)$ l'algèbre des formes différentielles sur Ω. Si ξ est un champ de vecteurs sur Ω, on note $c(\xi)$ la contraction par ξ et d la différentielle extérieure. Les opérations d et $c(\xi)$ sont des antidérivations de $\mathfrak{A}(\Omega)$. Si $\mathcal{L}(\xi)$ est la dérivation de Lie, on a :

(1) $$\mathcal{L}(\xi) = d \circ c(\xi) + c(\xi) \circ d \quad .$$

Soit K un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de Lie $\underline{k}$ agissant sur Ω. Si $X \in \underline{k}$, on note X_Ω le champ de vecteurs sur Ω défini par

$$(X_\Omega \cdot \varphi)(f) = \frac{d}{d\varepsilon}\, \varphi(\exp - \varepsilon X \,.\, f)_{|\varepsilon=o} \quad .$$

Si $\underline{r}$ est un sous-espace de $\underline{k}$, on note $(\underline{r}_\Omega)_f$ (ou simplement $\underline{r}_\Omega$) le sous-espace de $T_f(\Omega)$ engendré par les X_Ω pour $X \in \underline{r}$.

Soit Ω une variété symplectique de dimension 2n. Notons σ_Ω (ou simplement σ) la 2-forme symplectique de Ω. Supposons que l'action de K sur Ω soit hamiltonienne. On choisit une structure hamiltonienne, et on note $J_{\underline{k}}$ (ou simplement J) l'application moment correspondante. Par définition J est une application de Ω dans $\underline{k}^*$, commute à l'action de K, et vérifie

(2) $$\text{Si } J_X(f) = (J(f), X) \quad \text{pour } X \in \underline{k} \;,$$

$$dJ_X = c(X_\Omega) \,.\, \sigma \;.$$

Remarquons que si $f \in \Omega$ et si $J(f) = \mu$

$$\sigma_f(X_\Omega, Y_\Omega) = dJ_X(Y_\Omega) = \frac{d}{d\varepsilon}(J(\exp - \varepsilon Y \,.\, f), X)_{|\varepsilon=o}$$
$$= \frac{d}{d\varepsilon}(\exp - \varepsilon Y \,.\, \mu, X)_{|\varepsilon=o}$$

donc

(3) $\qquad \sigma_\xi(X_\Omega, Y_\Omega) = -(\mu,[X,Y])$

La forme $\dfrac{\sigma^n}{(2\pi)^n n!}$ est de degré maximal et partout non nulle. Elle détermine donc une orientation et la mesure de Liouville β_Ω sur Ω. (On note parfois β_Ω simplement β). La mesure $J_*(\beta_\Omega)$ image directe est définie par :

(4) $$\int_{\underline{k}^*} \varphi \, dJ_*(\beta_\Omega) = \int_\Omega (\varphi \circ J) d\beta_\Omega$$

pour toute fonction φ borélienne positive sur $\underline{k}^*$. Si J est propre, c'est une mesure de Radon.

Si, de plus, J est une submersion au-dessus d'un ouvert U de $\underline{k}^*$, alors sur U, $J_*(\beta)$ est une densité C^∞ $f(\xi)d\xi$. On calcule $f(\xi)$ de la façon suivante. Soit $\xi \in U$ et $\Omega_\xi = J^{-1}(\xi)$. En un point y de Ω_ξ, l'application dJ induit un isomorphisme entre $T_y(\Omega)/T_y(\Omega_\xi)$ et $\underline{k}^*$. Soit μ_ξ la densité sur Ω_ξ telle que $d\beta/\mu_\xi = d\xi$. Alors $f(\xi) = \int_{\Omega_\xi} \mu_\xi$.

Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$. Soit $T \subset K$ le groupe de Cartan correspondant, N(T) le normalisateur de $\underline{t}$ dans K, W = N(T)/T le groupe de Weyl. On écrit :

$$\underline{k} = \underline{t} \oplus \underline{r}$$

$$\underline{k}^* = \underline{t}^* \oplus \underline{r}^*$$

où $\underline{r}$ est le supplémentaire T-invariant de $\underline{t}$. La dimension de $\underline{r}$ est paire. On la note 2r. Si $\mu \in \underline{t}^*$, on note $K_\mu^{\underline{r}}$ (ou simplement K_μ) la 2.forme $(X,Y) \longmapsto (\mu,[X,Y])$ sur $\underline{r}$. On note $\underline{t}_r^*$ l'ensemble des éléments réguliers de $\underline{t}^*$ pour l'action de W. Si $\mu \in \underline{t}_r^*$, la forme K_μ est non dégénérée. Soit η une forme différentielle de degré maximum sur $\underline{r}$ non nulle. On définit alors la fonction polynômiale $\pi(\mu)$ sur $\underline{t}^*$ par la formule

(5) $\qquad K_\mu^r = \pi(\mu) r! \, \eta$.

La fonction π est une fonction polynômiale W anti-invariante sur $\underline{t}^*$, dépendant de η.

Soit Ω un espace K-Hamiltonien. On définit $M = J_{\underline{k}}^{-1}(\underline{t}_r^*)$. Il est clair que l'ensemble M (qui peut-être est vide) est stable sous N(T).

(6) LEMME [G-St.2] .

a) M est une sous-variété de Ω d'espace tangent au point m donné par
$T_m(M) = \{v \in T_m(\Omega) \ ; \ dJ(v) \in \underline{t}^*\}$.

b) Soit σ_M la restriction de σ_Ω à M. Si $m \in M$ et si $J(m) = \nu$, l'espace vectoriel symplectique $(T_m(\Omega),\sigma_\Omega)$ est isomorphe à la somme directe orthogonale des espaces symplectiques $(\underline{r},-K_\mu)$ et $(T_m(M),\sigma_M)$ par l'application $(X,v) \longmapsto X_\Omega + v$.

DÉMONSTRATION.- Soit $\underline{k}^* = \underline{t}^* \oplus \underline{r}^*$. Ecrivons $J = (J_1,J_2)$ suivant cette décomposition. Au voisinage d'un point m de M, M est l'intersection de Ω avec $J_2^{-1}(0)$. Or, en tout point m de M, la différentielle de l'application J_2 est surjective. En effet si $\mu = J(m)$ et si $X \in \underline{r}$, $dJ_2(X_\Omega) = X . \mu$. Puisque $\mu \in \underline{t}^*_r$, l'application de $\underline{r}$ dans $\underline{r}^*$ donnée par $X \mapsto X . \mu$ est bijective. Ceci montre que M est une sous-variété de Ω, que son espace tangent est donné par (a), et qu'on a une décomposition en somme directe $T_m(\Omega) = \underline{r}_\Omega \oplus T_m(M)$. Si $X \in \underline{r}$ et si $v \in T_m(M)$, on a

$$\sigma(X_M,v) = (dJ(v),X) = 0.$$

Enfin, comme pour $X,Y \in \underline{r}$, $\sigma(X_\Omega,Y_\Omega) = -(\mu,[X,Y])$, on a prouvé (b).

Le lemme (6) montre en particulier que M est une sous-variété symplectique de Ω et que la restriction J_t de J à M est l'application moment pour l'action de T. On la notera encore J, s'il n'y a pas de confusion. Elle est $N(T)$-équivariante.

On note $\underline{k}^*_r$ l'ensemble des éléments réguliers de $\underline{k}^*$. Le complémentaire de $\underline{k}^*_r$ est une sous-variété algébrique fermée de $\underline{k}^*$. On note $\Omega_r = \Omega \cap J^{-1}(\underline{k}^*_r)$. C'est un ouvert (peut-être vide) de Ω. Il est clair que $K . M = \Omega_r$.

(7) Choisissons une mesure de Lebesgue dK sur $\underline{k}$, une mesure de Lebesgue dT sur $\underline{t}$. Lorsqu'une mesure de Lebesgue a été choisie sur l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, nous employons sur le groupe la mesure de Haar invariante à gauche telle que $d(\exp X)/dX$ vaut 1 pour $X = 0$. Nous notons $\mathrm{vol}(T) = \int_T dt$. Nous choisissons une forme différentielle de degré maximum η sur $\underline{r}$ telle que $dK = dT\ |\eta|$. On a alors la formule d'intégration suivante :

$$(8) \qquad \int_{\Omega_r} \varphi \, d\beta_\Omega = \frac{1}{\#W(\mathrm{vol}\ T)} \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{K\times M} \varphi\,(k\,.\,m)\ |\pi(J(m))|\ dk\ d\beta_M(m) \quad .$$

(Remarquons que la mesure $\frac{1}{\mathrm{vol}\ T}\ |\pi(J(m))|\ dk\ dm$ ne dépend pas des choix faits).

Démontrons (8). L'application $p : K \times M \to \Omega_r$ est une submersion. La fibre de p est une orbite de N(T) par l'action libre $(k,m) . u = (ku, u^{-1}m)$ de N(T) sur $K \times M$. Le groupe N(T) a comme algèbre de Lie $\underline{t}$ et il a $\#W$ composantes connexes. La mesure $(\mathrm{vol}\, T)^{-1} \#W^{-1}\, dt$ donne donc masse 1 à la fibre de p. Il s'agit alors de prouver l'égalité des densités sur l'espace tangent

$$T_{k.m}(\Omega) = T_k(K) \oplus T_m(M)/(\underline{t})_{K\times M}$$

données par $d\beta_\Omega$ et $\frac{1}{(2\pi)^r}|\pi(J(m))|\; dk\; d\beta_M/dt$. Par K-invariance, il suffit de le faire en un point (e,m), où e est l'identité de K. D'après (6), on a si $J(m) = \mu$

$$\sigma_\Omega = - K_\mu \oplus \sigma_M. \quad \text{D'où} \quad \frac{\sigma_\Omega^d}{d!} = \frac{|K_\mu|^r}{r!}\frac{\sigma_M^n}{n!}$$

si $\frac{1}{2}\dim\Omega = d = n + r$.

D'où $d\beta_\Omega = \frac{1}{(2\pi)^r}\; |\pi(\mu)|\; |\eta|\; d\beta_M$, ce qui prouve (8).

Si la variété $\Omega - \Omega_r$ est de mesure nulle pour β_Ω, la formule d'intégration (8) nous permettra donc de remplacer l'étude de $J_*(\beta_\Omega)$ par celle de $J_*(\beta_M)$.

I.2.- ORBITES ELLIPTIQUES RÉGULIÈRES D'UN GROUPE DE LIE RÉDUCTIF

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie réductive. Nous fixons une décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ de $\underline{g}$. Nous supposons que le rang de $\underline{g}$ est égal au rang de $\underline{k}$. Soit G un groupe de Lie connexe à centre compact d'algèbre de Lie $\underline{g}$. Soit K le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$. Le sous-groupe K est un sous-groupe compact maximal de G. Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$, c'est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$. On identifie comme d'habitude $\underline{t}^*$ à l'orthogonal de $[\underline{t}, \underline{g}]$ dans $\underline{g}^*$.

Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier dans $\underline{t}^*$. On considère $\Omega = G . \lambda$ l'orbite de λ dans $\underline{g}^*$ et la forme symplectique σ sur Ω donnée par $\sigma_f(X . f, Y . f) = - f([X,Y]$, si $f \in \Omega$. La variété Ω est une variété hamiltonienne sous l'action de G, donc a fortiori sous l'action de K. L'application moment $J_{\underline{k}} : \Omega \to \underline{k}^*$ est la restriction à Ω de la projection $p : \underline{g}^* \to \underline{k}^*$. Nous choisissons des normes K-invariantes $\|\xi_o\|$ et $\|\xi_1\|$ sur $\underline{k}^*$, $\underline{p}^*$ telles que $<\xi,\xi> = \|\xi_o\|^2 - \|\xi_1\|^2$ soit une fonction G-invariante sur $\underline{g}^*$. Si $\xi \in \Omega$, on a donc $\|\xi_o\|^2 - \|\xi_1\|^2 = \|\lambda\|^2$. L'image réciproque d'un ensemble borné de $\underline{k}^*$ est donc un ensemble borné de Ω. Comme Ω est fermée dans $\underline{g}^*$, l'application $J_{\underline{k}}$ est propre. De plus on a

(1) LEMME.- L'image $J_{\underline{k}}(\Omega)$ est contenue dans l'ensemble $\{\xi \in \underline{k}^* \; ; \|\xi\| \geq \|\lambda\|\}$.

Si $\mu \in \underline{t}^*$, on note δ_μ la mesure de Dirac au point μ, D_μ l'opérateur différentiel $(D_\mu\varphi)(v) = \frac{d}{d\varepsilon}\varphi(v + \varepsilon\mu)_{|\varepsilon=0}$, et si μ est non nul, H_μ la mesure d'Heaviside $(H_\mu,\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t\mu)dt$. On a

$$D_\mu \cdot H_\mu = \delta(0).$$

Soit $\Delta \subset i\underline{t}^*$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, soit $h_\alpha \in i\underline{t}$ la coracine correspondante. On pose :

(2) $$\Delta^+(\lambda) = \{\alpha \in \Delta \ ; \ (i\lambda, h_\alpha) > 0\}$$

ou simplement Δ^+ si λ est fixé.

On note

Δ_c l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$
Δ_n l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_{\mathbb{C}}$
$\Delta_n^+ = \Delta^+ \cap \Delta_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$

(3) $$Y^+ = H_{-i\alpha_1} * H_{-i\alpha_2} * \ldots * H_{-i\alpha_p}$$

la convolution des mesures d'Heaviside associées aux racines non compactes positives. On définit avec les conventions de I.1.7 une application A^η des fonctions continues à support compact sur $\underline{k}^*$ dans les fonctions continues à support compact sur $\underline{t}^*$ par

$$(A^\eta\varphi)(\xi) = \frac{1}{\#W(\mathrm{vol}\ T)} \frac{1}{(2\pi)^r} \pi(\xi) \int_K \varphi(k \cdot \xi)\, dk \quad .$$

(4) On voit que A^η ne dépend que de l'orientation $\underline{r}^+$ donnée à $\underline{r}$ par η. On choisit η^+ telle que $\pi^+(\lambda) > 0$. On note A^+ l'opérateur correspondant.

Le but de la section I est de prouver le

(5) <u>THÉORÈME</u>.- Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$. Soit $\Omega = G \cdot \lambda$ l'orbite de λ dans $\underline{g}^*$ avec sa mesure de Liouville β_Ω. Alors :

$$\int_{\underline{k}^*} \varphi\, dJ_*(\beta_\Omega) = \Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) w \cdot (\delta_\lambda * Y^+), A^+\varphi\Big)$$

où A^+ est déterminée par la convention (4).

Soit $M = \Omega \cap p^{-1}(\underline{t}_r^*)$. C'est un espace T-hamiltonien. Pour démontrer le théorème (5), nous pouvons nous ramener à l'étude de $J_*(\beta_M)$. En effet Ω_r est non vide, puisque $\lambda \in J(\Omega)$ est $\underline{g}$-régulier, donc a fortiori $\underline{k}$-régulier. Le complémentaire $\Omega - \Omega_r$ est une sous-variété algébrique fermée de Ω non égale à Ω, donc de mesure nulle pour $d\beta_\Omega$. D'après I.1.8, il suffira de démontrer le

(6) <u>THÉORÈME</u>.- $J_*(\beta_M) = \frac{\pi^+}{|\pi^+|} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, w.(\delta_\lambda * Y^+)$.

La méthode suivie sera de montrer en I.3 que $J_*(\beta_M)$ satisfait un système d'équations différentielles à coefficients constants.

Notons quelques propriétés géométriques de Ω et de M utiles au paragraphe suivant. On note $V = \underline{t}^* \oplus \underline{p}^*$ de sorte que M est une sous-variété de V. Soit $X \in \underline{t} - \{0\}$. Nous allons décrire les variétés Ω_o, M_o des zéros du champ de vecteurs associé à X sur Ω, M.

Soit $\underline{z}$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$, Z le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\underline{z}$. Il est connexe. On écrit $\underline{g} = \underline{z} \oplus \underline{q}$, où $\underline{q}$ est le complément Z-invariant de $\underline{z}$. Ceci permet d'écrire $\underline{g}^* = \underline{z}^* \oplus \underline{q}^*$. Si f est un point $\underline{g}$-régulier de $\underline{g}^*$ appartenant à $\underline{z}^*$, on a $\underline{q}.\, f = \underline{q}^*$.

La décomposition de Cartan de $\underline{g}$ induit une décomposition de Cartan

$$\underline{z} = \underline{z} \cap \underline{k} \oplus \underline{z} \cap \underline{p} = \underline{k}_o \oplus \underline{p}_o$$

de $\underline{z}$.

Il est clair que $\underline{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\underline{z}$. On a encore rang de $\underline{z}$ = rang de $\underline{k}_o$.

On écrit : $\underline{k}_o = \underline{t} \oplus \underline{r}_o$,

$V_o = \underline{t}^* \oplus \underline{p}_o^*$,

$\underline{r} = \underline{r}_o \oplus \underline{r}_1$,

$\underline{p} = \underline{p}_o \oplus \underline{p}_1$,

de sorte que $\underline{q} = \underline{r}_1 \oplus \underline{p}_1$,

$V = V_o \oplus V_1$, avec $V_1 = \underline{p}_1^*$.

PROJECTION D'ORBITES

On note W le normalisateur de T dans G mod T

W_o le normalisateur de T dans Z mod T.

Le groupe W_o est un sous-groupe de W. L'ensemble des éléments W-réguliers de $\underline{t}^*$ est $\underline{t}_r^*$. On note $\underline{t}_{r_o}^*$ l'ensemble des éléments W_o-réguliers de $\underline{t}^*$. Il est clair que $\underline{t}_r^*$ est un ouvert de $\underline{t}_{r_o}^*$. L'élément λ détermine une composante connexe C^+ de $\underline{t}_r^*$ et une composante connexe C_o^+ de $\underline{t}_{r_o}^*$. Soit $W^1 = \{w \in W$ tel que $w.\lambda \in C_o^+\}$. Alors W^1 est un système de représentants de $W_o\backslash W$.

Comme $\underline{z}^*$ est la variété des zéros pour l'action de X sur $\underline{g}^*$, la variété Ω_o des zéros de X sur Ω est $\Omega_o = \Omega \cap \underline{z}^*$. Comme V_o est la variété des zéros pour l'action de X sur V, on a $M_o = M \cap V_o = \Omega_o \cap p^{-1}(\underline{t}_r^*)$.

(7) <u>LEMME</u>.- $\Omega_o = \bigcup_{w \in W^1} Zw\lambda$, où l'union est disjointe.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Soit $m = g.\lambda \in \underline{z}^*$. Comme $g.\lambda$ est un élément elliptique de $\underline{z}^*$, il existe un élément u de Z tel que $ug\lambda \in \underline{t}^*$. Comme $G.\lambda \cap \underline{t}^* = W.\lambda$, on obtient le lemme.

La méthode de démonstration du théorème (5) se fera par récurrence sur la dimension de G. On écrit aussi $\Omega = G.\lambda = \Omega(G,\lambda)$ pour préciser sous quel groupe on considère l'orbite de λ. Avec cette notation

$$\Omega_o = \bigcup_{w \in W^1} (Z, w.\lambda) \quad .$$

De même on considère les variétés $M(Z,w.\lambda) = Zw\lambda \cap p_o^{-1}(\underline{t}_{r_o}^*)$, où $p_o : \underline{z}^* \to \underline{k}_o^*$.
Il est clair que $Zw\lambda \cap p_o^{-1}(\underline{t}_r^*)$ est une sous-variété ouverte de $M(Z,w.\lambda)$ et que :

$$M_o = \bigcup_{w \in W^1} M(Z,w.\lambda) \cap p_o^{-1}(\underline{t}_r^*) \quad . \tag{8}$$

Nous analysons les fibrés normaux de Ω_o dans Ω et de M_o dans M.

(9) <u>LEMME</u> .-Soit $f \in \Omega_o$, alors $T_f(\Omega) = T_f(\Omega_o) \oplus \underline{q}^*$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Ceci est clair puisque
$$\underline{g}.f = T_f(\Omega) = \underline{z}.f \oplus \underline{q}.f = T_f(\Omega_o) \oplus \underline{q}^*$$
car f est un élément régulier de $\underline{g}^*$, appartenant à $\underline{z}^*$.

Le fibré normal à Ω_o dans Ω est donc trivial et isomorphe à $\Omega_o \times \underline{q}^*$.

Considérons un point $m \in M$. D'après I.1.6, on a $T_m(M) = T_m(\Omega) \cap V$. Comme M_o est l'espace des points fixes du groupe à un paramètre relativement compact $(\exp tX)$, on a, en un point m de M_o, $T_m(M_o) = T_m(M) \cap V_o$. D'autre part, $T_m(\Omega) \cap V_1 = V_1 = \underline{p}_1^*$ d'après (9). On a donc, puisque m est fixé par X,

$$T_m(M) = T_m(M) \cap V_o \oplus T_m(M) \cap V_1$$

et le :

(10) <u>LEMME</u>.- Soit $m \in M_o$, alors

$$T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1 .$$

Le fibré normal de M_o dans M est donc trivial et isomorphe à $M_o \times V_1$.

(11) Analysons maintenant les orientations. Si μ est un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, la forme $- K_\mu^{\underline{p}_1}(X,Y) = - (\mu,[X,Y])$ est non dégénérée sur $\underline{p}_1$. Elle définit donc une orientation $\underline{p}_1^+(\mu)$ sur $\underline{p}_1$. On identifie $\underline{p}_1$ à V_1 par l'application $X \to X.\mu$ et on note $V_1^+(\mu)$ l'orientation ainsi définie sur V_1. Si μ et μ' sont deux éléments $\underline{g}$-réguliers de $\underline{t}^*$, on définit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{V_1}(\mu,\mu') &= 1 \quad \text{si les orientations } V_1^+(\mu) \text{ et } V_1^+(\mu') \text{ coïncident} \\ &= -1 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

(12) <u>LEMME</u>.- Si $w_o \in W_o$, $\varepsilon_{V_1}(w_o\mu ,\mu') = \varepsilon_{V_1}(\mu,\mu')$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Comme $V_1^+(w_o\mu) = w_o . V_1^+(\mu)$, il suffit de montrer qu'il existe une (donc toutes) orientation W_o-invariante sur V_1. Comme X a des valeurs propres imaginaires pures non nulles sur $(V_1)_{\mathbb{C}}$, on peut écrire $(V_1)_{\mathbb{C}} = V_1^+ \oplus V_1^-$, où V_1^+ est la somme des sous-espaces propres de X de valeur propre μ_j avec $\operatorname{Im} \mu_j > 0$, et $V_1^- = \overline{V_1^+}$. Ceci définit une structure complexe sur V_1 et donc une orientation. Comme X est fixé par W_o, cette orientation est W_o-invariante.

Considérons la décomposition (10) $T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1$ en tout point m de M_o. Les espaces $T_m(M)$ et $T_m(M_o)$ sont des espaces symplectiques et ont donc une orientation canonique. On en déduit une orientation $V_1^+(m)$ sur V_1 dépendant de la composante connexe de m dans M_o. Remarquons que pour $m = \lambda$, l'orientation $V_1^+(\lambda)$ est bien celle définie précédemment. On pose

$$\varepsilon(m) = 1 \quad \text{si } V_1^+(m) = V_1^+(\lambda)$$
$$= -1 \quad \text{sinon} .$$

(13) <u>LEMME</u>.- Soit $m \in Zw\lambda \cap p^{-1}(C^+)$, avec $w \in W^1$. Alors $\varepsilon(m) = \varepsilon(w)\, \varepsilon_{V_1}(w\lambda,\lambda)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Considérons les décompositions (9) et (10) d'espaces symplectiques. On a $\underline{q}^* = \underline{q} \cdot m$ et la forme σ_Ω sur $\underline{q}^*$ est définie par

$$\sigma_\Omega(X \cdot m, Y \cdot m) = -(m,[X,Y]) = -(Y \cdot m, X) .$$

Remarquons qu'on a une décomposition

$$\underline{q} \cdot m = \underline{r}_1 \cdot m \oplus \underline{p}_1^* = \underline{r}_1 \cdot m \oplus V_1$$

en somme de sous-espaces orthogonaux pour σ_Ω. Notons $O_m^{\underline{q}}$ (resp. $O_m^{\underline{r}_1}$) l'orientation de $\underline{q}$ définie par la forme $-K_m^{\underline{q}}(X,Y) = -(m,[X,Y])$, par $X,Y \in \underline{q}$

$$(\text{resp. } -K_m^{\underline{r}_1}(X,Y) = -(m,[X,Y]), \text{ pour } X,Y \in \underline{r}_1).$$

On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels orientés entre $V_1^+(m)$ et $(\underline{q}/\underline{r}_1, O_m)$, où O_m est l'orientation sur $\underline{q}/\underline{r}_1$ déduite des orientations $O_m^{\underline{q}}$ et $O_m^{\underline{r}_1}$.

Lorsque m varie dans $Z \cdot w \cdot \lambda$, la forme $K_m^{\underline{q}}$ sur $\underline{q}$ reste non dégénérée, car m reste $\underline{g}$-régulier et $\underline{q}$ est stable par Z. On a donc $O_m^{\underline{q}} = O_{\omega.\lambda}^{\underline{q}}$.

Comme $m \in \underline{t}^* \oplus \underline{p}^*$ et que $[\underline{r}_1,\underline{r}_1] \subset \underline{k}$, la forme $K_m^{\underline{r}_1}$ ne dépend que de la projection $p(m)$ de m sur $\underline{t}_r^*$, et l'orientation donnée à $\underline{r}_1$ reste constante lorsque $p(m)$ varie dans une composante connexe de t_r^*. On a donc $O_m^{\underline{r}_1} = O_\lambda^{\underline{r}_1}$. Donc $O_m = O_{w.\lambda}^{\underline{q}}/O_\lambda^{\underline{r}_1}$. Comme par définition $\varepsilon_{V_1}(w\lambda,\lambda)\ O_{w.\lambda}^{\underline{q}}/O_{w.\lambda}^{\underline{r}_1} = O_\lambda^{\underline{q}}/O_\lambda^{\underline{r}_1}$, il s'agit de montrer que $O_{w.\lambda}^{\underline{r}_1} = \varepsilon(w) O_\lambda^{\underline{r}_1}$, pour $w \in W^1$.

Soit $\mu \in \underline{t}_r^*$. Considérons $\underline{r}$ munie de la forme symplectique non dégénérée $-K_\mu^{\underline{r}}$. La décomposition $\underline{r} = \underline{r}_o \oplus \underline{r}_1$ est en sous-espaces orthogonaux pour $-K_\mu^{\underline{r}}$. On note $O_\mu^{\underline{r}}$ (resp. $O_\mu^{\underline{r}_o}$) l'orientation donnée à $\underline{r}$ (resp. $\underline{r}_o$) par la forme $-K_\mu^{\underline{r}}$ (resp. $-K_\mu^{\underline{r}_o}$). On a $O_{w.\mu}^{\underline{r}} = \varepsilon(w)\ O_\mu^{\underline{r}}$, pour tout $w \in W$. L'orientation $O_\mu^{\underline{r}_o}$ ne dépend que de

la composante connexe de μ dans $t^*_{\underline{r}_0}$. Puisque $w \,.\, \lambda \in C_0^+$, on a donc $O_\lambda^{\underline{r}_0} = O_{w.\lambda}^{\underline{r}_0}$
$O_{w.\lambda}^{\underline{r}_1} = O_{w.\lambda}^{\underline{r}}/O_{w.\lambda}^{\underline{r}_0} = \varepsilon(w)\; O_\lambda^{\underline{r}}/O_\lambda^{\underline{r}_0} = \varepsilon(w)\; O_\lambda^{\underline{r}_1}$, Q.E.D

I .3.- <u>IMAGE DE LA MESURE DE LIOUVILLE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</u>

Soit T un tore compact. Soit V un espace vectoriel muni d'une représentation linéaire de T. Soit M une sous-variété de V stable par T de dimension paire 2n. Supposons M munie d'une forme symplectique σ pour laquelle l'action de T sur M est hamiltonienne. Soit $J : M \to \underline{t}^*$ l'application moment. Supposons J propre (ou, pour l'application en vue, J propre au-dessus d'un ouvert de $\underline{t}^*$). Nous montrons dans cette section que $J_*(\beta_M)$ satisfait un système d'équations différentielles à coefficients constants, que nous allons définir.

L'ensemble des poids non nuls de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$ est un ensemble $\Sigma = \{\pm\, i\mu_j\}$. Soit $X \in \underline{t} - \{0\}$. On écrit alors $V = V_0(X) \oplus V_1(X)$ (ou simplement $V = V_0 \oplus V_1$ si X est fixé), où V_0 est le sous-espace des zéros de X sur V et V_1 le complément T-invariant de V_0.

Choisissons une orientation V_1^+ sur V_1. On peut choisir une base orientée $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_q, f_q$ de V_1 telle que :

$$H \,.\, e_k = -\,\mu_k(H) f_k$$

$$H \,.\, f_k = \mu_k(H) e_k, \qquad \text{pour tout } H \in \underline{t},$$

avec $\pm\, i\mu_k \in \Sigma$, $\mu_k(X) \neq 0$.

On note I l'ensemble $\{1,2,\ldots,q\}$

$$\omega_X^+ = \prod_{j\in I} \mu_j \,,$$

$$D_X^+ = D_{\mu_1} \,.\, D_{\mu_2} \cdot \ldots \cdot D_{\mu_q} \quad .$$

(ω_X^+ et D_X^+ ne dépendent que de l'orientation choisie sur V_1).

Soit $S(\underline{t}^*_{\mathbb{C}})$ l'algèbre des polynômes sur $\underline{t}_{\mathbb{C}}$, I_V l'idéal engendré dans $S(\underline{t}^*_{\mathbb{C}})$ par les fonctions polynômes homogènes ω_X^+, pour $X \in \underline{t} - \{0\}$.

PROJECTION D'ORBITES·

(1) LEMME.- L'ensemble des zéros communs des éléments de I_V est réduit à $\{0\}$.

DÉMONSTRATION.- Soit $X = X_1 + iX_2$, avec $X_1 \neq 0$. Il est clair que $\omega^+_{X_1}(X) \neq 0$ puisque toutes les formes linéaires $\mu_j \in \underline{t}^*$ non nulles sur X_1 sont a fortiori non nulles sur $X_1 + iX_2$. Si $X_1 = 0$ et $X_2 \neq 0$, alors $\omega^+_{X_2}(X) \neq 0$.

On identifie aussi $S(\underline{t}^*_{\mathbb{C}})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\underline{t}^*$.

(2). PROPOSITION.- Soit b une distribution sur un ouvert V de $\underline{t}^*$ vérifiant $D^+_X b = 0$, pour tout $X \in \underline{t} - \{0\}$. Alors b est polynômiale sur U.

DÉMONSTRATION.- D'après le théorème des zéros de Hilbert et le lemme (1), si ξ_i est un système de coordonnées linéaires sur $\underline{t}^*$, il existe un entier N tel que $\xi_i^N \in I_V$ pour tout i. La distribution b satisfait donc le système d'équations $(\frac{\partial}{\partial \xi_i})^N b = 0$, quel que soit i. Donc b est polynômiale, i.e. est de la forme $P(\xi)d\xi$ où P est un polynôme et $d\xi$ est une mesure de Lebesgue sur $\underline{t}^*$.

(3) Nous notons l'opérateur D^+_X simplement par D^+ lorsque X est fixé. Soit $M_o(X) = M \cap V_o(X)$ (ou simplement M_o) la variété des zéros de X_M. Nous montrons que $D^+(J_*(\beta_M))$ est à support dans $J(M_o)$ en suivant une méthode similaire à [Be.Ve.1] quis'inspirait d'un calcul de R. Bott [Bc].

Si $v \in V$, écrivons $v = v_o + \sum_{j\in I} (x_j e_j + y_j f_j)$, avec $v_o \in V_o$. Notons $q_1(v)$ la fonction $\sum_j (x_j^2 + y_j^2)$. La fonction q_1 ne s'annule que sur V_o.

On note θ_j la 1-forme sur V définie par

$$\theta_j = x_j dy_j - y_j dx_j \quad .$$

On a $\quad d\theta_j = 2\, dx_j \wedge dy_j$.

Soit X_V le champ de vecteurs associé à la tranformation infinitésimale de X sur V, i.e. $X_V = \Sigma\, \mu_j(X)(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j})$. On a

$$\theta_j(X_V) = \mu_j(X)\ (x_j^2 + y_j^2).$$

Soit A un sous-ensemble de I. On définit

$$\omega_A = \prod_{j\in A} \mu_j \quad ,$$

$$D_A = \prod_{j\in A} D_{\mu_j} \qquad \text{(en particulier } D_I = D^+) \quad ,$$

$$\eta_A = \sum_{i\in A} \theta_i \prod_{j\in A-\{i\}} (d\theta_j) \quad ,$$

$$A' = I - A \quad .$$

Si φ est une fonction C^∞ sur $\underline{t}^*$, $(D^+\varphi)\circ J \frac{\sigma^n}{n!}$ est une forme de degré maximal sur M. Le lemme suivant montre que cette forme est exacte en dehors de M_o. Plus précisément, nous l'écrivons explicitement $-d(\omega_\varphi)$ où ω_φ est une (2n-1)-forme définie sur $M - M_o$.

(4) <u>LEMME</u>.- $$(D^+\varphi)\circ J \frac{\sigma^n}{n!} = - d(\sum_k (k-1)! \sum_{\substack{A\subset I\\ \#A=k}} (D_{A'}\varphi)\circ J \frac{\eta_A}{q_1^k} \frac{\sigma^{n-k}}{(n-k)!}) \quad .$$

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Il suffit de montrer ceci lorsque $\varphi(\xi) = e^{<H,\xi>}$ avec $H \in \underline{t}$. Le membre de gauche est alors égal à

$$\omega_I(H)\, e^{J_H} \frac{\sigma^n}{n!} \quad .$$

Considérons la 1-forme $\Theta_H = \sum_{j\in I} \frac{\mu_j(H)^{-1}\theta_j}{q_1}$. Elle vérifie

$$\Theta_H(H_V) = 1$$

$$\mathcal{L}(H)\,.\,\Theta_H = 0$$

On a donc : $c(H_V)\Theta_H = 1$, $c(H_V)d\Theta_H = 0$.

La forme non homogène $(J_H + \sigma)$ vérifie l'équation $(c(H_M) - d)(J_H + \sigma) = 0$, puisque $d\sigma = 0$. Puisque $(c(H_M) - d)$ est une anti-dérivation de $\mathcal{A}(M)$, la forme $\mu_H = e^{(J_H+\sigma)} = e^{J_H}(\sum \frac{\sigma^n}{n!})$ vérifie aussi l'équation $(c(H_M) - d)\,.\,\mu_H = 0$. (C'est une forme fermée pour la cohomologie T-équivariante [Be-Ve.1]). La forme $d\Theta_H$ est annulée par d et $c(H_V)$. On a donc

$$\mu_H = (c(H_M) - d)(\Theta_H(1 - d\Theta_H)^{-1}\mu_H)$$

On a noté encore par Θ_H la restriction de Θ_H à M. Donc
$\omega_I(H)\mu_H = (c(H_M) - d)(\sum_k \omega_I(H)\Theta_H(d\Theta_H)^{k-1}\mu_H)$.

Identifiant le terme de degré maximum des deux membres, on obtient :

$$\omega_I(H)e^{J_H}\frac{\sigma^n}{n!} = -\, d\Big(\sum_k \omega_I(H)\theta_H(d\theta_H)^{k-1}\, e^{J_H}\,\frac{\sigma^{n-k}}{(n-k)!}\Big) \quad .$$

Le lemme (4) découlera de la formule :

$$(5) \qquad \omega_I(H)\theta_H(d\theta_H)^{k-1} = (k-1)! \sum_{\substack{A \\ \# A = k}} \omega_{A'}(H)\,\frac{\eta_A}{q_1^k} \quad ,$$

et du fait que, si $\varphi(\xi) = e^{<\xi,H>}$, $\omega_{A'}(H)e^{J_H} = (D_{A'}\varphi)\circ J$.

Nous montrons (5)

Soit $\nu_H = \Sigma\, \mu_j(H)^{-1}\theta_j$. Comme ν_H est une 1-forme, $\nu_H^2 = 0$.

On a $\quad d\nu_H = \Sigma\, \mu_j(H)^{-1}d\theta_j$,

$$\theta_H = q_1^{-1}\nu_H \quad .$$

On calcule :

$$\theta_H(d\theta_H)^{k-1} = q_1^{-k}\,\nu_H(d\nu_H)^{k-1} \quad , \quad \text{car } \nu_H^2 = 0$$

$$(d\nu_H)^{k-1} = (k-1)! \sum_{\substack{S\subset I \\ \# S = k-1}} \omega_S(H)^{-1} \prod_{j\in S} d\theta_j \quad , \quad \text{car } (d\theta_j)^2 = 0 \quad ,$$

$$\nu_H(d\nu_H)^{k-1} = (k-1)! \sum_{\substack{A\subset I \\ \# A = k}} \omega_A(H)^{-1}\eta_A \quad , \qquad \text{car } \theta_j d\theta_j = 0$$

$$\omega_I(H)\nu_H(d\nu_H)^{k-1} = (k-1)! \sum_{\substack{A\subset I \\ \# A = k}} \omega_{A'}(H)\eta_A \quad , \quad \text{ce qui démontre (5).}$$

(6) <u>COROLLAIRE</u>.- $D^+(J_*(\beta_M))$ est supportée sur $J(M_o)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Si φ a son support dans $t^* - \overline{J(M_o)}$, on a d'après (4)

$$\int (D^+\varphi)J_*(dm) = \int_M -\, d(\omega_\varphi)$$

où ω_φ est une forme C^∞ à support compact sur M. Donc $\int_M d(\omega_\varphi) = 0$.

Nous allons maintenant préciser le corollaire (6) dans une situation particulière.

(7) Nous fixons de nouveau $X \in \underline{t} - \{0\}$. Soit $V = V_o \oplus V_1$, $M_o = M \cap V_o$ la variété des zéros de X_M.

Nous faisons l'hypothèse

(8) Nous supposons que en tout point m de M, $T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1$. [Elle est vérifiée pour les variétés M introduites en I.2].

Sous l'hypothèse (8), le fibré normal à M_o dans M est donc trivial et identifié à $M_o \times V_1$.

Rappelons que nous avons choisi une orientation V_1^+ sur V_1.

D'autre part, les variétés $T_m(M)$ et $T_m(M_o)$ étant symplectiques, la décomposition $T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1$ fournit une orientation $V_1^+(m)$ à V_1 dépendant de la composante connexe M_o^α de m dans M_o. On pose

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= +1 \quad \text{si les orientations } V_1^+(m) \text{ et } V_1^+ \text{ coïncident ,} \\ &= -1 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

On note β_o^α la mesure de Liouville de M_o^α. On note $\dim V_1 = 2q$.

(9) <u>PROPOSITION</u>.- Sous l'hypothèse (8), on a

$$(-1)^q D^+(J_* \beta_M) = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha (J_o^\alpha)_* (\beta_o^\alpha) \quad .$$

<u>DÉMONSTRATION</u>.- On a

$$(-1)^q (D^+(J_* \beta_M), \varphi) = (J_*(\beta_M) \ , \ D^+\varphi) = \int (D^+\varphi) \circ J \frac{\sigma^n}{(2\pi)^n n!}$$

Considérons un produit scalaire T-invariant sur $V_o \oplus V_1$ coïncidant sur V_1 avec le produit scalaire q_1 choisi précédemment. Considérons la métrique Riemannienne T-invariante induite sur M. Soient deux voisinages $U_1 \subset U_2$ relativement compacts de Supp φ et travaillons au-dessus de U_2. Soient

$$V_1(\varepsilon) = \{v \in V_1 \ ; \ \|v\| < \varepsilon\} \quad , \quad M_o^i = M_o \cap J^{-1}(U_i).$$

On peut trouver $\varepsilon > 0$, tel que l'application exponentielle $(m,v) \longmapsto \exp_m v$ soit un difféomorphisme entre $M_o^2 \times V_1(\varepsilon)$ et un ouvert U_ε de M. On note U_ε^1 l'image de $M_o^1 \times V_1(\varepsilon)$, par l'application exponentielle.

On a :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_M (D^+\varphi)\circ J\,\frac{\sigma^n}{n!} = \lim_{\varepsilon\to o}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{M-U_\varepsilon^1}(D^+\varphi)\circ J\,\frac{\sigma^n}{n!}\ .$$

Sur $M - U_\varepsilon^1$, on a $(D^+\varphi)\circ J\,\frac{\sigma^n}{n!} = -\,d(\omega_\varphi)$, où

$$\omega_\varphi = \sum_k\Big(\sum_{\substack{A\\ \#A=k}}(k-1)!\,(D_A,\varphi)\circ J\,\frac{\eta_A}{q_1^k}\,\frac{\sigma^{n-k}}{(n-k)!}\Big)$$

est C^∞ sur $M - U_\varepsilon^1$.

On a donc

$$\int_M (D^+\varphi)d(J_*\beta_M) = \lim_{\varepsilon\to o}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\partial(U_\varepsilon^1)}\omega_\varphi\ .$$

On a $\partial(V_\varepsilon^1) \simeq M_o^1\times S_\varepsilon \cup (\overline{M_o^1} - M_o^1)\times V_1(\varepsilon)$ avec $S_\varepsilon = \{v \in V_1\ ;\ \|v\| = \varepsilon\}$. On peut supposer ε choisi de telle sorte que ω_φ soit nulle sur $(\overline{M_o^1} - M_o^1)\times V_1(\varepsilon)$. Si donc on note I_ε l'application de $M_o^1\times S_1$ dans $\partial(U_\varepsilon)$ donnée par $(m_o,v)\to \exp m_o(\varepsilon v)$, on a

$$\int_M (D^+\varphi)d(J_*\beta_M) = \int_{M_o^1\times S_1}\lim_{\varepsilon\to o}(I_\varepsilon)_*(\omega_\varphi)\ .$$

Ici l'orientation de $M_o\times V_1$ est celle compatible avec l'orientation de M.

Nous calculons $\lim_{\varepsilon\to o}(I_\varepsilon)_*(\omega_\varphi)$. On a $I_\varepsilon(m_o,v) = m_o + \varepsilon v \bmod \varepsilon^2$. Les formes $\frac{\eta_A}{q_1^k}$ sont invariantes par la transformation $(v_o,v_1)\to v_o + \varepsilon v_1$. On a donc $\lim_{\varepsilon\to o}(I_\varepsilon)_*\big(\frac{\eta_A}{q_1^k}\big) = \eta_A \mid M_o\times S_1$.

Comme σ est continue sur M, on a $\lim \varepsilon\to 0\ (I_\varepsilon)_*(\sigma) = (I_o)_*(\sigma) = \sigma_o$. Comme $\sigma_o^{n-k} = 0$ si $k < q$, on obtient :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{M_o^1\times S_1}(I_\varepsilon)_*(\omega_\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^q}(q-1)!\int_{S_1}\eta_I\cdot\int_{M_o}(\varphi\circ J)\,\frac{\sigma_o^{n-q}}{(2\pi)^{n-q}(n-q)!}$$

La proposition (9) sera prouvée si

(10) $$\frac{1}{(2\pi)^q}(q-1)!\int_{S_1^+}\eta_I = 1$$

où ici l'orientation S_1^+ de S_1 est celle naturelle de la sphère S_1^+ dans l'espace $V_1^+ \simeq \mathbb{R}^{2q}$. Or $\eta_I = 2^{(q-1)}\mu$ où μ est la forme volume de la sphère et vol $S^{(2q-1)} = (2q)\ \dfrac{\pi^q}{q!}$. Q.E.D.

I.4.- PROJECTION DE LA MESURE DE LIOUVILLE D'UNE ORBITE ELLIPTIQUE RÉGULIÈRE

Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, $M = G.\lambda \cap p^{-1}(\underline{t}_r^*)$. Nous considérons M comme plongée dans $V = \underline{t}^* \oplus \underline{p}^*$. Nous allons montrer dans cette section le théorème I.2.6 que nous rappelons ici

(1) THÉORÈME.- $J_*(\beta_M) = \dfrac{\pi}{|\pi^+|}\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\, w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)$.

Nous démontrons ce théorème par induction sur la dimension de G.

Nous supposons la formule (1) valable pour toutes les orbites elliptiques régulières de groupes de dimension strictement inférieure à G.

Considérons le système d'équations différentielles D_X^+ de la section I.3.

(2) PROPOSITION.- Pour tout $X \in \underline{t} - \{0\}$, on a, sur C^+, l'égalité des distributions

$$D_X^+(J_*\beta_M) = \nu_X^+\Big(\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)\Big)\ .$$

DÉMONSTRATION.- Reprenons les notations de I.2. Soit $X \in \underline{t} - \{0\}$ fixé. Soit $\underline{z} = \underline{k}_o \oplus \underline{p}_o$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$. On note Δ_n^o les racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_o^{\mathbb{C}}$, $\Delta_n^1 = \Delta_n - \Delta_n^o$.

Si μ est un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, μ définit un ordre $\Delta^+(\mu)$ sur Δ en posant

$$\Delta^+(\mu) = \{\alpha;\ (i\mu,h_\alpha) > 0\}.$$

On pose : $\Delta_n^+(\mu) = \Delta_n \cap \Delta^+(\mu)$, $(\Delta_n^o)^+(\mu) = \Delta_n^o \cap \Delta^+(\mu)$.

Notons $Y_\mu^{\mathfrak{g}} = H_{-i\alpha_1} * H_{-i\alpha_2} * \ldots * H_{-i\alpha_p}$ si $\Delta_n^+(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$,
(de sorte que $Y_\lambda^{\mathfrak{g}} = Y^+$)

$$Y_\mu^{\mathfrak{z}} = H_{-i\alpha_1} * H_{-i\alpha_2} * \ldots * H_{-i\alpha_{p_o}} \quad \text{si} \quad (\Delta_n^o)^+(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p_o}\} .$$

Considérons l'orientation $V_1^+(\mu)$ de V_1 défini en I.2.11. Cette orientation définit donc un opérateur $D_X^+(\mu)$ que nous notons D_μ^+. Soit $\dim V_1 = 2q$.

(3) <u>LEMME</u>.- $(-1)^q \, D_\mu^+ . Y_\mu^{\mathfrak{g}} = Y_\mu^{\mathfrak{z}}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Considérons la forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\underline{p}_1$ définie par $-B_\mu(Y,Z) = -(\mu,[Y,Z])$. Elle définit une orientation $\underline{p}_1^+(\mu)$ sur $\underline{p}_1$. Posons, pour $\beta \in (\Delta_n^1)^+(\mu)$

$$e_\beta = X_\beta + X_{-\beta} \quad , \quad f_\beta = i\,X_\beta - i\,X_{-\beta} ,$$

avec $X_{-\beta} = \overline{X}_\beta$.

L'orientation de $\underline{p}_1^+(\mu)$ est alors donnée par $\prod_{\beta\in(\Delta_n^1)^+(\mu)} e_\beta \wedge f_\beta$. L'isomorphisme $\underline{p}_1^+(\mu) \to V_1^+(\mu)$ défini par $Y \longmapsto Y . \mu$ commute à l'action de X.

Si $(\Delta_n^1)^+(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q\}$, l'opérateur D_μ^+ est égal à $D_{i\beta_1} \circ D_{i\beta_2} \circ \ldots \circ D_{i\beta_q}$. On obtient donc le lemme (3) car $\Delta_n^+(\mu) = (\Delta_n^1)^+(\mu) \cup (\Delta_n^o)^+(\mu)$.

Démontrons la proposition (2). Fixons comme orientation V_1^+ de V_1 l'orientation $V_1^+(\lambda)$ et notons D^+ l'opérateur D_X^+ correspondant. On a d'après (3)

$$(-1)^q \, D^+\Big(\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, w.\,(\delta_\lambda * Y^+)\Big) = (-1)^q \, D^+\Big(\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \delta_{w.\lambda} * Y_{w.\lambda}^{\mathfrak{g}}\Big)$$

$$= \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, \varepsilon_{V_1}(w\lambda,\lambda)\, \delta_{w.\lambda} * Y_{w\lambda}^{\mathfrak{z}} .$$

Calculons le premier membre de (2). Soit M_o la variété des zéros de X sur M. On a $M_o \cap p^{-1}(C^+) = \bigcup_{w_{.1}\in W^1} M(Z, w.\lambda) \cap p_o^{-1}(C^+)$ (I.2.8).

Notons $\beta_{w.\lambda}^Z$ la mesure de Liouville de $M(Z,w.\lambda)$. On a donc d'après I.3.9 et

I.2.14

$$(-1)^q D^+(J_*(\beta_M)) = \sum_{w_1\in W^1} \varepsilon(w_1)\, \varepsilon(\lambda,w_1\lambda)\, J_*(\beta^Z_{w_1\cdot\lambda})$$

au-dessus de C^+.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$J_*(\beta^Z_{w_1\cdot\lambda}) = \sum_{w_o\in W_o} \varepsilon(w_o)\, \delta_{w_o w_1\lambda} * Y^Z_{w_o w_1\lambda} \quad , \text{ car } w_1\lambda \in C_o^+,$$

et donc, sur C^+, on a :

$$(-1)^q D^+(J_*(\beta_M)) = \sum_{\substack{w_1\in W^1\\ w_o\in W_o}} \varepsilon(w_1)\, \varepsilon(w_o)\, \varepsilon(\lambda,w_1\lambda)\, \delta_{w_o w_1\lambda} * Y^Z_{w_o w_1\lambda} \ .$$

Comme W^1 est un système de représentants de $W_o\backslash W$, il suffit de vérifier que si $w = w_o \cdot w_1$, on a l'égalité :

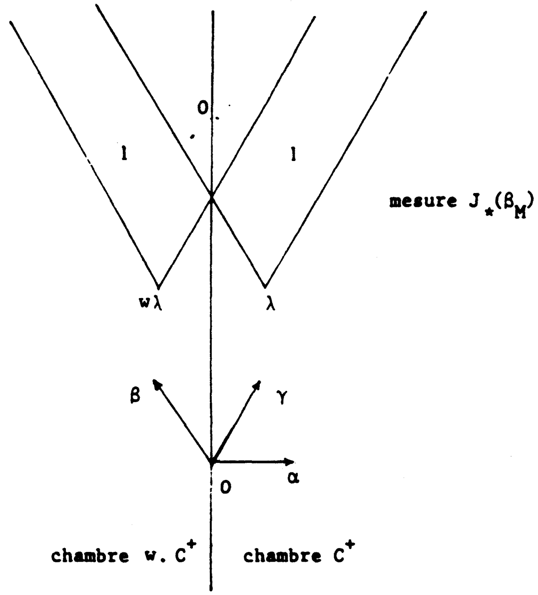
$$\varepsilon(w)\, \varepsilon(w\cdot\lambda,\lambda) = \varepsilon(w_o)\, \varepsilon(w_1)\, \varepsilon(w_1\lambda,\lambda) \quad \text{qui résulte de I.2.(12).}$$

Q.E.D.

Il résulte de la proposition (2) et de I.3.2 que $J_*(\beta_\Omega) - \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, w.(\delta_\lambda * Y^+)$ est donnée sur C^+ par une mesure de la forme $P(\xi)d\xi$, où $P(\xi)$ est un polynôme sur $\underline{t}^*$. Comme la mesure $J_*(dm)$ (ainsi que la mesure $\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, w.(\delta_\lambda * Y^+))$ est supportée dans l'ensemble $\|\xi\| \geq \|\lambda\| > 0$, (lemme I.2.1), on en déduit que $P = 0$. On a donc prouvé l'égalité du théorème (1) sur C^+ et par W-invariance sur $\underline{t}^*_r$.

Faisons ici quelques remarques sur l'image de M par J.

<u>REMARQUE</u> 1. Soit C^+_n le cône convexe engendré par $- i\, \Delta^+_n(\lambda)$. Il est clair que $J(M) \subset \bigcup_{w\in W} w.(\lambda + C^+_n)$. L'inclusion est cependant quelquefois stricte comme le montre l'exemple suivant de $\underline{su}(1,2)$, où les racines $\pm\alpha$ sont compactes $\pm(\beta,\gamma)$ sont non compactes.



REMARQUE 2.- On peut considérer $\Omega = G.\lambda$ comme un espace T-Hamiltonien. L'application moment $J_T : \Omega \to \underline{t}^*$ est la projection $p : \underline{g}^* \to \underline{t}^*$. D'après le théorème de Kostant (cf. [G. St.2]), on a

$$J_{\underline{t}}(\Omega) = \bigcup_{\xi \in J(M)} \text{enveloppe convexe des } W.\xi .$$

Si G/K est Hermitien symétrique et si λ est dominant par rapport au système Δ_n^+ déterminant la structure complexe de G/K, l'ensemble $J_{\underline{t}}(G.\lambda)$ a été déterminée par S. Paneitz. On a $J_{\underline{t}}(G.\lambda)$ = enveloppe convexe de $\{w.(\lambda + C_+^n)\}$ pour $w \in W$ [P].

I.5.- TRANSFORMÉES DE FOURIER

Le théorème I.2.5 a un énoncé dual par transformée de Fourier sur $\underline{k}$ qui s'exprime en termes analogues à la conjecture de Blattner. Notons tout d'abord quelques formules utiles pour les transformées de Fourier de fonction d'Heaviside.

Soit V un espace vectoriel réel, V^* son dual. Pour $\xi \in V^*$, non nul, notons

$$(H_\xi,\varphi) = \int_o^\infty \varphi(t\xi)dt$$

$$(I_\xi,\varphi) = \int_o^1 \varphi(t\xi)dt$$

On a : $H_\xi = \sum_{n=o}^{\infty} \delta_{n\xi} * I_\xi$.

Si dv est une mesure de Lebesgue sur V, on définit

$$(F_V\beta)(f) = \int_V e^{i(f,v)} \beta(v)dv \quad .$$

La transformée de Fourier de I_ξ est la fonction analytique sur V définie par :

$$\int \hat{I}_\xi(v)\ f(v)dv = (I_\xi,F_V\beta) \quad .$$

La transformée de Fourier de H_ξ est la fonction généralisée sur V définie par

$$\int \hat{H}_\xi(v)\ f(v)dv = (H_\xi,F_V\beta) \quad .$$

On a évidemment :

$$\hat{I}_\xi(v) = \frac{e^{i(\xi,v)} - 1}{i(\xi,v)}$$

i.e. (1) $\hat{I}_\xi = \dfrac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}$

(2) $\hat{H}_\xi = \sum_{n=o}^{\infty} e^{in\xi} \left(\dfrac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}\right)$.

Soit $\Sigma \subset V^*$ un ensemble fini de points de V^* strictement contenus dans un demi-espace. On définit :

$$Y_\Sigma = H_{\xi_1} * H_{\xi_2} *\dots* H_{\xi_r}$$

si $\Sigma = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ est non vide, $Y_\emptyset = \delta_o$

$$\prod_{\xi_i\in\Sigma} \left(\sum_{n\geq o} e^{n\xi_i}\right) = \Sigma\ Q_\Sigma(\mu)e^\mu$$

($Q_\Sigma(\mu)$ est nulle en dehors de $\sum_{\xi_i \in \Sigma} \mathbb{N}\ \xi_i$).

On a donc $Y_\Sigma = \sum_\mu Q_\Sigma(\mu)\ \delta_\mu * I_\Sigma$.

On considère la fonction analytique J_Σ sur V

$$J_\Sigma = \prod_{\xi_j \in \Sigma} \frac{e^{i\xi_j} - 1}{i\xi_j} .$$

On a alors

$$\hat{Y}_\Sigma = \sum_\mu Q_\Sigma(\mu)\ e^{i\mu}\ J_\Sigma . \tag{3}$$

Revenons au calcul de la transformée de Fourier $J_*(\beta_\Omega)$, où $\Omega = G . \lambda$ est une orbite elliptique régulière d'un groupe de Lie réductif G.

Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, Δ^+ l'ordre sur $\Delta(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{t}_{\mathbb{C}})$ défini en I.2.2, $\Delta_c^+ = \Delta^+ \cap \Delta_c$, $\Delta_n^+ = \Delta^+ \cap \Delta_n$. On considère la fonction de partition par rapport aux racines non compactes positives définie par

$$\prod_{\alpha \in \Delta_n^+} \left(\sum_{n \geq 0} e^{n\alpha} \right) = \sum Q(\mu) e^\mu \quad , \tag{4}$$

(la fonction $Q(\mu)$ est donc nulle si $\mu \notin \sum_{\alpha_i \in \Delta_n^+} \mathbb{N}\ \alpha_i$) .

On note $\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_n^+} \alpha$

$$\Lambda = i\lambda$$

La transformée de Fourier de la mesure $J_*(\beta_\Omega)$ est la fonction généralisée ψ_λ sur $\underline{k}$ définie par la formule :

$$\int_{\underline{k}} \psi_\lambda(X)\ f(X)dX = \int_{\underline{k}^*} \left(\int_{\underline{k}} e^{i(\xi,X)}\ f(X)dX \right) J_*(d\beta_\Omega)(\xi)$$

pour toute fonction f, C^∞ à support compact sur $\underline{k}$.

On définit, si $\mu \in i\underline{t}^*$, la fonction analytique $\Theta_\mu^{\underline{k}}$ K-invariante sur $\underline{k}$ par

$$\Theta_\mu^{\underline{k}}(H) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \frac{e^{(w.\mu,H)}}{\prod_{\alpha \in \Delta_c^+} (\alpha,H)} \tag{5}$$

On a $\theta^{\underline{k}}_{w.\mu} = \varepsilon(w)\theta^{\underline{k}}_{\mu}$, pour $w \in W$. Si μ n'est pas régulier, $\theta^{\underline{k}}_{\mu} = 0$.

Notons π_c la fonction donnée en I.1.5. (Elle dépend du choix de η et est proportionnelle à $\prod_{\alpha\in\Delta_c^+} h_\alpha$). On peut exprimer, si $\xi \in \underline{t}^*_r$, la mesure de Liouville β_ξ sur l'orbite $K.\xi$ en fonction de la mesure de Haar sur K par :

$$(6)\qquad \int_{K.\xi} \varphi \, d\beta_\xi = \frac{1}{(\mathrm{vol}\ T)} \frac{|\pi_c(\xi)|}{(2\pi)^r} \int_K \varphi(k.\xi)dk$$

(avec les conventions de I.2.7).

Si ξ est régulier dominant par rapport à Δ_c^+, on a

$$(7)\qquad \int_{K.\xi} e^{i\langle f,X\rangle} d\beta_\xi(f) = \theta^{\underline{k}}_{i\xi}(X) \quad , \text{ pour tout } X \in \underline{k}$$

Ceci est la formule d'Harish-Chandra (voir e.g. [Be-Ve.1] ou [D-H]).

(8) On note $j_{\underline{g}}$ la fonction analytique G-invariante sur $\underline{g}$ définie par

$$j_{\underline{g}}(X) = \det_{\underline{g}}\left(\frac{e^{\frac{adX}{2}} - e^{-\frac{adX}{2}}}{adX}\right) \quad .$$

On note j_n, $j_{\underline{k}}$ les fonctions analytiques K-invariantes sur $\underline{k}$ définie par :

$$j_{\underline{k}}(X) = \det_{\underline{k}}\left(\frac{e^{\frac{adX}{2}} - e^{-\frac{adX}{2}}}{adX}\right)$$

$$j_n(X) = \det_{\underline{p}}\left(\frac{e^{\frac{adX}{2}} - e^{-\frac{adX}{2}}}{adX}\right) \quad .$$

Les fonctions $j_{\underline{g}}$, (resp. $j_{\underline{k}}$, j_n) ont des racines carrées analytiques sur $\underline{g}$ (resp. $\underline{k}$).

On a :

$$j_{\underline{g}}^{1/2}(X) = j_{\underline{k}}^{1/2}(X)\, j_n^{1/2}(X) \quad , \text{ si } X \in \underline{k}$$

$$j_{\underline{g}}^{1/2}(H) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{e^{(\frac{\alpha,H}{2})} - e^{-(\frac{\alpha,H}{2})}}{(\alpha,H)} \quad ,$$

$$j_n^{1/2}(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} \frac{e^{(\frac{\alpha,H}{2})} - e^{-(\frac{\alpha,H}{2})}}{(\alpha,H)} \quad ,$$

$$j_{\underline{k}}^{1/2}(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_c^+} \frac{e^{(\frac{\alpha,H}{2})} - e^{-(\frac{\alpha,H}{2})}}{(\alpha,H)} \quad , \text{ pour } H \in \underline{t} \ .$$

On pose $\omega_c^+(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_c^+} (\alpha,H)$, $\omega_n^+(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} (\alpha,H)$

$$D_n^+ = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} D_\alpha \ .$$

(9) <u>THÉORÈME</u>.-

$$\psi_\lambda(X) = \sum_\mu Q(\mu - (\Lambda + \rho_n))\ \theta_\mu^{\underline{k}}(X)\ j_n^{1/2}(X).$$

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Soit A^+ l'application des fonctions sur $\underline{k}^*$ sur les fonctions sur $\underline{t}^*$ définie en (I.2.4) (Rappelons que les choix faits de dX, dH, η^+ vérifient $dX/dH = |\eta^+|$, $\pi_c^+(\lambda) > 0$) .

Notons $(F_{\underline{k}}\beta)(f) = \int_{\underline{k}} e^{i(f,X)}\ \beta(X)dX$, pour β une fonction C^∞ à support compact sur $\underline{k}$

$(F_{\underline{t}}\beta)(\xi) = \int_{\underline{t}} e^{i(\xi,H)}\ \beta(H)dH$, pour β une fonction C^∞ à support compact sur $\underline{t}$

$$(M^+\beta)(H) = \omega_c^+(H) \int_K \beta(k\,.\,H) \frac{dk}{\#W(\text{vol } T)}$$

L'application M^+ envoie les fonctions sur $\underline{k}$ dans les fonctions W-anti-invariantes sur $\underline{t}$. C'est l'intégrale invariante d'Harish-Chandra. Dans une identification de $\underline{k}$ avec $\underline{k}^*$ par un produit scalaire K-invariant, M^+ et A^+ sont proportionnelles. Comme $\det_{\underline{r}}(H) = |\omega_c^+(H)|^2 = (-1)^{\#\Delta_c^+}(\omega_c^+(H))^2$, on a la formule d'intégration suivante

$$(10) \qquad \int_{\underline{k}} \varphi(X)dX = (-1)^{\#\Delta_c^+} \int_{\underline{t}} \omega_c^+(H)(M^+\beta)(H)dH \ .$$

On a aussi la formule d'Harish-Chandra

$$(11) \qquad (F_{\underline{t}}M^+\beta) = (-1)^{\#\Delta_c^+}(A^+F_{\underline{k}}\beta) \quad , \text{ qui résulte de (7)}$$

Démontrons maintenant I.5.9. On a :

$$\int_{\underline{k}} \psi_\lambda(X)\beta(X)dX = (J_*(d\beta_\Omega),\, F_{\underline{k}}\beta) \quad , \text{ par définition,}$$

$$= (\sum_{w\in W} \varepsilon(w)w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+), A^+F_{\underline{k}}\beta) \quad , \text{ par I.2.5,}$$

$$= \#W(\delta_\lambda * Y^+, A^+F_{\underline{k}}\beta) \quad ,$$

car $A^+F_{\underline{k}}\beta$ est une fonction W -anti-invariante sur $\underline{t}^*$,

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+}\#W(\delta_\lambda * Y^+, F_{\underline{t}}M^+\beta) \quad , \text{ d'après (11).}$$

Soit $\Sigma = -i\,\Delta_n^+ \subset \underline{t}^*$. On a :

$$Y^+ = Y_\Sigma$$

$$J_\Sigma = \prod_{\alpha_j\in\Delta_n^+} \frac{e^{\alpha_j}-1}{\alpha_j} = e^{\rho_n} j_n^{1/2}$$

D'après (3), on a donc

$$(12) \quad \int_{\underline{k}} \psi_\lambda(X)\beta(X)dX = (-1)^{\#\Delta_c^+}\#W \sum_\mu Q(\mu)\int_{\underline{t}} e^{(\mu+\rho_n+\Lambda,H)} j_n^{\frac{1}{2}}(H)(M^+\beta)(H)dH\ ,$$

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+}\#W \sum_\mu Q(\mu-(\Lambda+\rho_n))\int_{\underline{t}} e^{(\mu,H)} j_n^{\frac{1}{2}}(H)(M^+\beta)(H)dH\ .$$

Calculons le second membre de I.5.9 intégré contre $\beta(X)dX$. On a :

$$\sum_\mu Q(\mu-(\Lambda+\rho_n))\int_{\underline{k}} \theta_\mu^{\underline{k}}(X) j_n^{1/2}(X)\beta(X)dX$$

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+}\sum_\mu Q(\mu-(\Lambda+\rho_n))\int_{\underline{t}} \sum \varepsilon(w)e^{(w\cdot\mu,H)}(M^+(j_n^{1/2}\beta))(H)dH, \quad \text{par (10)}$$

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+}\#W \sum_\mu Q(\mu-(\Lambda+\rho_n))\int_{\underline{t}} e^{(\mu,H)} j_n^{\frac{1}{2}}(H)(M^+\beta)(H)dH$$

car $j_n^{\frac{1}{2}}$ est K-invariante, $M^+\beta$ W-anti-invariante.

On a donc prouvé l'égalité énoncée au théorème (9).

<u>REMARQUE</u> - Il y a bien d'autres manières d'écrire ψ_λ. Nous avons choisi celle

ci pour son analogie avec la formule de Blattner.

Formellement l'expression $\psi_\lambda(H)$ se simplifie beaucoup puisque "$\Sigma\ Q(\mu)e^\mu = \pi \frac{1}{1 - e^\alpha}$". Nous indiquons un cas où cette simplification est légitime.

Introduisons quelques notations. La fonction polynômiale ω_n^+ est W -invariante, ω_n^+ se prolonge donc en une fonction polynôme K-invariante sur $\underline{k}$ que nous notons encore ω_n^+. Notons $\omega_n^+(\partial)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\underline{k}^*$ correspondant. On a $A^+\ \omega_n^+(\partial) = D_n^+ \circ A^+$.
On a : $\omega_n^+(X)^2 = \text{dét}(\text{ad}X \mid \underline{p})(-1)^{1/2 \dim \underline{p}}$.

(10) PROPOSITION.- La fonction généralisée $\omega_n^+(X)\psi_\lambda(X)$ est analytique. On a :

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\dim \underline{p})}\ \omega_n^+(X)\ \psi_\lambda(X) = \theta_\Lambda^{\underline{k}}(X)$$

REMARQUE.- L'analyticité de $\omega_n^+(X)\ \psi_\lambda(X)$ est l'analogue d'un résultat de W. Schmid [S] sur les K-caractères des représentations irréductibles de G.

DÉMONSTRATION.- Il suffit de reprendre les calculs de (9) pour $\int \psi_\lambda(X)\ \omega_n^+(X)\beta(X)dX$ et de noter que :

$$\begin{aligned} A^+F_{\underline{k}}\ \omega_n^+\beta &= (-i)^{\#\Delta_n^+}\ A^+\ \omega_n^+(\partial)\ F_{\underline{k}}\beta \\ &= (-i)^{\#\Delta_n^+}\ D_n^+\ A^+\ F_{\underline{k}}\beta \quad , \end{aligned}$$

et que $D_n^+(\Sigma\ \varepsilon(w)\ w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)) = (i)^{\#\Delta_n^+}(\Sigma\ \varepsilon(w)\delta_{w.\lambda})$.

Notons ν la fonction généralisée sur $\underline{g}$ transformée de Fourier de β_Ω. D'après un résultat d'Harish-Chandra rappelé en A.6, ν est C^∞ au voisinage de tout point $X \in \underline{k}$ tel que $\omega_n^+(X) \neq 0$. De (A.6.3) et (10), on déduit une nouvelle démonstration de la formule de Rossmann [R] :

(11) COROLLAIRE.- Soit $X \in \underline{k}$ un élément tel que $\omega_n^+(X)$ soit non nul. On a :

$$\nu(X) = \frac{(-1)^{\#\Delta_n^+}}{\omega_n^+(X)}\ \theta_\Lambda^{\underline{k}}\ (X)\ .$$

Si $X \in \underline{t}$ est régulier dans $\underline{g}$, cette formule se lit :

$$(12) \qquad \nu(X) = (-1)^{\#\Delta_n^+} \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\Lambda(X)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X)}$$

II.- UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DU CARACTÈRE DE KIRILLOV

II.1.- LA METHODE DE DESCENTE D'HARISH-CHANDRA (cf. [H-C. 2])

Soient G un groupe de Lie, $\underline{g}$ son algèbre de Lie, x un automorphisme de G dont la différentielle, notée encore x, soit un automorphisme semi-simple de $\underline{g}$. On note Z le groupe des points fixes de x dans G, $\underline{z}$ son algèbre de Lie. On pose $\underline{q} = (1 - x)\underline{g}$. Comme x est semi-simple, on a

(1) $\qquad \underline{g} = \underline{z} \oplus \underline{q}$.

Considérons l'action de G sur lui-même donnée par la formule :

(2) $\qquad g \,.\, h = g\,h\,x(g^{-1})$.

Soient $g_o \in G$, $z_o \in Z$. La différentielle de l'application $(g,z) \to g \,.\, z$ de $G \times Z$ dans G est surjective en (g_o,z_o) si et seulement si l'on a :

(3) $\qquad \det((1 - \mathrm{ad}Z_o \,.\, x) \mid \underline{q}) \neq 0$.

On note ${}^1Z$ l'ensemble des $z_o \in Z$ vérifiant (3). L'application $(g,z) \to g \,.\, z$ de $G \times {}^1Z$ dans G est donc submersive.

Soit ψ une fonction généralisée sur G, invariante par l'action (2) :

(4) $\qquad \psi(h) = \psi(g\,h\,x(g^{-1}))$ $\qquad$ pour $h \in G$, $g \in G$.

Alors, d'après (A.4.3), ψ admet une restriction ψ_x à ${}^1Z$, ψ_x détermine ψ dans l'ouvert $G \,.\, {}^1Z$ de G, et ψ_x est invariante par les automorphismes intérieurs de Z.

1er EXEMPLE.- Soit T une représentation traçable de G. Soit S(x) un opérateur borné dans l'espace de la représentation T tel que l'on ait :

$$T(x(g)) = S(x)T(g)S(x)^{-1} \qquad \text{pour tout } g \in G.$$

La fonction généralisée ψ sur G définie par

$$\psi(\alpha) = \mathrm{tr}(T(\alpha)S(x)) \qquad (\alpha \in \mathcal{M}_c^{\infty}(G))$$

vérifie (4).

2° EXEMPLE.- Soit Θ une fonction généralisée sur G invariante par les automorphismes intérieurs. Soit s un élément de G tel que ad s soit semi-simple dans $\underline{g}$, et posons $x = \mathrm{Ad}\, s$. La fonction $\Psi(s) = \Theta(gs)$ vérifie (4), et la distribution ψ_x détermine Θ dans un voisinage de s.

Définissons la fonction $j_{\underline{z}}$ sur $\underline{z}$ comme dans l'introduction, formule (8). Soit W un voisinage de 0 dans $\underline{z}$ dans lequel $j_{\underline{z}}$ est à valeurs > 0 et tel que exp(W) soit contenu dans ${}^{1}Z$. Suivant Harish-Chandra, on définit une fonction généralisée $\check{\Psi}_x$ dans W en posant :

$$(5) \qquad \check{\Psi}_x(X) = j_{\underline{z}}(X)^{\frac{1}{2}} \frac{|\det((1 - e^{\mathrm{ad}X}x) \mid \underline{q})|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - x) \mid \underline{q})|^{1/2}} \; \Psi(e^X) \quad .$$

($X \in W$. On a écrit, par abus de notation $\Psi_x(e^X) = \Psi(e^X)$).

Lorsque ψ est obtenu par le procédé de l'exemple 2, nous la noterons $\tilde{\Theta}_s$:

$$(6) \qquad \tilde{\Theta}_s(X) = j_{\underline{z}}(X)^{\frac{1}{2}} \frac{|\det((1 - \mathrm{ad}(e^X s) \mid \underline{q})|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - \mathrm{ad}\, s) \mid \underline{q})|^{1/2}} \; \Theta(e^X s) \qquad (X \in W) \; .$$

* * *

Soit T une représentation unitaire irréductible traçable de G. Soit Θ son caractère, c'est-à-dire la fonction généralisée $\Theta(\alpha) = \mathrm{tr}\, T(\alpha)$ ($\alpha \in \mathcal{D}_c^\infty(G)$). Si Ω est une orbite de G dans $\underline{g}^*$, nous dirons que Ω est tempérée si sa mesure de Liouville β_Ω, considérée comme mesure sur $\underline{g}^*$ concentrée dans Ω, est tempérée. Sa transformée de Fourier

$$\hat{\beta}_\Omega(X) = \int_{\underline{g}^*} e^{if(X)} \, d\beta_\Omega(f)$$

est une fonction généralisée dans $\underline{g}$ que nous appellerons la transformée de Fourier de Ω. La formule du caractère de Kirillov postule l'existence, si T est suffisamment générique, d'une orbite Ω tempérée et d'une constante $c \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$(7) \qquad c\,\hat{\beta}_\Omega = \tilde{\Theta}_1 \qquad \text{dans } W.$$

Cette formule a été démontrée dans de nombreux cas (cf. en particulier [Ki],[Kh],[R]).

Supposons maintenant G réductif et connexe. Supposons que Θ soit le caractère d'une représentation de carré intégrable (modulo le centre) T de G, unitaire et irréductible. Soit s un élément de G tel que ad s soit elliptique (i.e. semi-simple à valeurs propres imaginaires pures). Alors, par construction même de Θ dans [H.C, 3], $\tilde{\Theta}_s$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$. Nous calculons dans le parag. 3 de quelle combinaison linéaire il s'agit. Soit Ω l'orbite de G dans $\underline{g}^*$ associée à T par Harish-Chandra. D'après [R], (7) est valable avec c = 1. Remarquons que (1) permet d'identifier $\underline{z}^*$ à un sous-espace de $\underline{g}^*$. Alors $\Omega \cap \underline{z}^*$ est l'ensemble des points fixes de s dans Ω, et égal à une réunion finie d'orbites de Z.

Nous définissons sur $\underline{z}^* \cap \Omega$ une fonction φ_s constante sur chaque orbite de Z, et telle que l'on ait dans W l'égalité de fonctions généralisées :

$$\tilde{\Theta}_s(X) = \int_{\underline{z}^*} e^{if(X)}\, \varphi_s(f)\, d\beta_{\Omega\cap\underline{z}^*}(f) \tag{8}$$

Pour s = 1, c'est la formule (7). Nous pensons que (8) est "universelle" au même titre que la formule de Kirillov (7). C'est pourquoi nous décrivons la fonction φ_s en terme de la structure symplectique de Ω, en mettant en évidence son rapport avec la représentation métaplectique.

II.2.- UNE FONCTION SUR LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE

Soit V un espace vectoriel symplectique réel, et soit B sa structure symplectique. On note SP(V) le groupe symplectique, et Mp(V) le groupe métaplectique. C'est donc une extension centrale

$$1 \to \{1,e\} \to Mp(V) \to Sp(V) \to 1 \quad . \tag{9}$$

Nous notons en général $\tilde{x}$ un élément de Mp(V) et x son image dans Sp(V).

Rappelons - pour fixer les conventions - la construction de la représentation métaplectique. Posons $\underline{n} = V \oplus \mathbb{R}E$. On munit $\underline{n}$ de la structure d'algèbre de Lie pour laquelle E est central et

$$[v,v'] = B(v,v')E \quad , \quad \text{pour } v,v' \in V. \tag{10}$$

On note N le groupe simplement connexe correspondant.Sp(V) opère dans $\underline{n}$

par la formule $x(v \oplus t\,E) = x(v) \oplus t\,E$, et donc dans N.

On sait (théorème de Stone - Von-Neumann) qu'il existe une représentation unitaire irréductible T de N, et une seule à équivalence près, telle que

(11) $\quad T(e^{tE}) = e^{it}\mathrm{Id}.$

Notons $\mathcal{H}$ l'espace de T. On sait (Ségal, Shale , Weil) qu'il existe une représentation unitaire unique S de Mp(V) dans $\mathcal{H}$ telle que :

(12) $\quad S(\tilde{x})T(n)S(\tilde{x})^{-1} = T(x(n))$

pour tout $\tilde{x} \in Mp(V)$ et $n \in N$, et

(13) $\quad S(e) = -\mathrm{Id}$.

Soit $\underline{\ell}$ un sous-espace lagrangien du complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V. C'est une sous-algèbre de Lie de $\underline{n}_{\mathbb{C}}$, et donc $\underline{\ell}$ opère dans l'espace $\mathcal{H}^{\infty}$ des vecteurs différentiables de la représentation T. On note $q(\underline{\ell})$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de la matrice associée à la forme hermitienne $v \to iB(v,\bar{v})$ sur $\underline{\ell}$. On sait (cf. [Du] ch. I) que

(14) $\quad H_j(\underline{\ell},\mathcal{H}^{\infty}) = \{0\} \qquad \text{si } j \neq \underline{q}(\underline{\ell})$

(15) $\quad \dim H_{q(\underline{\ell})}(\underline{\ell},\mathcal{H}^{\infty}) = 1$.

Soit $\tilde{x}$ un élément de Mp(V) stabilisant $\underline{\ell}$. Il opère dans $H_{q(\underline{\ell})}(\underline{\ell},\mathcal{H}^{\infty})$. On note $\rho_{\ell}(\tilde{x})$ le scalaire obtenu. On a ([Du], ch. I)

(16) $\quad \rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x})^2 = \det(x \mid \underline{\ell})$

(17) $\quad \rho_{\underline{\ell}}(e) = -1$.

Posons $V' = (1-x)V$. Notons $n_{\underline{\ell}}(x)$ le nombre, compté avec multiplicité, de valeurs propres de x dans $\underline{\ell} \cap \bar{V}$ qui sont dans l'intervalle $]1,\infty[$. Notons $q_{\underline{\ell}}(x) = q(\underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}})$. Posons

(18) $\quad \Phi_{\underline{\ell}}(\tilde{x}) = (-1)^{\underline{n}_{\underline{\ell}}(x)+q_{\underline{\ell}}(x)} \rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x})\det((1-x) \mid \underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}})^{-1}$.

(19) LEMME.- Soient $\underline{\ell}$ et $\underline{\ell}'$ deux sous-espaces lagrangiens de $V_{\mathbb{C}}$, et $\tilde{x} \in Mp(V)$ stabilisant $\underline{\ell}$ et $\underline{\ell}'$. On a

$$\Phi_{\underline{\ell}}(\tilde{x}) = \Phi_{\underline{\ell}'}(\tilde{x}) \quad .$$

DÉMONSTRATION.- Posons

(20) $\qquad \underline{m} = \underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}} \ , \quad \underline{m}' = \underline{\ell}' \cap V'_{\mathbb{C}}.$

Les espaces $\underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}'$ et $\underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}'$ sont en dualité non dégénérée x-invariante. On a donc :

(21) $$\det((1 - x) \mid \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}') = \det((1 - x^{-1}) \mid \underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}')$$
$$= (-1)^{\dim \underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}'} \det(x \mid \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}') \det ((1 - x) \mid \underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}') \quad .$$

De manière évidente on a :

(22) $$\det(x \mid \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}') = \det(x \mid \underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}').$$

Dans [Du], ch I, il est montré qu'il existe un nombre $\varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) \in \{\pm 1\}$ tel que

(23) $$\rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x})/\rho_{\underline{\ell}'}(\tilde{x}) = \det(x \mid \underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \ \varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) \quad .$$

Le lemme (19) résulte donc du lemme suivant.

(24) LEMME.- Les notations étant comme en (20) et (23), on a :

$$\varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) = (-1)^{n_{\underline{\ell}}(x)+n_{\underline{\ell}'}(x)+q_{\underline{\ell}}(x)+q_{\underline{\ell}'}(x)+\dim \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}'} \quad .$$

DÉMONSTRATION.- Si V est somme directe de deux sous-espaces symplectiques V_1 et V_2, stables par x, et tels que $\underline{\ell} = (\underline{\ell} \cap V_{1,\mathbb{C}}) \oplus (\underline{\ell} \cap V_{2,\mathbb{C}})$ et de même pour $\underline{\ell}'$, on voit facilement qu'il suffit de démontrer les assertions correspondantes pour les restrictions de x à V_1 et V_2. Nous sommes ramenés à démontrer (24) dans les trois cas suivants :

1er cas : $x = 1$. C'est clair.

2ème cas : Les valeurs propres de x ne sont pas positives. Dans ce cas

$n_{\underline{\ell}}(x) = n_{\underline{\ell}'}(x) = 0$, et (24) est la formule donnée dans [Du], I,10.

$3^{\text{ème}}$ cas : Les valeurs propres de x sont positives et différentes de 1. Dans ce cas on sait ([Du], I.10) que $\varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) = 1$. Il faut donc montrer que l'exposant de (-1) dans (24) est pair.

Posons $\underline{r} = \underline{\ell}/(\underline{\ell} \cap V_{\mathbb{C}})$, $U = \underline{\ell} \cap V$, $S =$ (orthogonal de U dans V), $W = S/U$. Alors $\underline{r}$ est un sous-espace lagrangien de W, totalement complexe. Soit λ une valeur propre de x dans $\underline{r}$. Comme λ est réel, λ est valeur propre dans $\bar{\underline{r}}$ (le conjugué de $\underline{r}$) avec la même multiplicité. Par dualité, λ^{-1} est valeur propre dans $\underline{r}$ avec la même multiplicité. Les espaces propres correspondants sont totalement isotropes pour la forme $v \to iB(v,\bar{v})$. On voit que la dimension de $\underline{r}$ est paire et égale à $2q_{\underline{\ell}}(x)$. Si $\underline{s}$ est un espace x-stable, on note $m(\underline{s})$ le nombre de valeurs propres de x dans $\underline{s}$ qui sont dans l'intervalle $]1,\infty[$, comptées avec multiplicité. On a $q_{\underline{\ell}}(x) = m(\underline{r})$, et donc $q_{\underline{\ell}}(x) + n_{\underline{\ell}}(x) = m(\underline{\ell})$. De même $q_{\underline{\ell}'}(x) + n_{\underline{\ell}'}(x) = m(\underline{\ell}')$.

Les espaces $\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}'$ et $\underline{\ell}'/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}'$ étant en dualité non dégénérée x-invariante, on a $m(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + m(\underline{\ell}'/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') = \dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}')$.
Soit e l'exposant de (-1) dans (18). On a

$$\begin{aligned} e &= m(\underline{\ell}) + m(\underline{\ell}') + \dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \\ &= m(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + m(\underline{\ell}'/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + 2m(\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + \dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \\ &= 2\dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + 2m(\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \\ &= 0 \bmod(2). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Soit $\tilde{x} \in M_p(V)$. Il existe un sous-espace lagrangien $\underline{\ell}$ de $V_{\mathbb{C}}$ stable par x. On pose :

(25) $\quad \Phi(\tilde{x}) = \Phi_{\underline{\ell}}(\tilde{x})$.

La définition (25) est légitime à cause du lemme (19). De (17), on déduit

(26) $\quad \Phi(\tilde{x}) = -\Phi(e\tilde{x})$.

En vue du paragraphe 3, nous calculons Φ dans un cas particulier. Soit

$X \in \underline{sp}(V)$ un élément elliptique (i.e. semi-simple à valeurs propres imaginaires pures). Posons $\tilde{x} = \exp(X) \in Mp(V)$. Soit $\underline{\ell}$ un sous-espace lagrangien de $V_{\mathbb{C}}$ stable par X. On pose $\rho_{\underline{\ell}}(X) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X \mid \underline{\ell})$. On a

$$(27) \qquad \Phi(\tilde{x}) = (-1)^{q_{\underline{\ell}}(x)} e^{\rho_{\underline{\ell}}(X)} \det((1 - x) \mid \underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}})^{-1}$$

En effet, considérons le stabilisateur de $\underline{\ell}$ dans Mp(V). Alors $\rho_{\underline{\ell}}$ est un caractère de ce sous-groupe, et donc $\rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x}) = e^{\rho_{\underline{\ell}}(X)}$. D'autre part, $n_{\underline{\ell}}(x) = 0$.

La fonction Φ est essentiellement le caractère de la représentation métaplectique S. Considérons d'abord un élément $\tilde{x} \in Mp(V)$, régulier dans Mp(V), c'est-à-dire dont le centralisateur dans sp(V) est une sous-algèbre de Cartan. On sait que S est une représentation traçable de Mp(V), et (d'après Harish-Chandra) que son caractère est différentiable au voisinage de $\tilde{x}$. Nous noterons tr $S(\tilde{x})$ sa valeur en $\tilde{x}$. D'après [T], on a

$$(28) \qquad \Phi(\tilde{x}) = \mathrm{tr}\, S(\tilde{x}).$$

<u>REMARQUE</u>.- On peut interpréter (28) comme une formule d'Euler-Poincaré. Soit $\tilde{x} \in Mp(V)$ un élément régulier, et soit $\underline{\ell}$ un sous-espace lagrangien stable par x de $V_{\mathbb{C}}$. Remarquant que $(1 - x)V = V$, tenant compte de (28), (18), (15), (14), et supposant $n_{\underline{\ell}}(x) = 0$, on a :

$$(29) \qquad \det((1 - x) \mid \underline{\ell})\ \mathrm{tr}\, S(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathrm{tr}(\tilde{x} \mid H_i(\underline{\ell}, \mathcal{H}^{\infty})).$$

Cette formule "formellement évidente" est donc valable avec des restrictions analogues ($n_{\underline{\ell}}(x) = 0$) à celles que l'on rencontre dans la conjecture d'Osborne (cf. [He - S. 2]).

Nous généralisons (28) à tous les éléments $\tilde{x} \in Mp(V)$ tels que x soit semi-simple, en utilisant la méthode de descente. Soit Ω l'ensemble des $f \in \underline{n}^*$ tels que $f(E) = 1$. On sait que c'est une orbite de N dans $\underline{n}^*$, et que la formule de Kirillov est valable : dans $\underline{n}$ on a l'identité de fonctions généralisées

$$(30) \qquad \mathrm{tr}\, T(e^X) = \int_{\Omega} e^{if(X)}\, d\beta_{\Omega}(f) \quad .$$

Comme dans l'exemple 1 du § 1, on définit une fonction généralisée $tr(T(n)S(\tilde{x}))$ sur N, le sous-groupe Z des points fixes de x dans N, et la décomposition (1) de $\underline{n}$. Sur $\underline{z}$ la fonction généralisée donnée par la formule (5) devient $tr(T(e^X)S(\tilde{x}))$.

(31) <u>THÉORÈME</u>.- Dans $\underline{z}$, on a l'identité de fonctions généralisées :

$$tr(T(e^X)S(\tilde{x})) = \phi(\tilde{x}) \int_{\Omega\cap\underline{z}^*} e^{if(X)}\, d\beta_{\Omega\cap\underline{z}^*}(f) \quad .$$

La démonstration se fait comme celle de (28) dans [T]. Nous n'en disons pas plus, car nous n'utiliserons pas le théorème. Son intérêt pour nous est de justifier la définition (25). Remarquons que, pour $\tilde{x} = 1$, (31) est la formule de Kirillov (30) et pour $\tilde{x}$ régulier, la formule (28).

II.3.- LE CAS DE LA SÉRIE DISCRÈTE DES GROUPES SEMI-SIMPLES CONNEXES

Dans ce paragraphe, G est un groupe de Lie semi-simple connexe. On fixe une décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ de $\underline{g}$, on note K le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\underline{k}$. On sait que K contient le centre Γ de G et que K/Γ est compact. On suppose que $\underline{k}$ et $\underline{g}$ ont le même rang. Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$. On choisit un élément $\lambda \in \underline{t}^*$, régulier dans $\underline{g}^*$. On note $\Omega = G\lambda$. On emploie les notations du paragraphe I.2. On pose :

(1) $$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha \quad .$$

On dit que λ est admissible si $\Lambda + \rho$ est différentielle d'un caractère de T. Dans la suite, nous supposons λ admissible.

A λ, Harish-Chandra associe dans [H-C. 3] une fonction généralisée Θ_λ sur G. Rappelons-en la définition. Soit $\ell = \dim \underline{t}$. Soit, pour $g \in G$, D(g) le coefficient de t^ℓ dans $\det(t + 1 - ad(g))$. Soit G' l'ensemble des éléments réguliers de G. Si Θ est une fonction généralisée sur G invariante par automorphismes intérieurs, et vecteur propre pour l'action de $Z(\underline{g})$, Θ est C^∞ dans G'.

D'après [H-C . 3], il existe une et une seule fonction généralisée, notée Θ_λ sur G, invariante par automorphismes intérieurs, vecteur propre pour $Z(\underline{g})$, telle que $|D|^{1/2}|\Theta_\lambda|$ soit bornée sur G', et telle que, pour tout

$X \in \underline{t}$ tel que $e^X \in G'$, on ait :

(2) $$\Theta_\lambda(e^X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}} \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{i w\lambda(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} (e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)})}$$

(Harish-Chandra suppose Γ fini, mais cela n'est pas nécessaire). Dans [H-C. 4], Harish-Chandra montre que Θ_λ est le caractère d'une représentation unitaire irréductible de G, que nous noterons T_λ. Nous poserons $\Theta = \Theta_\lambda$.

Soit s un élément de T. L'automorphisme ads de $\underline{g}$ est elliptique. Nous employons les notations $\underline{z}$ et $\underline{q}$ du paragraphe 1. Nous posons $\Omega_s = \underline{z}^* \cap \Omega$. C'est l'ensemble des points fixes de s dans Ω. L'ensemble Ω_s est une sous-variété symplectique de Ω. Il est réunion d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$ et la seconde structure symplectique dont il est muni coïncide avec la première.

Soit $f \in \Omega$. On note G(f) le centralisateur de f dans G et $\underline{g}(f)$ son algèbre de Lie. On munit $\underline{g}/\underline{g}(f)$ de la structure symplectique déduite de $X,Y \to f[X,Y]$ par passage au quotient. On note $\widetilde{G(f)}$ l'ensemble des couples (g,m) où $g \in G(f)$, $m \in Mp(\underline{g}/\underline{g}(f))$ ont même image dans $Sp(\underline{g}/\underline{g}(f))$. On note encore e l'élément (1,e) de $\widetilde{G(f)}$. Comme G(f) est connexe (car conjugué de $G(\lambda) = T$) et comme λ est admissible, il existe un caractère χ_f et un seul de $\widetilde{G(f)}$ tel que l'on ait :

(3) $$\chi_f(e) = -1$$

(4) $$\chi_f(e^X) = e^{if(X)} \qquad X \in \underline{g}(f) .$$

Soit $(g,m) \in \widetilde{G(f)}$. Rappelons la définition (2.25) de la fonction Φ sur $Mp(\underline{g}/\underline{g}(f))$. On pose

(5) $$\varphi_g(f) = \chi_f((g,m))\Phi(m) .$$

A cause de (3) et (2.26), $\varphi_g(f)$ ne dépend pas du choix de $(g,m) \in \widetilde{G(f)}$ représentant g. Par transport de structure, on a, pour tout $h \in G$, $f \in \Omega$, $g \in G(f)$:

(6) $$\varphi_{hgh^{-1}}(hf) = \varphi_g(f)$$

Si $f \in \Omega_s$, on a évidemment $s \in G(f)$, de sorte que φ_s est une fonction bien définie sur Ω_s, et la formule (1.19) montre qu'elle est constante sur les orbites de Z dans Ω_s, et en particulier localement constante.

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\mathcal{V}_\varepsilon$ l'ensemble des $X \in \underline{g}$ tels que les valeurs propres ζ de ad$X$ vérifient $|\mathrm{Im}(\zeta)| < \varepsilon$ ($\mathrm{Im}(\zeta)$ est la partie imaginaire de ζ). Comme ad$s$ est elliptique, si ε est assez petit (dépendant de s), l'ouvert $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$ vérifie les conditions de l'ouvert $\mathcal{V}$ du paragraphe 1. Dans $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$, on définit la fonction généralisée Θ_s par la formule (1.6).

(7) THÉORÈME.- Dans $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$, on a l'identité de fonctions généralisées

$$\tilde{\Theta}_s(X) = \int_{\Omega_s} e^{if(X)} \varphi_s(f) d\beta_{\Omega_s}(f) \quad .$$

REMARQUES.- 1) Pour $s = 1$, (7) est la formule de Kirillov, démontrée dans ce cas par Rossmann.

2) On notera l'analogie de (7) et (2.31).

3) Par construction même de Θ dans [H-C. 3], $\tilde{\Theta}_s$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$. Le théorème (7) décrit cette combinaison linéaire.

DÉMONSTRATION.- Définissons une fonction généralisée sur $\underline{z}$ par la formule :

$$(8) \qquad \nu_s(X) = \int_{\Omega_s} e^{if(X)} \varphi_s(f) d\beta_{\Omega_s}(f) \quad .$$

D'après [H-C .3], $\tilde{\Theta}_s$ est une restriction à $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$ d'une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de la forme $Z\,\lambda_i$, où les λ_i sont des éléments de $\underline{t}^*$ réguliers dans $\underline{g}^*$. Il en est de même de ν_s. Donc $\tilde{\Theta}_s$ et ν_s sont différentiables en tout point X de $\underline{t}$ régulier dans $\underline{z}$. Le théorème d'unicité ([H-C. 3], corollaire du lemme 28) montre qu'il suffit, pour démontrer (7), de démontrer que pour tout X d'un ouvert dense de $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{t}$ formé d'éléments réguliers, on a :

$$(9) \qquad \tilde{\Theta}_s(X) = \nu_s(X) \quad .$$

Or ceci est en principe facile : $\tilde{\Theta}_s(X)$ est donné par la formule (2), et $\nu_s(X)$ par la formule de Rossmann (I.5.12), appliquée à chacune de orbites de la composante neutre Z^o de Z dans Ω_s. (On pourrait, mais sans doute au détriment de la clarté, abréger les calculs ci-dessous en s'appuyant encore plus ceux de [H-C. 3], qui donne des formules pour $\tilde{\Theta}_s$. (Inversement, la formule (7) permettrait de simplifier l'exposé de [H-C. 3] de l'existence de Θ).

Nous procédons au calcul de $\nu_s(X)$, pour $X \in \underline{t}$.

Rappelons que W est le normalisateur de T dans G, modulo T. Comme en (I.2), on note W_o le normalisateur de T dans Z^o, modulo T, et on choisit le même système de représentant W^1 des classes $W_o \backslash W$. Comme dans le lemme (I.2.7), on a :

(10) $$\Omega_s = \bigcup_{\sigma \in W^1} Z^o \sigma\lambda \qquad \text{(réunion disjointe).}$$

Notons ν_σ la fonction généralisée sur $\underline{z}$ transformée de Fourier de l'orbite $Z^o\sigma\lambda$:

(11) $$\nu_\sigma(X) = \int_{Z^o\sigma\lambda} e^{if(X)} d\beta_{Z^o\sigma\lambda}(f) \quad .$$

Comme en (I.4), nous notons Δ^o l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{z}_{\mathbb{C}}$, Δ^1 l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{q}_{\mathbb{C}}$, de sorte que

(12) $$\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^o \qquad \text{(réunion disjointe).}$$

On pose $\Delta^1_n = \Delta^1 \cap \Delta_n$, $\Delta^{1,+} = \Delta^1 \cap \Delta^+$, $\underline{p}_o = \underline{p} \cap \underline{z}$, $\underline{p}_1 = \underline{p} \cap \underline{q}$, $\underline{k}_1 = \underline{k} \cap \underline{z}$, $\underline{k}_o = \underline{k} \cap \underline{q}$, $\rho = \rho_o + \rho_1$, etc... On pose

(13) $$m_\sigma = \# \{\alpha \in \Delta^{o,+},\ \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\} \quad .$$

D'après la formule de Rossmann (I.5.12), on a

(14) $$\nu_\sigma(X) = (-1)^{m_\sigma + \frac{1}{2}\dim \underline{p}_o} \frac{\sum_{w \in W_o} \varepsilon(w)\, e^{iw\sigma\lambda(X)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^{o,+}} \alpha(X)} \quad .$$

Calculons $\varphi_s(\sigma\lambda)$. On a $G(\sigma\lambda) = T$. Soit $Y \in \underline{t}$ tel que $e^Y = s$. Posons $\underline{\ell} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \underline{g}_\alpha$, où $\underline{g}_\alpha$ est le sous-espace radiciel correspondant à α. Alors $\underline{\ell}$, identifié à un sous-espace de $(\underline{g}/\underline{g}(\sigma\lambda))_{\mathbb{C}}$, est lagrangien et stable par

$G(\sigma\lambda)$.

Notons $q(\sigma)$ le nombre de valeurs propres < 0 de la matrice représentant la forme hermitienne $i\sigma\lambda[X,\bar{X}]$ sur $\underline{q}_{\mathbb{C}} \cap \underline{\ell}$. Il résulte de (2.27) et (5) que l'on a

(15) $$\varphi_s(\sigma\lambda) = (-1)^{q(\sigma)} \frac{e^{(i\sigma\lambda+\rho)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} (1-e^{\alpha(Y)})}$$

Comme $e^Y = s$ appartient à Z, il est facile de voir que l'on a :

(16) $$e^{iw\sigma\lambda(Y)} = e^{i\sigma\lambda(Y)} \quad \text{pour } w \in W_o \ .$$

On peut donc écrire :

(17) $$\varphi_s(\sigma\lambda)\nu_G(X) = \frac{e^{\rho_o(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} (e^{\frac{\alpha}{2}(Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(Y)})} \times \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \alpha(X)} \times$$

$$\times \sum_{w\in W_1} \tau(\sigma)\ \varepsilon(w\sigma)\ e^{iw\sigma\lambda(X+Y)}$$

où l'on a posé

(18) $$\tau(\sigma) = (-1)^{m_\sigma + \frac{1}{2}\dim \underline{p}_o + \#\Delta^{1,+} + \underline{q}(\sigma)}\ \varepsilon(\sigma) \ .$$

Calculons $\tau(\sigma)$. Posons

(19) $$n_\sigma = \#\{\alpha \in \Delta_n^{1,+} \ , \ \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\}$$

$$p_\sigma = \#\{\alpha \in \Delta_n^{1,+} \ , \ \sigma^{-1}(\alpha) \in \Delta^+\}$$

$$\ell_\sigma = \#\{\alpha \in \Delta_c^{+} \ , \ \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\} \ .$$

On sait que l'on a :

(20) $$q(\sigma) = n_\sigma + p_\sigma \ .$$

Par hypothèse, σ permute $\Delta_c^{o,+}$ (car $\sigma \in W^1$). Donc

(21) $\ell_\sigma + p_\sigma + \# \Delta_c^{o,+} = \# \Delta_c^+$.

On calcule $\varepsilon(\sigma) = \det(\sigma \mid \underline{t})$ de deux manières, suivant que σ est considéré comme élément du groupe de Weyl de Δ_c ou de Δ. On a :

(22) $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell_\sigma}$

et posant $t_\sigma = \# \{\alpha \in \Delta^+, \sigma^{-1}(\alpha) \in - \Delta^+\}$

(23) $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{t_\sigma}$.

On voit donc que

(24) $n_\sigma = m_\sigma \bmod(2)$.

De (18), (20), (21), (22) et (24), on déduit que $\tau(\sigma)$ est indépendant de σ ; plus précisément :

(25) $\tau(\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}}$.

Par définition de ν_s, et compte tenu de (10), on a

(26) $\nu_s(X) = \sum_{\sigma\in W^1} \varphi_s(\sigma\lambda)\, \nu_\sigma(X)$.

On trouve :

(27) $$\nu_s(X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}} \frac{e^{\rho_o(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} (e^{\frac{\alpha}{2}(Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(Y)})} \times \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \alpha(X)} \times$$
$$\times \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{iw\lambda(X+Y)}$$

Calculons $\widetilde{\Theta}_s(X)$. On a :

$$(28) \qquad j_{\underline{z}}(X) = \prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)}}{\alpha(X)} ,$$

$$(29) \qquad \frac{|\det(1 - \operatorname{ad}(se^X) \mid \underline{g}|^{\frac{1}{2}}}{|\det(1 - \operatorname{ad}s) \mid \underline{g})|^{\frac{1}{2}}} = \prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(X+Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X+Y)}}{e^{\frac{\alpha}{2}(Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(Y)}}$$

(C'est évident à un facteur près ne dépendant pas de X. On fixe la constante en faisant $X = 0$).

$$(30) \qquad \prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(X+Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X+Y)}}{e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)}} = e^{\rho_o(Y)} ,$$

En rassemblant (1.6), (2), (28), (29), (30) et (27), on obtient $\tilde{\Theta}_s(X) = \nu_s(X)$. C.Q.F.D.

III.- UNE DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE BLATTNER

III.1.- ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Les notations sont celles de II.3. En particulier Θ est la fonction généralisée sur G associée à l'élément $\lambda \in \underline{t}^*$.

Notons $P \subset i\underline{t}^*$ le sous-groupe formé des éléments qui sont différentielles d'un élément de T. Notons

$$\rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_c^+} \alpha, \quad \rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \alpha ,$$

de sorte que $\rho = \rho_c + \rho_n$.

Pour tout élément $\mu \in it^*$, et tel que $\mu + \rho_c$ soit dans P, nous notons Ψ_μ la fonction analytique sur K invariante par automorphismes intérieurs, dont la restriction à T est donnée par la formule

$$(1) \qquad \Psi_\mu(e^X) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w\mu(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^+} e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)}}$$

Si μ est dominant et régulier, Ψ_μ est le caractère de la représentation unitaire irréductible de K de poids dominant $\mu - \rho_c$, d'après la formule de Weyl. De plus, $\Psi_{\sigma\mu} = \varepsilon(\sigma)\Psi_\mu$ pour tout $\sigma \in W$ et $\Psi_\mu = 0$ si μ n'est pas régulier.

Rappelons la définition de la fonction de partition Q sur $\sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \mathbb{N}\alpha$ (I.5.4), et de la restriction Θ^K de Θ à K (A.5.2).

(2) THÉORÈME (Hecht - Schmid [He-S. 1]). On a

$$(3) \qquad \Theta^K = \sum_{\mu\in\sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \mathbb{N}\alpha} Q(\mu)\, \Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu} ,$$

la série convergeant faiblement dans l'espace des fonctions généralisées sur K.

La formule (3) est appelée formule de Blattner. Compte tenu de (A.5.3) Θ^K est le caractère de la représentation T_λ^K , restriction de T_λ à K. La formule (3) permet de calculer la décomposition de T_λ^K en facteurs irréductibles (cf. [He-S. 1]).

Nous donnons dans ce chapitre une nouvelle démonstration de (2), comme application des résultats des chapitres précédents. Nous n'utilisons pas le fait que Θ est le caractère d'une représentation unitaire irréductible, et nous n'utilisons pas non plus le principe de continuation cohérente. Notre démonstration est donc différente de celle de Hecht et Schmid [He-S. 1], et de celle de Enright [E]. En fait, puisque nous avons même redémontré la formule de Rossmann, notre démonstration de (2) n'utilise "que" les articles d'Harish-Chandra jusqu'à [H-C. 3].

III.2.- DÉMONSTRATION DU THÉORÈME : RÉDUCTION AU LEMME (III.3.1)

Démontrons la convergence de (3). Elle résulte des deux lemmes bien connus ci-dessous.

(1) LEMME.- (cf. e.g. [C-R]). Soit $\mathcal{P}$ un réseau contenu dans P, et a une fonction sur $\mathcal{P}$. On suppose qu'il existe une norme $\|\ .\ \|$ sur it^* et des constantes $b > 0$, $c > 0$ telles que $|a(\mu)| \leq b(\|\mu\| + 1)^c$. Alors la série $\sum_{\mu\in\mathcal{P}} a(\mu)\Psi_{\mu+\rho_c}$ converge faiblement dans l'espace des fonctions généralisées sur K.

(L'introduction de $\mathcal{P}$ n'est utile que lorsque le centre Γ de G est infini).

(2) LEMME.- La fonction $Q(\mu)$ vérifie une inégalité de la forme

$$|Q(\mu)| \leq b(\|\mu\| + 1)^{\#\Delta_n^+}$$

(Le lemme n'a rien à voir avec le fait que Δ_n^+ provient d'un système de racine et se démontre facilement par récurrence sur $\#\Delta_n^+$).

Nous posons $C = \Theta^K$, et

(3) $$B = \sum_{\mu} Q(\mu)\, \Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu}$$

Les fonctions généralisées B et C sont invariantes par automorphismes intérieurs. Pour démontrer qu'elles sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident dans un voisinage de chaque point $s \in T$.

Fixons $s \in T$. Nous employons les notations Z, Z^o, $\underline{z}$, $\underline{q}$, $\underline{k}_o = \underline{z} \cap \underline{k}$, $\underline{p}_o = \underline{z} \cap \underline{p}$, $\underline{p}_1 = \underline{p} \cap \underline{q}$, $\underline{k}_1 = \underline{k} \cap \underline{q}$. La méthode de descente, appliquée à K, nous amène à considérer, pour toute fonction généralisée D sur K invariante par automorphismes intérieurs, la fonction généralisée $\widetilde{D}_s$ définie dans $\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon$ par la formule (cf. II.1.5) :

(4) $$\widetilde{D}_s(X) = j_{\underline{k}_o}(X)^{\frac{1}{2}} \frac{|\det((1 - se^X) \mid \underline{k}_1)|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - s) \mid \underline{k}_1)|^{\frac{1}{2}}}\, \widetilde{D}(e^X s)$$

(On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que tout ce qui suit soit exact).
D'après (II.1), pour démontrer l'égalité de B et C dans un voisinage de s, il suffit de montrer

(5) $$\widetilde{B}_s = \widetilde{C}_s \quad \text{dans} \quad \underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon$$

D'après (A.4.4), on a :

(6) $$\widetilde{B}_s = \sum_{\mu} Q(\mu) (\Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu})^{\sim}_s \ .$$

Considérons d'autre part la fonction généralisée $\widetilde{\Theta}_s$ dans $\underline{z} \cap \mathcal{V}_\varepsilon$. C'est, d'après le théorème (II.3.7), une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z^o dans $\underline{z}^*$. D'après (A.6.3), elle admet une restriction $\widetilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o}$ à $\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon$. La propriété de transitivité d'image réciproque de fonctions généralisées (A.3.5), appliquée aux injections :

(7) $$\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon \subset \underline{z} \cap \mathcal{V}_\varepsilon \subset \underline{g}$$

(9) $$\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon \subset \underline{k} \subset \underline{g}$$

(et à l'image de ces ensembles dans G) permet de comparer $\tilde{C}_s$ et $\tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o}$. Posons pour $X \in \underline{z} \cap \underline{k} \cap \mathcal{V}_\varepsilon$:

(10) $$j_{\underline{p}_o}(X) = \det\left(\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\mathrm{ad}X} - e^{-\frac{1}{2}\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right) \big| \underline{p}_o\right), \quad \eta(X) = \frac{|\det((1 - se^X) \mid \underline{p}_1)|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - s) \mid \underline{p}_1)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Ce sont des fonctions analytiques invariantes par $Z^o \cap K$, partout > 0, On a :

(11) $$\tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o} = j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}} \eta\, \tilde{C}_s .$$

Finalement, nous devons démontrer que l'on a :

(12) $$\tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o} = j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}} \eta \sum_\mu Q(\mu)(\Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu})_s^{\sim} .$$

Nous employons les notations W^1, et pour $\sigma \in W^1$, ν_σ du paragraphe II.3 (cf. (II.3.11)). On a, d'après (II.3.10 et II.3.7), $\tilde{\Theta}_s = \sum_{\sigma\in W^1} \varphi_s(\sigma\lambda)\nu_\sigma$, et donc :

(13) $$\tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o} = \sum_{\sigma\in W^1} \varphi_s(\sigma\lambda)\nu_\sigma^{\underline{k}_o}$$

où $\nu_\sigma^{\underline{k}_o}$ est la restriction de ν_σ à $\underline{k}_o$.

Les résultats du paragraphe II.3 s'appliquent dans le cas particulier des groupes compacts et permettent de calculer $(\Psi_\mu)_s^{\sim}$. Nous notons $\theta_\mu^{\underline{k}_o}$ la fonction analytique sur $\underline{k}_o$, invariante par le groupe K_o, dont la restriction à $\underline{t}$ est donnée par la formule

(14) $$\theta_\mu^{\underline{k}_o}(X) = \frac{\sum_{w\in W_o} \varepsilon(w)\, e^{iw\mu(X)}}{\prod_{\Delta_c^{o,+}} \alpha(X)} .$$

Soit $Y \in \underline{t}$ tel que $e^Y = s$. Posons

(15) $$\alpha(\sigma,\mu) = (-1)^{\#\Delta_c^{1,+}}\, \varepsilon(\sigma) \frac{e^{(\sigma\mu+\rho_c)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^{1,+}} (1 - e^{\alpha(Y)})}$$

On trouve :

(16) $$(\Psi_\mu)_s^{\sim} = \sum_{\sigma\in W^1} \alpha(\sigma,\mu)\, \theta_{\sigma\mu}^{\underline{k}_o} \quad .$$

Il nous suffit donc de démontrer que, pour chaque $\sigma \in W^1$, on a

(17) $$\nu_\sigma^{\underline{k}_o} = \varphi_s(\sigma\lambda)^{-1}\, j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}}\, \eta \sum_\mu Q(\mu)\, \alpha(\sigma,\, i\lambda+\rho_n+\mu)\, \theta_{\sigma(i\lambda+\rho_n+\mu)}^{\underline{k}_o} \quad .$$

Notons $\Delta^+(\sigma)$ le système des racines positives rendant $i\sigma\lambda$ dominant. On note $\Delta^{1,+}(\sigma) = \Delta^1 \cap \Delta^+(\sigma)$, etc... Avec les notations du (II.3), et compte tenu de (II.3.15, 20 et 21), on a :

(18) $$\alpha(\sigma,\mu) = (-1)^{\#\Delta_c^{1,+}} \frac{e^{\sigma(\mu+\rho_c)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})}$$

(19) $$\varphi_s(\sigma\lambda) = (-1)^{\#\Delta_c^{1,+}} \frac{e^{\sigma(i\lambda+\rho)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})}$$

(20) $$\alpha(\sigma,i\lambda+\rho_n+\mu)\, \varphi_s(\sigma\lambda)^{-1} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})\, e^{\sigma\mu(Y)}$$

Nous devons donc démontrer

(21) $$\nu_c^{\underline{k}_o} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})\, j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}}\, \eta \sum_\mu Q(\mu)\, e^{\sigma\mu(X)}\, \theta_{\sigma(i\lambda+\rho_n+\mu)}^{\underline{k}_o} \quad .$$

Remplaçant λ par $\sigma\lambda$, on voit qu'il suffit de le faire pour $\sigma = 1$. C'est l'objet du paragraphe suivant

III.3.- FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Rappelons que Y est un élément de $\underline{t}$, $s = e^Y$. Nous considérons l'orbite $\omega = Z^o\lambda$ de λ dans $\underline{z}^*$, et la transformée de Fourier ν de β_ω sur $\underline{z}$.

(1) $$\nu(X) = \int_{\underline{z}^*} e^{if(X)}\, d\beta_\omega(f) \quad .$$

Nous notons $\nu^{\underline{k}_o}$ la restriction de ν à $\underline{k}_o = \underline{k} \cap \underline{z}$. (A.6)

(2) LEMME.- On a :

$$\nu^{\underline{k}_o} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}} (1 - e^{\alpha(Y)})\, j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}}\, \eta \sum_\mu Q(\mu)\, e^{\mu(Y)}\, \theta^{\underline{k}_o}_{i\lambda+\rho_n+\mu}$$

DÉMONSTRATION.- D'après (A.6.3), $\nu^{\underline{k}_o}$ est la transformée de Fourier de la mesure $J_*(\beta_\omega)$, image sur $\underline{k}_o^*$ de la mesure β. Pour $s = 1$, le lemme (2) est précisément le théorème I.5.9.

Considérons la distribution d sur $\underline{t}^*$ dont la transformée de Fourier est la restriction de $j^{1/2}$ à $\underline{t}$. Nous employons les notations δ_ξ, H_ξ, I_ξ du paragraphe I.5, nous posons $\rho_n^o = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_n^{o,+}} \alpha$, $\rho_n^1 = \rho_n - \rho_n^o$. On a :

$$(3) \qquad d = \delta_{i\rho_n^o} * \prod_{\alpha\in\Delta_n^{o,+}} I_{-i\alpha}$$

On considère de même la distribution e dont la transformée de Fourier est la restriction de $\prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}} (1 - e^{\alpha(Y)})\, \eta$ à $\underline{t}$. On a par un calcul facile :

$$(4) \qquad e = \delta_{i\rho_n^1} * \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}} (\delta_o - e^{\alpha(Y)}\, \delta_{-i\alpha})$$

Compte tenu du théorème (I.2.5) (appliqué à Z^o), la méthode de la démontration du théorème (I.5.9) montre que le lemme (2) est équivalent à l'égalité suivante entre distributions sur $\underline{t}^*$:

$$(5) \qquad \delta_\lambda * \prod_{\alpha\in\Delta_n^{o,+}} H_{-i\alpha} = e * d * \sum_\mu Q(\mu)\, e^{\mu(X)} \delta_{\lambda - i\rho_n - \mu}$$

On a, par définition de $Q(\mu)$

$$(6) \qquad \sum_\mu Q(\mu)\, e^{\mu(Y)}\, \delta_{-\mu} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} \left(\sum_{j=o}^{\infty} e^{j\mu(Y)}\, \delta_{-ij\alpha}\right)$$

Si $\alpha \in \Delta_n^{1,+}$, on a

(7) $$(\delta_o - e^{\alpha(Y)}\,\delta_{-i\alpha}) * (\sum_{j=o}^{\infty} e^{j\alpha(Y)}\,\delta_{-ij\alpha}) = \delta_o$$

Si $\alpha \in \Delta_n^{o,+}$, on a : $e^{\alpha(Y)} = 1$, et donc

(8) $$I_{-i\alpha} * (\sum_{j=o} e^{j\alpha(Y)}\,\delta_{-ij\alpha}) = H_{-i\alpha}$$

La formule (5) en résulte immédiatement. C.Q.F.D.

APPENDICE

RAPPELS SUR LES FONCTIONS GÉNÉRALISÉES

A.1.- INTRODUCTION

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici quelques résultats sur les fonctions généralisées, leurs fronts d'onde, et leurs images réciproques. Nous renvoyons au chapitre "géométric aspects of distributions" du livre de Guillemin et Sternberg [G-St. 1], ou à [Dui] pour un traitement complet.

A.2.- FRONT D'ONDE

Soit M une variété différentiable. On note $\mathcal{M}_c^\infty(M)$ l'espace des densités C^∞ à support compact. Une fonction généralisée est une forme linéaire, continue pour la topologie usuelle, sur $\mathcal{M}_c^\infty(M)$. Notons $\mathcal{F}(M)$ l'espace de ces fonctions. Il contient $C^\infty(M)$ de manière canonique.

Une fonction généralisée $\theta \in \mathcal{F}(M)$ a un front d'onde, noté $WF(\theta)$. C'est un cône fermé de $T^*(M)\backslash 0$ (l'espace cotangent privé de la section nulle). Si $m \in M$, on pose $WF_m(\theta) = WF(\theta) \cap T_m^*(M)$.

Soit D un opérateur différentiel linéaire à coefficient C^∞ sur M. Il opère dans $C^\infty(M)$, et il a une extension canonique à $\mathcal{F}(M)$. Notons $\sigma(D)$ le symbole de D : c'est une fonction différentiable homogène sur $T^*(M)\backslash 0$. Pour évaluer $WF(\theta)$ nous emploierons exclusivement le lemme suivant (cf. [G.5], ch. II, prop. 6.7).

(1) LEMME.- Soient θ et D comme ci-dessus. On suppose que $D\theta$ est nulle. On a alors :

$$WF(\theta) \subset \{\xi \in T^*(M)\backslash 0,\ \sigma(D)(\xi) = 0\} \quad .$$

A.3.- IMAGE RÉCIPROQUE

Soit N une variété différentiable et soit $f : N \to M$ une application différentiable. Soit Γ un cône fermé de $T^*(M)\setminus 0$. On dit que f est transverse à Γ si, pour tout $n \in N$, et pour tout $\xi \in \Gamma \cap T^*_{f(n)}(M)$, on a :

(1) $\xi(df_n(T_n(N))) \neq \{0\}$.

Soit $\theta \in \mathcal{D}'(M)$ et supposons f transverse à $WF(\theta)$. Il y a alors une manière naturelle de définir $f_*(\theta) \in \mathcal{D}'(N)$. Nous renvoyons à [G-S] , ch. VI pour la définition . Nous allons juste donner une liste des règles de calcul que nous utiliserons.

(2) Règle.- Soit $\theta \in C^\infty(M)$ (i.e. $WF(\theta) = \emptyset$). On a $f^*(\theta) = \theta \circ f$.

(3) Règle.- Soit $\theta \in \mathcal{D}'(M)$ et $\varphi \in C^\infty(M)$. On suppose f transverse à $WF(\theta)$. Comme $WF(\varphi\theta)$ est contenu dans $WF(\theta)$, f est transverse à $WF(\varphi\theta)$. On a :

$$f^*(\varphi\theta) = (\varphi \circ f)\, f^*(\theta) \quad .$$

(4) Règle.- Soit $\theta \in \mathcal{D}'(M)$. On suppose f transverse à $WF(\theta)$.Soit $n \in N$. Posons $m = f(n)$. Alors $WF_n(f^*(\theta))$ est contenu dans l'image réciproque de $WF_m(\theta)$ par l'application ${}^t(df_n)$.

(5) Règle.- Soit Z une variété différentiable et $g : Z \to N$ une application différentiable. Soit $\theta \in \mathcal{D}'(M)$. On suppose f et $f \circ g$ transverses à $WF(\theta)$. Alors g est transverse à $f^*(\theta)$ et l'on a

$$g^*(f^*(\theta)) = (f \circ g)^*(\theta) \quad .$$

(6) Règle.- Supposons f submersive. Alors $f^*(\theta)$ est définie pour tout $\theta \in \mathcal{D}'(M)$, et l'application $\theta \to f^*(\theta)$ est continue pour les topologies faibles de $\mathcal{D}'(M)$ et $\mathcal{D}'(N)$.
(Les règles 2 à 6 sont des conséquences immédiates de [Dui] , prop. 1.3.3).

(7) Règle.- Soient n et p deux entiers $0 \leq p \leq n$. On suppose que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que N est la sous-variété définie par les équations $x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ ($x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées).Notons f l'injection de

N dans M. Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$ telle que f soit transverse à $WF(\theta)$. Cela veut dire dans notre situation que pour tout $x \in N$, $dx_{p+1},\dots,dx_n$ ne s'annulent pas sur $WF_x(\theta)$. Soit Z le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0,\dots,x_p = 0$. Soit $\beta_j \in \mathcal{M}_c^\infty(Z)$, $j_n = 1,2,\dots$, une suite d'éléments positifs d'intégrale 1, dont les supports tendent en décroissant vers $\{0\}$. Soit $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(N)$. On a :

$$f^*(\theta)(\alpha) = \lim_{j\to\infty} \theta(\alpha * \beta_j) \tag{8}$$

(remarquez que si j est assez grand, le support de $\alpha * \beta_j$ est contenu dans M, de sorte que $\theta(\alpha * \beta_j)$ est bien défini).

DÉMONSTRATION.- Si γ est une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$, on pose pour tout $v \in (\mathbb{R}^n)^*$:

$$\hat{\gamma}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iv(x)} d\gamma(x)$$

Si $\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ est à support compact, on pose

$$\tilde{\psi}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iv(x)} \psi(x)dx ,$$

où $dx = dx_1 \dots dx_n$. Si $v_1,\dots,v_n$ sont les coordonnées duales, et $dv = dv_1 \dots dv_n$, si $\gamma \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$, on a :

$$\psi(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\mathbb{R}^n)^*} \hat{\gamma}(v)\, \tilde{\psi}(v)dv . \tag{9}$$

Soit $x_o \in N$, $a \in (\mathbb{R}^n)^*$. On suppose $a \neq 0$, et $a \notin WF_{x_o}(\theta)$. Par définition de $WF(\theta)$ il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_o}$ de x_o dans M et un voisinage $\mathcal{U}_a$ de a dans $(\mathbb{R}^n)^*$ tels que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{V}_{x_o})$ et tout $A > 0$ il existe $B > 0$ tel que

$$|(\varphi\theta)^\sim(tv)| \leq Bt^{-A} \tag{10}$$

pour tout $v \in \mathcal{U}_a$, $t \geq 1$.

Si $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(N)$, on considère α comme distribution sur $\mathbb{R}^n$, de support contenu dans N. Appliquant les inégalités (10) à un voisinage $\mathcal{U}$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$ de la sphère unité de l'orthogonal de $\mathbb{R}^p$ dans $(\mathbb{R}^n)$, réunion finie d'ouverts de la forme $\mathcal{U}_{a'}$, on voit qu'il existe un voisinage $\mathcal{W}_{x_o}$ de x_o dans M tel que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_{x_o})$, l'intégrale :

(12) $$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^*} \hat{\alpha}(v)(\varphi\theta)^\sim(v)dv$$

converge absolument pour tout $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(N)$. Elle définit donc une fonction généralisée sur N, qui, par définition (cf. [Dui], démonstration de 1.3.3) est $f^*(\varphi\theta)$. D'autre part, on a, d'après (9)

$$(\varphi\theta)(\alpha * \beta_j) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^*} \hat{\alpha}(v)\ \hat{\beta}_j(v)(\varphi\theta)^\sim(v)dv\ .$$

Comme $|\hat{\beta}_j(v)|$ est majoré par 1 et comme $\beta_j(v)$ tend vers 1, le théorème de convergence dominée montre que l'on a :

(13) $$\lim(\varphi\theta)(\alpha * \beta_j) = f^*(\varphi\theta)(\alpha)\ .$$

La règle (7) se déduit alors, par un argument de partition de l'unité des règles (3) et (5) .

<u>REMARQUE</u>.- L'ensemble des règles (2) à (7) permet de calculer $f^*(\theta)$ pour toute application f de rang constant.

A.4.- <u>FONCTIONS GÉNÉRALISÉES INVARIANTES PAR UN GROUPE</u>

Soit G un groupe de Lie opérant de manière différentiable dans une variété différentiable M. Soit N une sous-variété localement fermée de M. On note f l'injection de N dans M. Nous supposons que l'application $P : (g,x) \to gx$ de $G \times N$ dans M est submersive. Dans ce cas l'ensemble $G_N = \{gx,\ g \in G,\ x \in N\}$ est ouvert et G-invariant dans M.

Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$ une fonction généralisée G-invariante (i.e. $L_g^*(\theta) = \theta$ pour toute les translations $L_g : x \to gx$).

(2) <u>LEMME</u>.- f est transverse à $WF(\theta)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- On note, pour tout X dans l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G, X_M le champ de vecteurs sur M :

$$X_M(\varphi)(y) = \frac{d}{dt} \varphi(e^{-tX}y)\Big|_{t=o}$$

On a $X_M(\theta) = 0$. On applique alors le lemme 1.

On peut donc définir $f^*(\theta) \in \mathcal{F}(N)$, $1 \otimes f^*(\theta) \in \mathcal{F}(G \times N)$, et $p^*(\theta) \in \mathcal{F}(G \times N)$.

(3) LEMME.- On a $1 \otimes f^*(\theta) = p^*(\theta)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Le lemme précédent appliqué à $p^*(\theta)$ et $G \times N$, montre que $p^*(\theta)$ admet une restriction a $\{1\} \times N$. La règle (3.5) montre que cette restriction est égale à $f^*(\theta)$. Nous sommes ramenés à démontrer le lemme dans le cas de la variété $M = G \times N$, ce qui est bien connu et facile.

<u>REMARQUE</u>.- Le lemme (3) est une manière d'énoncer des résultats classiques d'Harish-Chandra, utilisés par exemple dans [H-C. 2].

(4) <u>LEMME</u>.- Supposons qu'une suite θ_j, $j = 1,2,\ldots$ de fonctions généralisées G-invariantes de $\mathcal{F}(M)$ converge faiblement vers une fonction généralisée $\theta \in \mathcal{F}(M)$. Alors la suite $f^*(\theta_j)$ converge faiblement vers $f^*(\theta)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- La règle (3.6) montre qu'il suffit de le faire lorsque M est égal à $G \times N$. Dans ce cas, on a $\theta = 1 \otimes f^*(\theta)$, et le résultat est clair.

A.5.- <u>RESTRICTION A</u> K <u>DE FONCTIONS GÉNÉRALISÉES</u> $Z(\underline{g})$-<u>FINIES SUR UN GROUPE RÉDUCTIF</u>

Soit G un groupe de Lie réductif connexe. On note $Z(\underline{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U(\underline{g})$ du complexifié $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{g}$. On identifie de la manière usuelle un élément $u \in U(\underline{g})$ à un opérateur différentiel D_u invariant à gauche sur G. Une fonction généralisée θ est dite $Z(\underline{g})$-finie si l'espace $Z(\underline{g})\theta$ est de dimension finie.

Si $g \in G$, nous identifierons $T_1(G)$ à l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G, et $T_g(G)$ à $\underline{g}$ au moyen de la translation $h \to hg$.De même nous identifierons $\underline{g}^*$ et $T_g^*(G)$

On note $I(\underline{g})$ l'ensemble des éléments G-invariants de l'algèbre symétrique $S(\underline{g})$ de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$, et $I^{+}(\underline{g})$ l'ensemble des éléments sans terme constant. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des zéros de $I^{+}(\underline{g})$ dans $\underline{g}^{*}$.

Ecrivons $\underline{g} = s \oplus \underline{a}$, où s est semi-simple, et $\underline{a}$ centrale. Identifions $\underline{s}^{*}$ à l'orthogonal de $\underline{a}$ dans $\underline{g}^{*}$, et $\underline{s}^{*}$ à $\underline{s}$ au moyen de la forme de Killing de $\underline{s}$. Alors $\mathcal{N}$ est contenu dans $\underline{s}^{*}$ et est l'ensemble des éléments X de $\underline{s}$ tels que adX soit nilpotent.

(1) LEMME.- Soit θ une fonction généralisée $Z(\underline{g})$-finie sur G. Pour tout $g \in G$, on a :

$$WF_{g}(\theta) \subset \mathcal{N}$$

DÉMONSTRATION.- Soit $p \in I^{+}(\underline{g})$, un élément homogène. Il existe un élément $u \in Z(\underline{g})$ tel que, pour tout $g \in G$, la restriction de $\sigma(D_u)$ a $T^{*}_{g}(G) \simeq \underline{g}^{*}$ soit égale à p (on prend par exemple pour u le symétrisé de p). Alors θ est annulée par un opérateur de la forme D_v, avec $v = u^{k} + a_1 u^{k-1} + \ldots + a_k$. Donc $WF_{g}(\theta)$ est contenu dans l'ensemble des zéros de p^{k}, et donc dans l'ensemble des zéros de p. C.Q.F.D.

Soit $\underline{k}_1 \oplus \underline{p}_1$ une décomposition de Cartan de s, et soit K un sous-groupe fermé connexe de G dont l'algèbre de Lie $\underline{k}$ contient $\underline{k}_1$.

(2) LEMME.- Soit θ une fonction généralisée sur G, $Z(\underline{g})$-finie. Alors l'injection de K dans G est transverse à $WF(\theta)$.

DÉMONSTRATION.- Soit $k \in K$. Dans l'identification de $T_k(G)$ avec $\underline{g}$, $T_k(K)$ s'identifie au sous-espace $\underline{k}$. Il s'agit donc de voir que l'orthogonal $\underline{k}^{\perp}$ de $\underline{k}$ dans $\underline{g}$ vérifie

$$\underline{k}^{\perp} \cap \mathcal{N} = 0.$$

Comme $\mathcal{N}$ est contenu dans s^{*}, et que $\underline{k}^{\perp} \cap \underline{s}^{*}$ s'identifie à $\underline{p}_1^{*}$, il suffit de vérifier que le seul élément $X \in \underline{p}_1$ tel que adX soit nilpotent est $X = 0$. Cela vient de ce que tous les éléments $X \in \underline{p}$ sont semi-simples.

C.Q.F.D

Si θ est une fonction généralisée $Z(\underline{g})$-finie, nous noterons θ^K sa restriction à K (c'est-à-dire $f^*(\theta)$, où f est l'injection canonique de K dans G). Elle existe d'après le lemme ci-dessus.

Soit T une représentation continue irréductible quasi-simple de G dans un espace de Banach. Harish-Chandra [H-C. 1] a montré que T est traçable. Rappelons que cela veut dire que pour tout $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(G)$, l'opérateur $T(\alpha) = \int_G T(g)\, d\alpha(g)$ est traçable. Le caractère θ de T est la fonction généralisée θ telle que $\theta(\alpha) = \operatorname{tr} T(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(G)$. Elle est G-invariante et $Z(\underline{g})$-finie. En particulier, sa restriction θ^K à K est définie. Soit T^K la restriction de T à K. La représentation T^K est aussi traçable [H-C. 1]. Notons ${}^K\theta$ son caractère, qui est une fonction généralisée sur K.

(3) <u>LEMME</u>.- On a : ${}^K\theta = \theta^K$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Quitte à passer à un revêtement de G, nous pouvons supposer qu'il existe un sous-groupe B fermé dans G tel que l'application $k \times b \to kb$ réalise un difféomorphisme de $K \times B$ sur G. Il nous suffit de démontrer que pour un ensemble dense d'éléments $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(K)$, on a ${}^K\theta(\alpha) = \theta^K(\alpha)$.

Nous choisissons α tel que $T^K(\alpha) = T(\alpha)$ soit un opérateur de rang fini. Soit $\beta_j \in \mathcal{M}_c^\infty(B)$ une suite d'éléments positifs, d'intégrale 1, dont le support tend en décroissant vers 1. D'après la règle (6), on a :

$$\theta^K(\alpha) = \lim_j \theta(\alpha * \beta_j) \quad .$$

D'autre part :

$$\theta(\alpha * \beta_j) = \operatorname{tr} T(\alpha * \beta_j) = \operatorname{tr}(T(\alpha)T(\beta_j))$$

comme $T(\alpha)$ est de rang fini, et comme $T(\beta_j)$ tend fortement vers 1, on a :

$$\lim \operatorname{tr}(T(\alpha)T(\beta_j)) = \operatorname{tr} T(\alpha) = {}^K\theta(\alpha) \quad .$$

C.Q.F.D.

(4) <u>COROLLAIRE</u>.- ([H-C. 1]). Soit $k \in K$ un point au voisinage duquel θ est différentiable. Alors ${}^K\theta$ est différentiable au voisinage de k, et l'on a $\theta(k) = {}^K\theta(k)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Cela résulte du lemme (3) et des règles (3.2) et (3.3).

A.6.- RESTRICTION À $\underline{k}$ DE FONCTIONS GÉNÉRALISÉES $I(\underline{g})$-FINIES SUR UNE ALGÈBRE DE LIE RÉDUCTIVE

Les notations sont celles du paragraphe A.5. Nous identifions de la manière usuelle $S(\underline{g})$ et l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants. Le lemme suivant est analogue au lemme (18) et se démontre de la même manière.

(1) <u>LEMME</u>.- Soit ψ une fonction généralisée dans un ouvert $\mathcal{V}$ de $\underline{g}$, $I(\underline{g})$-finie. L'injection de $\underline{k} \cap \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est transverse à $WF(\psi)$.

On peut définir la fonction généralisée $\psi^{\underline{k}}$, restriction de ψ à $\underline{k} \cap \mathcal{V}$.

Soit Ω une orbite de G dans $\underline{g}^*$. On sait qu'il existe un entier N tel que

$$\int_\Omega (1 + \| f \|)^{-N} \, d\beta_\Omega(f) < \infty$$

Soit $\underline{P}$ un supplémentaire K-invariant de $\underline{k}$ dans $\underline{g}$. Identifions comme d'habitude $\underline{g}^*$ à $\underline{k}^* \oplus \underline{p}^*$, et soit J la projection de $\underline{g}^*$ sur $\underline{k}^*$ parallèlement à $\underline{p}^*$. L'argument du chapitre I.1 montre que l'on a

$$\int_\Omega (1 + \| J(f) \|)^{-N} \, d\beta_\Omega(f) < \infty \tag{2}$$

L'image $J^*(\beta_\Omega)$ de β_Ω sur $\underline{k}^*$ est donc tempérée. On pose $\psi_\Omega = \hat{\beta}_\Omega$. C'est une fonction généralisée sur $\underline{g}$, G-invariante et vecteur propre de $I(\underline{g})$. Sa restriction à $\underline{k}$ est donc définie et sera notée $\psi_\Omega^{\underline{k}}$.
On pose : ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega(X) = \int_{\underline{k}^*} e^{if(X)} \, dJ^*(\beta_\Omega)(f)$. C'est la fonction généralisée sur $\underline{k}$, transformée de Fourier de $J^*(\beta_\Omega)$. Voici l'analogue du lemme (6.3)

(3) <u>LEMME</u>.- On a $\psi_\Omega^{\underline{k}} = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Soit β_n, $n = 1,2,\dots$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_c^\infty(\underline{p})$ positifs d'intégrale 1, dont le support tend vers $\{0\}$ en décroissant. Soit $\alpha \in \mathcal{D}_c^\infty(\underline{k})$. Le théorème de convergence dominée montre que l'on a :

$$\lim \psi_\Omega(\alpha * \beta_n) = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega(\alpha)$$

et donc ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega(\alpha) = \psi_\Omega^{\underline{k}}(\alpha)$, d'après la règle (3.7).

De manière analogue au corollaire du paragraphe précédent, on obtient

(4) <u>COROLLAIRE</u>.- Soit X un point de $\underline{k}$ au voisinage duquel ψ_Ω est C^∞. Alors ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega$ est C^∞ au voisinage de X et l'on a $\psi_\Omega(X) = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega(X)$.

Rappelons que, d'après Harish-Chandra, toute fonction généralisée G-invariante $Z(\underline{g})$-finie est C^∞ au voisinage de tout point $X \in \underline{g}$ tel que adX soit semi-simple et tel que le centralisateur $\underline{z}$ de X dans $\underline{g}$ ne contienne pas d'élément nilpotent (En effet, son front d'onde en X est contenu dans $\mathcal{N} \cap \underline{z}^* = \emptyset$). On obtient donc :

(5) <u>COROLLAIRE</u>.- Soit X un point de $\underline{k}$. Soit $\underline{z}$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$. On suppose que $\underline{z} \cap \underline{p}$ est contenu dans le centre de $\underline{z}$. Alors ψ_Ω et ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega$ sont C^∞ au voisinage de X, et l'on a $\psi_\Omega(X) = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega(X)$.

RÉFÉRENCES

[B-V] D. BARBASCH, D.A. VOGAN : Sketch of proof of Rossmann's character formula (Non publié).

[Be-Ve.1] N. BERLINE et M. VERGNE : Fourier transform of orbits of the coadjoint representation. Representation theory of reductive groups, Birkhauser, Boston, 1983.

[Be-Ve.2] N. BERLINE et M. VERGNE : The equivariant index and Kirillov's character formula, à paraître dans American Journal of Mathematics.

[Be-Ve.3] N. BERLINE et M. VERGNE : Classes caractéristiques équivariantes, Formule de localisation en cohomologie équivariante, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 295 (1982), pp. 539-541.

[Bo] R. BOTT : Vector fields and characteristic numbers , Mich. Math. Journal, 14 (1967), pp. 231-244.

[C-R] A. CEREZO et F. ROUVIERE : Solution élémentaire d'un opérateur invariant à gauche sur un groupe de Lie compact. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 2 (1969), pp. 561-581.

[D] M. DUFLO : Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. In "Harmonic analysis and group representations. "C.I.M.E. 1980, ed. Liguori, Naples 1982.

[Dui] J.J. DUISTERMAAT : Fourier integral operators. Courant Institute, New-York (1973).

[D-H] J.J. DUISTERMAAT et G.J. HECKMAN : On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space. Inventiones Math. 69 (1982), pp. 259-268.

[E] T.J. ENRIGHT : On the fundamental series of a real semi-simple Lie algebra : their irreducibility, resolutions and multiplicity formulae. Annals of Math. 110 (1979), pp. 1-82.

[G-St.1] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG : Geometric asymptotics. Maths Surveys n°14, A.M.S. Rhode Island (1977).

[G-St.2] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG : Convexity properties of the moment mapping. Inventiones Math. 67(1982) , pp. 491-513.

[H-C.1] HARISH-CHANDRA : The characters of semi-simple Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), pp. 98-163.

[H-C.2] HARISH-CHANDRA : Invariant eigen-distributions on a semi-simple Lie group. Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), pp. 457-508.

[H-C.3] HARISH-CHANDRA : Discrete series for semi-simple Lie groups I. Construction of invariant eigendistributions.Acta Mathematica, 113 (1965), pp. 242-318.

[H-C.4] HARISH-CHANDRA : Discrete series for semi-simple Lie groups II Acta Mathematica, 116 (1966), pp. 1-111.

[He-S.1] H. HECHT et W. SCHMID : A proof of Blattner's conjecture.Inventiones math., 31 (1975), pp. 129-154.

[He-S.2] H. HECHT et W. SCHMID : Characters, asymptotic and $\underline{n}$-homology of Harish-Chandra modules. Acta Mathematica, 151 (1983), pp. 49-151.

[He] G.J. HECKMAN : Projections of orbits and asymptotic behaviour of multiplicities for compact connected Lie groups. Inventiones math. 67 (1982), pp. 333-356.

[Kh] M.S. KHALGUI : Caractères des groupes de Lie. Journal of functional analysis, 47 (1982), pp. 64-77.

[Ki] A.A. KIRILLOV : Eléments de la théorie des représentations. Ed. M.I.R Moscou, (1974).

[L-Ve] G. LION et M. VERGNE : The Weil representation, Maslov index and theta series. Birkhäuser, Boston (1980).

[P] S. PANEITZ : Communication personnelle (1983).

[R] W. ROSSMANN : Kirillov's character formula for reductive Lie groups. Inventiones math., 48 (1978), pp. 207-220.

[S] W. SCHMID : On the characters of discrete series (the Hermitian symmetric case). Inventiones math., 30 (1975), pp. 47-144.

[T] P. TORASSO : Sur le caractère de la représentation de Shale-Weil de $Mp(n, \mathbb{R})$ et $Sp(n,\mathbb{C})$. Math. Ann., 252 (1980), pp. 53-86.

[Ve] M. VERGNE : On Rossmann's character formula for discrete series. Inventiones Math., 54 (1979), pp. 11-14.