MÉMOIRES DE LA S. M. F.

P-A. GRILLET

Homomorphismes principaux de tas et de groupoïdes

Mémoires de la S. M. F., tome 3 (1965)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1965__3__1_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 3, 1965, IV + 167 p

HOMOMORPHISMES PRINCIPAUX de tas et de groupoïdes

par Pierre-Antoine GRILLET

(Thèse Sc. math. Paris 1965)

INTRODUCTION.

1. P. DUBREIL a démontré [11][a] le théorème suivant. Si $D = (E,.)$ est un demi-groupe de support E, noté multiplicativement, f un homomorphisme de D sur un groupe et H une classe quelconque de l'équivalence d'homomorphisme, H est :

<u>forte</u> : $(\forall a,b,x,y \in E)(\ ax \in H, bx \in H, ay \in H \Longrightarrow by \in H\ )$

<u>nette à gauche</u> : $(\forall x \in D)(\exists a \in D)\ ax \in H$,

et l'équivalence d'homomorphisme est l'<u>équivalence principale à gauche associée à H</u>, ${}_H\mathcal{R}$, définie par

$$(\forall x,y \in E)(\ x \ {}_H\mathcal{R}\ y \iff (\forall a \in D)(\ ax \in H \iff ay \in H\ ));$$

dualement, H est nette à droite, et l'équivalence d'homomorphisme est aussi l'équivalence principale à droite associée à H, $\mathcal{R}_H$. En particulier ${}_H\mathcal{R} = \mathcal{R}_H$, on dit que H est <u>symétrique</u>. La réciproque est due à R. CROISOT [7] : si H est une partie de E forte, nette à gauche et à droite, et symétrique, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ est une équivalence compatible, et $D/\mathcal{R}$ est un groupe.

Les définitions introduites ci-dessus employaient, sous leur forme originale, les résiduels de H par un élément x de E; le résiduel à gauche $H \cdot\!\!\cdot\, x$ défini par

$$H \cdot\!\!\cdot\, x = \{a \in E \,;\, ax \in H\}$$

et le résiduel à droite dont la définition est duale. La forme équivalente donnée ci-dessus permet la remarque suivante, qui sera notre point de départ : les notions de partie forte, ou nette à gauche, et d'équivalence principale à gauche, utilisent la loi de composition de D <u>par le seul intermédiaire des translations à gauche</u>, la translation à gauche associée à l'élément a de E étant l'application $x \rightsquigarrow ax$ de E dans lui-même[b].

(a) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

(b) On doit à M.-P. SCHÜTZENBERGER la remarque analogue, que la notion de partie nette à gauche utilise la loi de composition de D par le seul intermédiaire des idéaux à gauche. Quant à l'emploi des translations, voir R.H. BRUCK [3].

Dualement, les notions de partie forte, ou nette à droite, et d'équivalence principale à droite, utilisent la loi de composition de D par le seul intermédiaire des translations à droite; les notions qui figurent dans l'énoncé emploient les deux familles de translations. Notons enfin que la netteté à gauche peut aussi s'exprimer par le seul intermédiaire des translations à droite.

La possibilité de remplacer les translations à gauche, ou à droite, par d'autres applications, a été implicitement utilisée par R. CROISOT [8]; citons le théorème suivant: si D = (E,.) est un demi-groupe et f un homomorphisme de D sur un semi-groupe à noyau, il existe une classe H de l'équivalence d'homomorphisme qui est:

bilatèrement forte :

$$(\forall a,b,c,d,x,y \in E)(\ axb \in H, cxd \in H, ayb \in H \Longrightarrow cyd \in H\ )$$

bilatèrement nette : $(\forall x \in E)(\exists a,b \in E)\ axb \in H$,

et l'équivalence d'homomorphisme est l'équivalence principale bilatère associée à H, $\mathcal{R}'_H$, définie par

$$(\forall x,y \in E)(\ x\ \mathcal{R}'_H\ y \Longleftrightarrow (\forall a,b \in E)(\ axb \in H \Longleftrightarrow ayb \in H\ ));$$

réciproquement, soit H une partie bilatèrement nette et bilatèrement parfaite[(c)] de E; $\mathcal{R}'_H$ est compatible et $D/\mathcal{R}'_H$ est un semi-groupe à noyau.[(d)]

Les notions qui figurent dans ce théorème sont l'exact analogue des notions à gauche (par exemple) du théorème de P. DUBREIL, les translations à gauche étant remplacées par les translations "bilatères", applications $x \rightsquigarrow axb$ de E dans E.

Nous allons maintenant étendre les définitions et résultats ci-dessus, en partant d'une famille d'applications quelconque.

2. Le maximum de généralité est obtenu avec un ensemble (non vide) Σ d'applications de E dans F; nous appelons <u>système</u> un tel triple (E,F,Σ). Dans un système, on peut définir les rési-

(c) pour une partie bilatèrement nette, cette condition équivaut à: bilatèrement forte et indivisible pour $\mathcal{R}'_H$.

(d) D'autres travaux apportent une contribution à la théorie dans une optique différente de la nôtre; citons F.W. LEVI, Calcutta Math. Soc., 38 (1946) 123-134; STOLL R.R., Amer. J. Math., 73 (1951) 475-481; P. DUBREIL, Univ. Roma, Rend. Mat. e Appl.(5), 10 (1951), 183-200 et Bull.Soc. Math. France, 81 (1953) 289-306; M.P. SCHUTZENBERGER, C.R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958) 2442-2444; R.A. GOOD et D.R. HUGHES, Bull. Amer. Math. Soc., 58 (1952) 624-625; P. LEFEBVRE, Ann. di Mat. pura e appl.(4) 59 (1962) 77-164; M.L. DUBREIL-JACOTIN, Bull.Soc.Math. France 92 (1964) (à paraître) duels à gauche et à droite d'une partie H de F;et l'équivalence principale $\mathcal{Q}_H$ associée à H,soit à partir des résiduels,soit par

$$(\forall x,y\in E)(\ x\ \mathcal{Q}_H\ y \iff (\forall\sigma\in\Sigma)(\ \sigma x\in H \iff \sigma y\in H\ ))\ ;$$

c'est une relation d'équivalence sur E.Si Σ est la famille des translations à gauche d'un demi-groupe sur E,il est clair que $\mathcal{Q}_H = {}_H\mathcal{R}$ .On définit aussi une partie de F forte (cette notion redonne celle de partie forte dans l'exemple précédent),nette (qui redonne nette à gauche),franche (qui redonne nette à droite).Les équivalences principales ainsi définies possèdent les propriétés des équivalences principales classiques qui ont trait aux classes (quand H est forte).Mais les propriétés,plus importantes à nos yeux,qui sont liées aux homomorphismes,ne s'étendent pas à des définitions aussi générales.

Ceci conduit à envisager le cas E = F; le système (E,E,Σ) peut alors être identifié au couple (E,Σ) et prend le nom de <u>tas</u>.Les tas peuvent être structurés naturellement en catégorie,sortout si on se limite,comme nous l'avons fait,aux épimorphismes.On a aussi une notion d'équivalence compatible,et un théorème d'homomorphisme.Enfin, dans les tas,la notion d'équivalence principale a un caractère fonctoriel que nous avons dégagé avec précision.

3.Ce caractère fonctoriel permet d'énoncer des théorèmes d'homomorphisme pour les tas,analogues au théorème du §1. Ces théorèmes concernent les homomorphismes de tas qui arrivent sur un tas soumis à certaines conditions,que l'on choisit parmi les suivantes:

<u>injectivité</u>	$(\forall\sigma\in\Sigma)(\forall x,y\in E)(\ \sigma x = \sigma y \implies x = y\ )$
<u>stationnarité</u>	$(\forall x\in E)(\forall\sigma,\tau\in\Sigma)(\ \sigma x = \tau x \implies \sigma = \tau\ )$
<u>surjectivité</u>	$(\forall\sigma\in\Sigma)(\forall y\in E)(\exists x\in E)\ \sigma x = y$
<u>transitivité</u>	$(\forall y\in E)(\forall x\in E)(\exists\sigma\in\Sigma)\ \sigma x = y$
<u>existence d'un élément net</u>	$(\exists h\in E)(\forall x\in E)(\exists\sigma\in\Sigma)\ \sigma x = h$

(cette condition étant suggérée par le théorème cité de R. CROISOT; car,dans un demi-groupe,l'existence d'un noyau équivaut à celle d'un élément bilatèrement net).On impose au tas arrivée d'être au moins injectif à élément net;les autres conditions ad libitum.Les homomorphismes considérés sont caractérisés par le fait que leur équivalence d'homomorphisme est principale pour une partie H ayant certaines propriétés;un tel homomorphisme est dit principal pour H. Par exemple:

Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas injectif à élément net est principal pour une partie H parfaite[(e)] et nette,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence d'homomorphisme qui s'envoie sur un élément net.

D'autre part les théorèmes classiques de théorie des demi-groupes concernent parfois des demi-groupes à zéro;ceci conduit à considérer des tas avec zéro;un zéro d'un tas (E,Σ) est un élément de E invariant par toute application de Σ et qui ne constitue pas E à lui tout seul.On énonce aussi des théorèmes caractérisant les homomorphismes de tas qui arrivent sur un tas ayant un zéro et soumis à des conditions analogues aux précédentes mais tenant compte de l'existence du zéro.

Si le tas départ de l'homomorphisme est stable (c'est-à-dire si Σ est stable pour la composition des applications),il en est de même du tas arrivée,et les conditions imposées à H se simplifient un peu.L'examen de ce cas particulier est naturel si on remarque que les tas rencontrés en théorie des demi-groupes sont stables.

4.Il reste à appliquer des résultats aux demi-groupes.Il est remarquable que le passage d'un demi-groupe à chacun des tas mis en évidence au §1,définisse un foncteur.Et ces foncteurs s'étendent à la catégorie des groupoïdes[(f)],en remplaçant,par exemple,la famille des translations à gauche par le demi-groupe engendré[(g)];en sorte que la théorie des tas va s'appliquer aux groupoïdes.

Des théorèmes du §3 résultent alors des théorèmes caractérisant les homomorphismes de groupoïdes qui arrivent sur un groupoïde tel que l'un des tas associés vérifie une des conditions de la théorie.De plus,afin de retrouver certains théorèmes classiques,comme

(e) une partie nette est parfaite si et seulement si elle est forte, indivisible pour $\mathcal{Q}_H$ et stabilisante,c'est-à-dire

$$(\forall x,y\in E)(\forall \sigma,\tau\in\Sigma)(\ \sigma\tau x\in H,\sigma\tau y\in H \Longrightarrow (\exists \upsilon\in\Sigma)\ \upsilon x\in H,\upsilon y\in H\ ).$$

Cette condition est triviale dans un tas stable et n'apparait donc pas dans les énoncés classiques.

(f) au sens de O. ORE.

(g) cf. R.H. BRUCK [3],p. 53.

celui de P. DUBREIL - R. CROISOT cité, on considère aussi des groupoïdes tels que deux de leurs tas associés vérifient chacun une des conditions de la théorie. On impose aussi parfois au groupoïde arrivée des conditions extérieures à la théorie (associativité, intégrité dans le cas d'un zéro).

Par exemple, on obtient, pour les homomorphismes de demi-groupes qui arrivent sur un groupe, les énoncés suivants:

Un homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal à gauche pour une partie H forte et totalement nette[(h)] (ou forte, indivisible pour ${}_H\mathcal{R}$, nette à droite et à gauche, ou forte, bilatèrement forte, indivisible pour ${}_H\mathcal{R}$ et nette à gauche), et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalenne d'homomorphisme.

Nous n'avons écrit les théorèmes que lorsqu'ils concernent des groupes ou quasi-groupes, éventuellement avec zéro[(i)], ou lorsqu'il s'agit de théorèmes antérieurs. Les autres peuvent s'écrire très rapidement grâce à des tableaux de théorèmes et conditions diverses.

5. L'exposé est divisé en cinq chapitres. Le premier traite de la catégorie des tas et de ses rapports avec celle des groupoïdes, il contient les définitions générales. Le second chapitre introduit les équivalences principales et étudie les diverses propriétés, élémentaires et fonctorielles, qui permettent, au chapitre trois, et grâce à la considération des tas où l'égalité est principale, d'obtenir les théorèmes d'homomorphisme décrits ci-dessus. Enfin viennent deux chapitres d'applications aux groupoïdes, largement occupés par la traduction, en théorie des groupoïdes ou des demi-groupes, des conditions de la théorie des tas, le dernier chapitre étant réservé au cas où interviennent simultanément deux tas. Un index terminologique précède la bibliographie.

6. Nous avons essayé de mettre en lumière dans cet-

(h) condition introduite par R. DESQ [9]:

$$H \text{ totalement nette} \iff (\forall a,b \in E)(\exists x \in E)\ axb \in H \ ;$$

une partie totalement nette est nette à gauche et à droite.

(i) Nous appelons ainsi le demi-groupe, ou groupoïde, résultant de l'adjonction d'un zéro à un groupe, ou à un quasi-groupe.

te exposition les caractères généraux de notre travail,le plus frappant étant sans doute l'absence totale de démonstrations compliquées.

La notion de tas est fort générale.On peut ainsi l'appliquer aux groupoïdes,et leur étendre des raisonnements qui semblaient nécessiter l'associativité.On peut d'autre part multiplier les résultats en usant des divers tas associés à un groupoïde;nous avons dû faire un choix,et beaucoup,spécialement au dernier chapitre,sont laissés de côté.

La théorie explique aussi l'analogie entre [11] et [8].On est en droit d'attendre d'une telle théorie que ses raisonnements soient plus décantés que ceux des théories qu'elle recouvre.Ce n'est pas le cas,parce que nous avons considéré des conditions plus nombreuses,voire nouvelles dans ces questions (comme la stationnarité), d'où gain en richesse;et surtout parce que nous n'avons pas supposé que les tas considérés soient stables (disons à tout hasard que ce dernier inconvénient ne figure pas dans mon travail précédent [20]).

Nous avons enfin modifié les techniques de démonstration classiques en utilisant le plus possible des transferts de propriétés d'un côté à l'autre de l'homomorphisme.

Les homomorphismes jouent ainsi un rôle central,à l'expression duquel s'applique très naturellement le langage des catégories.Nous avons mis en évidence,par exemple,les foncteurs qui sont sous-jacents aux quelques propriétés réellement fondamentales de la théorie.Des notes de bas de page rappellent les quelques définitions employées.

Ces notes,et le caractère très élémentaire de la théorie,font que la lecture de ce travail ne nécessite en principe que des connaissances très rudimentaires d'Algèbre;en particulier,nous donnons toutes les démonstrations.Toutefois,l'intérêt de certaines définitions n'apparaîtra qu'aux lecteurs un peu au courant de [11],ou très patients.

La terminologie utilisée a fait l'objet de la plus grande attention.La considération des divers tas associés à un groupoïde fournit un critère pour attacher des adjectifs aux définitions;

l'adjectif "bilatère" est attaché aux notions qui relèvent du même tas que les idéaux bilatères, les équivalences compatibles, etc., l'expression "à gauche" aux notions qui relèvent du même tas que les idéaux à gauche, les équivalences compatibles ou simplifiables à gauche, etc. La terminologie ainsi obtenue est conforme à la tradition dans la plupart des cas. La principale exception est fournie précisément par les notions du théorème cité de R. CROISOT, qui ne relèvent pas du même tas que les idéaux bilatères; l'emploi du mot "bilatère" dans ces définitions est incompatible avec une terminologie systématique; nous avons en ce cas employé le mot médian, ou écrit bilatère entre guillemets.

7. Nous nous sommes rencontrés plusieurs fois, au cours de la période de recherche qui précéda le présent travail, avec certains de nos camarades menant leurs recherches dans des directions voisines. Tout d'abord, nous avons considéré, le premier semble-t-il, des familles d'applications un peu quelconques d'un ensemble vers lui-même, en étudiant cette notion dans le but de généraliser, et de démontrer en une seule fois, diverses propriétés des relations binaires remarquables d'un demi-groupe, sans aller plus loin, pour ce qui nous concerne ici, que la définition des équivalences principales [18]. Ultérieurement, Mlle J. CALAIS [4] et M. R. DESQ [10] ont étudié des cas particuliers de ces définitions, ce qui revient finalement à considérér des tas adéquats; le travail de Mlle J. CALAIS a ainsi inspiré nos § I.D.6 et II.B.4, pour ce qui concerne les côtés que nous appelons calaisiens. M. R. DESQ a introduit aussi la notion de partie totalement nette d'un demi-groupe, que nous avons retrouvée indépendamment, mais postérieurement, sous la forme que prend cette notion dans un tas. Enfin M. M. KOSKAS [21] a retrouvé, postérieurement, mais indépendamment, une partie de la théorie exposée ici, à savoir la notion de tas stable et les théorèmes d'homomorphisme pour les tas stables injectifs à élément net, et injectifs transitifs; il a d'ailleurs généralisé ultérieurement ces théorèmes aux hypertas [21].

8. Je tiens à remercier tout particulièrement ici les Professeurs M.-L. DUBREIL-JACOTIN, pour la bienveillance et les encouragements qu'elle m'a prodigués au dédut de mes recherches, P.

DUBREIL, qui a ensuite assuré la direction de mon travail, me donnant lui aussi des conseils d'un très grand secours, en particulier pour la rédaction du présent mémoire, après avoir grandement contribué à ma formation, L. GAUTHIER qui a bien voulu me donner un second sujet de thèse plein d'intérêt et me réserver toujours le meilleur accueil, J. LERAY enfin qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et a bien voulu accepter ce travail au Bulletin de la Société Mathématique de France.

Je remercie également les Professeurs L. LESIEUR, P. SAMUEL, R. CROISOT, D. LACOMBE, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et les marques de sympathie qu'ils ont bien voulu me témoigner.

Remarques.

1. La notion d'espace homogène est évidemment un cas particulier de celle de tas. Les propriétés des homomorphismes de tas, le théorème d'homomorphisme par exemple, peuvent ainsi être considérés comme une généralisation des propriétés correspondantes des espaces homogènes, auxquels on peut d'autre part appliquer certains théorèmes du chapitre III. Nous ne développerons pas davantage cet aspect de la théorie.

2. Nous supposons connues toutes les propriétés à nous utiles des groupoïdes ou des demi-groupes; ces propriétés, toujours élémentaires, sont rappelées au passage. D'autre part, tous les homomorphismes de groupoïdes ou de demi-groupes considérés ici sont supposés surjectifs, en sorte que les catégories correspondantes ne sont pas les catégories usuelles[j]; ceci est sans grave conséquence d'intelligibilité et sera aussi rappelé au passage.

3. En ce qui concerne les notes de bas de page consacrées aux catégories, nous avons suivi, pour la terminologie, la thèse de P. GABRIEL [17]. Nous n'avons pas cru devoir, par l'emploi des univers,

(j) cette convention ne s'applique pas aux notes de bas de page relatives aux catégories.

surcharger ces notes qui sont destinées essentiellement aux lecteurs non avertis(0).Il est sous-entendu,pour les autres,que tous les ensembles et catégories considérés sont éléments d'un univers donné,contenant parfois,au gré des exemples,l'alphabet ou l'ensemble des entiers.L'omission de cet univers serait d'ailleurs sans grave conséquence,vu la faiblesse des définitions utilisées.

La commodité de l'exposition nous a conduit enfin à ajouter de très simples définitions personnelles,également rappelées en notes,que l'on reconnaîtra des autres par l'emploi de la première personne,et non de la troisième.

4.Enfin nos publications antérieures concernent uniquement les tas stables [19],[20].Nous y appelons <u>tas</u> les tas stables du présent travail,et <u>demi-tas</u> les tas non nécessairement stables.

(0) C'est ainsi qu'on appelle <u>catégorie</u> le couple $\mathcal{C}$ de deux classes,(ob $\mathcal{C}$, fl $\mathcal{C}$),muni d'abord de deux applications qui,à $f \in$ fl $\mathcal{C}$,associent son origine $o(f)$ et son extrémité $e(f)$ qui appartiennent à ob $\mathcal{C}$.On note $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$,pour $A,B \in$ ob $\mathcal{C}$,la classe des $f \in$ fl $\mathcal{C}$ d'origine A et d'extrémité B; les éléments de ob $\mathcal{C}$ sont les <u>objets</u> de $\mathcal{C}$, ceux de fl $\mathcal{C}$ les <u>morphismes</u>,ou <u>flèches</u>;si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$,on dit aussi que f est un <u>morphisme de A vers B</u>,ou encore que f <u>part</u> de A et <u>arrive</u> en B;on représente fréquemment f par une flèche allant de A vers B.Une catégorie est enfin munie d'une loi de composition incomplète o sur fl $\mathcal{C}$, $f \circ g$ étant défini si et seulement si $e(g) = o(f)$, avec alors $e(f \circ g) = e(f)$, $o(f \circ g) = o(g)$;cette loi est supposée associative,et pourvue d'un élément unité $I_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ pour tout $X \in$ ob $\mathcal{C}$.

Par exemple,les ensembles sont les objets d'une catégorie,les morphismes étant les applications;nous la notons Ens.De même les groupoïdes,les espaces topologiques,etc. sont les objets de catégories,les morphismes étant les homomorphismes de groupoïdes,les applications continues,etc.

Notations.

$\mathfrak{A}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications de E vers F ; $\mathfrak{A}(E)$ est mis pour $\mathfrak{A}(E,E)$. Nous identifions $\{x\}$ et x, pour $x \in E$, dans tout ce qui touche à la résiduation, aux équivalences principales et aux résidus. Lorsque $x \in E$ et $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$, nous écrivons σx au lieu de $\sigma(x)$ afin d'accentuer l'analogie de la théorie des tas avec celle des demi-groupes; nous faisons de même dans un système; nous écrivons aussi $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$, lorsque $\sigma, \tau \in \mathfrak{A}(E)$.

Nous considérons un groupoïde comme un couple $G = (E,\tau)$ d'un ensemble non vide E et d'une loi de composition interne τ sur E ; s'il s'agit d'un demi-groupe, la loi est toujours notée multiplicativement et désignée par . .

La manipulation des groupoïdes nous a conduit à celle des produits finis. Les notations suivantes nous sont très utiles. Soient n, p deux entiers positifs, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p, x \in E$.

$T_\omega(a_i, x, b_j)$ désigne le produit de $a_1, \dots, a_n, x, b_1, \dots, b_p$ écrits dans cet ordre, avec la disposition de parenthèses ω; les dispositions de parenthèses forment un ensemble noté toujours Ω (bien qu'il dépende de n et p). On pose aussi

$$T_i(a_i, x) = a_1\tau(\dots\tau(a_{n-1}\tau(a_n\tau x))\dots)$$
$$T_j(x, b_j) = (\dots((x\tau b_1)\tau b_2)\tau\dots)\tau b_p \; .$$

Si n ou p sont nuls, nous gardons un sens aux notations ci-dessus. Un produit réduit à x est toujours égal à x . Si $n = 0$, $p > 0$, $T_\omega(a_i, x, b_j)$ est le produit de $x, b_1, \dots, b_p$ dans cet ordre, avec la disposition de parenthèses ω ; un tel produit est égal à un produit $T_k(x, c_k)$, où les c_k ne dépendent pas de x .

I.TAS ET GROUPOIDES.

A.Application associée à une surjection. (1)

1.Définition.

Proposition 1. Etant donnés deux ensembles E,F,une surjection f de E vers F et $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$,il existe $\tau \in \mathfrak{A}(F)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "\tau"] & F \end{tikzcd}$$

soit commutatif(2) si et seulement si

(1) $\qquad (\forall x,y \in E)(\ f(x) = f(y) \Rightarrow f(\sigma x) = f(\sigma y)\ ),$

et τ est alors unique.

La condition est nécessaire: si τ existe et si $f(x) = f(y)$,alors $f(\sigma x) = \tau f(x) = \tau f(y) = f(\sigma y)$ .La condition est suffisante: si elle est remplie,il existe $\tau \in \mathfrak{A}(f(E))$ qui,à $f(x)$,fait correspondre $f(\sigma x)$;f étant surjective,$\tau \in \mathfrak{A}(F)$ et est unique,car $\tau \circ f = f \circ \sigma = \tau' \circ f \Longrightarrow \tau = \tau'$.

Définition 1. On appelle application associée à f l'application incomplète ψ de $\mathfrak{A}(E)$ vers $\mathfrak{A}(F)$,définie sur l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$ vérifiant (1),et qui,à un tel σ,fait correspondre l'unique τ défini par la prop.1.

(1) Cette section contient des définitions et résultats triviaux,mis sous la forme la plus utile pour la suite;et qui ne prétendent pas à l'originalité,bien que nous ne les ayons point trouvés dans la littérature.Nous devons toutefois au Pr. LEVY-BRUHL la remarque suivante; si σ,f sont considérées comme des relations binaires,ou,ce qui est équivalent,comme des applications multiformes,alors il existe toujours une application multiforme τ telle que $\tau = f \circ \sigma \circ f^{-1}$;la condition (1) est alors la condition nécessaire et suffisante pour que τ soit uniforme,et entraîne que $\tau \circ f = f \circ \sigma$.

(2) Dans une catégorie,un diagramme de flèches est commutatif si,quand on va d'un sommet donné à un sommet donné en suivant le sens des flèches,le produit des morphismes rencontrés ne dépend pas du chemin suivi.

2.Propriétés.

Soient f une surjection de E vers F et φ l'application associée.

Proposition 1. $\varphi(I_E)$ est définie et $\varphi(I_E) = I_F$.

En effet le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "I_E"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "I_F"] & F \end{tikzcd}$$

Proposition 2. Si $\varphi(\sigma), \varphi(\sigma')$ sont définis, $\varphi(\sigma\sigma')$ est défini et $\varphi(\sigma\sigma') = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma')$.

En effet le ~~d~~diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "\varphi(\sigma')"] & F \arrow[r, "\varphi(\sigma)"] & F \end{tikzcd}$$

Proposition 3. Si g est une autre surjection de F vers G, et si ψ, χ sont les applications associées à g et g o f ,alors χ prolonge $\psi \circ \varphi$.

En effet,si $\psi(\varphi(\sigma))$ est défini,le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "\varphi(\sigma)"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[d, "g"] \\ G \arrow[r, "\psi(\varphi(\sigma))"] & G \end{tikzcd}$$

Proposition 4. L'application associée à I_E est $I_{\mathfrak{A}(E)}$.

En effet le diagramme ci-dessous est commutatif pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "I_E"'] & E \arrow[d, "I_E"] \\ E \arrow[r, "\sigma"] & E \end{tikzcd}$$

Proposition 5. Si f est une bijection, φ est partout définie, c'est une bijection, et φ^{-1} est l'application associée à f^{-1}.

f étant bijective, tout $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$ vérifie la condition (1), donc φ est partout définie (prop.1); de même ψ, application associée à f^{-1}, est partout définie. Il résulte alors des prop.3 et 4 que $\psi \circ \varphi = I_{\mathfrak{A}(E)}$, $\varphi \circ \psi = I_{\mathfrak{A}(F)}$, en sorte que φ est une bijection et que $\varphi^{-1} = \psi$.

B. Catégorie des tas.

1. Définition d'un tas.

Définition 1. On appelle tas le couple d'un ensemble non vide E et d'un sous-ensemble non vide Σ de $\mathfrak{A}(E)$.

E s'appelle le support du tas et les éléments de Σ les multiplicateurs du tas; Σ s'appelle aussi la loi de tas sur E.

Dans la suite, la loi du tas (E,Σ) jouera le rôle que tient d'habitude la loi d'un groupoïde $(E,\top)$; d'où ce terme pour désigner Σ.

Définition 2. Un tas (E,Σ) est dit unitaire si $I_E \in \Sigma$.

Définition 3. Un tas (E,Σ) est dit stable si Σ est stable pour la composition des applications.

Exemples. 1. Si E est un ensemble non vide, $(E,\mathfrak{A}(E))$ est un tas stable et unitaire de support E, appelé tas universel sur E.

2. $(E,\{I_E\})$ est aussi un tas stable et unitaire de support E, dit tas permis sur E.

3. Les exemples les plus importants seront vus en section D.

2. Homomorphismes de tas.

Définition 1. Etant donnés deux ~~tas~~ tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ et $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$ on appelle homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ toute surjection f de E vers E' telle que, si φ est l'application associée à f, φ soit définie sur Σ et

$\varphi(\Sigma) = \Sigma'$.

Proposition 1. Avec les mêmes notations,une surjection f de E vers E' est un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ si et seulement si il existe une surjection φ de Σ vers Σ' telle que

$$(\forall x \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)\ f(\sigma x) = \varphi(\sigma) f(x)\ .^{(3)}$$

La condition est évidemment nécessaire;et,si elle est remplie,φ est nécessairement la restriction à Σ de l'application associée à f,et f satisfait à la déf.1.

3.Catégories des tas,des tas unitaires,des tas stables.

Proposition 1. Les tas et les homomorphismes de tas sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie à supports(4),appelée catégorie des tas.

Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ sont trois tas,f un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ et g un homomorphisme de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}''$, $g\circ f$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}''$,car l'application associée à $g\circ f$ prolonge le produit des applications associées à g et f (prop.A.2.3);et,si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas,I_E est un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}$,car l'application associée à I_E est $I_{\mathfrak{A}(E)}$ (prop.A.2.4).

Proposition 2. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux tas et f un homomorphisme bijectif de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$,f^{-1} est un homomorphisme de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$.

(3) Cette propriété est prise par M. KOSKAS [21] comme point de départ pour définir des homomorphismes de tas,ou d'hypertas,qui ne soient pas nécessairement surjectifs;un homomorphisme est alors un couple (f,φ);φ n'est pas déterminée par f comme dans le cas où f est surjectif.

(4) Nous appelons catégorie à supports une catégorie $\mathcal{C}$ telle qu'il existe une application supp de ob$\mathcal{C}$ vers obEns,ayant la propriété:

$$(\forall A,B\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C})\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathrm{supp}\,A\ ,\mathrm{supp}\,B\ )\quad ;$$

les morphismes sont alors des applications,dont l'origine et l'extrémité dans Ens ne dépendent que de l'origine et l'extrémité dans $\mathcal{C}$.La catégorie des tas est clairement une telle catégorie,avec $\mathrm{supp}(E,\Sigma) = E$;et il en est de même de toutes les catégories dont les objets sont des ensembles "munis" de structures algébriques ou topologiques.On notera que la catégorie des tas,ou des hypertas,au sens élargi de M. KOSKAS (note 3) n'est pas une catégorie à supports.

Ceci résulte de la prop.A.2.5.

Un tel f sera appelé un <u>isomorphisme</u>,etc.(5)

<u>Proposition 3. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$, $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$ deux tas et f un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$;si $\mathcal{C}$ est unitaire,ou stable,il en est de même de $\mathcal{C}'$.</u>

Soit φ l'application associée à f; φ est définie sur Σ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$;il résulte alors de la prop.A.2.1 que,si $I_E \in \Sigma$, $I_{E'} \in \Sigma'$; et de la prop.A.2.2 que;si Σ est stable,Σ' est stable.

Les tas unitaires,les tas stables,définissent donc des sous-catégories pleines et saturées de la catégorie des tas(6).

<u>Proposition 4. L'application $^-$ qui,à tout tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ associe le tas $\bar{\mathcal{C}} = (E,\bar{\Sigma})$,où $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{I_E\}$,définit un foncteur surjec-</u>

(5) Dans une catégorie,on appelle <u>monomorphisme</u> tout morphisme f tel que $f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$,et <u>épimorphisme</u> tout morphisme f tel que $g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$ .Dans la catégorie des ensembles,il y a identité entre les monomorphismes et les injections,entre les épimorphismes et les surjections;de même dans les catégories usuelles (groupoïdes, groupes,...).Dans une catégorie quelconque $\mathcal{C}$,on appelle aussi <u>bimorphisme</u> un morphisme qui est à la fois un épi- et un mono-morphisme;et <u>isomorphisme</u> un morphisme f inversible,c'est-à-dire tel que,si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$,il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$,tel que $f \circ g = I_B$ et $g \circ f = I_A$
Tout isomorphisme est un bimorphisme;la réciproque est vraie dans la catégorie des ensembles,et dans celle des groupoïdes,mais non dans celle des espaces topologiques (où on sait bien qu'il existe des bijections continues dont l'inverse n'est pas continue).Dans la catégorie des tas telle que nous l'avons définie,tout morphisme est un épimorphisme,et on peut démontrer l'identité entre les monomorphismes, les bimorphismes et les morphismes bijectifs;la prop.2 énonce alors que tout bimorphisme est un isomorphisme.

(6) Une catégorie $\mathcal{C}'$ est dite une <u>sous-catégorie</u> de la catégorie $\mathcal{C}$ si et seulement si $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}' \subseteq \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$,et si,pour tous $A,B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}'$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$;la sous-catégorie est dite <u>pleine</u> si l'égalité est toujours réalisée dans la seconde condition;et <u>saturée</u> si tout objet de $\mathcal{C}$ isomorphe à un objet de $\mathcal{C}'$ est un objet de $\mathcal{C}'$.Par exemple,la catégorie des demi-groupes est une sous-catégorie pleine et saturée de la catégorie des groupoïdes.

<u>tif simple[7] de la catégorie des tas vers celle des tas unitaires.</u>

Soient f un homomorphisme de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ sur $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$ et φ l'application associée; $\varphi(I_E)$ est défini et $\varphi(I_E) = I_{E'}$ (prop.A.2.1), donc φ est définie sur $\overline{\Sigma}$ et $\varphi(\overline{\Sigma}) = \overline{\Sigma}'$, en sorte que f est un homomorphisme de $\overline{\mathcal{C}}$ sur $\overline{\mathcal{C}}'$, et que l'on a défini un foncteur simple. Ce foncteur est surjectif, puisque, si $\mathcal{C}$ est unitaire, $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$.

<u>Proposition 5. L'application $\hat{}$ qui, à tout tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ associe le tas $\hat{\mathcal{C}} = (E,\hat{\Sigma})$, où $\hat{\Sigma}$ est la fermeture stable de Σ, définit un foncteur simple surjectif de la catégorie des tas vers celle des tas stables.</u>

Soient f un homomorphisme de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ sur $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$ et φ l'application associée; il résulte de la prop.A.2.2 que le domaine de définition de φ est stable, donc que φ est définie sur $\hat{\Sigma}$, et que $\varphi(\hat{\Sigma}) = \hat{\Sigma}'$; par suite f est un homomorphisme de $\hat{\mathcal{C}}$ sur $\hat{\mathcal{C}}'$, et on a défini un foncteur simple. Ce foncteur est surjectif, car, si $\mathcal{C}$ est stable, $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}$.

<u>Proposition 6. Les foncteurs $\bar{}$ et $\hat{}$ commutent.</u>

En effet, dans $\mathfrak{A}(E)$, la fermeture stable commute avec l'adjonction de I_E.

(7) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, on appelle <u>foncteur covariant</u> de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ un couple de deux applications, notées de la même façon, T par exemple, de ob $\mathcal{C}$ vers ob $\mathcal{C}'$ et de fl $\mathcal{C}$ vers fl $\mathcal{C}'$, telles que $o(T(f)) = T(o(f))$, $e(T(f)) = T(e(f))$, $T(I_X) = I_{T(X)}$, $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$, quels que soient $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $f, g \in \mathrm{fl}\,\mathcal{C}$ tels que $e(g) = o(f)$.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories à supports, les conditions précédentes sont vérifiées dès que l'on a $\mathrm{supp}\, T(X) = \mathrm{supp}\, X$ et $T(f) = f$ pour tous $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{fl}\,\mathcal{C}$; nous appelons un tel foncteur un <u>foncteur simple</u>. Un foncteur simple est défini par la donnée de la seule application T de ob $\mathcal{C}$ vers ob $\mathcal{C}'$, telle que $\mathrm{supp}\, T(X) = \mathrm{supp}\, X$ et que, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(A),T(B))$. Par exemple, T = supp définit un foncteur simple de $\mathcal{C}$ vers Ens. On définit aussi des foncteurs simples en associant à tout anneau le groupe sous-jacent, etc.

On définit aussi un foncteur covariant, non simple, de Ens vers Ens, en associant à tout ensemble A l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$, et à $f \in \mathfrak{A}(A,B)$, l'application $\cup$-distributive, notée traditionnellement f, qui prolonge f en application de $\mathfrak{P}(A)$ vers $\mathfrak{P}(B)$.

Si T est un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, et S un foncteur covariant de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{C}''$, $S \circ T$ est un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}''$; de même le composé de deux foncteurs simples est un foncteur simple.

4. Support et loi considérés comme foncteurs.

Proposition 1. On définit un foncteur simple de la catégorie des tas vers celle des ensembles en associant à tout tas son support.

Ceci est vrai pour toute catégorie à supports.

Proposition 2. On définit un foncteur covariant de la catégorie des tas vers celle des ensembles en associant à tout tas sa loi et à tout homomorphisme de tas la restriction à la loi de l'application associée.

Ceci résulte des définitions et des prop.A.2.3,A.2.4.

Proposition 3. La restriction du foncteur loi à la catégorie des tas stables définit un foncteur covariant génériquement surjectif de la catégorie des tas stables vers celle des demi-groupes.

La loi d'un tas stable est un demi-groupe (pour la composition des applications),et l'application associée à un homomorphisme de tas stables est un homomorphisme de demi-groupes (prop.A.2.2);la première assertion résulte alors de la prop.2.La seconde signifie que tout demi-groupe est isomorphe à un demi-groupe d'applications.Soit D un demi-groupe;notons $g(D)$ le demi-groupe des translations à gauche de D.Si D a un élément unité,$D \simeq g(D)$.Si D n'a pas d'élément unité,il existe un monomorphisme de D vers un demi-groupe D^1 à élément unité;comme $D^1 \simeq g(D^1)$,il existe un monomorphisme de D vers $g(D^1)$,dont l'image est une loi de tas stable sur le support de D^1 et un demi-groupe isomorphe à D.

Définition 1. Si $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ est un tas,on appelle produit d'une partie A de E par une partie T de Σ la partie de E

$$\mathrm{T}A = \{\sigma x \ ; \sigma\in\mathrm{T}, x\in A\} \ .$$

Proposition 4. Le produit ainsi défini est un morphisme fonctoriel[8] de $(\mathfrak{P} \circ \text{loi})\times(\mathfrak{P} \circ \text{supp})$ vers $\mathfrak{P} \circ \text{supp}$.

Le foncteur de gauche associe à tout tas (E,Σ) l'ensemble $\mathfrak{P}(\Sigma)\times\mathfrak{P}(E)$,et,à tout homomorphisme f de (E,Σ) sur (E',Σ') l'ap-

(8) voir page suivante.

plication $(T,A) \rightsquigarrow (\psi(T),f(A))$ de $\mathfrak{P}(\Sigma)\times\mathfrak{P}(E)$ vers $\mathfrak{P}(\Sigma')\times\mathfrak{P}(E')$.D'après la définition d'un morphisme fonctoriel,il suffit de vérifier que $f(TA) = \psi(T)f(A)$ identiquement,ce qui (prop.2.1) est immédiat.

On sait que la catégorie des groupoïdes possède une propriété analogue.

C.Théorème d'homomorphisme.

1.Equivalences compatibles.

Définition 1. Soit $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ un tas; une relation d'équivalence sur E est dite compatible (ou Σ-compatible s'il y a risque de confusion) si et seulement si elle est équivalence nucléaire(9) d'un homomorphisme partant de $\mathcal{T}$.

Proposition 1. Soient $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ un tas et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E; les assertions suivantes sont équivalentes: a- $\mathcal{R}$ est Σ-compatible; b- $\mathcal{R}$ est $\bar{\Sigma}$-compatible; c- $\mathcal{R}$ est $\hat{\Sigma}$-compatible.

En effet un homomorphisme partant de $\bar{\mathcal{T}}$ est aussi un homomorphisme partant de $\mathcal{T}$;et un homomorphisme partant de $\mathcal{T}$ est aussi un homomorphisme partant de $\bar{\mathcal{T}}$ (prop.B.3.4);donc a $\Leftrightarrow$ b .De même a $\Leftrightarrow$ c.

(8) Si S et T sont deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$,on appelle morphisme fonctoriel de S vers T une application u de ob$\mathcal{C}$ vers fl$\mathcal{C}'$, telle que,pour tous $X,A,B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ et $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $u(X)\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(S(X),T(X))$ et que le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "u(A)"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(B) \arrow[r, "u(B)"] & T(B) \end{tikzcd}$$

Si U est un autre foncteur covariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$,et v un morphisme fonctoriel de T vers U,l'application $w : X \rightsquigarrow v(X) \circ u(X)$ est un morphisme fonctoriel de S vers U .Les foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ peuvent ainsi être structurés en catégorie.

(9) Nous adoptons pour l'équivalence d'homomorphisme la terminologie introduite par P. DUBREIL.

2.Transfert par surjection.

Proposition 1. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas, F un ensemble non vide et f une surjection de E vers F. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- il existe un tas $\mathcal{C}'$ de support F tel que f soit un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$;

b- l'application φ associée à f est définie sur Σ ;

c- $(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ f(x) = f(y) \Longrightarrow f(\sigma x) = f(\sigma y)\ )$.

De plus, si l'une quelconque est vérifiée, le tas $\mathcal{C}'$ de a- est unique.

Clairement a $\Longrightarrow$ b ;et, si b est vraie, $\varphi(\Sigma)$ est une loi de tas sur F, et f un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur ce tas. Enfin b $\Longleftrightarrow$ c (prop.A.1.1). Enfin, si f est un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, la loi de $\mathcal{C}'$ est nécessairement $\varphi(\Sigma)$, donc $\mathcal{C}'$, s'il existe, est unique.

Proposition 2. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ; $\mathcal{R}$ est compatible si et seulement si $(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow \sigma x\,\mathcal{R}\,\sigma y\ )$.

Si $\mathcal{R}$ est compatible, il existe un homomorphisme f partant de $\mathcal{C}$ tel que $x\,\mathcal{R}\,y$ soit équivalent à $f(x) = f(y)$ pour tous x, $y \in E$; f vérifie c (prop.1) et $\mathcal{R}$ vérifie la condition de l'énoncé. Réciproquement, si $\mathcal{C}$ vérifie cette condition, et si f est une surjection partant de E et d'équivalence nucléaire f (dont l'existence est assurée par la théorie des ensembles), f peut être considérée comme un homomorphisme partant de $\mathcal{C}$ (prop.1) et $\mathcal{R}$ est compatible.

3.Théorème d'homomorphisme.

Théorème 1 (d'homomorphisme). Soient $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ trois tas de supports E, E', E", f un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ et g un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}''$, tels que f et g aient même équivalence nucléaire. Alors il existe un isomorphisme et un seul h de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}''$ tel que $g = h \circ f$.

f et g ayant même équivalence nucléaire, la théorie des ensembles assure qu'il existe une bijection h et une seule de E' vers E" telle que $g = h \circ f$; si l'isomorphisme cherché existe, c'est donc h ; en particulier, il est unique. Or, l'application associée à h étant partout définie (prop.A.2.5), il existe (prop.2.1) un tas $\mathcal{C}_1''$ de support E" tel que h soit un homomorphisme de tas de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}_1''$; h est ainsi un isomorphisme de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}_1''$.Par suite,g est un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_1''$;et $\mathcal{C}_1''=\mathcal{C}''$ (prop.1),puisque $\mathcal{C}_1''$ et $\mathcal{C}''$ ont même support;h est donc un isomorphisme de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}''$.

Etant donné ce théorème,on peut espérer caractériser des propriétés de l'image d'un homomorphisme invariantes par isomorphisme,au moyen de propriétés de l'équivalence nucléaire;on en verra des exemples au chapitre III.

4.Equivalence associée.

Définition 1. Etant donnés un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E,on appelle relation associée la relation d'équivalence ρ sur Σ définie par

$$(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\ \sigma\rho\tau \iff (\forall x\in E)\ \sigma x\,\mathcal{R}\,\tau x\ )\ .$$

Proposition 1. Si f est un homomorphisme partant de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ et si φ est l'application associée à f,l'équivalence nucléaire de φ est la relation associée à l'équivalence nucléaire de f.

En effet,f est surjectif,et,pour tous $\sigma,\tau\in\Sigma$:

$\varphi(\sigma) = \varphi(\tau) \iff (\forall x\in E)\ \varphi(\sigma)f(x) = \varphi(\tau)f(x) \iff (\forall x\in E)\ f(\sigma x) = f(\tau x)$,

donc,si ρ est la relation associée à l'équivalence nucléaire de f:

$$\varphi(\sigma)=\varphi(\tau) \iff \sigma\rho\tau \qquad .$$

(On peut dire en somme que l'associée de l'équivalence nucléaire est l'équivalence nucléaire de l'associée).

D.Côtés.

1.Propriétés générales.

Définition 1. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie à supports,on appelle côté sur $\mathcal{C}$ tout foncteur simple de la catégorie $\mathcal{C}$ vers celle des tas.

Dans la suite,$\mathcal{C}$ sera la catégorie des groupoïdes,ou parfois celle des demi-groupes,avec les morphismes surjectifs seulement.Dans le premier cas,on dira "côté" tout court.

Notations. Si c est un côté et G un groupoïde,on note G_c le tas image de G par c,alors que c(G) désigne l'ensemble des multiplicateurs de G_c.

La donnée de $c(G)$ pour tout groupoïde G définit complètement le côté c, il ne reste plus qu'à vérifier que, si f est un homomorphisme (de groupoïdes) de G sur G', c'est aussi un homomorphisme (de tas) de G_c sur G'_c.

Proposition 1. Si G est un groupoïde et $\mathcal{R}$ une équivalence compatible sur le support de G, $\mathcal{R}$ est $c(G)$-compatible pour tout côté c.

En effet, si $\mathcal{R}$ est équivalence nucléaire d'un homomorphisme (de groupoïdes) partant de G, $\mathcal{R}$ est aussi équivalence nucléaire d'un homomorphisme (de tas) partant de G_c.

2. Côtés g, d, b.

Définition 1. Etant donné un groupoïde $G = (E,\top)$, on appelle γ (resp. δ) l'application qui, à tout $a \in E$, associe $\gamma_a \in \mathfrak{A}(E)$ (resp. δ_a), appelée translation à gauche (resp. à droite) associée à a, et définie par

$$(\forall x \in E) \quad \gamma_a x = a \top x \quad (\text{resp. } \delta_a x = x \top a) .$$

Proposition 1. On définit des côtés en posant, pour tout groupoïde G, $g(G) = \gamma(\operatorname{supp} G)$, $d(G) = \delta(\operatorname{supp} G)$.

Il faut demontrer que, si f est un homomorphisme (de groupoïdes) de $G = (E,\top)$ sur $G' = (E',\top')$, f est un homomorphisme (de tas) de G_g sur G'_g et de G_d sur G'_d ; soit φ l'application associée à f. On a, pour tous $a,b \in E$, $f(a\top b) = f(a)\top' f(b)$; d'où

$$(\forall a \in E) \quad f \circ \gamma_a = \gamma_{f(a)} \circ f \;, \quad f \circ \delta_a = \delta_{f(a)} \circ f \;.$$

Il résulte alors de la définition même de φ que φ est définie sur $g(G)$ et $d(G)$, et que $\varphi(g(G)) = g(G')$, $\varphi(d(G)) = d(G')$.

Proposition 2. On définit un côté en posant, pour tout groupoïde G, $b(G) = g(G) \cup d(G)$.

Avec les notations de la prop. 1, l'égalité à démontrer, $\varphi(b(G)) = b(G')$, résulte des égalités analogues pour g et d.

3.Construction de côtés.

Proposition 1. Si c est un côté,il en est de même de $\hat{c}$ et $\bar{c}$ définis par $G_{\hat{c}} = \hat{G_c}$, $G_{\bar{c}} = \bar{G_c}$ pour tout groupoïde G.

Le composé de deux foncteurs simples étant un foncteur simple,ceci résulte des prop. B.3.4 et B.3.5.

Définition 1. Un côté c sur une catégorie à supports $\mathcal{C}$ est dit stable (resp. unitaire) si et seulement si G_c est stable (resp. unitaire) pour tout $G \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$.

Si c est un côté,$\hat{c}$ est stable,$\bar{c}$ unitaire,donc:

Proposition 2. $\hat{g},\hat{d},\hat{b}$ sont des côtés stables,$\bar{g},\bar{d},\bar{b}$ des côtés unitaires,$\bar{\hat{g}},\bar{\hat{d}},\bar{\hat{b}}$ des côtés stables et unitaires.

On peut aussi obtenir des côtés par le procédé suivant.Soient supp le foncteur support de la catégorie des demi-groupes, $\mathfrak{P}$ le foncteur de la théorie des ensembles;le foncteur $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P} \circ \mathrm{supp}$ associe,à tout demi-groupe D = (E,.),l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$,et,à tout homomorphisme f de D sur D',l'application,notée f par abus de langage,qui prolonge f à $\mathfrak{P}(E)$.On note $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_1$ le foncteur qui,à tout demi-groupe (E,.), associe l'ensemble $\mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(E)$,et,à tout homomorphisme f de (E,.) sur (E',.),l'application $f\times f$ de $\mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(E)$ vers $\mathfrak{P}(E')\times\mathfrak{P}(E')$.

Un morphisme fonctoriel u de $\mathfrak{P}_1\times\mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$ fait donc correspondre à tout demi-groupe D = (E,.) une application u(D) de $\mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(E)$ vers $\mathfrak{P}(E)$,de telle sorte que,pour tout homomorphisme f de D sur D' = (E',.),le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(E) & \xrightarrow{u(D)} & \mathfrak{P}(E) \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathfrak{P}(E')\times\mathfrak{P}(E') & \xrightarrow{u(D')} & \mathfrak{P}(E') \end{array}$$

ce qui s'exprime par

$$(\forall A,B\in\mathfrak{P}(E)) \quad f(u(D)(A,B)) = u(D')(f(A),f(B)) .$$

La réunion ensembliste,le produit de deux parties, sont des exemples de ces morphismes fonctoriels.

Proposition 3. Pour tout morphisme fonctoriel u de $\mathfrak{P}_1\times\mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$,on définit un côté c(u) en posant,pour tout groupoïde G :

$$c(u)(G) = u(\hat{b}(G))(g(G),d(G)) .$$

Soient f un homomorphisme de G sur G', φ l'application associée; φ est définie sur $\hat{b}(G)$ et $\varphi(\hat{b}(G)) = \hat{b}(G')$ (prop.2), en sorte que φ est un homomorphisme (de demi-groupes) de $\hat{b}(G)$ sur $\hat{b}(G')$ (prop. A.2.2, ou prop.B.4.3). De $\varphi(g(G)) = g(G')$ et $\varphi(d(G)) = d(G')$ (prop.2.1) résulte alors, par définition de u, $\varphi(c(u)(G)) = c(u)(G')$.

Définition 2. Un côté c est dit normal (resp. semi-normal) si et seulement si il existe un morphisme fonctoriel u de $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$ tel que $c = c(u)$ (resp. $c = \overline{c(u)}$).

Proposition 4. $g,d,b,\hat{g},\hat{d},\hat{b}$ sont des côtés normaux et $\bar{g},\bar{d},\bar{b}$, $\bar{\hat{g}},\bar{\hat{d}},\bar{\hat{b}}$ des côtés seminormaux.

L'application qui, à un demi-groupe, associe la fermeture stable dans l'ensemble de ses parties, est un morphisme fonctoriel de $\mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$; donc, si c est un côté normal, $\hat{c}$ est normal. Il suffit alors de montrer que g,d,b sont normaux, ce qui résulte du fait que les projections $(A,B) \rightsquigarrow A$, $(A,B) \rightsquigarrow B$, et la réunion ensembliste, sont des morphismes fonctoriels de $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$.

4. Côté médian.

Proposition 1. On définit un côté stable et normal m en associant à tout groupoïde G l'idéal bilatère m(G) engendré dans $\hat{b}(G)$ par $g(G)d(G) \cup d(G)g(G)$.

Le produit des parties, la réunion ensembliste sont des morphismes fonctoriels de $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$, et la fermeture idéal bilatère est un morphisme fonctoriel de $\mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$; par suite on définit un morphisme fonctoriel u de $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_1$ vers $\mathfrak{P}_1$ en faisant correspondre à tout demi-groupe l'application qui, au couple (A,B), associe l'idéal bilatère engendré par $AB \cup BA$; il est clair que $m = c(u)$. Tout idéal bilatère d'un demi-groupe étant une partie stable, m est stable.

5. Multiplicateurs des côtés canoniques.

Nous considérons comme canoniques les côtés suivants: $g,d,b,\hat{g},\hat{d},\hat{b},\bar{g},\bar{d},\bar{b},\bar{\hat{g}},\bar{\hat{d}},\bar{\hat{b}},m,\bar{m}$. Les plus importants pour la suite sont $g,d,\hat{g},\hat{d},\hat{b},m$.

Proposition 1. Soient $G = (E,\tau)$ un groupoïde, c un côté canonique et $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$; pour que $\sigma \in c(G)$, il faut et il suffit qu'il existe des entiers positifs ou nuls n,p, des éléments $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p$ de E et $\omega \in \Omega$ tels que, pour tout $x \in E$, $\sigma x = T_\omega(a_i,x,b_j)$, les entiers n et p étant choisis de la manière suivante selon c :

g : $n = 1, p = 0$; d : $n = 0, p = 1$; b : $n = 1, p = 0$ ou $n = 0, p = 1$;

$\bar{g}$: $n \leq 1, p = 0$; $\bar{d}$: $n = 0, p \leq 1$; $\bar{b}$: $n + p \leq 1$;

$\hat{g}$: $n > 0, p = 0$; $\hat{d}$: $n = 0, p > 0$; $\hat{b}$: $n + p > 0$;

$\bar{\hat{g}}$: $p = 0$; $\bar{\hat{d}}$: $n = 0$; $\bar{\hat{b}}$: n,p quelconques;

m : $n > 0, p > 0$; $\bar{m}$: $n > 0, p > 0$ ou $n = p = 0$.

L'application $x \rightsquigarrow T_\omega(a_i,x,b_j)$ est produit de translations à gauche et de translations à droite, dans un ordre qui dépend de ω ; le nombre de translations à gauche intervenant dans le produit n'excède pas n, mais ne s'annule que si n est nul ; de même pour le nombre de translations à droite et p ; enfin, si $n = p = 0$, c'est l'application identique.

Les assertions ci-dessus sont alors évidentes pour g,d,b, donc pour $\bar{g},\bar{d},\bar{b}$, et aussi pour $\hat{g},\hat{d},\hat{b}$ puisque $\hat{g}(G)$ (resp. $\hat{d}(G)$, $\hat{b}(G)$) est l'ensemble des produits finis d'éléments de $g(G)$ (resp. $d(G)$, $b(G)$) ; donc enfin pour $\bar{\hat{g}},\bar{\hat{d}},\bar{\hat{b}}$. Enfin l'assertion faite sur $\bar{m}$ résulte immédiatement de l'assertion faite sur m, que nous allons démontrer.

$m(G)$ est l'idéal bilatère engendré dans $\hat{b}(G)$ par l'ensemble des produits d'une translation à droite et d'une translation à gauche, et contient par conséquent les produits d'un élément de $\hat{b}(G)$ par un tel produit de deux translations ; finalement $m(G)$ contient les produits de translations qui contiennent au moins une translation de chaque espèce. Réciproquement, ces produits forment un idéal bilatère contenant tout produit d'une translation à droite par une translation à gauche, en sorte que leur ensemble est exactement $m(G)$. Par suite les éléments de $m(G)$ se représentent sous la forme ci-dessus avec $n > 0$, $p > 0$, et réciproquement.

On notera que, si $p = 0$, on peut adopter une représentation de la forme $\sigma x = T_i(a_i,x)$, et que, si $n = 0$, on peut adopter une représentation de la forme $\sigma x = T_j(x,b_j)$.

De la prop.1 résulte la formule importante:

Proposition 2. Pour tout groupoïde G,

$$\hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G) \quad .$$

6. Cas d'un groupoïde unitaire ou d'un demi-groupe.

Proposition 1. Si G est un groupoïde à élément unité, G_c est unitaire pour tout côté canonique c, et $G_m = G_{\bar{b}}$. Réciproquement, si G_g et G_d sont unitaires, G a un élément unité.

Si G a un élément unité, l'application identique de son support appartient à g(G) et d(G), et réciproquement. G_c est unitaire d'après la prop.5.1; tous les a_i ou b_j pouvant être pris égaux à l'élément unité; pour cette raison aussi $G_m = G_{\bar{b}}$,

Soit maintenant D = (E, .) un demi-groupe.

Proposition 2. D_g, D_d sont stables, et g(D), d(D) commutent élément par élément, en sorte que m(D) = g(D)d(D) et que, si $\sigma \in \mathfrak{A}(E)$:

$$\sigma \in g(D) \iff (\exists a \in E)(\forall x \in E)\ \sigma x = ax$$
$$\sigma \in d(D) \iff (\exists b \in E)(\forall x \in E)\ \sigma x = xb$$
$$\sigma \in m(D) \iff (\exists a, b \in E)(\forall x \in E)\ x = axb\ .$$

Ceci résulte immédiatement de l'associativité ou de la prop.5.1. On sait de plus qu'un groupoïde G est un demi-groupe si et seulement si g(G) et d(G) commutent élément par élément.

Il existe sur la catégorie des demi-groupes d'autres côtés que ceux qui sont considérés ici comme canoniques:

Proposition 3. Si α, β sont des entiers naturels non simultanément nuls, on définit un côté stable et normal par

$$c^{\alpha,\beta}(D) = (g(D))^{\alpha}(d(D))^{\beta}.$$

En effet $(A,B) \rightsquigarrow A^{\alpha}B^{\beta}$ est un morphisme fonctoriel de $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_1$ vers $\mathfrak{D}_1$.

Nous appelons $c^{\alpha,\beta}$ côté calaisien d'ordre (α,β). On a $c^{1,0} = g$, $c^{0,1} = d$, $c^{1,1} = m$. Si $\alpha\beta \neq 0$, $c^{\alpha,\beta}(D)$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{b}(D)$; si $\beta = 0$, c'est un idéal bilatère de g(D).

7. Lois de groupoïdes admissibles sur un tas.

Définition 1. Etant donnés un tas $\mathcal{T} = (E, \Sigma)$ et un côté c, on dit qu'une loi de composition interne τ sur E est c-admissible si et seulement si $(E,\tau)_c = \mathcal{T}$.

La question de savoir si un tas donné peut être muni d'une loi de groupoïde c-admissible semble assez délicate. On a les résultats suivants:

Proposition 1. Un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ peut être muni d'une loi de groupoïde g-admissible si et seulement si la puissance de Σ est inférieure ou égale à celle de E.

La condition est nécessaire: si $(E,\Sigma) = G_g$, on a $\Sigma = g(G) = \gamma(E)$, et la puissance de Σ est inférieure ou égale à celle de E.

La condition est suffisante: si elle est remplie, il existe une surjection θ de E vers Σ; la loi τ sur E définie par $x\tau y = \theta(x)y$ pour tous $x,y \in E$ est évidemment g-admissible.

Proposition 2. Un tas stable $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ peut être muni d'une loi de groupoïde $\hat{g}$-admissible si et seulement si Σ a un système générateur de puissance inférieure ou égale à celle de E.

Ceci résulte de la prop.1.

Proposition 3. Il existe un tas n'admettant aucune loi de groupoïde c-admissible, et ce pour tout côté normal ou seminormal c.

C'est le tas universel sur l'ensemble N des entiers naturels. Si G est un groupoïde quelconque sur N, et c un côté normal ou seminormal, on a $c(G) \subseteq \hat{b}(G) \cup \{I_N\}$; $\hat{b}(G)$, ayant un système générateur dénombrable, est dénombrable et il en est de même de $c(G)$; par suite $c(G)$ est différent de $\mathcal{A}(N)$, qui a la puissance du continu.

On a, pour les lois c-admissibles, la propriété de transfert suivante:

Proposition 4. Etant donnés deux tas $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, un homomorphisme f de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ et une loi de composition interne c-admissible τ sur le support de $\mathcal{C}$, il existe une loi de composition interne c-admissible sur celui de $\mathcal{C}'$ telle que f soit un homomorphisme de groupoïdes si et seulement si l'équivalence nucléaire de f est compatible pour τ; cette loi est alors unique.

L'existence et l'unicité d'une loi de composition interne sur le support de $\mathcal{C}'$ telle que f soit un homomorphisme de groupoïdes est une propriété connue des groupoïdes, et il reste à montrer que cette loi est c-admissible. Or, si G et G' sont les groupoïdes obtenus, f est un homomorphisme de $G_c = \mathcal{C}$ sur G'_c, et de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$; $\mathcal{C}'$ et G'_c ayant même support, sont égaux (prop.C.2.1), et la loi trouvée sur le support de $\mathcal{C}'$ est c-admissible.

Une conséquence des prop.3 et 4 est que les côtés normaux ou seminormaux ne sont pas génériquement surjectifs.

E. Notions latérales dans un groupoïde.

1. Définition.

On considère ici une <u>définition</u> sur une catégorie comme une façon de faire correspondre, à tout objet O de la catégorie, un ensemble $\mathcal{D}(O)$ d'êtres mathématiques (ceux qui "vérifient" la définition $\mathcal{D}$). On donne le même sens au mot <u>notion.</u>

<u>Définition 1. Une définition $\mathcal{D}$ sur la catégorie des groupoïdes est dite latérale s'il existe un côté c tel que $G_c = G'_c$ entraîne $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G')$. On dit aussi que $\mathcal{D}$ est de côté c.</u>

Une façon d'obtenir des définitions latérales est:

<u>Proposition 1. Si $\mathcal{D}$ est une définition sur la catégorie des tas, la définition $\mathcal{D}_c$ sur la catégorie des groupoïdes définie par $\mathcal{D}_c(G) = \mathcal{D}(G_c)$ est, pour tout côté c, une définition latérale, de côté c.</u>

<u>Convention. La définition $\mathcal{D}_c$ sera baptisée du nom de la définition $\mathcal{D}$, suivi de la lettre c entre parenthèses.</u>

On rencontrera des exemples dans la suite. Donnons les plus simples.

2. Premier exemple: équivalences compatibles.

Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas, on a défini les relations d'équivalence compatibles $\mathcal{R}$ sur E, caractérisées par (prop.C.2.2):

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ x \mathcal{R} y \Rightarrow \sigma x \mathcal{R} \sigma y\ ) .$$

Dans un groupoïde, on a donc une notion d'équivalence compatible(c); on sait que compatible (c), $(\hat{c})$, $(\bar{c})$ sont équivalents (prop.C.1.1) et qu'une équivalence compatible (au sens de la théorie des groupoïdes) est compatible(c) pour tout côté c (prop.D.1.1).

Proposition 1. Les notions suivantes coïncident pour toute relation d'équivalence sur le support d'un groupoïde:

compatible(g) et compatible à gauche

compatible(d) et compatible à droite

compatible(b) et compatible .

Ceci résulte immédiatement de la prop.C.2.2 rappelée ci-dessus.

3.Second exemple: idéaux.

Définition 1. Dans un tas (E,Σ),on appelle idéal toute partie A de E telle que $\Sigma A \subseteq A$,ou encore

$$(\forall x\in E)(\forall \sigma\in \Sigma)(\ x\in A \Longrightarrow \sigma x\in A\ )\ .$$

Proposition 1. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas,$\mathcal{C},\hat{\mathcal{C}},\bar{\mathcal{C}}$ ont mêmes idéaux.

En effet,pour toute partie A de E,l'ensemble des $\sigma\in \mathcal{A}(E)$ vérifiant l'implication ci-dessus est stable et contient I_E.

Dans un groupoïde,on a donc une notion d'idéal(c); il y a identité entre idéal (c),($\hat{c}$),($\bar{c}$) (prop.1).

Proposition 2.Les notions suivantes coïncident pour toute partie du support d'un groupoïde:

idéal($\hat{g}$) , idéal(g) et idéal à gauche

idéal($\hat{d}$) , idéal(d) et idéal à droite

idéal($\hat{b}$) et idéal bilatère .

Ceci résulte immédiatement des définitions.

4.Contre-exemples.

Afin de délimiter un peu le domaine d'intérêt de la théorie des tas,on va donner l'exemple de notions importantes de théorie des groupoïdes qui ne sont latérales pour aucun côté normal ou seminormal.

Soient en effet les groupoïdes suivants,de support

$E = \{a,b,c\}$, dont les tables de multiplication respectives sont:

τ	a	b	c
a	c	c	a
b	c	c	a
c	a	a	c

τ'	a	b	c
a	a	a	c
b	a	a	c
c	c	c	a

ce sont d'ailleurs des demi-groupes abéliens (respectivement isomorphes aux demi-groupes 16 et 14 du catalogue de FORSYTHE [16]).

On a $g(G) = g(G')$, $d(G) = d(G')$, d'où, pour tout côté normal ou seminormal c, $c(G) = c(G')$. Mais les parties stables de G sont : $\emptyset, \{c\}, \{a,c\}, E$, et celles de G' : $\emptyset; \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, E$; G et G' n'ont pas même parties stables; Leurs treillis de parties stables ne sont pas isomorphes et ils n'ont pas mêmes idempotents. Ces notions ne sont donc latérales pour aucun côté normal ou seminormal. De même G et G' n'ont pas mêmes parties unitaires à gauche (ou à droite).

F. Zéros et bizéros.

Si E est un ensemble, et si $x \in E$, on note κ_x l'application constante de E vers E qui prend toujours la valeur x.

On rappelle les définitions et propriétés suivantes des groupoïdes. Un zéro à gauche (resp. zéro à droite, zéro) du groupoïde $G = (E,\tau)$ est un élément z de E tel que $\{z\}$ soit un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) propre. Si $E \neq \{z\}$, z est zéro à gauche de G si et seulement si $\gamma_x z = z$ pour tout $x \in E$, ou si et seulement si $\delta_z = \kappa_z$.

1. Zéros et bizéros d'un tas.

Soit $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ un tas.

Définition 1. On appelle zéro de $\mathcal{T}$ tout élément z de E tel que $\{z\}$ soit un idéal propre de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire

$$\{z\} \neq E \quad \text{et} \quad (\forall \sigma \in \Sigma)\ \sigma z = z \ .$$

Définition 2. On appelle bizéro de $\mathcal{T}$ tout zéro z de $\mathcal{T}$ tel que $\kappa_z \in \Sigma$.

Proposition 1. Si $\mathcal{C}$ a un bizéro z, z est seul zéro de $\mathcal{C}$, κ_z est seule application constante de Σ.

Si x est un zéro de $\mathcal{C}$, $x = \kappa_z x = z$ .Si $\kappa_x \in \Sigma$, $x = \kappa_x z = z$ et $\kappa_x = \kappa_z$.

Proposition 2. Si $\mathcal{C}$ a un zéro et si Σ contient une application constante, $\mathcal{C}$ a un bizéro.

Si z est un zéro et si $\kappa_x \in \Sigma$, $x = \kappa_x z = z$.

Proposition 3. Si Σ contient plusieurs applications constantes, $\mathcal{C}$ est sans zéro; si $\mathcal{C}$ a plusieurs zéros, Σ ne contient pas d'application constante.

Ceci résulte des prop.1,2.

Proposition 4. Si $\mathcal{C}$ est stable et si Σ contient une seule application constante, $\mathcal{C}$ a un bizéro, ou bien E n'a qu'un élément.

Si $\kappa_z, \sigma \in \Sigma, \sigma\kappa_z \in \Sigma$; de $\sigma\kappa_z = \kappa_{\sigma z}$ résulte alors $\sigma z = z$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Le tas suivant, de support $E = \{a,b\}$, dont la loi est définie par la table

	a	b
κ_a	a	a
σ	b	a

a un support de deux éléments, un seul multiplicateur constant et pas de zéro, donc pas de bizéro.

Le tas suivant, de support $E = \{a,b,c\}$, dont la loi est définie par la table

	a	b	c
I_E	a	b	c
σ	a	c	b

est stable et unitaire, a un zéro et un seul et pas de multiplicateur constant.

2.Notions latérales correspondantes.

Soit $G = (E,T)$ un groupoïde.

Proposition 1. Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout élément de E : zéro, zéro(m), bizéro(m), zéro(b), bizéro(b), zéro($\mathfrak{b}$), bizéro($\mathfrak{b}$).

bizéro(m) $\Longrightarrow$ zéro(m);

zéro(m) $\Longrightarrow$ bizéro(b); si z est un zéro(m), on a, si $a,b\in E$, $\gamma_a\delta_b z = z$; d'où $(\forall x\in E)$ $\gamma_x z = \gamma_x\gamma_a\delta_b z = z$, et, de même $\delta_x z = z$; comme $\{z\}\neq E$, z est un zéro(b); et, comme $\kappa_z = \gamma_z \in b(G)$ puisque $(\forall x\in E)$ $\gamma_z x = \delta_x z = z$, z est un bizéro(b).

bizéro(b) $\Longrightarrow$ bizéro($\hat{b}$); un zéro(b) est un zéro($\hat{b}$) (prop.E.3.2) et $\kappa_z\in b(G) \Longrightarrow \kappa_z\in \hat{b}(G)$.

bizéro($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ zéro($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ zéro(b) $\Longrightarrow$ zéro (propE.3.2)

zéro $\Longrightarrow$ bizéro(m); si z est un zéro, c'est un zéro($\hat{b}$) (prop.E.3.2), donc un zéro(m); et $\kappa_z = \gamma_z\delta_z\in m(G)$ car, pour tout $x\in E$, $\gamma_z\delta_z x = \gamma_z\gamma_x z = z$, en sorte que z est un bizéro(m).

Proposition 2. Pour tout élément de E, les conditions suivantes sont équivalentes: zéro(g), zéro($\hat{g}$) et zéro à gauche ; zéro(d), zéro($\hat{d}$) et zéro à droite.

Ceci résulte de la prop.E.3.2.

Proposition 3. Si G est associatif, les conditions suivantes sont équivalentes pour tout élément de E: zéro, bizéro(g), bizéro(d).

zéro $\Longrightarrow$ bizéro(g); si z est un zéro, z est un zéro(g) (prop.2) et $\kappa_z = \gamma_z\in g(G)$, donc z est un bizéro(g). Cette implication ne requiert pas l'associativité.

bizéro(g) $\Longrightarrow$ zéro; si z est un bizéro(g), z est unique zéro(g) (prop.1.1); or, dans un demi-groupe, l'ensemble des zéros à gauche est un idéal à droite; il en résulte que z est un zéro.

De même zéro $\Longleftrightarrow$ bizéro(d).

Le groupoïde ci-dessous, de support $E = \{a,z\}$, de table de multiplication

	a	z
a	z	z
z	a	z

admet z comme bizéro(g), car z est zéro à gauche et $\gamma_a = \kappa_z$; mais z ~~n'~~ n'est pas un zéro.

Aux côtés canoniques unitaires, on applique la

Proposition 4. Si $\mathfrak{T}$ est un tas, $\mathfrak{T}$ et $\overline{\mathfrak{T}}$ ont mêmes zéros et bizéros.

Ils ont mêmes zéros (prop.E.3.1); et, si $\mathfrak{T} = (E,\Sigma)$ avec E non réduit à un élément, I_E n'est pas constante, donc $\kappa_z\in\Sigma$ équiaut à $\kappa_z \in \bar{\Sigma}$, en sorte que $\mathcal{T}$ et $\bar{\mathcal{T}}$ ont mêmes bizéros.

Par contre $\mathcal{T}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ ont mêmes zéros (prop.E.3.1), mais pas mêmes bizéros; par exemple, si $E = \{a,b,c\}$ et $\Sigma = \{\sigma\}$ défini par $\sigma a = b$, $\sigma b = \sigma c = c$, $\hat{\Sigma} = \{\sigma, \kappa_c\}$, et c est bizéro de $\hat{\mathcal{T}}$, non de $\mathcal{T}$.

3.Adjonction de zéro et de bizéro.

Définition 1. Etant donnés un tas $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ et un ensemble d'un élément $\{z\}$ disjoint de E, on appelle tas résultant de l'adjonction à $\mathcal{T}$ du zéro z, et on note $\mathcal{T} \cup z$, le tas $(\tilde{E},\tilde{\Sigma})$, où $\tilde{E} = E \cup z$, et où $\tilde{\Sigma}$ est l'image de Σ par l'injection $\sim : \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{E})$ définie par $(\forall\sigma \in \mathcal{A}(E))(\ \tilde{\sigma}z = z$ et $(\forall x \in E)\ \tilde{\sigma}x = \sigma x\ )$.

Définition 2. Avec les notations de la déf.1, on appelle tas résultant de l'adjonction à $\mathcal{T}$ du bizéro z, et on note $\mathcal{T} + z$, le tas $(\tilde{E}, \tilde{\Sigma} \cup \{\kappa_z\})$.

Proposition 1. Si $\mathcal{T}$ est stable, ou unitaire, il en est de même de $\mathcal{T} \cup z$ et de $\mathcal{T} + z$.

En effet, il est clair que $\widetilde{\sigma\tau} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$, et, si Σ est stable, $\tilde{\Sigma}$ est stable; $\tilde{\Sigma} \cup \{\kappa_z\}$ est stable aussi car, si $\tilde{\tau} \in \tilde{\Sigma}$, $\kappa_z\tilde{\tau} = \kappa_z$ et $\tilde{\sigma}\kappa_z = \kappa_{\tilde{\sigma}z} = \kappa_z$. D'autre part, $\tilde{I}_E = I_{\tilde{E}}$; et, si $I_E \in \Sigma$, $I_{\tilde{E}} \in \tilde{\Sigma}$ et $I_{\tilde{E}} \in \tilde{\Sigma} \cup \{\kappa_z\}$.

On peut démontrer aussi que ces constructions s'étendent en foncteurs covariants de la catégorie des tas vers elle-même

Proposition 2. Si $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ est un tas, pour qu'il existe un tas $\mathcal{T}'$ tel que $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup z$, il faut et il suffit que z soit un zéro de $\mathcal{T}$ tel que

$$(\forall\sigma \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma x = z \Rightarrow x = z\ );$$

$\mathcal{T}'$ est alors unique; et, si $\mathcal{T}$ est stable ou unitaire, il en est de même de $\mathcal{T}'$.

La condition est évidemment nécessaire (cf. déf.1). Si elle est remplie, tout élément de Σ a une restriction à $E-\{z\}$. Or si $\mathcal{T}' = (E',\Sigma')$ est tel que $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup z$, on a nécessairement $E' = E-\{z\}$, et Σ' est l'ensemble des restrictions à E' des éléments de Σ; d'où l'unicité de $\mathcal{T}'$; et le tas ainsi défini est bien tel que $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup z$, les éléments de Σ correspondant bijectivement à leurs restrictions. Enfin, si Σ est stable, Σ' est stable; si $I_E \in \Sigma$, $I_{E'} \in \Sigma'$.

Proposition 3. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas, pour qu'il existe un tas $\mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + z$, il faut et il suffit que z soit un bizéro de $\mathcal{C}$ tel que $\Sigma \neq \{\kappa_z\}$ et que

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma x = z \Longrightarrow x = z \ \text{ ou } \ \sigma = \kappa_z\ );$$

$\mathcal{C}'$ est alors unique; et, si $\mathcal{C}$ est stable ou unitaire, il en est de même de $\mathcal{C}'$.

La condition est nécessaire (cf. déf.2). Si elle est remplie, tout élément de $\Sigma - \{\kappa_z\}$ a une restriction à $E - \{z\}$. Or si un tas $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$ est tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + z$, on a nécessairement $E' = E - \{z\}$, et Σ' est l'ensemble des restrictions à E' des éléments de $\Sigma - \{\kappa_z\}$; d'où l'unicité de $\mathcal{C}'$; et le tas ainsi choisi est bien tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + z$, les éléments de $\Sigma - \{\kappa_z\}$ correspondant bijectivement à leurs restrictions. Enfin si $I_E \in \Sigma$, $I_{E'} \in \Sigma'$; et, si Σ est stable, Σ' est stable; en effet $\Sigma - \{\kappa_z\}$ est stable, car, si $\sigma,\tau \in \Sigma - \{\kappa_z\}$ et si $x \in E'$, $\tau x \in E'$, $\sigma\tau x \in E'$ et $\sigma\tau \in \Sigma - \{\kappa_z\}$.

4. Idéaux de $\mathcal{C} \cup z$ et de $\mathcal{C} + z$.

Proposition 1. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas, les idéaux de $\mathcal{C} \cup z$ sont les idéaux de $\mathcal{C}$ et les parties de $E \cup \{z\}$ résultant de l'adjonction de z à un idéal de $\mathcal{C}$.

Si A est un idéal de $\mathcal{C}$, il est immédiat que A est un idéal de $\mathcal{C} \cup z$; et il en est de même de $A \cup \{z\}$, réunion de deux idéaux. Réciproquement E est un idéal de $\mathcal{C} \cup z$; donc, si B est un idéal de $\mathcal{C} \cup z$, $A = B \cap E$ est un idéal de $\mathcal{C} \cup z$; A est aussi un idéal de $\mathcal{C}$, car $A \subseteq E$ et $\Sigma A = \tilde{\Sigma} A \leq A$; et on a, soit $B = A$, soit $B = A \cup \{z\}$.

Proposition 2. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas, les idéaux de $\mathcal{C} + z$ sont les parties de $E \cup \{z\}$ résultant de l'adjonction de z à un idéal de $\mathcal{C}$, et la partie vide.

Si A est un idéal de $\mathcal{C}$, on a $\tilde{\Sigma} A \leq A$, donc $(\tilde{\Sigma} \cup \{\kappa_z\})(A \cup \{z\}) \subseteq A \cup \{z\}$ et $A \cup \{z\}$ est un idéal de $\mathcal{C} + z$. Réciproquement, si B est un idéal non vide de $\mathcal{C} + z$, $z \in B$ car $\kappa_z B \subseteq B$; prouvons que $A = B \cap E$ est un idéal de $\mathcal{C}$; si $x \in A$ et $\sigma \in \Sigma$, $\tilde{\sigma} x \in E$ puisque $x \in E$, $\tilde{\sigma} x \in B$ puisque B est un idéal de $\mathcal{C} + z$, donc $\sigma x = \tilde{\sigma} x \in A$; et on a $B = A \cup \{z\}$.

5. Adjonction d'un zéro à un groupoïde. Intégrité.

Si $G = (E,\tau)$ est un groupoïde, et $\{z\}$ un ensemble d'un élément disjoint de E, on notera $G+z$ le groupoïde $(\tilde{E},\tilde{\tau})$, où $\tilde{E} = E\cup\{z\}$ et où $\tilde{\tau}$ est définie par

$$(\forall x,y\in\tilde{E})\ \begin{cases} x\tilde{\tau}y = x\tau y & \text{si } x,y\in E \\ x\tilde{\tau}y = z & \text{si } x = z \text{ ou } y = z\ . \end{cases}$$

Si G est unitaire, ou associatif, il en est de même de $G+z$.

Un groupoïde G ayant un zéro z est dit <u>intègre</u> si et seulement si il existe un groupoïde G' tel que $G = G'+z$; il en est ainsi si et seulement si $x\tau y = z$ entraîne $x = z$ ou $y = z$ pour tous $x,y\in E$ (avec $G = (E,\tau)$). Par abus de langage, un groupoïde vérifiant cette condition sera dit intègre même si z n'est qu'un zéro à gauche ou à droite.

Le lien entre ces propriétés ou définitions classiques de théorie des groupoïdes et celles du § 3 est assuré par la

<u>Proposition 1. Pour tout groupoïde G et tout côté canonique c, $(G+z)_c = G_c + z$.</u>

Soit $G = (E,\tau)$; reprenons les notations de la déf. 3.1; alors, si $a\in E$, la translation à gauche (resp. à droite) associée à a dans $G+z$ est $\tilde{\gamma}_a$ (resp. $\tilde{\delta}_a$) (γ_a, δ_a étant prises dans G); par suite $\widetilde{g(G+z)} = \widetilde{g(G)}\cup\{\kappa_z\}$ et $d(G+z) = \widetilde{d(G)}\cup\{\kappa_z\}$; la proposition est donc démontrée pour $c = g$ ou d, et par suite pour $c = b$. D'autre part tout produit de translations à gauche ou à droite de $G+z$ où figure κ_z est égal à κ_z (car, si $\sigma\in\mathfrak{A}(\tilde{E})$, $\kappa_z\sigma = \kappa_z$ et $\sigma\kappa_z = \kappa_{\sigma z} = \kappa_z$ si $\sigma z = z$); comme on a identiquement $\widetilde{\sigma\tau} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$,il résulte de la prop. D.5.1 que la proposition est vraie pour $c = \hat{g},\hat{d},\hat{b},m$. Enfin $\widetilde{I_E} = I_{\tilde{E}}$,et l'addition de $I_{\tilde{E}}$ commute avec celle de κ_z, en sorte que la proposition est vraie pour $c = \bar{g},\bar{d},\bar{b},\bar{\hat{g}},\bar{\hat{d}},\bar{\hat{b}},\bar{m}$.

II.EQUIVALENCES PRINCIPALES.

A.Résiduation.

1.Résiduation dans un système.

Définition 1. On appelle <u>système</u> le triple (E,F,Σ) de trois ensembles non vides tels que $\Sigma \subseteq \mathcal{A}(E,F)$.

Par exemple

Définition 2. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas, on appelle <u>système naturel associé à</u> $\mathcal{C}$ le système $\mathcal{C}_n = (E,E,\Sigma)$.

Si (E,F,Σ) est un système, et si $x \in E, \sigma \in \Sigma$, on notera σx au lieu de $\sigma(x)$; et, si $C \in \mathfrak{P}(E), \rho \in \mathfrak{P}(\Sigma)$, le produit ρC est l'ensemble des σx pour $x \in C$ et $\sigma \in \rho$ (cf.déf.I.B.4.1).

Définition 3. Etant donné un système (E,F,Σ), on appelle <u>résiduation à gauche</u> l'application de $\mathfrak{P}(F)\times\mathfrak{P}(E)$ vers $\mathfrak{P}(\Sigma)$, notée $(A,B) \rightsquigarrow A \,\dot{.}\, B$ (ou $A \,\dot{.}_{\Sigma}\, B$ s'il y a risque de confusion), définie par

$$A \,\dot{.}\, B = \{ \sigma \in \Sigma \ ; \ \sigma B \subseteq A \} ,$$

et on appelle <u>résiduation à droite</u> l'application de $\mathfrak{P}(F)\times\mathfrak{P}(\Sigma)$ vers $\mathfrak{P}(E)$, notée $(A,\tau) \rightsquigarrow A \,.\dot{}\, \tau$, définie par

$$A \,.\dot{}\, \tau = \{ x \in E \ ; \ \tau x \subseteq A \} .$$

Il est clair que $A \,\dot{.}\, B$ est la plus grande partie ρ de Σ tellesque $\rho B \subseteq A$, et que $A \,.\dot{}\, \tau$ est la plus grande partie C de E telle que $\tau C \subseteq A$. En d'autres termes, le produit de deux parties dans un système, comme on l'a défini ci-dessus, est une application résiduée au sens de DUBREIL et CROISOT [14], les applications résiduelles étant données par la déf.3.

On notera que le résultat de la résiduation à droite dans (E,F,Σ) ne dépend pas de Σ ; on peut donc considérer la résiduation à droite dans (E,F,Σ) comme la restriction à $\mathfrak{P}(F)\times\mathfrak{P}(\Sigma)$ de la résiduation à droite du système $(E,F,\mathcal{A}(E,F))$.

Les règles de calcul suivantes résultent immédiatementment des définitions, ou des propriétés générales de la résiduation

[ ];si (E,F,Σ) est un système,et si $A\in\mathfrak{P}(F), B\in\mathfrak{P}(E), (A_\iota)_{\iota\in I} \subseteq \mathfrak{P}(F)$, $(B_\iota)_{\iota\in I} \subseteq \mathfrak{P}(E), \mathcal{T}\in\mathfrak{P}(\Sigma), (\mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I} \subseteq \mathfrak{P}(\Sigma)$:

$$\Big(\bigcap_{\iota\in I} A_\iota\Big) \,{}^{\cdot}\!.\, B = \bigcap_{\iota\in I}(A_\iota \,{}^{\cdot}\!.\, B) \qquad \Big(\bigcap_{\iota\in I} A_\iota\Big) \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T} = \bigcap_{\iota\in I}(A_\iota \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T})$$

$$A \,{}^{\cdot}\!.\Big(\bigcup_{\iota\in I} B_\iota\Big) = \bigcap_{\iota\in I}(A \,{}^{\cdot}\!.\, B_\iota) \qquad A \,.{}^{\cdot}\Big(\bigcup_{\iota\in I}\mathcal{T}_\iota\Big) = \bigcap_{\iota\in I}(A \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T}_\iota)$$

$$F \,{}^{\cdot}\!.\, B = \Sigma \,,\; F \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T} = E \,,\; A \,{}^{\cdot}\!.\, \emptyset = \Sigma \,,\; A \,.{}^{\cdot}\, \emptyset = E$$

$$\emptyset \,{}^{\cdot}\!.\, B = \emptyset \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T} = \emptyset \quad \text{si } B,\mathcal{T} \neq \emptyset \,.$$

2.Résiduation dans un tas.

Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas,on définit les résiduations à droite et à gauche dans $\mathcal{C}$ comme celles du système $\mathcal{C}_n = (E,E,\Sigma)$,en sorte que,si $A,B\in\mathfrak{P}(E)$ et $\mathcal{T}\in\mathfrak{P}(\Sigma)$,

$$A \,{}^{\cdot}\!.\, B = \{\sigma\in\Sigma \;;\; \sigma B\subseteq A\} \;,$$
$$A \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T} = \{x\in E \;;\; \mathcal{T}x \subseteq A\} \;.$$

Le produit étant un morphisme fonctoriel (prop.I.B. 4.4),on peut espérer qu'il en est de même des résiduations.Il n'en est rien;toutefois

Proposition 1. Soient f un homomorphisme de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ sur $\mathcal{C}'$,φ l'application associée,$A,B\in\mathfrak{P}(E)$ et $\mathcal{T}\in\mathfrak{P}(\Sigma)$;on a

$$\varphi(A \,{}^{\cdot}\!.\, B) \subseteq f(A) \,{}^{\cdot}\!.\, f(B) \;,\quad f(A \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T}) \subseteq f(A) \,.{}^{\cdot}\, \varphi(\mathcal{T}) \;,$$

et il y a égalité dès que A est saturé pour l'équivalence nucléaire de f.

En effet $\rho B \subseteq A \Rightarrow \varphi(\rho)f(B) = f(\rho B) \subseteq f(A)$;et,si A est saturé, $x\in A \Leftrightarrow f(x)\in f(A)$,et $\rho B\subseteq A \Leftrightarrow \varphi(\rho)f(B) \subseteq f(A)$ .On raisonne de même pour la résiduation à droite.

D'autre part,dans un tas,on peut composer les résiduations;c'est ainsi que

Proposition 2. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas et si $A,B\in\mathfrak{P}(E)$, $\mathcal{T},\mathcal{T}'\in\mathfrak{P}(\Sigma)$,on a

$$(A \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T}) \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T}' = A \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T}\mathcal{T}'$$
$$(A \,{}^{\cdot}\!.\, B) \,{}^{\cdot}\!.\, \mathcal{T} = A \,{}^{\cdot}\!.\, \mathcal{T}B$$
$$(A \,{}^{\cdot}\!.\, B) \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T} = (A \,.{}^{\cdot}\, \mathcal{T}) \,{}^{\cdot}\!.\, B \;,$$

la résiduation précédant $\mathcal{T}\mathcal{T}'$ dans la première égalité est prise dans le tas universel sur E,sauf si $\mathcal{C}$ est stable;les résiduations précédant

τ dans les deux autres égalités (membres de gauche) sont prises dans $\mathfrak{U}(E)$ au sens de la théorie des demi-groupes (ou dans Σ si $\mathcal{T}$ est stable)

En effet

$x \in (A \,.\!\cdot\, \tau) \,.\!\cdot\, \tau' \iff \tau' x \subseteq A \,.\!\cdot\, \tau \iff \tau\tau' x \subseteq A \iff x \in A \,.\!\cdot\, \tau\tau'$;

$\tau \in (A \,\dot{.}\, B) \dot{.}\, \tau \iff \sigma\tau \subseteq A \,\dot{.}\, B \iff \sigma\tau B \subseteq A \iff \sigma \in A \,\dot{.}\, \tau B$;

$\sigma \in (A \,\dot{.}\, B) \,.\!\cdot\, \tau \iff \tau\sigma \subseteq A \,\dot{.}\, B \iff \tau\sigma B \subseteq A \iff \sigma \in (A \,.\!\cdot\, \tau) \dot{.}\, B$.

3. Résiduation dans un groupoïde.

Soient $G = (E,\tau)$ un groupoïde, γ et δ les applications canoniques (déf.I.D.2.1).

Proposition 1. On a, pour tous $A,B \in \mathfrak{P}(E)$:

$A \,\dot{.}\, B = A \,.\!\cdot\, \delta(B) = \gamma^{-1}(A \,\dot{.}_{g(G)}\, B)$

$A \,.\!\cdot\, B = A \,.\!\cdot\, \gamma(B) = \delta^{-1}(A \,\dot{.}_{d(G)}\, B)$.

La seconde ligne est duale de la première. Pour celle-ci, soit $x \in E$:

$x \in A \,.\!\cdot\, \delta(B) \iff \delta(B)x \subseteq A \iff x\tau B \subseteq A \iff x \in A \,\dot{.}\, B$,

$\gamma_x \in A \,\dot{.}_{g(G)}\, B \iff \gamma_x B \subseteq A \iff x\tau B \subseteq A \iff x \in A \,\dot{.}\, B$.

La définition des résiduations à droite ou à gauche à partir des côtés g et d permet d'espérer des définitions analogues à partir d'autres côtés. Mais pour cela il faut que les multiplicateurs soient simples; et, si l'on excepte g et d, le côté m sur la catégorie des demi-groupes est à peu près seul à remplir cette condition. On notera toutefois que R. DESQ a obtenu des résultats en utilisant les côtés $\bar{g},\bar{d},\bar{b}$ sur la catégorie des demi-groupes (et en introduisant un élément unité formel)[10].

Définition 1. Si $D = (E,.)$ est un demi-groupe, on appelle μ l'application de $E \times E$ vers $m(D)$ définie par

$$(\forall x,y \in E)\ \mu(x,y) = \gamma_x \delta_y .$$

μ est surjective (prop.I.D.6.2.)

Proposition 2. Si $D = (E,.)$ est un demi-groupe, on a, pour tous $A,B \in \mathfrak{P}(E)$:

$$A \,..\, B = \mu^{-1}(A \,\dot{.}_{m(D)}\, B) .$$

L'application .. est la résiduation de CROISOT[8];

nous l'appelons ici résiduation médiane. Si $x,y \in E$:

$$\mu(x,y) \in A \;\dot{}\,\cdot_{m(D)}\; B \iff \mu(x,y)B \subseteq A \iff xBy \subseteq A \iff (x,y) \in A \,..\, B \;.$$

La proposition 2 correspond aux secondes égalités de la proposition 1;les premières définissent une résiduation médiane "extérieure" dont nous n'aurons pas à faire usage dans la suite.

B. Equivalences principales.

1. Equivalences principales dans un système.

Définition 1. Etant donnés un système (E,F,Σ) et $H \in \mathfrak{P}(F)$, on appelle équivalence principale associée à H dans (E,F,Σ), et on note $\mathcal{Q}_H$ (ou $\mathcal{Q}^\Sigma_H$ s'il y a risque de confusion) la relation d'équivalence sur E définie par

$$(\forall x,y \in E)(\; x \,\mathcal{Q}_H\, y \iff H \,\dot{}\,.\, x = H \,\dot{}\,.\, y\;) \;;$$

par abus de langage, une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E est dite principale quand il existe un $H \in \mathfrak{P}(F)$ tel que $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_H$; $\mathcal{R}$ est dite aussi principale pour H , au lieu de principale associée à H .

Le lien entre cette définition et la définition originale de P. DUBREIL [11] sera exhibé ci-dessous (prop. 4.1).

Examinons d'abord comment $\mathcal{Q}^\Sigma_H$ dépend de Σ .

Proposition 1. Si $(\Sigma_\iota)_{\iota \in I} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{A}(E,F))$ et si $H \in \mathfrak{P}(F)$,

$$\mathcal{Q}_H^{\bigvee_{\iota \in I}\Sigma_\iota} = \bigcap_{\iota \in I} (\mathcal{Q}_H^{\Sigma_\iota}) \;.$$

En effet soient $x,y \in E$.

$$\begin{aligned} x \,\mathcal{Q}_H^{\bigvee\Sigma_\iota}\, y &\iff (\forall \sigma \in \textstyle\bigvee_{\iota \in I} \Sigma_\iota)(\; \sigma x \in H \iff \sigma y \in H \;) \\ &\iff (\forall \iota \in I)(\forall \sigma \in \Sigma_\iota)(\; \sigma x \in H \iff \sigma y \in H \;) \\ &\iff (\forall \iota \in I) \;\; x \,\mathcal{Q}_H^{\Sigma_\iota}\, y \iff x \textstyle\bigcap_{\iota \in I} \mathcal{Q}_H^{\Sigma_\iota} \; y \;. \end{aligned}$$

Par contre, la manière dont $\mathcal{Q}^\Sigma_H$ dépend de H est assez mal connue.

2. Equivalences principales dans un tas.

Si (E,Σ) est un tas et si $H\in\mathfrak{P}(E)$, l'équivalence principale associée à H dans (E,Σ) est par définition l'équivalence principale associée à H dans le système naturel (E,E,Σ), c'est-à-dire que l'on a encore

$$(\forall x,y\in E)(\ x\ \mathcal{P}_H\ y \iff H\ ^{\bullet}.\ x\ =\ H\ ^{\bullet}.\ y\ )$$

ou bien

$$(\forall x,y\in E)(\ x\ \mathcal{P}_H\ y \iff (\forall\sigma\in\Sigma)(\ \sigma x\in H \iff \sigma y\in H\ )\ )\ .$$

Dans un tas, une équivalence principale n'est pas nécessairement compatible, comme le montre l'exemple suivant. Si $E=\{a,b,c\}$ et si $\Sigma=\{\sigma\}$, où σ est définie par $\sigma a=b$, $\sigma b=a$, $\sigma c=c$, l'équivalence principale associée à $H=\{a,c\}$ a pour classes $\{a\}$ et $\{b,c\}$, car $H\ ^{\bullet}.\ a\ =\ \emptyset$, $H\ ^{\bullet}.\ b\ =\ H\ ^{\bullet}.\ c\ =\ \{\sigma\}$; elle n'est pas compatible car $b\ \mathcal{P}_H\ c$ et $\sigma b\in\{a\}$, $\sigma c\in\{b,c\}$.

Toutefois

<u>Proposition 1. Dans un tas stable, toute équivalence principale est compatible.</u>

Ceci servira en section C, et résulte de la

<u>Proposition 2. Si $\Sigma,\mathcal{T}$ sont deux lois de tas sur E telles que $\Sigma\mathcal{T}\subseteq\Sigma$, $\mathcal{P}_H^{\Sigma}$ est $\mathcal{T}$-compatible pour tout $H\in\mathfrak{P}(E)$.</u>

Soient $x,y\in E$ et $\tau\in\mathcal{T}$. Si $x\ \mathcal{P}_H^{\Sigma}\ y$, pour tout $\sigma\in\Sigma$, $\sigma x\in H\iff\sigma y\in H$; puisque $\sigma\tau\in\Sigma$, pour tout $\sigma\in\Sigma$, $\sigma\tau x\in H\iff\sigma\tau y\in H$, et $\tau x\ \mathcal{P}_H^{\Sigma}\ \tau y$; par suite $\mathcal{P}_H^{\Sigma}$ est $\mathcal{T}$-compatible (prop.I.C.2.2)/

3. Equivalences principales dans un groupoïde.

Si $G=(E,\tau)$ est un groupoïde et si $H\in\mathfrak{P}(E)$, on note $\mathcal{P}_H^c$ pour $\mathcal{P}_H^{c(G)}$, c étant un côté quelconque. Si c est canonique, la prop.I.D.5.1 fournit une définition élémentaire de $\mathcal{P}_H^c$; c'est ainsi que

$$x\ \mathcal{P}_H^g\ y \iff (\forall a\in E)(\ a\tau x\in H \iff a\tau y\in H\ )$$

$$x\ \mathcal{P}_H^{\hat{g}}\ y \iff (\forall n>0)(\forall a_1,\dots,a_n\in E)(\ \mathrm{T}_i(a_i,x)\in H \iff \mathrm{T}_i(a_i,y)\in H\ )$$

$$x\ \mathcal{P}_H^m\ y \iff (\forall n>0,p>0)(\forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p\in E)(\forall\omega\in\Omega)$$
$$(\ \mathrm{T}_\omega(a_i,x,b_j)\in H \iff \mathrm{T}_\omega(a_i,y,b_j)\in H\ )$$

$x\,\mathcal{L}_H^{\hat{b}}\,y \iff (\forall n,p,\ n\geqslant 0,\ p\geqslant 0,\ n+p>0)(\forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p\in E)(\forall\omega\in\Omega)$
$(\ T_\omega(a_i,x,b_j)\in H \iff T_\omega(a_i,y,b_j)\in H\ )$

pour tous $x,y\in E$.

Proposition 1. $\mathcal{L}_H^c$ est compatible(c) pour $c = \hat{g},\hat{d},\hat{b}$, et compatible(b) pour $c = m$.

Ceci résulte des prop. 2.1 , 2.2 (et I.C.1.1).

$\mathcal{L}_H^g$ n'est pas en général compatible à gauche:un contre exemple est fourni par le tas du § 2,qui peut être muni d'une loi de groupoïde g-admissible (prop.I.D.7.1).

Proposition 2. $\mathcal{L}_H^{\hat{b}} = \mathcal{L}_H^{\hat{g}}\cap\mathcal{L}_H^{\hat{d}}\cap\mathcal{L}_H^m$.

Ceci résulte des prop. 1.1 et I.D.5.2.

4.Equivalences principales dans un demi-groupe.

Proposition 1. Si $D = (E,.)$ est un demi-groupe,on a,pour tout $H\in\mathfrak{P}(E)$: $\mathcal{L}_H^g = \mathcal{L}_H^{\hat{g}} = {}_H\mathcal{R}$, $\mathcal{L}_H^d = \mathcal{L}_H^{\hat{d}} = \mathcal{R}_H$, $\mathcal{L}_H^m = \mathcal{R}'_H$.

${}_H\mathcal{R},\mathcal{R}_H,\mathcal{R}'_H$ sont les équivalences de P. DUBREIL [11] et R. CROISOT [8] .Comme,pour tout demi-groupe D, $D_g = D_{\hat{g}}$ et $D_d = D_{\hat{d}}$,les égalités ci-dessus résultent des prop. A.3.1 et A.3.2 .

$\mathcal{L}_H^{\hat{b}}$ est alors déterminée par la prop.3.2.

D'autre part les équivalences $\mathcal{L}_H^{\bar{g}},\mathcal{L}_H^{\bar{d}},\mathcal{L}_H^{\bar{b}}$ sont les équivalences considérées par R. DESQ [10] sous les dénominations respectives ${}_H\rho$, ρ_H, ρ'_H .Enfin,considérant le côté calaisien $c^{\alpha,\beta}$,l'éqiovalence $\mathcal{L}_H^{c^{\alpha\beta}}$ coïncide avec l'équivalence $\rho_H^{\alpha,\beta}$ de Mlle. J. CALAIS [4];cette équivalence est compatible à gauche pour $\beta = 0$,à droite pour $\alpha = 0$, à gauche et à droite pour $\alpha\beta \neq 0$,d'après la prop.2.2 et les propriétés des côtés calaisiens.

C. Application aux équivalences compatibles d'un tas stable.

1. Equivalences compatibles pour lesquelles H soit saturé.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas, et $H \in \mathfrak{P}(E)$.

Proposition 1. Si $\mathcal{C}$ est stable et unitaire, la plus grande équivalence compatible pour laquelle H soit saturé est $\mathcal{L}_H$.

$\mathcal{L}_H$ est compatible (prop.B.2.1), et H est saturé pour $\mathcal{L}_H$ car $I_E \in \Sigma$, donc, pour tous $x,y \in E$:

$$x \,\mathcal{L}_H\, y \quad \text{et} \quad I_E x = x \in H \Longrightarrow y = I_E y \in H \quad .$$

Réciproquement, si H est saturé pour une équivalence compatible $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \leq \mathcal{L}_H$, car, pour tous $x,y \in E$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longrightarrow (\forall \sigma \in \Sigma)\ \sigma x \,\mathcal{R}\, \sigma y \Longrightarrow (\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma x \in H \Longleftrightarrow \sigma y \in H\ ) \ .$$

Ceci est d'ailleurs vrai dans un tas quelconque.

Si $\mathcal{C}$ est stable, mais non unitaire, H n'est pas nécessairement saturé pour $\mathcal{L}_H$ comme le prouve l'exemple suivant: si $E = \{a,b\}$, $\Sigma = \langle \kappa_a \rangle$, $H = \{b\}$, Σ est stable car $\kappa_a \kappa_a = \kappa_a$, et $\mathcal{L}_H$ est l'équivalence universelle car $H \,\dot{.}\, a = H \,\dot{.}\, b = \emptyset$, donc H n'est pas saturé pour $\mathcal{L}_H$.

L'extension de prop.1 aux tas stables se fait ainsi:

Définition 1. On pose $\mathcal{K}_H = \mathcal{L}_H^{\{I_E\}}$.

Proposition 2. $\mathcal{K}_H$ est la plus grande équivalence pour laquelle H soit saturé.

Toute équivalence d'un tas permis est compatible (prop.I.C.2.2); ceci résulte alors de la prop.1.

Proposition 3. $\mathcal{L}_H^{\overline{\Sigma}} = \mathcal{L}_H^{\Sigma} \cap \mathcal{K}_H$.

Ceci résulte de la prop.B.1.1.

Proposition 4. Si $\mathcal{C}$ est stable, la plus grande équivalence compatible pour laquelle H soit saturé est $\mathcal{L}_H \cap \mathcal{K}_H$.

En effet $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ ont mêmes équivalences compatibles.

2. Classes pour une équivalence compatible.

Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas.

Définition 1. Si $H,K \in \mathfrak{P}(E)$, on pose
$$H \,\dot{\cdot}.\, K = \bigcup_{k\in K}(H \,\dot{}.\, k) \ .$$

Proposition 1. Si $H,K \in \mathfrak{P}(E)$, K est indivisible pour $\mathcal{D}_H$ si et seulement si $H \,\dot{}.\, K = H \,\dot{\cdot}.\, K$.

En effet $H \,\dot{}.\, K = \bigcap_{k\in K}(H \,\dot{}.\, k)$, et l'égalité ci-dessus équivaut à $H \,\dot{}.\, k = H \,\dot{}.\, k'$ pour tous $k,k' \in K$.

Proposition 2. Si $\mathcal{C}$ est stable, une partie non vide H de E est classe pour une équivalence compatible si et seulement si
$$H \,\dot{}.\, H = H \,\dot{\cdot}.\, H \ .$$

Supposons d'abord $\mathcal{C}$ unitaire. Il résulte alors de la prop.1.1 que, si H est classe pour une équivalence compatible $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}_H$, et H est indivisible pour $\mathcal{D}_H$; que, réciproquement, si H est indivisible pour $\mathcal{D}_H$, H est classe pour $\mathcal{D}_H$, qui est compatible. La proposition résulte alors de la prop.1.

Supposons maintenant $\mathcal{C}$ non unitaire. Comme $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ ont mêmes équivalences compatibles (prop.I.C.1.1), H est classe pour une équivalence compatible de $\mathcal{C}$ si et seulement si $H \,\dot{}._{\overline{\Sigma}}\, H = H \,\dot{\cdot}._{\overline{\Sigma}}\, H$; comme $I_E \in (H \,\dot{}._{\overline{\Sigma}}\, H) \cap (H \,\dot{\cdot}._{\overline{\Sigma}}\, H)$, cette condition équivaut à la condition de l'énoncé, $H \,\dot{}._{\Sigma}\, H = H \,\dot{\cdot}._{\Sigma}\, H$.

Corollaire 1. Si $\mathcal{C}$ est stable, une partie non vide H de E est classe pour une équivalence compatible si et seulement si elle est indivisible pour $\mathcal{D}_H$.

Ceci résulte de la prop.1.

Corollaire 2. Si $\mathcal{C}$ est stable, une partie non vide H de E est classe pour une équivalence compatible si et seulement si
$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma H \between H \Longrightarrow \sigma H \subseteq H\ ) \ .$$

Remarquons d'abord que, pour toute partie non vide H de E, $H \,\dot{}.\, H \subseteq H \,\dot{\cdot}.\, H$; la condition de la prop.2 équivaut donc à la condition $H \,\dot{\cdot}.\, H \subseteq H \,\dot{}.\, H$. Or pour tout $\sigma \in \Sigma$:
$$\sigma \in H \,\dot{\cdot}.\, H \Longleftrightarrow (\exists h \in H)\ \sigma h \in H \Longleftrightarrow \sigma H \between H \ ;$$
le corollaire en résulte aussitôt.

3. Application aux groupoïdes.

La traduction des résultats précédents dans les tas canoniquement associés à un groupoïde se fait immédiatement à l'aide de la prop.I.D.5.1 (ou I.D.6.1 dans le cas d'un demi-groupe). On se bornera à donner la

Proposition 1. Si $D = (E,.)$ est un demi-groupe, une partie H non vide de E est classe pour une équivalence compatible si et seulement si, pour tous $a,b \in E$;

$$aH \between H \Longrightarrow aH \subseteq H \;,\; Hb \between H \Longrightarrow Hb \subseteq H \;,\; aHb \between H \Longrightarrow aHb \subseteq H \;.$$

Ceci résulte du cor.2.2 . Ces conditions sont dues à Mlle M. TEISSIER [23]. La prop.I.D.5.1 en donne immédiatement l'extension aux groupoïdes.

D. Propriétés élémentaires des équivalences principales.

1. Résidus et netteté.

Soient (E,F,Σ) un système et $H \in \mathfrak{P}(F)$.

Définition 1. H est dit net sur A si et seulement si $A \in \mathfrak{P}(E)$ et si

$$(\forall x \in A)(\exists \sigma \in \Sigma)\; \sigma x \in H \;.$$

Proposition 1. L'ensemble des parties A de E telles que H soit net sur A a un élément maximum $E_H^{*} = \{x \in E \;;\; H \,\dot{.}\, x \neq \emptyset\}$.

C'est immédiat.

Définition 2. On appelle résidu intérieur (r. i.) de H, et on note W_H (ou W_H^{Σ} s'il y a risque de confusion), la partie de E

$$W_H = E - E_H^{*} = \{x \in E \;;\; H \,\dot{.}\, x = \emptyset\} = (F - H) \,\dot{.}\, \Sigma \;.$$

Proposition 2. W_H, s'il n'est pas vide, est classe de $\mathcal{P}_H$.

Les parties de F se classent donc en deux espèces, selon que $\mathcal{P}_H$ possède ou ne possède pas cette classe particulière W_H.

Définition 3. H est dit net (au lieu de net sur E) si et seulement si $W_H = \emptyset$, et flou dans le cas contraire.

De même

Définition 4. H est dit franc sur $\mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{T}\in\mathfrak{P}(\Sigma)$ et si

$$(\forall\sigma\in\mathcal{T})(\exists x\in E)\quad \sigma x\in H\ .$$

Proposition 3. L'ensembles des parties $\mathcal{T}$ de Σ telles que H soit franc sur $\mathcal{T}$ a un élément maximum $\Sigma_H^* = \{\sigma\in\Sigma\ ;\ H\ .^{\cdot}\ \sigma \neq \emptyset\}$.

Définition 5. On appelle résidu extérieur (r.e.) de H ,et on note V_H (ou V_H^Σ s'il y a risque de confusion),la partie de Σ

$$V_H = \Sigma - \Sigma_H^* = \{\sigma\in\Sigma\ ;\ H\ .^{\cdot}\ \sigma = \emptyset\} = (F - H)^{\cdot}.\ E\ .$$

Définition 6. H est dit franc (au lieu de franc sur Σ) si et seulement si $V_H = \emptyset$,faux dans le cas contraire.

On notera qu'un sous-ensemble net ou franc est toujours non vide (en effet $W_\emptyset = E$, $V_\emptyset = \Sigma$).

2.Force;classes de $\mathcal{R}_H$.

Soient (E,F,Σ) un système et $H\in\mathfrak{P}(F)$.

Définition 1. H est dit fort si et seulement si

$$(\forall x,y\in E)(\forall\sigma,\tau\in\Sigma)(\ \sigma x\in H,\sigma y\in H,\tau x\in H \Longrightarrow \tau y\in H\ ).$$

Proposition 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- H est fort;

b- $(\forall\sigma,\tau\in\Sigma)(\ H\ .^{\cdot}\ \sigma\ \between\ H\ .^{\cdot}\ \tau \Longrightarrow H\ .^{\cdot}\ \sigma = H\ .^{\cdot}\ \tau\ )$;

c- $(\forall x,y\in E)(\ H\ ^{\cdot}.\ x\ \between\ H\ ^{\cdot}.\ y \Longrightarrow H\ ^{\cdot}.\ x = H\ ^{\cdot}.\ y\ )$;

d- $(\forall x,y\in E)(\ H\ ^{\cdot}.\ x\ \between\ H\ ^{\cdot}.\ y \Longrightarrow x\ \mathcal{R}_H\ y\ )$;

e- $(\forall\sigma\in\Sigma)$ $H\ .^{\cdot}\ \sigma$ est indivisible pour $\mathcal{R}_H$.

C'est immédiat.Les conditions b et c expriment la semi-uniformité des applications multiformes $x \leadsto H\ ^{\cdot}.\ x$ et $\sigma \leadsto H\ .^{\cdot}\ \sigma$.

Proposition 2. Si H est fort,les classes de $\mathcal{R}_H$ sont les parties non vides de la forme W_H ou $H\ .^{\cdot}\ \sigma$ $(\sigma\in\Sigma)$,et réciproquement.

D'après la définition de W_H,ces parties forment un recouvrement de E ; W_H est toujours soit vide soit classe de $\mathcal{R}_H$ (prop. 1.2);et $H\ .^{\cdot}\ \sigma$ est toujours saturé pour $\mathcal{R}_H$ quelque soit $\sigma\in\Sigma$,car si $x \mathcal{R}_H y$, $\sigma x \in H$ entraîne $\sigma y \in H$ .La proposition résulte alors de l'équivalence des conditions a et e dans la prop.1.

3.Systèmes associés à un tas.

Il y a déjà le système naturel (déf.A.1.2).

<u>Définition 1. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas,on appelle système médian associé à $\mathcal{C}$,et on note $\mathcal{C}_m$,le système $(\Sigma,E,m(\mathcal{C}))$,où $m(\mathcal{C})$ est l'ensemble des applications $\tau \rightsquigarrow \sigma\tau x$ de Σ vers E quand $(\sigma,x) \in \Sigma \times E$.</u>

L'analogie de cette construction avec celle qui définit D_m à partir d'un demi-groupe D n'aura pas échappé au lecteur.

Une définition $\mathcal{D}$ de théorie des systèmes donne aussitôt deux définitions $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_m$ de théorie des tas.<u>Par convention,la définition $\mathcal{D}_n$ est baptisée du même nom que la définition $\mathcal{D}$</u> ;on a déjà fait ainsi pour les résiduations et l'équivalence principale.La définition $\mathcal{D}_m$ reçoit au contraire un nom de baptême indépendant.Exemple:

<u>Définition 2. On note π_H l'équivalence principale associée à H dans $\mathcal{C}_m$.</u>

<u>Proposition 1. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas et si $H \in \mathfrak{P}(E)$,π_H est la relation associée à $\mathcal{R}_H$.</u>

La relation ρ associée à $\mathcal{R}_H$ est (déf.I.C.4.1):

$$(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\ \sigma \rho \tau \iff (\forall x \in E)\ \sigma x \mathcal{R}_H \tau x\ )\ .$$

Par suite,pour tous $\sigma,\tau \in \Sigma$:

$$\sigma \rho \tau \iff (\forall x \in E)(\forall \upsilon \in \Sigma)(\ \upsilon\sigma x \in H \iff \upsilon\tau x \in H\ ) \iff \sigma \pi_H \tau \quad .$$

4.Ecriture des conditions dans un tas;résidus.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$.

<u>Définition 1. On appelle W'_H le r.i. de H dans $\mathcal{C}_m$.</u>

On ne fera pas usage du r.e. dans $\mathcal{C}_m$.

<u>Proposition 1. On a</u>

$$\underline{W'_H = \{\sigma \in \Sigma;\ \Sigma\sigma E \subseteq E - H\} = W_H \;{}^{\bullet}\!.\; E = V_H \;.{}^{\bullet}\; \Sigma\ .}$$

La dernière résiduation est prise dans $\mathfrak{A}(E)$ au sens de la théorie des demi-groupes.La première égalité résulte immédiatement des définitions;les autres,des formules $W_H = (E-H) .^{\cdot} \Sigma$, $V_H = (E-H)^{\cdot} . E$.

Définition 2. H est dit clair si et seulement si il est franc dans $\mathcal{C}_m$,donc si et seulement si

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\forall x \in E)(\exists \tau \in \Sigma) \quad \sigma\tau x \in H ,$$

et précis si et seulement si il est net dans $\mathcal{C}_m$,donc si et seulement si

$$(\forall \tau \in \Sigma)(\exists \sigma \in \Sigma)(\exists x \in E) \quad \sigma\tau x \in H ,$$

ou encore si $W'_H = \emptyset$; on définit de même H précis sur $T \in \mathfrak{P}(\Sigma)$.

Proposition 2. Tous sous-ensemble net ou franc est précis.

En effet W'_H est vide dès que W_H ou V_H l'est (prop.1).

Proposition 3. Tout sous-ensemble clair est franc;si $\mathcal{C}$ est stable,tout sous-ensemble clair est net.

Proposition 4. H est clair si et seulement si $H .^{\cdot} \sigma$ est net pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Ceci se voit sur la condition donnée à la déf.2.

Proposition 5. Si $\mathcal{C}$ est stable et H franc,$H .^{\cdot} \sigma$ est franc pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Si $\sigma \in \Sigma$,pour tout $\tau \in \Sigma$,il existe $x \in E$ tel que $(\sigma\tau)x \in H$,ce qui exprime que $H .^{\cdot} \sigma$ est franc.

Définition 3. H est dit robuste si et seulement si il est fort dans $\mathcal{C}_m$,donc si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \rho,\sigma,\tau,\nu \in \Sigma)(\rho\sigma x \in H, \rho\tau x \in H, \nu\sigma y \in H \Longrightarrow \nu\tau y \in H)$$

ou encore (prop.2.1) si et seulement si

$$(\forall x \in E)(\forall \rho,\sigma,\tau \in \Sigma)(\rho\sigma x \in H, \rho\tau x \in H \Longrightarrow \sigma \pi_H \tau) .$$

5.Résidu intérieur et idéaux.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$.

Proposition 1. W_H contient tout idéal disjoint de H.

Si A est un tel idéal, $\Sigma A \subseteq A \subseteq E-H$,donc $A \subseteq W_H$.

Proposition 2. Si $\mathcal{C}$ est stable,W_H est un idéal.

Ceci résulte de la proposition suivante:

Proposition 3. Si $\mathcal{T}$ est une autre loi de tas sur E telle que $\Sigma\mathcal{T} \leq \Sigma$, W_H^Σ est un $\mathcal{T}$-idéal.

En effet

$$(\forall \tau \in \mathcal{T})(\forall x \in E)(\ \tau x \notin W_H^\Sigma \Rightarrow (\exists \sigma \in \Sigma)\ \sigma\tau x \in H \Longrightarrow x \notin W_H^\Sigma\ ),$$

car $\sigma\tau \in \Sigma$.

En ce cas, $H \cap W_H^\Sigma = \emptyset$ entraîne $W_H^\Sigma \subseteq W_H^\mathcal{T}$ (prop.1)?On notera que la condition $\Sigma\mathcal{T} \subseteq \Sigma$ figure aussi dans la prop.B.2.2.

Dans un tas stable, tout résidu intérieur est donc un idéal; on démontre qu'un idéal A est un résidu intérieur si et seulement si $A = \Sigma A \cdot\!\!\cdot\, \Sigma$;on a alors $A = W_{E-\Sigma A}$ (cf. DUBREIL [13]).

Revenons au cas d'un seul tas $\mathfrak{T} = (E,\Sigma)$.

Proposition 4. Si $\mathfrak{T}$ est unitaire, $H \cap W_H = \emptyset$.

En effet, si $h \in H$, $I_E h \in H$ et $h \notin W_H$.

Dans un tas stable et unitaire, W_H est le plus grand idéal disjoint de H (prop. 1,2,4).

Dans un tas quelconque, il est utile de pouvoir dire que W_H est un idéal.

Définition 1. H est dit sous-stabilisant si et seulement si $(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma\tau x \in H \Longrightarrow (\exists \upsilon \in \Sigma)\ \upsilon x \in H\ )$.

Proposition 5. Pour que W_H soit un idéal, il faut et il suffit que H soit sous-stabilisant.

En effet, pour que W_H soit un idéal, il faut et il suffit que, pour tous $\tau \in \Sigma$ et $x \in E$, $\tau x \notin W_H$ entraîne $x \notin W_H$.

Proposition 6. Si H est flou et sous-stabilisant, W_H est franc.

Soit $w \in W_H$; pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\sigma w \in W_H$, donc W_H est franc.

Proposition 7. Si H est clair et sous-stabilisant, H est net.

En effet soit $x \in E$; pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $\tau \in \Sigma$ tel que $\sigma\tau x \in H$; donc il existe $\upsilon \in \Sigma$ tel que $\upsilon x \in H$.

Enfin, on pourra vouloir que W_H soit un idéal propre.

Définition 2. H est dit trivial si et seulement si il est contenu dans $E - \Sigma E$.

Proposition 8. Les assertions suivantes sont équivalentes: a- H est trivial ; b- $W_H = E$; c- $V_H = \Sigma$.

En effet $x \in W_H$ équivaut à $H \subsetneq E - \Sigma x$ et $\sigma \in V_H$ équivaut à $H \subsetneq E - \sigma E$;or $E - \Sigma E = \bigcap_{x \in E}(E - \Sigma x) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma}(E - \sigma E)$.

Proposition 9. W_H est un ideal propre si et seulement si H est flou,non trivial et sous-stabilisant.

Ceci résulte des prop. 5,8.

On notera qu'une partie non triviale est toujours non vide (en effet $\emptyset$ est triviale).

6. Equivalences principales et simplifiables.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$.

Définition 1. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E est dite simplifiable sur A (ou Σ-simplifiable sur A s'il y a risque de confusion) si et seulement si $A \in \mathfrak{P}(E)$ et si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma x \,\mathcal{R}\, \sigma y\ ,\ \sigma x \in A\ ,\ \sigma y \in A \implies x \,\mathcal{R}\, y\ );$$

$\mathcal{R}$ est dite simplifiable si et seulement si elle est simplifiable sur E.

On se propose de mettre en lumière les liens existant entre cette notion et celle de sous-ensemble fort.

Proposition 1. Si H est classe pour une équivalence compatible et simplifiable sur H, H est fort.

Soient $x,y \in E, \sigma,\tau \in \Sigma$:

$$\sigma x \in H,\ \sigma y \in H \implies \sigma x \,\mathcal{R}\, \sigma y \implies x \,\mathcal{R}\, y \implies \tau x \,\mathcal{R}\, \tau y$$

et $\tau x \in H$ entraîne $\tau y \in H$.

Proposition 2. Si H est fort, $\mathcal{Q}_H$ est simplifiable sur H.

En effet, si $x,y \in E, \sigma \in \Sigma$, $\sigma x \in H$ et $\sigma y \in H$ entraînent $x \,\mathcal{Q}_H\, y$ (prop.2.1).

Définition 2. H est dit parafort si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau,\nu \in \Sigma)(\ \sigma\tau x \in H, \sigma\tau y \in H, \nu x \in H \implies \nu y \in H\ ).$$

Proposition 3. Si H est parafort, $\mathcal{Q}_H$ est simplifiable sur E_H^*; si $\mathcal{Q}_H$ est simplifiable sur E_H^* et si H est fort, H est parafort. Si $\mathcal{C}$ est stable et H fort, $\mathcal{Q}_H$ est simplifiable sur E_H^*.

Si H est parafort, et si $x,y \in E, \tau \in \Sigma$ sont tels que $\tau x \,\mathcal{Q}_H\, \tau y$, $\tau x \notin W_H$, $\tau y \notin W_H$, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma\tau x \in H$; et $\sigma\tau y \in H$. Par suite, pour tout $\nu \in \Sigma$, $\nu x \in H$ équivaut à $\nu y \in H$, et $x \,\mathcal{Q}_H\, y$.

Si $\mathcal{Q}_H$ est simplifiable sur E_H^*, si H est fort et si $x,y \in E, \sigma,\tau,\nu \in \Sigma$ sont tels que $\sigma\tau x \in H, \sigma\tau y \in H$, alors $\tau x \,\mathcal{Q}_H\, \tau y$ (prop. 2.1) et $\tau x \notin W_H$, $\tau y \notin W_H$; donc $x \,\mathcal{Q}_H\, y$, et $\nu x \in H$ entraîne $\nu y \in H$.

Si $\mathcal{C}$ est stable et H fort, H est parafort.

Définition 3. H est dit stabilisant si et seulement si
$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\ \sigma\tau x \in H, \sigma\tau y \in H \Longrightarrow (\exists \nu \in \Sigma)\ \nu x \in H, \nu y \in H\ )$.

Proposition 4. Si H est stabilisant, il est sous-stabilisant.

Il suffit de faire $x = y$ dans la définition 3.

Proposition 5. Si H est sous-stabilisant et parafort, H est stabilisant; si H est stabilisant et fort, H est sous-stabilisant et parafort.

Si H est sous-stabilisant et parafort, et si $x,y \in E$, $\sigma,\tau \in \Sigma$ sont tels que $\sigma\tau x \in H, \sigma\tau y \in H$, il existe $\nu \in \Sigma$ tel que $\nu x \in H$; H étant parafort, $\nu y \in H$ et H est stabilisant.

Si H est stabilisant et fort, et si $x,y \in E, \sigma,\tau,\nu \in \Sigma$ sont tels que $\sigma\tau x \in H, \sigma\tau y \in H$, il existe $\rho \in \Sigma$ tel que $\rho x \in H, \rho y \in H$; H étant fort, $\nu x \in H$ entraîne $\nu y \in H$, et H est parafort. H est aussi sous-stabilisant (prop.4).

On notera que toute partie d'un tas stable est stabilisante.

Proposition 6. Soit H fort; si H est stabilisant, W_H est un idéal et $\mathcal{R}_H$ est simplifiable sur E_H^*, et réciproquement.

Ceci résulte des prop. 5 , 2 et 5.2.

Définition 4. $A \in \mathfrak{P}(E)$ est dit consistant si et seulement si
$(\forall \sigma \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma x \in A \Longrightarrow x \in A\ )$,
donc si et seulement si $E - A$ est un idéal.

Proposition 7. Si H est fort et stabilisant, $\mathcal{R}_H$ est simplifiable (sur E) si et seulement si W_H est consistant.

La condition est nécessaire; si $\mathcal{R}_H$ est simplifiable sur E et si $x \in E, \sigma \in \Sigma$ sont tels que $\sigma x \in W_H$, on a $\sigma\sigma x \in W_H$ (prop.6), et $\sigma x\ \mathcal{R}_H\ \sigma\sigma x$, d'où $x\ \mathcal{R}_H\ \sigma x$ et $x \in W_H$, en sorte que W_H est consistant.

La condition est suffisante: si W_H est consistant, $\mathcal{R}_H$ est simplifiable sur E_H^* (prop.6), et sur W_H car

$\sigma x, \sigma y \in W_H \Longrightarrow x, y \in W_H$. W_H étant saturé pour $\mathcal{Q}_H$, $\mathcal{Q}_H$ est simplifiable sur E.

7. Equivalences principales et stationnaires.

Soit $\mathcal{E} = (E, \Sigma)$ un tas.

Définition 1. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E est dite stationnaire sur A (ou Σ-stationnaire sur A s'il y a risque de confusion) si et seulement si $A \in \mathfrak{P}(E)$ et si, ρ étant la relation associée,

$$(\forall \sigma, \tau \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma x \,\mathcal{R}\, \tau x,\ \sigma x \in A,\ \tau x \in A \Longrightarrow \sigma \rho \tau\ )$$

cette condition étant équivalente à

$$(\forall \sigma, \tau \in \Sigma)(\forall x, y \in E)(\ \sigma x \,\mathcal{R}\, \tau x,\ \sigma x \in A,\ \tau x \in A \Longrightarrow \sigma y \,\mathcal{R}\, \tau y\ ).$$

On se propose de mettre en lumière les liens existant entre cette notion et celle de sous-ensemble robuste.

Proposition 1. Si $H \in \mathfrak{P}(E)$ est robuste, $\mathcal{Q}_H$ est stationnaire sur E^*_H.

Soient $\sigma, \tau \in \Sigma$, $x \in E$, tels que $\sigma x \,\mathcal{Q}_H\, \tau x$, $\sigma x \notin W_H$, $\tau x \notin W_H$. Puisque $\sigma x \notin W_H$, il existe $\upsilon \in \Sigma$ tel que $\upsilon \sigma x \in H$; et $\upsilon \tau x \in H$; H étant robuste, $\sigma \,\pi_H\, \tau$ (déf.4.3); π_H étant la relation associée à $\mathcal{Q}_H$ (prop.3.1), $\mathcal{Q}_H$ est stationnaire sur E^*_H.

Proposition 2. Si $H \in \mathfrak{P}(E)$ est fort, $\mathcal{Q}_H$ est stationnaire sur E^*_H si et seulement si H est robuste.

La condition est suffisante (prop.1). Réciproquement, si H est fort et $\mathcal{Q}_H$ stationnaire sur E^*_H, et si $x \in E$, $\rho, \sigma, \tau \in \Sigma$ sont tels que $\rho \sigma x \in H$, $\rho \tau x \in H$, alors $\sigma x \,\mathcal{Q}_H\, \tau x$, $\sigma x \notin W_H$, $\tau x \notin W_H$, et il en résulte $\sigma \,\pi_H\, \tau$ puisque π_H est la relation associée à $\mathcal{Q}_H$ (prop.3.1); donc H est robuste.

8. Sous-ensembles totalement forts et sous-ensembles parfaits.

Soient $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$. On cherche des conditions élémentaires sur H pour que H soit classe de $\mathcal{R}_H$.

Définition 1. H est dit partiellement fort à gauche, ou p-fort-g, si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ x \in H, y \in H, \sigma x \in H \implies \sigma y \in H\ ).$$

Proposition 1. H est indivisible pour $\mathcal{R}_H$ si et seulement si il est p-fort-g.

En effet H est indivisible pour $\mathcal{R}_H$ si et seulement si, pour tous $x,y \in H$, $x\ \mathcal{R}_H\ y$, soit $\sigma x \in H \iff \sigma y \in H$ pour tout $\sigma \in \Sigma$, ce qui équivaut à la condition de l'énoncé.

On notera que, si $\mathcal{T}$ est stable, la prop.1 résulte aussi des corollaires 1 et 2 du §.C.2.

Définition 2. H est dit partiellement fort à droite, ou p-fort-d, si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma x \in H, \sigma y \in H, x \in H \implies y \in H\ ).$$

Proposition 2. Si H est fort, H est saturé pour $\mathcal{R}_H$ si et seulement si il est p-fort-d et si $W_H \between H$ entraîne $W_H \subseteq H$.

En effet H est saturé pour $\mathcal{R}_H$ si et seulement si, pour tous $x,y \in E$, $x\ \mathcal{R}_H\ y$ et $x \in H$ entraînent $y \in H$.

Proposition 3. Si H est classe de $\mathcal{R}_H$, et sous-stabilisant, H est disjoint de W_H.

En effet, si $H \between W_H$, on a $H = W_H$ et H est un idéal (prop.5.2); donc, si $h \in H$, $\sigma h \in H$ pour tout $\sigma \in \Sigma$, et $h \notin W_H$, ce qui est absurde.

Définition 3. H est dit totalement fort, ou t-fort, si et seulement si il est fort, p-fort-g et p-fort-d.

Proposition 4. Si H est fort et sous-stabilisant, H est classe de $\mathcal{R}_H$ si et seulement si il est t-fort, et non vide, et disjoint de son r.i.

Ceci résulte des prop.1,2,3.

Proposition 5. H est t-fort si et seulement si il est fort dans $\overline{\mathscr{C}}$.

H est fort dans $\overline{\mathscr{C}}$ si et seulement si,pour tous $x,y \in E, \sigma,\tau \in \Sigma$, $\sigma x \in H, \sigma y \in H, \tau x \in H$ entraînent $\tau y \in H$ .Cette condition équivaut à la conjonction des quatres conditions obtenues en prenant successivement $\sigma,\tau \in \Sigma$,ce qui donne la condition "fort"; $\sigma = I_E$ et $\tau \in \Sigma$, ce qui donne la condition "p-fort-g"; $\sigma \in \Sigma$ et $\tau = I_E$,ce qui donne la condition "p-fort-d"; $\sigma = \tau = I_E$,ce qui donne une condition triviale.

On notera que,si $\mathscr{C}$ est unitaire,il est évident directement que H est saturé pour $\mathscr{L}_H$,quelque soit H (prop.C.1.1,dém.).

Dans la suite,la notion de partie t-forte,quoique plus naturelle,sera peu utilisée,parce que des raffinements techniques permettent de supprimer l'hypothèse que H est p-fort-d;par contre on rencontrera fréquemment le groupement d'hypothèses suivant:

Définition 4. H est dit parfait si et seulement si il est non vide,fort,p-fort-g,stabilisant et disjoint de son r.i.

Proposition 6. Si H est fort,stabilisant et classe de $\mathscr{L}_H$, H est parfait.

Ceci résulte de la prop. 4.

Proposition 7. Si H est parfait,H est non trivial.

H étant non vide et disjoint de W_H,il est impossible que $W_H = E$.

9.Souseènsembles d'un élément.

Soient $\mathscr{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $h \in E$.

On appelle équivalence principale définie par h celle qui est définie par $\{h\}$;et on note $\mathscr{L}_h$ au lieu de $\mathscr{L}_{\{h\}}$;on note de même W_h au lieu de $W_{\{h\}}$,etc.

De même on dit que l'élément h est fort,net,etc. si et seulement si $\{h\}$ est fort,net,etc.

E. Tas complexés et tas fibrés.

1. Catégories de tas complexés.

Définition 1. On appelle tas intérieurement complexé, ou tic, tout couple $(\mathcal{C},H)$ d'un tas $\mathcal{C}$ et d'une partie H du support de $\mathcal{C}$.

Le mot "complexé" résulte d'un abus de langage, mais est difficilement remplaçable dans cette définition.

Définition 2. Etant donnés deux tics $(\mathcal{C},H)$ et $(\mathcal{C}',H')$, on appelle homomorphismes de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}',H')$ tout homomorphisme f de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ tel que $f^{-1}(H') = H$.

Proposition 1. Les tics et les homomorphismes de tics sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie à supports.

Soient en effet trois tics $(\mathcal{C},H),(\mathcal{C}',H'),(\mathcal{C}'',H'')$; l'homomorphisme identique de $\mathcal{C}$ est un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C},H)$; et, si f (resp. g) est un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}',H')$ (resp. de $(\mathcal{C}',H')$ sur $(\mathcal{C}'',H'')$), $g \circ f$ est un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}'',H'')$ car

$$H = f^{-1}(H') = f^{-1}(g^{-1}(H'')) = (g\circ f)^{-1}(H'')$$

De même

Définition 3. On appelle tas extérieurement complexé, ou tec, tout couple $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ d'un tas $\mathcal{C}$ et d'une partie $\mathcal{T}$ de la loi de $\mathcal{C}$.

Définition 4. Etant donnés deux tecs $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C}',\mathcal{T}')$; on appelle homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ vers $(\mathcal{C}',\mathcal{T}')$ tout homomorphisme f de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ tel que, si φ est l'application associée, $\varphi^{-1}(\mathcal{T}') = \mathcal{T}$.

Proposition 2. Les tecs et les homomorphismes de tecs sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie à supports.

Soient en effet trois tecs $(\mathcal{C},\mathcal{T}),(\mathcal{C}',\mathcal{T}'),(\mathcal{C}'',\mathcal{T}'')$; l'homomorphisme identique de $\mathcal{C}$ est un homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ sur $(\mathcal{C},\mathcal{T})$; et si f (resp. g) est un homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{T}')$ (resp. de $(\mathcal{C}',\mathcal{T}')$ sur $(\mathcal{C}'',\mathcal{T}'')$), $g\circ f$ est un homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ sur $(\mathcal{C}'',\mathcal{T}'')$, car, si φ,ψ,χ sont les applications respectivement associées à f,g,g o f,on a,puisque χ prolonge $\psi \circ \varphi$ (prop.I.A.2.3):

$$\tau \equiv \varphi^{-1}(\tau') = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\tau'')) = \chi^{-1}(\tau'') \ .$$

2.Résidus.

Proposition 1. On définit un foncteur simple de la catégorie des tics vers elle-même (resp. vers celle des tecs) en associant à tout tic $(\mathcal{C},H)$ le tic $(\mathcal{C},W_H)$ (resp. le tec $(\mathcal{C},V_H)$,le tec $(\mathcal{C},W'_H)$).

Soient $\mathcal{C}' = (E,\Sigma)$ et f un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}',H')$;si φ est l'application associée à f,on a identiquement

$$\sigma x \in H \iff \varphi(\sigma)f(x) \in H' \quad , \quad \sigma\tau x \in H \iff \varphi(\sigma)\varphi(\tau)f(x) \in H' \quad ;$$

par suite $f^{-1}(W_{H'}) = W_H$, $\varphi^{-1}(V_{H'}) = V_H$, $\varphi^{-1}(W'_{H'}) = W'_H$,et f est un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},W_H)$ sur $(\mathcal{C}',W_{H'})$ et un homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},V_H)$ sur $(\mathcal{C}',V_{H'})$ et de $(\mathcal{C},W'_H)$ sur $(\mathcal{C}',W'_{H'})$.

Proposition 2. Si f est un homomorphisme de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ sur $\mathcal{C}'$ et si $H \in \mathfrak{P}(E)$,on a seulement,φ étant l'application associée à f,

$$W_{f(H)} \subseteq f(W_H) \ , \ V_{f(H)} \subseteq \varphi(V_H) \ , \ W'_{f(H)} \subseteq \varphi(W'_H) \ .$$

En effet on a seulement,dans ce cas,identiquement

$$\sigma x \in H \implies \varphi(\sigma)f(x) \in f(H) \quad , \quad \sigma\tau x \in H \implies \varphi(\sigma)\varphi(\tau)f(x) \in f(H) \ .$$

On a vu (prop.A.2.1) que la résiduation possède des propriétés analogues.Les définitions des résidus à partir de la résiduation (déf. D.1.2 et D.1.5) permettraient d'ailleurs de retrouver les résultats ci-dessus à partir de la prop.A.2.1.On peut aussi définir comme ci-dessus des catégories de tas bicomplexés,les résiduations deviennent alors des foncteurs simples d'une catégorie de tas bicomplexés vers une catégorie de tas complexés,dont les foncteurs W,V,W' ci-dessus se déduisent par spécialisation d'une des variables.

3.Conditions imposées à H.

Proposition 1. Soit f un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}',H')$.

a) si f est aussi un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},A)$ sur $(\mathcal{C}',A')$, H est net sur A si et seulement si H' est net sur A';

b) si f est aussi un homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{T}')$, H est franc (resp. précis) sur $\mathcal{T}$ si et seulement si H' est franc (resp. précis) sur $\mathcal{T}'$;

c) H et H' sont simultanément nets, francs, précis, clairs, forts, robustes, p-forts-g, p-forts-d, triviaux, sous-stabilisants, stabilisants, parfaits, consistants, ou des idéaux.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma), \mathcal{C}' = (E',\Sigma')$.

a) On a identiquement

$$x \in A \iff f(x) \in A' \quad , \quad \sigma x \in H \iff \varphi(\sigma)f(x) \in H' \ .$$

Or, puisque $f(E) = E'$ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$, H' est net sur A' si et seulement si

$$(\forall x \in E)(\ f(x) \in A' \implies (\exists \sigma \in \Sigma)\ \varphi(\sigma)f(x) \in H'\ )\ ;$$

donc si et seulement si

$$(\forall x \in E)(\ x \in A \implies (\exists \sigma \in \Sigma)\ \sigma x \in H\ )$$

c'est-à-dire si et seulement si H est net sur A.

b) On a identiquement

$$\sigma \in \mathcal{T} \iff \varphi(\sigma) \in \mathcal{T}'$$

et les démonstrations sont analogues.

c) f étant aussi un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},E)$ sur $(\mathcal{C}',E')$ et un homomorphisme de tecs de $(\mathcal{C},\Sigma)$ sur $(\mathcal{C}',\Sigma')$, l'assertion portant sur les conditions net, franc, précis résulte de a) et b). Et, comme $f(E) = E'$ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$, H' est clair si et seulement si

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\forall x \in E)(\exists \tau \in \Sigma)\quad \varphi(\sigma)\varphi(\tau)f(x) \in H'\ ,$$

donc si et seulement si

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\forall x \in E)(\exists \tau \in \Sigma)\ \sigma\tau x \in H\ ,$$

c'est-à-dire si et seulement si H est clair.

De même H' est fort si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\ \varphi(\sigma)f(x) \in H', \varphi(\sigma)f(y) \in H', \varphi(\tau)f(x) \in H' \implies \varphi(\tau)f(y) \in H')$$

donc si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\ \sigma x \in H, \sigma y \in H, \tau x \in H \implies \tau y \in H\ )$$

c'est-à-dire si et seulement si H est fort. On procède de même pour les trois autres conditions de force; on notera aussi que H et H' sont simultanément paraforts.

De même H et H' sont simultanément des idéaux; et, par passage au complémentaire, des sous-ensembles consistants.

Comme f est aussi un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},W_H)$ sur $(\mathcal{C}',W_{H'})$, H et H' sont simultanément triviaux (prop.D.5.8) et sous-stabilisants (prop.D.5.5). Alors H et H' sont simultanément forts-et-stabilisants (prop.D.6.5);pour la condition stabilisant prise seule,on peut procéder directement.

Enfin H et H' sont simultanément disjoints de leur r.i.,puisque $H = f^{-1}(H')$ et $W_H = f^{-1}(W_{H'})$,donc sont simultanément parfaits,d'après ce qui précède et la déf.D.8.4.

Dans la proposition 1,H' peut être pris arbitraire, alors que H doit être choisi saturé.Cette proposition permet donc de relever par homomorphismes les conditions étudiées,et de les descendre dans le cas où on les impose à un sous-ensemble saturé.La descente des conditions est impossible en général sans cette condition,sauf pour les conditions de netteté:

Proposition 2. Si f est un homomorphisme de tas de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ sur $\mathcal{C}'$,et si $H \in \mathfrak{P}(E)$ est net (resp. franc,précis,clair),il en est de même de f(H).

Pour les conditions net,franc,précis,ceci résulte de la prop.2.2.On peut aussi raisonner directement,comme pour la dernière condition:si H est clair,pour tous $\sigma \in \Sigma$ et $x \in E$,il existe $\tau \in \Sigma$ tel que $\varphi(\sigma)\varphi(\tau)f(x) \in f(H)$,et,comme $f(E) = E'$ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$ (avec $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$), f(H) est clair.

4.Catégories de tas fibrés.

Définition 1. On appelle tas intérieurement fibré,ou tif, tout couple $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ d'un tas $\mathcal{C}$ et d'une équivalence $\mathcal{R}$ sur supp$\mathcal{C}$.

Définition 2. Etant donnés deux tifs $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ et $(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$,on appelle homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$ tout homomorphisme f de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{R}$ soit la remontée de $\mathcal{R}'$ par f (10).

Proposition 1. Les tifs et les homomorphismes de tifs sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie à supports.

En effet,si $(\mathcal{C},\mathcal{R}),(\mathcal{C}',\mathcal{R}'),(\mathcal{C}'',\mathcal{R}'')$ sont trois tifs,l'homomorphisme identique de $\mathcal{C}$ est un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur lui-même,et,si f (resp. g) est un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur

(10) C'est-à-dire que,pour tous x,y du support de $\mathcal{C}$,
$x\mathcal{R}y \iff f(x)\mathcal{R}'f(y)$;
cf. DUBREIL [12].

$(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$ (resp. de $(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$ sur $(\mathcal{C}'',\mathcal{R}'')$), $g\circ f$ est un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur $(\mathcal{C}'',\mathcal{R}'')$ car, pour tous x,y du support de $\mathcal{C}$,

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff f(x)\,\mathcal{R}'\,f(y) \iff g(f(x))\,\mathcal{R}''\,g(f(y)),$$

c'est à dire que $\mathcal{R}$ est la remontée de $\mathcal{R}''$ par $g\circ f$.

Définition 3. On appelle tas extérieurement fibré, ou tef, tout couple $(\mathcal{C},\rho)$ d'un tas $\mathcal{C}$ et l'une équivalence ρ sur la loi de $\mathcal{C}$.

Définition 4. Etant donnés deux tefs $(\mathcal{C},\rho)$ et $(\mathcal{C}',\rho')$, on appelle homomorphisme de tefs de $(\mathcal{C},\rho)$ sur $(\mathcal{C}',\rho')$ tout homomorphisme f de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ tel que ρ soit la remontée de ρ' par l'application associée à f.

Proposition 2. Les tefs et les homomorphismes de tefs sont respectivement les objets et les morphismes d'une catégorie à supports.

En effet, si $(\mathcal{C},\rho)$, $(\mathcal{C}',\rho')$, $(\mathcal{C}'',\rho'')$ sont trois tefs, l'homomorphisme identique de $\mathcal{C}$ est un homomorphisme de tefs de $(\mathcal{C},\rho)$ sur lui-même, puisque l'application associée est l'application identique, et, si f (resp. g) est un homomorphisme de tefs de $(\mathcal{C},\rho)$ sur $(\mathcal{C}',\rho')$ (resp. de $(\mathcal{C}',\rho')$ sur $(\mathcal{C}'',\rho'')$), $g\circ f$ est un homomorphisme de tefs de $(\mathcal{C},\rho)$ sur $(\mathcal{C}'',\rho'')$ car, si φ,ψ,χ sont les applications associées respectivement à f. g, $g\circ f$, ρ est la remontée de ρ' par φ, donc la remontée de ρ'' par $\psi\circ\varphi$, donc la remontée de ρ'' par χ qui prolonge $\psi\circ\varphi$.

5. Relation associée.

Proposition 1. On définit un foncteur simple de la catégorie des tifs vers celle des tefs en associant à tout tif $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ le tef $(\mathcal{C},\rho)$, où ρ est la relation associée à $\mathcal{R}$.

Soient f un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$, φ l'application associée à f, ρ et ρ' les relations associées respectivement à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$; si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ et si $\sigma,\tau\in\Sigma$:

$$\sigma\,\rho\,\tau \iff (\forall x\in E)\ \sigma x\,\mathcal{R}\,\tau x \iff (\forall x\in E)\ \varphi(\sigma)f(x)\,\mathcal{R}'\,\varphi(\tau)f(x) \iff \varphi(\sigma)\,\rho'\,\varphi(\tau)$$

donc f est un homomorphisme de tefs de $(\mathcal{C},\rho)$ sur $(\mathcal{C}',\rho')$.

On notera que, comme la relation associée à l'égalité est l'égalité, la prop. I.C.4.1 est un cas particulier de ce résultat.

6. Conditions imposées à $\mathcal{R}$.

Proposition 1. Soit f un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$;

a- $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont compatibles en même temps;

b- si f est aussi un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},A)$ sur $(\mathcal{C}',A')$, $\mathcal{R}$ est simplifiable (resp. stationnaire) sur A si et seulement si $\mathcal{R}'$ est simplifiable (resp. stationnaire) sur A'.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ et φ l'application associée à f.

a-Si $\mathcal{R}'$ est compatible et si $x,y \in E, \sigma \in \Sigma$:

$$x \mathcal{R} y \Longrightarrow f(x) \mathcal{R}' f(y) \Longrightarrow \varphi(\sigma)f(x) \mathcal{R}' \varphi(\sigma)f(y) \Longrightarrow \sigma x \mathcal{R} \sigma y ,$$

et $\mathcal{R}$ est compatible. Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est compatible et si $x,y \in E, \sigma \in \Sigma$:

$$f(x) \mathcal{R}' f(y) \Longrightarrow x \mathcal{R} y \Longrightarrow \sigma x \mathcal{R} \sigma y \Longrightarrow \varphi(\sigma)f(x) \mathcal{R}' \varphi(\sigma)f(y) ,$$

et, comme $f(E) = E'$ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$, $\mathcal{R}'$ est compatible.

b- de même, si $\mathcal{R}'$ est simplifiable sur A' et si $x,y \in E$, $\sigma \in \Sigma$:

$$\sigma x \mathcal{R} \sigma y ,\ \sigma x, \sigma y \in A \Longrightarrow \varphi(\sigma)f(x) \mathcal{R}' \varphi(\sigma)f(y) ,\ \varphi(\sigma)f(x), \varphi(\sigma)f(y) \in A'$$
$$\Longrightarrow f(x) \mathcal{R}' f(y) \Longrightarrow x \mathcal{R} y ,$$

et $\mathcal{R}$ est simplifiable sur A. Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est simplifiable sur A et si $x,y \in E, \sigma \in \Sigma$:

$$\varphi(\sigma)f(x) \mathcal{R}' \varphi(\sigma)f(y) ,\ \varphi(\sigma)f(x), \varphi(\sigma)f(y) \in A' \Longrightarrow \sigma x \mathcal{R} \sigma y ,\ \sigma x, \sigma y \in A$$
$$\Longrightarrow x \mathcal{R} y \Longrightarrow f(x) \mathcal{R}' f(y) ,$$

et, comme $f(E) = E'$ et $\varphi(\Sigma) = \Sigma'$, $\mathcal{R}'$ est simplifiable sur A'. On procède de même pour la stationnarité.

7. Foncteur $\mathcal{L}$.

Dans les conditions imposées à $\mathcal{R}$ au §.6 ne figure pas la propriété d'être principale.

Théorème 1. On définit un foncteur simple de la catégorie des tics vers celle des tifs en associant, à tout tic $(\mathcal{C},H)$, le tif $(\mathcal{C},\mathcal{L}_H)$.

Cette propriété est sans doute la plus importante, à notre avis, de l'équivalence principale associée à H.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$, f un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}',H')$, φ l'application associée à f. De

$$(\forall x \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma x \in H \iff \varphi(\sigma)f(x) \in H'\ )$$

résulte que

$$(\forall x,y \in E)(\ x\ \mathcal{L}_H\ y \iff f(x)\ \mathcal{L}_{H'}\ f(y)\ )$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1. On définit un foncteur simple de la catégorie des tics vers celle des tefs en associant, à tout tic $(\mathcal{C},H)$, le tef $(\mathcal{C},\pi_H)$.

Ceci résulte des prop. 5.1 et D.3.1.

Définition 1. Si $\mathcal{C}$ est un tas, une équivalence $\mathcal{R}$ sur le support de $\mathcal{C}$ est dite uniprincipale si et seulement si il existe (au moins) une classe H de $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R} = \mathcal{L}_H$, et équiprincipale si et seulement si $\mathcal{R}$ est principale pour chacune de ses classes.

Corollaire 2. Si f est un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{R}')$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont uniprincipales en même temps et pour des classes correspondantes, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont équiprincipales en même temps.

Si $\mathcal{R}$ est uniprincipale pour H, H est classe pour $\mathcal{R}$, donc saturé pour l'équivalence nucléaire de f, et f est un homomorphisme de tics de $(\mathcal{C},H)$ sur $(\mathcal{C}',f(H))$; donc un homomorphisme de tifs de $(\mathcal{C},\mathcal{L}_H) = (\mathcal{C},\mathcal{R})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{L}_{f(H)})$, en sorte que $\mathcal{R}' = \mathcal{L}_{f(H)}$, f(H) étant classe pour $\mathcal{R}'$; réciproquement, si $\mathcal{R}'$ est uniprincipale pour H', f est un homomorphisme de tefs de $(\mathcal{C},\mathcal{L}_{f^{-1}(H')})$ sur $(\mathcal{C}',\mathcal{L}_{H'}) = (\mathcal{C}',\mathcal{R}')$, en sorte que $\mathcal{R}$ est principale pour $f^{-1}(H')$ qui est classe pour $\mathcal{R}$.

Il en résulte, puisque les classes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ se correspondent bijectivement par f, que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont équiprincipales en même temps.

III. HOMOMORPHISMES PRINCIPAUX.

A. Tas particuliers.

1. Tas injectifs.

Proposition 1. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas; les conditions suivantes sont équivalentes:

a- tout élément de Σ est une injection;

b- $(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma x = \sigma y \Rightarrow x = y\ )$;

c- l'égalité est simplifiable sur E .

Définition 1. Un tas est dit *injectif* si et seulement si il vérifie une des conditions de la prop.1.

De même

Définition 2. Un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est dit *A-injectif* si et seulement si $A \in \mathfrak{P}(E)$ et si l'égalité est simplifiable sur $E - A$, donc si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in \Sigma)(\ \sigma x = \sigma y \notin A \Rightarrow x = y\ ).$$

Proposition 2. Soit f un homomorphisme de tas de $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ sur $\mathcal{C}'$; $\mathcal{C}'$ est injectif (resp. A-injectif) si et seulement si l'équivalence nucléaire de f est simplifiable sur E (resp. sur $E - f^{-1}(A)$).

Ceci résulte de la prop.II.E.6.1b.

En particulier deux tas isomorphes sont injectifs en même temps, A-injectifs en même temps et pour des parties se correspondant par l'isomorphisme.

2. Tas stationnaires.

Proposition 1. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas; les conditions suivantes sont équivalentes:

a- toute application $\sigma \rightsquigarrow \sigma x$ est une injection;

b- $(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma x = \tau x \Rightarrow \sigma = \tau\ )$;

c- l'égalité est stationnaire sur E.

En effet la relation associée à l'égalité est l'égalité.

Définition 1. Un tas est dit stationnaire si et seulement si il vérifie une des conditions de la prop.1.

De même

Définition 2. Un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est dit A-stationnaire si et seulement si $A \in \mathfrak{P}(E)$ et si l'égalité est stationnaire sur $E - A$, c'est-à-dire si et seulement si

$$(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\forall x \in E)(\ \sigma x = \tau x \notin A \implies \sigma = \tau\ )\ .$$

Proposition 2. Soit f un homomorphisme de tas de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$; $\mathcal{C}$ est stationnaire (resp. A-stationnaire) si et seulement si l'équivalence nucléaire de f est stationnaire sur E (resp. sur $E - f^{-1}(A)$) ($E = \operatorname{supp} \mathcal{C}$).

Ceci résulte de la prop.II.E.6.1b.

En particulier deux tas isomorphes sont stationnaires en même temps, A-stationnaires en même temps et pour des parties se correspondant par l'isomorphisme.

3. Tas uniprincipaux ou équiprincipaux; homomorphismes principaux.

Définition 1. Un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est dit uniprincipal si et seulement si l'égalité est uniprincipale; si l'égalité est uniprincipale pour $h \in E$, $\mathcal{C}$ est dit uniprincipal pour h. $\mathcal{C}$ est dit équiprincipal si et seulement si l'égalité est équiprincipale.(11)

Proposition 1. Soit f un homomorphisme de tas de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$; $\mathcal{C}'$ est uniprincipal (pour h) si et seulement si l'équivalence nucléaire de f est uniprincipale (pour $f^{-1}(h)$); $\mathcal{C}'$ est équiprincipal si et seulement si l'équivalence nucléaire de f est équiprincipale.

Ceci résulte du cor.II.E.7.2.

En particulier deux tas isomorphes sont équiprincipaux en même temps, uniprincipaux en même temps et pour des éléments se correspondant par l'isomorphisme.

(11) Nous ne considérons pas, comme il serait logique de le faire, des tas principaux (tels que l'égalité soit principale), parce que le cor. II.E.7.2 n'est pas démontrable pour des équivalences qui seraient seulement principales, et aussi parce que tous les tas principaux que l'on rencontrera dans la suite sont au moins uniprincipaux.

On fera grand usage dans la suite du langage suivant.

Définition 2. Un homomorphisme de tas est dit principal (pour H) si et seulement si son équivalence nucléaire est principale (pour H).

La prop.2 devient:

Proposition 2. Si f est un homomorphisme de tas arrivant sur $\mathscr{C}$,$\mathscr{C}$ est uniprincipal (resp. équiprincipal) si et seulement si f est principal pour une (resp. toute) classe de son équivalence nucléaire.

4.Zéros et homomorphismes principaux.

Proposition 1. Soit f un homomorphisme de tas,arrivant sur un tas $\mathscr{C}$,et principal pour une partie H.

a- si $\mathscr{C}$ a un zéro $z \notin f(H)$,H est sous-stabilisante, floue et non triviale,et $W_H = f^{-1}(z)$.

b- si H est sous-stabilisante,floue et non triviale, $f(W_H)$ est un zéro de $\mathscr{C}$.

Si $\mathscr{C}$ a un zéro $z \notin f(H)$,$f^{-1}(z)$ est un idéal propre (prop.II.E.3.1c) disjoint de H;donc $f^{-1}(z) \subseteq W_H$ (prop.II.D.5.1),et, comme $f^{-1}(z)$ et W_H sont classes de l'équivalence nucléaire,on a $f^{-1}(z) = W_H$. Le a- résulte alors de la prop.II.D.5.8;de même,dans l'hypothèse de b-,W_H est un idéal propre,saturé pour l'équivalence nucléaire,donc son image par f est un zéro de $\mathscr{C}$.

Proposition 2. Soit f un homomorphisme de tas,arrivant sur un tas $\mathscr{C}$,et principal pour une partie H sous-stabilisante,floue et non triviale,de sorte que $z = f(W_H)$ est un zéro de $\mathscr{C}$(prop.1). z est un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Soient $\mathscr{C}' = (E',\Sigma')$ le tas départ et $\mathscr{C} = (E,\Sigma)$.W_H est saturé pour l'équivalence nucléaire,donc $f(W_H \,\dot{}.\, E') = z \,\dot{}.\, E$ (prop. II.A.2.1),or $W_H \,\dot{}.\, E' = W'_H$ (prop.II.D.4.1) . z est un bizéro si et seulement si $z \,\dot{}.\, E$ est non vide,donc si et seulement si W'_H est non vide,donc si et seulement si H est imprécise.

Ces propriétés s'appliquent aux tas uniprincipaux, dans lesquels l'application identique est un homomorphisme principal.

Proposition 3. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas uniprincipal pour $h \in E$. On suppose que h n'est pas un zéro.

a- si h est net, $\mathcal{C}$ est sans zéro; si $\mathcal{C}$ est sans zéro et h sous-stabilisant, h est net.

b- si $\mathcal{C}$ a un zéro, ce zéro est unique et constitue le résidu intérieur de h.

Si h est net, et si $\mathcal{C}$ a un zéro z, $z \neq h$, donc h est flou (prop.1) ce qui est absurde. Si h est sous-stabilisant, h est non trivial, car, si h était trivial, $E = W_h$ serait réduit à h et h ne serait pas trivial, ce qui est absurde; donc, si $\mathcal{C}$ est sans zéro, h est net, car, si h était flou, $\mathcal{C}$ aurait un zéro (prop.1).

Si $\mathcal{C}$ a un zéro z, $z \in W_h$ (prop.1); or W_h ~~a~~ au plus un élément, ce qui démontre le b-.

Le cas où h est un zéro paraît plus délicat. On a seulement:

Proposition 4. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas ayant un zéro z, uniprincipal pour z . Si $\mathcal{C}$ est injectif, ou si z est fort, E a deux éléments et $\mathcal{C}$ est le tas permis sur E. Réciproquement un tel tas est injectif et équiprincipal et tous ses éléments sont des zéros forts.

Si $\mathcal{C}$ est injectif, z est fort (prop.II.D.6.1).

Soit donc $a \in E - z$. z étant fort, les classes de $\mathcal{L}_z$ sont les complexes de la forme $z \mathbin{.^{\cdot}} \sigma$ $(\sigma \in \Sigma)$ ou W_z ; comme, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $z \in z \mathbin{.^{\cdot}} \sigma$, on a $z = z \mathbin{.^{\cdot}} \sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma$, et $a \in W_z$. Par suite $E = \{a,z\}$; et, si $\sigma \in \Sigma$, $\sigma a = z$ est impossible, donc $\sigma a = a$, en sorte que $\mathcal{C}$ est le tas permis sur E.

Réciproquement, si $E = \{a,b\}$ et si $\mathcal{C}$ est le tas permis sur E, $\mathcal{C}$ est injectif, tout élément de E est un zéro, et est fort (prop.II.D.6.1); $\mathcal{C}$ est uniprincipal pour a car $a \notin W_a$ et $b \in W_a$; donc $\mathcal{C}$ est équiprincipal.

B. Recherche de tas uniprincipaux.

Il est logique de restreindre son intérêt aux tas uniprincipaux pour un élément fort; en effet une équivalence principale n'est jamais si bien définie que par une partie forte, puisqu'en ce cas on a la description complète de ses classes. Nous avouons de plus ne rien savoir sur un tas uniprincipal pour un élément non fort.

1. Cas d'un tas sans zéro.

Proposition 1. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $h \in E$. Si h est net, et si l'égalité est simplifiable sur h, $\mathcal{C}$ est uniprincipal pour h, et h est fort. Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est uniprincipal pour h et si h est fort, l'égalité est simplifiable sur h.

Pour la réciproque, soient $x,y \in E, \sigma \in \Sigma$; alors
$\sigma x = \sigma y = h \Rightarrow x\ \mathcal{Q}_h\ y \Rightarrow x = y$.

Et, si h est net et si l'égalité est simplifiable sur h, h est fort (prop.II.D.6.1), et $\mathcal{Q}_h$ est l'égalité car si $x,y \in E$ sont tels que $x\ \mathcal{Q}_h\ y$, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma x = h$; de $\sigma y = h = \sigma x$ résulte alors $x = y$.

Cette condition peut être renforcée ainsi:

Proposition 2. Un tas injectif dont le support contient un élément net est uniprincipal (pour tout élément net) et sans zéro.

Soient $\mathcal{C}$ un tel tas, h un élément net; il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est sans zéro. Si h était lui-même un zéro, $\mathcal{C}$ serait le tas permis sur un ensemble à deux éléments (prop.A.4.4), ce qui est absurde car h est net. h n'étant pas un zéro, $\mathcal{C}$ est sans zéro (prop.A. 4.3a).

On dira dans la suite: tas à élément net, pour : tas dont le support contient un élément net.

La condition de la prop.2 sera emplòyée dans la suite de préférence à celle de la prop.1, qui fait intervenir h de manière trop voyante. De plus elle est nécessaire dans le cas d'un tas stable:

Proposition 3. Un tas stable est sans zéro et uniprincipal pour un élément fort, si et seulement si il est injectif à élément net.

Soit $\mathcal{C}$ un tas sans zéro, stable, uniprincipal pour un élément fort h ; h est net (prop.A.4.3a), et $\mathcal{L}_h$ est simplifiable sur le support de $\mathcal{C}$ (prop.II.D.6.3), donc $\mathcal{C}$ est injectif.

Enfin, dans un tas stable, l'existence d'un élément net se traduit de façon intéressante au moyen des idéaux.

Définition 1. Si $\mathcal{C}$ est un tas, on appelle noix[12] tout idéal de $\mathcal{C}$ non vide, minimum.

Proposition 4. Dans un tas stable, l'existence d'un élément net équivaut à celle d'une noix, qui est alors l'ensemble des éléments nets.

Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas stable, Σx est un idéal (non vide) pour tout $x \in E$.

Or $h \in E$ est net si et seulement si $h \in \Sigma x$ pour tout $x \in E$; l'ensemble N des éléments nets est donc l'intersection des Σx et c'est un idéal; enfin, si A est un idéal non vide et si $a \in A$, $N \subseteq \Sigma a \subseteq A$; donc, si N est non vide, c'est une noix.

Réciproquement, si N est une noix, $N \subseteq \Sigma x$ pour tout $x \in E$, et tout élément de N est net; en particulier, il existe un élément net; l'ensemble de ces éléments est, d'après ce qui précède, une noix; donc c'est N, car une noix, si elle existe, est unique.

(12) La terminologie usuelle pour un tel idéal (CLIFFORD et PRESTON [6], CROISOT [8]) est noyau ; ce mot nous paraît à éviter dans une théorie où l'on s'intéresse beaucoup aux homomorphismes, et spécialement aux équivalences nucléaires.

2. Cas d'un tas avec zéro.

Définition 1. Si $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ est un tas ayant un zéro z, un élément h de E est dit z-net (ou Σ-z-net s'il y a risque de confusion) si et seulement si il est net sur $E - z$.

On dira dans la suite: tas à élément z-net, pour: tas dont le support contient un élément z-net.

Proposition 1. Soient $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ un tas, z un zéro de $\mathcal{T}$ et $h \in E$. Si h est z-net, différent de z, et si l'égalité est simplifiable sur h, $\mathcal{T}$ est uniprincipal pour h, h est fort et z est le seul zéro de $\mathcal{T}$.

h est fort (prop.II.D.6.1) et $\mathcal{D}_h$ est l'égalité car si $x,y \in E$ sont tels que $x \ \mathcal{D}_h \ y$, ou bien il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma x = h$, et de $\sigma y = h = \sigma x$ résulte $x = y$, ou bien $x,y \in W_h$ et en ce cas $x = y = z$ puisque h est z-net. z est seul zéro de $\mathcal{T}$ (prop.A.4.3b).

Cette condition est nécessaire:

Proposition 2. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas ayant un zéro z, uniprincipal pour un élément h de E fort et différent de z ; alors h est z-net et l'égalité est simplifiable sur h.

En effet $\{z\} = W_h$ (prop.A.4.3b), donc h est z-net; la seconde assertion résulte de la prop.1.1.

Proposition 3. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas ayant un zéro z. Si $\mathcal{C}$ est z-injectif, $\mathcal{C}$ est uniprincipal pour tout élément z-net différent de z . Si $\mathcal{C}$ est stable, $\mathcal{C}$ est uniprincipal pour un élément fort et différent de z si et seulement si $\mathcal{C}$ est z-injectif et si son support contient un élément z-net différent de z.

La première assertion résulte de la prop.1. Si $\mathcal{C}$ est stable et uniprincipal pour un élément de E fort $h \neq z$, $W_h = \{z\}$, donc h est z-net, et $\mathcal{Z}_h$ est simplifiable sur $E-\{z\}$ (prop.II.D.6.3), donc $\mathcal{C}$ est z-injectif.

3. Existence d'éléments z-nets dans un tas stable.

Définition 1. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas ayant un zéro z. On appelle z-noix tout idéal de $\mathcal{C}$ non contenu dans $\{z\}$, minimum.

Proposition 1. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas stable ayant un zéro z . L'ensemble des éléments z-nets, s'il n'est pas contenu dans $\{z\}$, est une z-noix.

Soit N l'ensemble des éléments z-nets:

$$N = \{h \in E\,;\ (\forall x \in E-\{z\})\ h \in \Sigma x\} = \bigcap(\Sigma x\,;\ x \in E-\{z\})\ ;$$

c'est un idéal; si A est un idéal non contenu dans $\{z\}$, et si $a \in A-\{z\}$, $N \subseteq \Sigma a \subseteq A$; donc, si $N \not\subseteq \{z\}$, c'est une z-noix.

Contrairement à ce qui se passe au §.1, l'existence d'une z-noix dans un tas stable n'entraîne pas celle d'un élément z-net différent de z. Par exemple, si $E = \{a,z\}$ et $\Sigma = \{\kappa_z\}$, (E,Σ) est stable car $\kappa_z^2 = \kappa_z$, et E est une z-noix; mais il n'existe pas d'élément z-net différent de z car $a \notin \Sigma a$. Pour conserver la prop.1.4, il faut une condition sur $\mathcal{C}$.

Définition 2. Un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ ayant un zéro z est dit z-séparé si et seulement si

$$(\forall x \in E)(\ x \neq z \implies \Sigma x \not\subseteq \{z\}).$$

Proposition 2. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas stable ayant un zéro z ;E contient un élément z-net différent de z si et seulement si $\mathcal{C}$ est z-séparé et a une z-noix,qui est alors l'ensemble des éléments nets.

Si E contient un élément z-net $h \neq z$,$\mathcal{C}$ est zséparé car,si $x \in E-\{z\}$,$h \in \Sigma x$ et $\Sigma x \not\subseteq \{z\}$;et $\mathcal{C}$ a une z-noix (prop.1).

Réciproquement,si N est une z-noix de $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{C}$ est z-séparé, $N \subseteq \Sigma x$ pour tout $x \in E-\{z\}$,donc tout élément de N est z-net; en particulier il existe un élément z-net différent de z.L'ensemble des éléments z-nets est alors une z-noix;or une z-noix,si elle existe, est unique et N est l'ensemble des éléments z-nets.

On notera que N n'est pas l'ensemble des éléments z-nets différents de z ; z peut appartenir à la z-noix;cela arrive si et seulement si z est z-net,c'est à dire si et seulement si z est net (par exemple,dès que z est un bizéro).

C.Tas sans zéro faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

1.Tas transitifs ou surjectifs.

Proposition 1. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas;les conditions suivantes sont équivalentes:

a- Σ est transitif;

b- $(\forall x,y \in E)(\exists \sigma \in \Sigma)\ \sigma x = y$;

c- tout élément de E est net.

Définition 1. Un tas est dit transitif si et seulement si il vérifie une des conditions de la prop.1.

Dans un tas stable,la transitivité s'exprime au moyen des idéaux.

Définition 2. Un tas est dit simple si et seulement si il n'a pas d'idéal propre.

Proposition 2. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas stable,les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est transitif;

b- E est une noix;

c- $\mathcal{C}$ est simple.

Cela résulte de la prop.B.1.4.

Il résulte alors de la prop.I.E.3.1 que,si $\mathcal{C}$ est un tas, $\mathcal{C}$ est simple si et seulement si $\hat{\mathcal{C}}$ est transitif.

Proposition 3. Un tas injectif transitif est équiprincipal.

Cela résulte de la prop.B.1.2.

Proposition 4. Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas;les conditions suivantes sont équivalentes:

a- tout élément de Σ est une surjection;

b- $(\forall y\in E)(\forall\sigma\in\Sigma)(\exists x\in E)\ \sigma x = y$;

c- tout élément de E est franc.

Définition 3. Un tas est dit surjectif si et seulement si il vérifie une des conditions de la prop.4.

Définition 4. Un tas est dit bijectif si et seulement si il est à la fois injectif et surjectif.

2.Conditions obtenues.

On se propose dans la suite de donner des théorèmes d'homomorphisme où l'image est un tas injectif à élément net,supposé éventuellement stationnaire,transitif,surjectif.

Ces conditions sont liées par certaines implications.

Proposition 1. Un tas transitif a un élément net.

Ceci résulte de la définition.

Proposition 2. Un tas stable,injectif,stationnaire et à élément net est surjectif et transitif (et c'est un espace homogène).

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tel tas et $h \in E$ un élément net. Il existe $\varepsilon\in\Sigma$ tel que $\varepsilon h = h$; de $h = \varepsilon h = \varepsilon^2 h$ résulte $\varepsilon = \varepsilon^2$,et,puisque ε est une injection, $\varepsilon = I_E$;donc $I_E\in\Sigma$.

Soit alors $\sigma\in\Sigma$;h étant net,il existe $\tau\in\Sigma$ tel que $\tau(\sigma h) = h = I_E h$;d'où $\tau\sigma = I_E$;et $\tau\sigma\tau = \tau$,d'où,τ étant injectif,

$\sigma\tau = I_E$. σ et τ sont donc des bijections inverses;et $\sigma^{-1} = \tau \in \Sigma$,donc Σ est un groupe de bijections.En particulier $\mathcal{C}$ est surjectif.

Soient enfin $x,y \in E$; h étant net,il existe $\sigma,\tau \in \Sigma$ tels que $\sigma x = h = \tau y$;d'où $\tau^{-1}\sigma x = y$,et,comme $\tau^{-1}\sigma \in \Sigma$,$\mathcal{C}$ est transitif.

3.Indépendance des conditions obtenues.

On va prouver qu'entre les conditions étudiées n'existent que les implications triviales déduites des propositions 2.1 et 2.2.

Examinons d'abord le cas d'un tas stable.Toute condition,conjonction de "injectif à élément net" et éventuellement d'une ou plusieurs des conditions "stationnaire","transitif","surjectif",est équivalente,d'après les prop.2.1 et 2.2,à l'une des conditions suivantes

injectif à élément net
injectif transitif
bijectif à élément net
bijectif transitif
injectif stationnaire à élément net .

Proposition 1. Il existe un tas stable bijectif transitif et non stationnaire.

E étant un ensemble d'au moins trois éléments,prenons pour multiplicateurs toutes les bijections de E . Le tas obtenu est stable,bijectif,transitif,et non stationnaire car le groupe des bijections de E n'est pas simplement transitif.

Proposition 2. Il existe un tas stable,injectif,transitif et non surjectif.

E étant un ensemble infini,prenons pour multiplicateurs toutes les injections de E . Le tas obtenu est stable,injectif, transitif,mais non surjectif puisque E est infini.

Proposition 3. Il existe un tas stable bijectif à élément net non transitif.

L'élaboration de l'exemple s'inspire des propriétés suivantes.Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tel tas et N sa noix (prop.B.1.4).

On a $N \subset E$ .Soient $x \in E-N$ et $h \in N$;il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma x = h$; par suite,pour tout $y \in N$, $\sigma y \in N-\{h\}$;la restriction de σ à N est une bijection de N vers $\sigma N \subset N$,donc N est infini;la restriction de σ à $E-N$ est une bijection de $E-N$ vers $E-\sigma N \supset E-N$,donc $E-N$ est infini.

Soient alors N et C deux ensembles dénombrables (infinis) et disjoints,$E = N \cup C$,et Σ_1l'ensemble des bijections de E vers E ayant la propriété suivante:il existe $x \in C$ et $h \in N$ tels que $\sigma x = h$, $\sigma(C-\{x\}) = C$, $\sigma N = N-\{h\}$. Σ_1 est non vide;et même il existe un élément de $\Sigma_1$pour tout choix de $x \in E$,de $h \in N$ et de $\sigma h \in N-\{h\}$;en effet,N,étant dénombrable,peut être indexé par l'ensemble des entiers naturels de telle sorte que h ait l'indice 1 et σh l'indice 2;on définit alors σ en faisant correspondre,à tout élément de N,l'élément d'indice suivant; à x,h;et,à tout élément de $C-\{x\}$ son image par telle bijection que l'on voudra de $C-\{x\}$ vers C (il en existe,puisque C est infini).

Si $\Sigma = \hat{\Sigma}_1$,(E,Σ) est un tas stable bijectif.Tout élément h de N est net:en effet,si $h' \in N$ et si $h' \neq h$, il existe $\sigma \in \Sigma_1$tel que $\sigma h' = h$;de même il existe $\sigma' \in \Sigma_1$tel que $\sigma' h = h'$,et $\sigma\sigma' h = h$;enfin,si $x \in C$,il existe $\sigma \in \Sigma_1$ tel que $\sigma x = h$ .Et tout élément net appartient à N car N est un idéal de (E,Σ_1),donc de (E,Σ),et,si $h \in N$, $\Sigma h \subseteq N$; donc,si $x \in C$,$x \notin \Sigma h$ et x n'est pas net.(E,Σ) a donc une noix $N \neq E$.

Examinons maintenant le cas d'un tas non nécessairement stable.Alors les conditions supplémentaires "stationnaire","transitif",surjectif" sont indépendantes,de sorte qu'entre les conditions étudiées n'existent que les implications triviales déduites de la prop.2.1.

La condition "stationnaire" ne résulte pas des quatre autres d'après la prop.1.Pour les deux autres conditions,les contre-exemples sont tirés du groupoïde suivant,qui sera d'ailleurs utile dans la suite.

Le support de ce groupoïde est l'ensemble N des entiers naturels (positifs ou nul).Sa table de multiplication commence de la façon suivante:

$\top$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	2	3	4	5	6	7	
1	1	0	2	3	4	5	6	
2	2	1	0	5	3	4	8	
3	3	4	1	0	2	7	5	
4	4	3	5	1	0	2	9	
5	5	6	4	2	1	0	3	
6	6	5	7	8	9	1	0	
⋮								

La loi de composition est définie par les axiomes

i) $n\top 0 = n$ pour tout $n \in N$, $0 \top n = n+1$ pour $n > 0$;

ii) si $n,p \geqslant 1$, $n\top p$ est le plus petit nombre que l'on ne peut mettre sous la forme $m\top q$,avec $m<n$ et $q = p$,ou $m = n$ et $q<p$.

On démontre sans peine par récurrence qu'il existe une loi $\top$ et une seule sur N vérifiant i) et ii).Etudions cette loi.

On a la <u>règle de simplification à droite et à gauche</u>. En effet une ligne ne contient jamais deux fois le même élément:pour celle de 0,cela résulte de i);pour les autres,de ii).De même une colonne ne contient jamais deux fois le même élément.

Tout élément figure au moins une fois dans chaque colonne,en sorte qu'<u>il existe des quotients à gauche</u>.Cela est vrai pour la colonne de 0;admettons-le pour les k premières colonnes,et supposons un instant que l'élément r de N ne figure pas dans la colonne de k.Si $t \leqslant r$,t figure dans la colonne de j chaque fois que $j<k$,et dans la ligne n_j^t;il y figure une fois et une seule.Soit n le plus petit entier strictement supérieur à tous les n_j^t ;il n'y a aucun élément inférieur ou égal à r figurant dans les k premières colonnes et simultanément dans la ligne de n ou les suivantes.Soit alors s le nombre d'éléments de N inférieurs ou égaux à r ne figurant pas dans les n ~~pr~~ premières cases de la colonne de k;r est le plus grand de ces éléments; d'après ii),$n\top k$ est le plus petit de ces éléments,$(n+1)\top k$ le suivant,et $(n+s)\top k$ le plus grand,c'est-à-dire r,et l'hypothèse faite sur r était absurde.

On remarque que <u>1 ne figure pas dans la ligne de 0;</u> mais tout élément figure au moins une fois dans chaque ligne sauf celle de 0,en sorte qu'<u>il existe des quotients à droite sauf le quotient</u> de 1 par 0;en effet il est immédiat,par récurrence sur n,que $1\top n = n$ pour tout $n \geqslant 2$,en sorte que tout élément figure dans la ligne de 1;on achève la démonstration comme ci-dessus;la seule différence est que n_{ω}^{1} n'est pas défini,ce qui est sans conséquence pour la suite car 1 ne figure pas dans la ligne de zéro à partir d'un certain rang

Enfin notre groupoïde est simple à droite;en effet 2 figure dans toute ligne,donc tout idéal à droite non vide contient 2, contient toute la ligne de 2 et est impropre.

On peut alors énoncer:

Proposition 4. Il existe un tas injectif stationnaire transitif et non surjectif.

Soit G le groupoïde ci-dessus;le tas G_g est :

-injectif car,pour tous $x,y,z \in N$:

$\gamma_x y = \gamma_x z \Rightarrow x\tau y = x\tau z \Rightarrow y = z$;

-stationnaire car,pour tous $x,y,z \in N$:

$\gamma_x z = \gamma_y z \Rightarrow x\tau z = y\tau z \Rightarrow x = y \Rightarrow \gamma_x = \gamma_y$;

-transitif,car il existe des quotients à gauche,donc

$(\forall x,y \in N)(\exists a \in N)\ \gamma_a x = a\tau x = y$;

-non surjectif car $\gamma_0 x = 0\ x = 1$ est impossible.

Proposition 5. Il existe un tas bijectif stationnaire à élément net,non transitif.

Soit G le groupoïde ci-dessus;le tas G_d est

-injectif et stationnaire,comme G_g ;

-surjectif,car il existe des quotients à gauche,donc

$(\forall x,y \in N)(\exists z \in N)\ \delta_x z = z\tau x = y$;

-à élément net,car 0 figure dans toutes les lignes,

donc $(\forall x \in N)(\exists y \in N)\ \delta_y x = x\tau y = 0$;

-non transitif,car $\delta_x 0 = 0\tau x = 1$ est impossible.

En conclusion:

Proposition 6. Dans un tas injectif à élément net,les conditions stationnaire,surjectif,transitif,sont indépendantes.Dans un tas stable injectif à élément net,ces conditions sont liées par les implications déduites de la prop.2.2 et par aucune autre.

D. Théorèmes d'homomorphisme principal (tas sans zéro).

1. Théorème de base sur les tas injectifs à élément net.

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas injectif à élément net est principal pour une partie H parfaite et nette, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément net.

Soient $\mathcal{C}$ un tas injectif à élément net, et h un élément net. $\mathcal{C}$ est uniprincipal pour h (prop.B.1.2), h est fort (prop.II.D.6.1) et stabilisant (prop.II.D.6.6), donc parfait (prop.II.D.8.6). Donc, si f est un homomorphisme de tas arrivant sur $\mathcal{C}$ et si H est la classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur h, H est parfaite et nette (prop.II.E.3.1c) et f est principal pour H (cor.II.E.7.2).

Réciproquement, soit f un homomorphisme de tas arrivant sur $\mathcal{C}$ et principal pour une partie H parfaite et nette, donc stabilisante ; l'équivalence nucléaire est simplifiable (prop.II.D.6.6), donc $\mathcal{C}$ est injectif (prop.A.1.2); H est indivisible pour l'équivalence nucléaire (prop.II.D.8.1) et non vide, donc s'envoie par f sur un élément du support de $\mathcal{C}$, et cet élément est net (prop.II.E.3.2).

Théorème 2. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) injectif à noix est principal pour une partie H forte, p-forte-g et nette, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément de la noix.

Dans un tas stable, une partie forte, p-forte-g et nette est non vide, stabilisante et disjointe de son r.i., donc parfaite et nette, et réciproquement; l'énoncé résulte alors du théorème 1 et de la prop.B.1.4 sur la noix.

2. Addition de la surjectivité.

Définition 1. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$. H est dit bifranc si et seulement si

$$(\forall \sigma,\tau \in \Sigma)(\exists x \in E)\ \sigma\tau x \in H\ ,$$

donc si et seulement si $H \mathbin{.^{\cdot}} \sigma$ est franc pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Proposition 1. Toute partie bifranche est franche.

En effet toute partie franche est non vide.

Proposition 2. Dans un tas stable, toute partie franche est bifranche.

Ceci résulte de la prop.II.D.4.5.

La notion de partie bifranche tire son intérêt du

Lemme 1. Soit $\mathcal{T}$ un tas uniprincipal pour un élément fort et net; si $\mathcal{T}$ est surjectif, cet élément est bifranc, et il en est de même de son image réciproque par tout homomorphisme de tas arrivant sur $\mathcal{T}$. Réciproquement, tout homomorphisme de tas principal pour une partie forte, sous-stabilisante et bifranche, arrive sur un tas surjectif.

Si $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ est uniprincipal pour $h \in E$ fort et net, et surjectif, alors, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $h \mathbin{.^{\cdot}} \sigma$ est non vide, donc classe de $\mathcal{R}_h$, donc réduit à un élément, donc franc (prop.C.1.4), et h est bifranc.

Si de plus f est un homomorphisme de tas de $\mathcal{T}' = (E',\Sigma')$ sur $\mathcal{T}$, $H = f^{-1}(h)$ est bifranc, car, si $\sigma',\tau' \in \Sigma'$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(\sigma')\varphi(\tau')x = h$, et, si $x' \in f^{-1}(x)$, $\sigma'\tau'x' \in H$ (φ est l'application associée à f).

Réciproquement, si f est un homomorphisme de tas arrivant sur $\mathcal{T}$ et principal pour une partie forte, sous-stabilisante et bifranche H, les classes de l'équivalence nucléaire sont les résiduels à droite (non vides) de H et peut-être W_H; elles sont toutes franches (prop.II.D.5.6), donc tout élément de E est franc, $\mathcal{T}$ est surjectif.

Les théorèmes ci-dessous résultent alors immédiatement des théorèmes 1.1 et 1.2:

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas bijectif à élément net est principal pour une partie H parfaite, nette et bifranche, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément net.

Théorème 2. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) bijectif à noix est principal pour une partie H forte, p-forte-g, nette et franche, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément de la noix.

3. Addition de la transitivité.

Définition 1. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$. H est dit translucide si et seulement si

$$(\forall \sigma \in \Sigma - V_H)(\forall x \in E - W_H)(\exists \tau \in \Sigma) \quad \sigma\tau x \in H ,$$

donc si et seulement si $H \;.^{\cdot}\; \sigma$ est vide ou net sur E^*_H pour tout $\sigma \in \Sigma$.

On notera, au sujet de cette définition, que l'existence de τ tel que $\sigma\tau x \in H$ entraîne $\sigma \notin V_H$, et, si H est sous-stabilisant, $x \notin W_H$.

Proposition 1. Une partie claire est translucide; une partie nette, franche et translucide est claire.

Ceci résulte des définitions.

Proposition 2. Une partie sous-stabilisante est claire si et seulement si elle est nette, franche et translucide.

Ceci résulte des prop. 1 et II.D.5.5.

La notion de partie translucide tire son intérêt du

Lemme 1. Soit f un homomorphisme principal pour une partie forte et nette H; le tas où arrive f est transitif si et seulement si H est translucide.

Soit $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ le tas départ de f. Le tas arrivée est transitif si et seulement si tous les éléments de son support sont nets (prop. C.1.1), donc si et seulement si toute classe de l'équivalence nucléaire est nette (prop. II.E.3.1c), donc si et seulement si, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $H \;.^{\cdot}\; \sigma$ est vide ou net, donc si et seulement si H est translucide puisque H est nette.

De ce lemme résultent alors les théorèmes suivants:

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas injectif transitif est principal pour une partie forte, stabilisante, nette et translucide, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

La condition est nécessaire d'après le théorème 1.1 et le lemme.Et,si elle est remplie,le tas image est transitif (lemme 1) et l'équivalence nucléaire est simplifiable (prop.II.D.6.6) donc le tas image est injectif (prop.A.1.2).La dernière assertion résulte de la prop.C.1.3.

On notera qu'il n'est plus nécessaire de supposer que H soit p-fort-g (d'où abandon de l'hypothèse "parfait").

Théorème 2. Un homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) injectif et simplef est principal pour une partie H forte,nette et translucide,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Ceci résulte du théorème 1,et de la prop.C.1.2.

Théorème 3. Un homomorphisme de tas qui arrive sur un tas bijectif transitif est principal pour une partie H forte,stabilisante, claire et bifranche,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Il résulte du théorème 1 et du lemme 2.1 que l'on peut choisir H forte,stabilisante,nette,translucide et bifranche;le théorème résulte alors des prop. 2 et 2.1.

Théorème 4. Un homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) bijectif et simple est principal pour une partie H forte et claire,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Ceci résulte du théorème 3 et des prop.2.2 et II.D. 4.3.

4.Addition de la stationnarité.

Ici la prop.II.D.7.2 et la prop.A.2.2 donnent immédiatement le

Lemme 1. Un homomorphisme de tas principal pour une partie forte et nette H arrive sur un tas stationnaire si et seulement si H est robuste.

De ce lemme et des théorèmes précédents résultent les

Théorème 1 (resp.2,3,4). Un homomorphisme de tas qui arrive sur un tas stationnaire et injectif à élément net (resp. bijectif à élément net,injectif transitif,bijectif transitif) est principal pour une partie H parfaite,robuste et nette (resp. parfaite,robuste, nette et bifranche; forte,robuste,stabilisante,nette et translucide; forte,robuste,stabilisante,claire et bifranche) et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément net (toute classe pour les deux dernières conditions.).

Ceci résulte du théorème 1.1 (resp. 2.1,3.1,3.3).

Dans le cas des tas stables,les conditions obtenues en ajoutant "stationnaire" aux conditions des quatre théorèmes antérieurs sont équivalentes (prop.C.2.2).Des conditions obtenues sur H:

fort,robuste,p-fort-g,net
fort,robuste,p-fort-g,net,franc
fort,robuste,net,translucide
fort,robuste,clair

les seconde et quatrième sont sans intérêt;on garde la quatrième parce que sa condition est plus simple:

Théorème 5. Un homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) injectif stationnaire à noix (qui est alors surjectif et simple) est principal pour une partie H forte,robuste,et,au choix, p-forte-g et nette,ou nette et translucide,ou claire,et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

5.Récapitulation.

Le tableau ci-dessous contient tous les théorèmes de cette section.

Dans la première colonne est un numéro d'ordre utile pour les chapitres suivants,la dernière colonne donnant la référence ordinaire correspondante.La seconde colonne contient les hypothèses faites sur l'image,la troisième les hypothèses faites sur H.La lettre S ajoutée au numéro d'ordre indique un théorème concernant les tas stables.L'astérisque indique que l'on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

1	Injectif élément net	parfait net	1.1
1S	injectif à noix	fort,p-fort-g net	1.2
2	bijectif élément net	parfait net,bifranc	2.1
2S	bijectif à noix	fort,p-fort-g net,franc	2.2
3	injectif transitif	fort,stabilisant net,translucide	3.1
3S	injectif simple	fort, net,translucide *	3.2
4	bijectif transitif	fort,stabilisant, clair,bifranc	3.3
4S	bijectif simple	fort, clair *	3.4
5	injectif stationnaire élément net	parfait,robuste, net	4.1
6	bijectif stationnaire élément net	parfait,robuste, net,bifranc	4.2
7	injectif stationnaire transitif	fort,robuste, stabilisant, * net,translucide	4.3
8	bijectif stationnaire transitif	fort,robuste, stabilisant * clair,bifranc	4.4
5S 7S 8S	injectif stationnaire à noix	fort,robuste,p-fort-g,net(5S) " " ,net,translucide (7S) " " ,clair(8S) *	4.5

E.Tas avec zéro faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

1.Tas z-transitifs ou z-surjectifs.

Proposition 1. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et z un zéro de $\mathcal{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes,et entraînent que z est seul zéro de $\mathcal{C}$,ou bien que $\mathcal{C}$ est permis et E à deux éléments:

a- Σ est transitif sur $E - z$;

b- $(\forall x,y \in E - z)(\exists \sigma \in \Sigma)\ \sigma x = y$;

c- tout élément de $E - z$ est z-net.

Définition 1. Un tas est dit z-transitif si et seulement si z en est un zéro et s'il vérifie une des conditions de la prop.1.

Dans un tas stable, la z-transitivité s'exprime au moyen des idéaux.

Proposition 2. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas stable et z un zéro de $\mathcal{C}$; les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est z-transitif;

b- $\mathcal{C}$ est z-séparé et admet E ou E - z comme z-noix;

c- les seuls idéaux propres de $\mathcal{C}$ sont $\{z\}$ et éventuellement E - z, et $\mathcal{C}$ est z-séparé.

Ceci résulte de la prop.B.3.2.

L'alternative dans b- et c- provient de z qui n'est peut-être pas z-net; si z est z-net, la z-noix est E; sinon c'est E - z, on en verra des exemples; en conséquence, la z-transitivité n'est pas équivalente à la z-simplicité dans un tas stable (celle-ci étant définie par l'absence d'idéaux propres différents de $\{z\}$).

Proposition 3. Un tas z-injectif et z-transitif est uniprincipal pour tout élément différent de z.

Ceci résulte de la prop.B.2.3. Cette proposition est analogue à la prop.C.1.3, dont la notion de tas z-transitif permet précisément de donner une réciproque:

Proposition 4. Un tas stable équiprincipal est transitif ou z-transitif.

Si un tel tas n'a que des zéros, c'est un tas permis; or un tas permis dont le support contient trois éléments distincts a, b, c n'est pas équiprincipal car $a \,\dot{\cdot}\, b = a \,\dot{\cdot}\, c = \emptyset$ et $b \neq c$; un tas permis équiprincipal a donc un support d'un ou deux éléments, donc est transitif ou z-transitif. Si un tel tas n'a pas que des zéros, il est uniprincipal pour un élément qui n'est pas un zéro, et il résulte de la prop.A.4.1 que, si ce tas est sans zéro, tous ses éléments sont nets, et que, s'il a un zéro z, ce zéro est unique et est le r.i. de tout élément différent de z, donc que tout élément différent de z est z-net.

Proposition 5. Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et z un zéro de $\mathcal{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- tout élément de $\Sigma - (z \,\dot{\cdot}\, E)$ est une surjection;

b- $(\forall x\in E)(\forall \sigma\in \Sigma - (z\ {}^{\bullet}.\ E))(\exists y\in E)\ \sigma y = x$;

c- tout élément de E est franc sur $\Sigma - (z\ {}^{\bullet}.\ E)$.

Notons que $z\ {}^{\bullet}.\ E$,s'il est non vide,est réduit à κ_z;il est non vide si et seulement si z est un bizéro.

Définition 2. Un tas est dit z-surjectif si et seulement si il admet z comme zéro et vérifie une des conditions de la prop.5.

Définition 3. Un tas est dit z-bijectif si et seulement si il admet z comme zéro et est à la fois z-injectif et z-surjectif.

2.Adjonction d'un zéro ou bizéro à un tas de la section précédente.

On se donne un tas $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$,un ensemble d'un élément $\{z\}$ disjoint de E et on utilise les notations de la déf.I.F.3.1.

Proposition 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est injectif;

b- $\mathcal{C}\cup z$ est injectif;

c- $\mathcal{C}\cup z$ est z-injectif;

d- $\mathcal{C}+ z$ est z-injectif.

$\mathcal{C}+ z$ n'est jamais injectif.

a $\Rightarrow$ b :si σ est une injection,$\tilde{\sigma}$ est une injection.

b $\Rightarrow$ c;

c $\Rightarrow$ d : si $x,y\in\tilde{E}$ et $\tau\in\tilde{\Sigma}\cup\{\kappa_z\}$ sont tels que $\tau x = \tau y \neq z$,on a $\tau\in\tilde{\Sigma}$;donc,si $\mathcal{C}\cup z$ est z-injectif, $x = y$;$\mathcal{C}+ z$ est alors z-injectif.$\mathcal{C}+ z$ n'est jamais injectif car κ_z n'est pas une injection ($\tilde{E}$ ayant au moins deux éléments).

d $\Rightarrow$ a : si $\mathcal{C}+ z$ est z-injectif et si $x,y\in E,\sigma\in\Sigma$ sont tels que $\sigma x = \sigma y$,on a $\tilde{\sigma}x = \tilde{\sigma}y \neq z$,d'où $x = y$.

Proposition 2. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est stationnaire;

b- $\mathcal{C}\cup z$ est z-stationnaire;

c- $\mathcal{C}+ z$ est z-stationnaire.

$\mathcal{C}+ z$ n'est jamais stationnaire;$\mathcal{C}\cup z$ est stationnaire si et seulement si $\mathcal{C}$ n'a qu'un multiplicateur.

a $\Rightarrow$ b : si $\mathcal{C}$ est stationnaire et si $x\in\tilde{E},\tilde{\sigma},\tilde{\tau}\in\tilde{\Sigma}$ sont tels que $\tilde{\sigma}x = \tilde{\tau}x \neq z$,alors $x\neq z$ et,de $\sigma x = \tilde{\sigma}x = \tilde{\tau}x = \tau x$

résulte $\sigma = \tau$ et $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$.

b $\Rightarrow$ c : si $\mathcal{C} \cup z$ est z-stationnaire et si $x \in \tilde{E}$, $\tau, \nu \in \Sigma \cup \{\kappa_z\}$ sont tels que $\tau x = \nu x \neq z$,alors $\tau, \nu \in \tilde{\Sigma}$ et $\tau = \nu$.

c $\Rightarrow$ a : si $\mathcal{C} + z$ est z-stationnaire et si $x \in E$, $\sigma, \tau \in \Sigma$ sont tels que $\sigma x = \tau x$,alors $\tilde{\sigma} x = \tilde{\tau} x \neq z$ et $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$,d'où $\sigma = \tau$.

Enfin,si $\mathcal{C}$ a un zéro x et est stationnaire,$\mathcal{C}$ n'a qu'un multiplicateur,car si $\sigma, \tau \in \Sigma$, $\sigma x = x = \tau x$ entraîne $\sigma = \tau$;~~d~~un tas n'ayant qu'un seul multiplicateur est évidemment stationnaire.Donc $\mathcal{C} + z$ n'est jamais stationnaire,$\mathcal{C} \cup z$ l'est si et seulement si $\mathcal{C}$ n'a ~~qu~~ qu'un multiplicateur.

Proposition 3. Soit $h \in E$; les conditions suivantes sont équivalentes:

a- h est net dans $\mathcal{C}$;

b- h est z-net dans $\mathcal{C} \cup z$;

c- h est z-net dans $\mathcal{C} + z$.

z est net dans $\mathcal{C} + z$ et $W_z = E$ dans $\mathcal{C} \cup z$.

a $\Rightarrow$ b : si h est net et si $x \in \tilde{E} - z = \dot{E}$,il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\tilde{\sigma} x = \sigma x = h$,donc h est z-net dans $\mathcal{C} \cup z$;d'ailleurs $z \in W_h$ (prop.II.D.5.1).

b $\Rightarrow$ c ;

c $\Rightarrow$ a : si h est z-net dans $\mathcal{C} + z$ et si $x \in E = \tilde{E} - z$, il existe $\tau \in \tilde{\Sigma} \cup \{\kappa_z\}$ tel que $\tau x = h$;comme $h \neq z, \tau \in \tilde{\Sigma}$,et il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\tilde{\sigma} = \tau$,donc que $\sigma x = \tau x = h$.

z est net dans $\mathcal{C} + z$ car,pour tout $x \in \tilde{E}$, $\kappa_z x = z$ .Dans $\mathcal{C} \cup z$, $z \notin W_z$ mais si $x \in E$, $\tilde{\Sigma} x = \Sigma x \subseteq E$ et $z \notin \tilde{\Sigma} x$;donc $W_z = E$.

Proposition 4. Soit $N \in \mathfrak{P}(E)$;les conditions suivantes sont équivalentes:

a- N est une noix dans $\mathcal{C}$;

b- N est une z-noix dans $\mathcal{C} \cup z$;

c- $N \cup \{z\}$ est une z-noix dans $\mathcal{C} + z$.

$\mathcal{C} \cup z$ et $\mathcal{C} + z$ sont toujours z-séparés.

La dernière assertion est immédiate;si $\mathcal{C}$ est stable, la proposition résulte des prop. 3,B.1.4,B.3.2 et I.F.3:1. Elle résulte aussi,dans le cas général,des prop.I.F.4.1 et I.F.4.2.

Proposition 5. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est transitif;

b- $\mathcal{C} \vee z$ est z-transitif;

c- $\mathcal{C} + z$ est z-transitif.

$\mathcal{C} \vee z$, $\mathcal{C} + z$ ne sont jamais transitifs.

a $\Longleftrightarrow$ b $\Longleftrightarrow$ c résulte de la prop.3.Enfin un tas ayant un zéro n'est pas transitif.

Proposition 6. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est surjectif;

b- $\mathcal{C} \hat{\vee} z$ est surjectif;

c- $\mathcal{C} \vee z$ est z-surjectif;

d- $\mathcal{C} + z$ est z-surjectif.

$\mathcal{C} + z$ n'est jamais surjectif.

a $\Rightarrow$ b :si σ est une surjection,$\tilde{\sigma}$ est une surjection.

b $\Rightarrow$ c;

c $\Rightarrow$ d puisque les lois de $\mathcal{C} \vee z$ et $\mathcal{C} + z$ diffèrent précisément de $z \cdot \tilde{\tilde{E}}$.

d $\Rightarrow$ a : si $\tilde{\sigma}$ est une surjection, σ est une surjection.

$\mathcal{C} + z$ n'est jamais surjectif car κ_z n'est pas une surjection ($\tilde{E}$ ayant au moins deux éléments).

3.Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Soit $\mathcal{C} = (E, \Sigma)$ un tas et z un zéro de $\mathcal{C}$.

On se propose dans la section suivante de donner des théorèmes d'homomorphisme où l'image a un zéro z et est un tas z-injectif à élément z-net différent de z,supposé éventuellement injectif, surjectif,z-stationnaire,z-transitif,z-surjectif.

Ces conditions sont liées par certaines implications. Tout d'abord,pour les conditions injectif et surjectif:

Proposition 1. $\mathcal{C}$ est surjectif si et seulement si il est z-surjectif et sans bizéro.

Dans la suite,la condition "surjectif" est remplacée par la non-existence d'un bizéro (donnée par la prop.A.4.1c).

Proposition 2. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a- $\mathcal{C}$ est injectif;

b- $\mathcal{C}$ est z-injectif et z consistant;

c- il existe un tas $\mathcal{C}'$ injectif tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \vee z$.

$a \Longrightarrow b$: si $\mathcal{C}$ est injectif,il est z-injectif,et,si $x \in E$ et $\sigma \in \Sigma$, $\sigma x = z = \sigma z$ entraîne $x = z$,donc z est consistant (déf.II.D.6.4).

$b \Longrightarrow c$: si z est consistant,il existe (prop.I.F.3.2) un tas $\mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup z$;$\mathcal{C}$ étant injectif,$\mathcal{C}'$ est injectif (prop.2.1).

$c \Longrightarrow a$: d'après la prop.2.1.

Dans la suite,la condition "injectif" est remplacée par la consistance de z.

Proposition 3. Si z est consistant,$\mathcal{C}$ est sans bizéro.

Si $\mathcal{C}$ avait un bizéro,ce serait z (prop.I.F.1.1),et z ne serait pas consistant,car il existe $x \in E - z$,et $\kappa_z x = z$.

Entre les autres conditions,on a les implications:

Proposition 4. Un tas z-transitif a un élément z-net différent de z.

Ceci résulte immédiatement des définitions.

Proposition 5. Un tas stable,injectif,z-stationnaire et à élément z-net différent de z est surjectif et z-transitif.

La prop.2 permet de déduire cette implication de la prop.C.2.2 et des prop. 1 , 2.2 , 2.5 , 2.6 .On verra ci-dessous que l'hypothèse que z est consistant ne peut être sŭpprimée (prop 4.6 et 4.7).

4.Indépendance des conditions obtenues.

On va essayer de prouver qu'entre les conditions étudiées (z-injectivité et existence d'un élément z-net différent de z, plus éventuellement z-surjectivité,z-transitivité,z-stationnarité,consistance de z,absence de bizéro),considérées successivement dans un tas quelconque et dans un tas stable,n'existent que les implications triviales déduites de celles du paragraphe précédent.

Pour les tas non nécessairement stables,on a:

Proposition 1. Il existe un tas ayant un zéro z,bijectif, z-stationnaire,à élément z-net différent de z,qui n'est pas z-transitif

Soit $\mathcal{C}$ un tas bijectif,stationnaire,à élément net et non transitif (prop.C.3.5);$\mathcal{C}\cup z$ répond à la question (prop. 2.1 , 2.2 , 2.3 , 2.5 , 2.6).

Proposition 2. Il existe un tas ayant un zéro z,injectif, z-stationnaire,z-transitif,qui n'est pas z-surjectif.

Soit $\mathcal{C}$ un tas injectif,stationnaire,transitif,et non surjectif (prop.C.3.4);$\mathcal{C}\cup z$ répond à la question (prop. 2.1 , 2.2 , 2.5 , 2.6).

Proposition 3. Il existe un tas stable ayant un zéro z,bijectif,z-transitif et non z-stationnaire.

Soit $\mathcal{C}$ un tas stable bijectif,transitif et non stationnaire (prop.C.3.1);$\mathcal{C}\cup z$ répond à la question (prop. 2.1 , 2.2 , 2.5 , 2.6 et I.F.3.1).

Proposition 4. Il existe un tas stable ayant un zéro z,z-bijectif,z-stationnaire et z-transitif,qui possède un bizéro.

Soit $\mathcal{C}$ un tas stable bijectif stationnaire et transitif (par exemple,le couple d'un espace affine et du groupe des translations);$\mathcal{C}+z$ répond à la question (prop. 2.1 , 2.2 , 2.5 , 2.6 et I.F.3.1).

Des prop. 1 à 4 résulte la

Proposition 5. Dans un tas ayant un zéro z,z-injectif,à élément z-net différent de z,les conditions suivantes: z-stationnaire, z-transitif,z-surjectif,sans bizéro,z consistant, ne sont liées par aucune implication autre que celles des prop. 3.3 et 3.4,sauf peut-être la consistance de z qui pourrait résulter de l'absence de bizéro et de certaines des autres conditions.En particulier,dans un tas ayant un zéro z,z-injectif,à élément z-net différent de z,les conditions importantes: z-stationnaire,z-transitif,z-surjectif, sont indépendantes.

Examinons maintenant le cas d'un tas stable.

Proposition 6. Il existe un tas stable ayant un zéro z,z-injectif,z-stationnaire et z-transitif,qui n'est pas z-surjectif.

Considérons le tas $\mathcal{C}$ de support $\{z,a,b\}$ dont la table est celle de gauche:

	z	a	b
κ_z	z	z	z
ε_a	z	a	z
σ_a	z	z	a
ε_b	z	z	b
σ_b	z	b	z

	κ_z	ε_a	σ_a	ε_b	σ_b
κ_z	κ_z	κ_z	κ_z	κ_z	κ_z
ε_a	κ_z	ε_a	σ_a	κ_z	κ_z
σ_a	κ_z	κ_z	κ_z	σ_a	ε_a
ε_b	κ_z	κ_z	κ_z	ε_b	σ_b
σ_b	κ_z	σ_b	ε_b	κ_z	κ_z

on vérifie que les multiplicateurs se composent conformément au tableau de droite, en sorte que $\mathcal{C}$ est stable. Tout élément différent de z figure une fois au plus dans chaque ligne, donc $\mathcal{C}$ est z-injectif; une fois au plus dans chaque colonne, donc $\mathcal{C}$ est z-stationnaire; une fois au moins dans chaque colonne (sauf celle de z), donc $\mathcal{C}$ est z-transitif. $\mathcal{C}$ n'est pas z-surjectif car ε_a, par exemple, n'est pas surjectif.

<u>Proposition 7. Il existe un tas stable ayant un zéro z, z-injectif, surjectif, z-stationnaire et à élément z-net différent de z, qui n'est pas z-transitif.</u>

Soit N l'ensemble des entiers positifs ou nul. Considérons le tas $\mathcal{C}$ de support N dont les multiplicateurs sont les applications σ_n , σ_n étant défini pour tout $n \in N$ par

$$(\forall x \in N) \begin{cases} \text{si} & x \geqslant n \ , \sigma_n x = x - n \\ \text{si} & x \leqslant n \ , \sigma_n x = 0 \end{cases}$$

0 est un zéro de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est stable car, si $x, n, p \in N$:

$$\text{si} \quad x \geqslant n+p \ , \ \sigma_p x \geqslant n \quad \text{et} \quad \sigma_n \sigma_p x = x-(n+p)$$
$$\text{si} \quad x \leqslant n+p \ , \ \sigma_p x \leqslant n \quad \text{et} \quad \sigma_n \sigma_p x = 0$$

d'où $\sigma_n \sigma_p = \sigma_{n+p}$.

$\mathcal{C}$ est 0-injectif car, si $x, y, n \in N$:

$$\sigma_n x = \sigma_n y \neq 0 \Rightarrow x > n, y > n \Rightarrow x - n = y - n \Rightarrow x = y \ ;$$

$\mathcal{C}$ est 0-stationnaire car, si $n, p, x \in N$:

$$\sigma_n x = \sigma_p x \neq 0 \Rightarrow x > n, x > p \Rightarrow x - n = x - p \Rightarrow n = p \Rightarrow \sigma_n = \sigma_p \ ;$$

$\mathcal{C}$ est surjectif car σ_n est surjectif pour tout $n \in N$; en effet, si $x \in N$, $\sigma_n(x+n) = x$.

1 est 0-net et différent de 0; car si $x \in N - 0$, $x \geqslant 1$, et $\sigma_{x-1} x = 1$.

$\mathfrak{C}$ n'est pas 0-transitif; en effet, pour tous $x, n \in N$, $\sigma_n x \leqslant x$; par exemple $\sigma_n 1 = 2$ est impossible, et 2 n'est pas 0-net.

Des prop. 3,4,6,7 résulte la

Proposition 8. Dans un tas stable ayant un zéro z, z-injectif, à élément z-net différent de z, les conditions suivantes: z-stationnaire, z-transitif, z-surjectif, sans bizéro, z consistant, ne sont liées par aucune implication autre que celles qui résultent des prop. 3.3, 3.4 et 3.5, sauf peut-être la consistance de z qui pourrait résulter de certaines autres conditions. En particulier, dans un tas stable ayant un zéro z, z-injectif, à élément z-net différent de z, les conditions importantes: z-stationnaire, z-transitif, z-surjectif, sont indépendantes.

Quant à la consistance de z, on peut déduire des contre-exemples ci-dessus qu'elle ne résulte pas des groupements d'hypothèses suivants: stable, z-bijectif, z-stationnaire, z-transitif (prop.4); stable, z-bijectif, z-stationnaire, à élément z-net différent de z et sans bizéro (prop.7).

F. Théorèmes d'homomorphisme principal.

1. Théorème de base sur les tas z-injectifs à élément z-net $\neq$ z.

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z, z-injectif, à élément z-net différent de z est principal pour une partie H parfaite et floue, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément z-net différent de z. L'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant, et a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Soient $\mathfrak{C} = (E, \Sigma)$ un tas ayant un zéro z, z-injectif, à élément z-net différent de z, et h un tel élément. $\mathfrak{C}$ est uniprincipal pour h (prop.B.2.3); et $z = W_h$ (prop.A.4.3b) est un idéal; $\mathfrak{P}_h$ est simplifiable sur $E - z$, donc h est fort (prop.II.D.6.1) et stabilisant (prop. II.D.6.6); par suite h est parfait (prop.II.D.8.6) et flou. Soit alors f un homomorphisme de tas arrivant sur $\mathfrak{C}$; si H est la classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur h,H est parfaite et floue (prop.II.E.3.1c),$W_H = f^{-1}(z)$ (prop.II.E.2.1) et f est principal pour H.

Réciproquement,soit f un homomorphisme de tas arrivant sur $\mathcal{T}$ et principal pour une partie H parfaite et floue,donc non triviale (prop.II.D.8.7);$\mathcal{T}$ a un zéro $z = f(W_H)$ (prop.A.4.1);l'équivalence nucléaire est simplifiable sur le complémentaire de W_H (prop.II. D.6.6),donc $\mathcal{T}$ est z-injectif (prop.A.1.2);H est non vide et indivisible pour l'équivalence nucléaire,donc $f(H)$ est un élément de E qui est z-net car son résidu est contenu dans z (prop.II.E.22),et différent de z car H est disjoint de W_H.

$\mathcal{T}$ est injectif si et seulement si z est consistant (prop.E.3.2),donc si et seulement si W_H est consistant (prop.II.E.3.1c) (voir aussi prop.II.D.6.7).$\mathcal{T}$ a un bizéro si et seulement si H est imprécise (prop.A.4.2).

Théorème 2. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z,z-injectif,z-séparé et à z-noix est principal pour une partie H parfaite et floue,et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément différent de z de la z-noix.L'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant,et a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Ceci résulte du théorème 1 et de la prop.B.3.2.

La condition "parfait" a été laissée dans l'énoncé car ici une seule des cinq conditions qui la composent ("stabilisant") est trivialement vérifiée.

2.Addition de la z-surjectivité.

Définition 1. Soient $\mathcal{T} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$.H est dit loyal si et seulement si :

$$(\forall\sigma \in \Sigma - V_H)(\forall\tau \in \Sigma - W_H')(\exists x \in E) \quad \sigma\tau x \in H \ ,$$

donc si et seulement si $H \,.^{\cdot}\, \sigma$ est vide ou franche sur $\Sigma - W_H'$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Proposition 1. H est bifranc si et seulement si il est franc et loyal.

Ceci résulte des définitions et de la prop.D.2.1.

La notion de partie loyale tire son intérêt du

Lemme 1. Soit f un homomorphisme de tas principal pour une partie H forte,sous-stabilisante,floue et non triviale;le tas image $\mathcal{C}$ a donc (prop.A.4.1)un zéro z = $f(W_H)$;$\mathcal{C}$ est z-surjectif si et seulement si H est loyale.

Soient $\mathcal{C}' = (E',\Sigma')$ le tas départ,$\mathcal{C} = (E,\Sigma)$.$\mathcal{C}$ est z-surjectif si et seulement si tout élément de E est franc sur $\Sigma - (z \cdot. E)$,donc si et seulement si toute classe de l'équivalence d'homomorphisme est franche sur $\Sigma' - (W_H \cdot. E')$ (prop.II.E.3.1b),soit sur $\Sigma' - W'_H$ (prop.II.D.4.1).Or W_H est franc (prop.II.D.5.5).H étant forte,$\mathcal{C}$ est z-surjectif si et seulement si H est loyale.

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z,z-bijectif,à élément z-net différent de z,est principal pour une partie H parfaite,loyale et floue,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément z-net différent de z.L'image est un tas injectif (donc bijectif) si et seulement si W_H est consistant,surjectif si et seulement si H est précise,et en ce cas H peut être choisie bifranche.

Le théorème résulte du lemme et du théorème 1.1,sauf en ce qui concerne la dernière assertion.Notons d'abord que,si l'image est un tas injectif,c'est un tas surjectif (prop. E.3.1 , E.3.2 et E.3.3 Et si l'image est un tas surjectif,toute classe de l'équivalence nucléaire est franche,donc on trouvera H bifranche (prop.1);réciproquement,si H est bifranche,l'image est un tas surjectif (lemme D.2.1).

Théorème 2. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z,z-bijectif,z-séparé et à z-noix, est principal pour une partie H parfaite,loyale et floue,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément différent de z de la z-noix.L'image est un tas injectif (donc bijectif) si et seulement si W_H est consistant,surjectif si et seulement si H est précise,et en ce cas H peut être choisie franche.

Ceci résulte du théorème 1 et de la prop.B.3.2.

3. Addition de la z-transitivité.

Cette addition ne nécessite pas de définition nouvelle à cause du

Lemme 1. Soit f un homomorphisme de tas, principal pour une partie H forte, sous-stabilisante, floue et non triviale; le tas image $\mathcal{C}$ a alors un zéro $z = f(W_H)$ (prop.A.4.1); $\mathcal{C}$ est z-transitif si et seulement si H est translucide.

$\mathcal{C}$ est z-transitif si et seulement si tout élément différent de z est z-net, donc si et seulement si toute classe de l'équivalence nucléaire est nette sur E_H^* (prop.II.E.3.1a), sauf peut-être W_H; donc si et seulement si H est translucide (déf.D.3.1).

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z, z-injectif et z-transitif, est principal pour une partie H forte, stabilisante, floue, translucide et non triviale, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z. L'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant, a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

La condition est nécessaire d'après le théorème 1.1 et le lemme, qui donnent H parfaite, floue et translucide, donc non triviale. Réciproquement, si elle est remplie, l'équivalence nucléaire est simplifiable sur E_H^* (prop.II.D.6.6), donc le tas image est z-injectif; et z-transitif d'après le lemme. Les dernières assertions sont habituelles.

Théorème 2. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z, z-injectif et z-transitif, est principal pour une partie H forte, floue, translucide et non triviale, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z. L'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant, a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Ceci résulte du théorème 1.

Théorème 3. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z , z-bijectif et z-transitif,est principal pour une partie H forte,stabilisante,floue,translucide,loyale et non triviale,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z . L'image est un tas injectif (donc bijectif) si et seulement si W_H est consistant,et surjectif si et seulement si H est précise,et alors on peut choisir H bifranche.

Ceci résulte du théorème 1 et du lemme 2.1,ou bien du théorème 2.1 et du lemme 1.

Théorème 4. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z,z-bijectif et z-transitif,est principal pour une partie H forte,floue,translucide,loyale et non triviale, et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z . L'image est un tas injectif (donc bijectif) si et seulement si W_H est consistant,et surjectif si et seulement si H est précise,et alors on peut choisir H franche.

Ceci résulte du théorème 3.

4.Addition de la z-stationnarité.

Ici la prop.II.D.7.2 et la prop.A.2.2 donnent immédiatement le

Lemme 1. Soit f un homomorphisme de tas,principal pour une partie H forte,sous-stabilisante,floue et non triviale;le tas image $\mathcal{C}$ a alors un zéro $z = f(W_H)$ (prop.A.4.1);$\mathcal{C}$ est z-stationnaire si et seulement si H est robuste.

Les théorèmes du cas stable sont donnés après à cause des implications particulières à ce cas (prop.E.3.5).

Théorème 1. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z , z-injectif,z-stationnaire à élément z-net différent de z est principal pour une partie H parfaite,robuste et floue,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément z-net différent de z . L'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant,a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Ceci résulte du théorème 1.1 et du lemme.

Théorème 2. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z , z-bijectif, z-stationnaire à élément z-net différent de z est principal pour une partie H parfaite, robuste, loyale et floue, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément z-net différent de z. L'image est un tas injectif (donc bijectif) si et seulement si W_H est consistant, et surjectif si et seulement si H est précise, et alors on peut choisir H bifranche.

Ceci résulte du théorème 2.1 et du lemme.

Théorème 3. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z , z-injectif, z-stationnaire et z-transitif, est principal pour une partie H forte, robuste, stabilisante, floue, translucide et non triviale, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z . L'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant, a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Ceci résulte du théorème 3.1 et du lemme.

Théorème 4. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant un zéro z , z-bijectif, z-stationnaire et z-transitif, est principal pour une partie H forte, robuste, stabilisante, floue, translucide, loyale et non triviale, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z. L'image est un tas injectif (donc bijectif) si et seulement si W_H est consistant, surjectif si et seulement si H est précise, et alors on peut choisir H bifranche.

Ceci résulte du théorème 3.3 et du lemme.

Dans le cas stable, on n'a pas d'implications tant que l'image n'est pas supposée injective. On rejette donc ce cas à la fin et on a un théorème de plus.

Théorème 5. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z , z-injectif, z-stationnaire, z-séparé et à z-noix, est principal pour une partie H parfaite, robuste et floue, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément différent de z de la z-noix.

L'image a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Ceci résulte du théorème 1.2 et du lemme.

Théorème 6. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z , z-bijectif,z-stationnaire,z-séparé et à z-noix,est principal pour une partie H parfaite,robuste,loyale et floue,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément différent de z de la z-noix.L'image est un tas surjectif si et seulement si H est précise,et alors on peut prendre H franche.

Ceci résulte du théorème 2.2 et du lemme.

Théorème 7. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z , z-injectif,z-stationnaire et z-transitif,est principal pour une partie H forte,robuste,floue,translucide et non triviale,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z . L'image a un bizéro si et seulement si H est imprécise.

Ceci résulte du théorème 3.2 et du lemme.

Théorème 8. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z , z-bijectif,z-stationnaire,z-transitif,est principal pour une partie H forte,robuste,floue,translucide, loyale et non triviale,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z . L'image est un tas surjectif si et seulement si H est précise,et alors on peut choisir H franche.

Ceci résulte du théorème 3.4 et du lemme.

Théorème 9. Tout homomorphisme de tas stables qui arrive sur un tas (stable) ayant un zéro z , injectif,z-stationnaire,z-séparé et à z-noix (donc surjectif et z-transitif) est principal pour une partie H parfaite,robuste,floue et de r.i. consistant, ou bien forte,robuste,floue,translucude,non triviale et de r.i. consistant, et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z.

Ceci résulte des théorèmes 5 , 7 et de la prop.E.3.5.

5. Récapitulation.

Le tableau ci-dessous contient tous les théorèmes de cette section. Les conventions sont les mêmes qu'au §.D.5, sauf l'astérisque qui indique que l'on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur z .

Z1	z-injectif élt. z-net $\neq$ z	parfait flou	1.1
Z1S	z-injectif z-sép., z-noix	parfait flou	1.2
Z2	z-bijectif élt. z-net $\neq$ z	parfait loyal, flou	2.1
Z2S	z-bijectif z-sép., z-noix	parfait loyal; flou	2.2
Z3	z-injectif z-transitif	fort, stabilisant, non trivial flou, translucide *	3.1
Z3S	z-injectif z-transitif	fort, non trivial flou, translucide	3.2
Z4	z-bijectif z-transitif	fort, stabilisant, non trivial flou, loyal, translucide *	3.3
Z4S	z-bijectif z-transitif	fort, non trivial flou, loyal, translucide	3.4
Z5	z-injectif z-stationnaire élt. z-net $\neq$ z	parfait, robuste flou	4.1
Z5S	z-injectif z-stationnaire z-sép., z-noix	parfait, robuste flou	4.5
Z6	z-bijectif z-stationnaire élt. z-net $\neq$ z	parfait, robuste flou, loyal	4.2
Z6S	z-bijectif z-stationnaire z-sép., z-noix	parfait, robuste flou, loyal	4.6
Z7	z-injectif z-stationnaire z-transitif	fort, robuste, stabilisant, non trivial flou; translucide	4.3
Z7S	z-injectif z-stationnaire z-transitif	* fort, robuste, non trivial flou, translucide	4.7
Z8	z-bijectif z-stationnaire z-transitif	fort, robuste, stabilisant, non trivial flou, translucide, loyal *	4.4

Z8S	z-bijectif z-stationnaire z-transitif	fort,robuste,non trivial flou,translucide,loyal	4.8
Z9S	injectif z-stationnaire z-noix	parfait,robuste,flou,r.i. cons. ou {fort,robuste,non trivial {flou,translucide,de r.i. cons. — *	4.9

Dans tous ces théorèmes,l'image est sans bizéro si et seulement si H est précis;dans les énoncés Z2 , Z4 , Z6 , Z8 ,on peut alors choisir H bifranc,et franc dans les énoncés Z2S , Z4S , Z6S , Z8S , l'image étant alors surjective.Dans tous les énoncés sauf Z5S , Z6S , Z7S , Z8S ,l'image est un tas injectif si et seulement si W_H est consistant;l'image est alors sans bizéro.Dans les énoncés du cas stable, il est inutile alors de supposer l'image z-séparée à cause de la

Proposition 1. Un tas ayant un zéro z et injectif est z-séparé.

z est alors consistant (prop.E.3.2).

G. Comparaison de $\mathcal{L}_H^{\Sigma}$ et $\mathcal{L}_H^{\hat{\Sigma}}$.

1. Homomorphismes principaux et foncteur ^.

Proposition 1. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas injectif et si $h \in E$ est Σ-net, $\hat{\mathcal{C}}$ est injectif et h est $\hat{\Sigma}$-net.

$\hat{\mathcal{C}}$ est injectif puisque tout produit d'injections est une injection, et h est $\hat{\Sigma}$-net car $\Sigma \subseteq \hat{\Sigma}$.

Proposition 2. Si $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ est un tas ayant un zéro z, et z-injectif, et si $h \in E - z$ est Σ-z-net, $\hat{\mathcal{C}}$ est z-injectif et h $\hat{\Sigma}$-z-net.

h est Σ-z-net car $\Sigma \subseteq \hat{\Sigma}$; et $\hat{\mathcal{C}}$ est z-injectif, car z est un zéro de $\hat{\mathcal{C}}$, et, si $x,y \in E, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$,

$$\sigma_1 \dots \sigma_n x = \sigma_1 \dots \sigma_n y \neq z \Rightarrow \sigma_2 \dots \sigma_n x = \sigma_2 \dots \sigma_n y \neq z \Rightarrow \dots \Rightarrow x = y .$$

Soit alors un homomorphisme de tas f de $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}$; f est aussi un homomorphisme de $\hat{\mathcal{C}}_1$ sur $\hat{\mathcal{C}}$ (prop.I.B.3.5); les prop. 1 et 2 expriment que, dans les circonstances usuelles où $\mathcal{C}$ est uniprincipal, $\hat{\mathcal{C}}$ est uniprincipal, et pour les même éléments; donc, dans les circonstances usuelles où f est principal (dans $\mathcal{C}_1$), f est principal (dans $\hat{\mathcal{C}}_1$) et pour les mêmes parties H; en ce cas on a $\mathcal{L}_H^{\Sigma} = \mathcal{L}_H^{\hat{\Sigma}}$.

(Disons tout de suite que ceci ne peut s'appliquer aux théorèmes qui précèdent, sinon pour donner une nouvelle définition (plus compliquée) de l'équivalence nucléaire; c'est-à-dire que les remarques ci-dessus ne permettent pas de ramener les uns aux autres les théorèmes du cas stable et ceux du cas général. En effet les théorèmes du cas général concernent des tas $\mathcal{C}$ soumis à des conditions intraduisibles dans $\hat{\mathcal{C}}$ (par exemple, l'existence d'un élément Σ-net n'équivaut pas à celle d'un élément $\hat{\Sigma}$-net) et ne peuvent être déduits du cas stable. Les théorèmes que l'on pourrait déduire du cas stable concernent des tas $\mathcal{C}$ tels que $\hat{\mathcal{C}}$ ait certaines propriétés; mais alors rien ne permet d'affirmer que l'homomorphisme considéré est principal dans le tas départ initial ; ces théorèmes s'écrivent d'ailleurs immédiatement, et ne sauraient avoir d'application intéressante aux groupoïdes, car en ce cas on raisonne directement avec les tas stables adéquats.)

Il est intéressant d'obtenir l'égalité $\mathcal{L}_H^{\Sigma} = \mathcal{L}_H^{\hat{\Sigma}}$

sous des hypothèses élémentaires plus faibles.

2. Comparaison de $\mathcal{D}^{\Sigma}_{H}$ et $\mathcal{D}^{\hat{\Sigma}}_{H}$.

Soient $\mathcal{C} = (E,\Sigma)$ un tas et $H \in \mathfrak{P}(E)$.

<u>Proposition 1. Si H est sous-stabilisant, $W^{\Sigma}_{H} = W^{\hat{\Sigma}}_{H}$.</u>

Comme $W^{\Sigma}_{H} = (E-H)\,\dot{.}\,\Sigma$, on a toujours $W^{\hat{\Sigma}}_{H} \leq W^{\Sigma}_{H}$. Et, si $x \in W^{\Sigma}_{H} - W^{\hat{\Sigma}}_{H}$, il existe $\sigma_1,\dots,\sigma_n \in \Sigma$ tels que $\sigma_1 \dots \sigma_n x \in H$; comme W^{Σ}_{H} est un idéal et que $x \in W^{\Sigma}_{H}$, on a $\sigma_2 \dots \sigma_n x \in W_H$, ce qui est absurde.

<u>Proposition 2. Si H est sous-stabilisant et $\hat{\Sigma}$-fort, $\mathcal{D}^{\Sigma}_{H} = \mathcal{D}^{\hat{\Sigma}}_{H}$.</u>

Tout d'abord, pour tout $x \in E$, $H\,\dot{.}_{\Sigma}\, x = (H\,\dot{.}_{\hat{\Sigma}}\, x) \cap \Sigma$ et il en résulte que $\mathcal{D}^{\hat{\Sigma}}_{H} \subseteq \mathcal{D}^{\Sigma}_{H}$. Réciproquement, si $x, y \in E$ sont tels que $x\, \mathcal{D}^{\Sigma}_{H}\, y$, et si $x, y \in W^{\Sigma}_{H}$, alors $x, y \in W^{\hat{\Sigma}}_{H}$ (prop.1) et $x\, \mathcal{D}^{\hat{\Sigma}}_{H}\, y$; si $x, y \notin W^{\Sigma}_{H}$ il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma x, \sigma y \in H$; H étant $\hat{\Sigma}$-fort, cela entraîne $x\, \mathcal{D}^{\hat{\Sigma}}_{H}\, y$

Il reste à chercher des circonstances dans lesquelles H est $\hat{\Sigma}$-fort.

<u>Proposition 3. Si H est classe pour une équivalence compatible et simplifiable, H est $\hat{\Sigma}$-fort.</u>

Une équivalence Σ-compatible et Σ-simplifiable est en effet $\hat{\Sigma}$-compatible et $\hat{\Sigma}$-simplifiable, et H est $\hat{\Sigma}$-fort (prop.II.D. 6.1).

<u>Proposition 4. Si H est fort et stabilisant, et si $\mathcal{D}^{\Sigma}_{H}$ est compatible, H est $\hat{\Sigma}$-fort; par suite, $W^{\Sigma}_{H} = W^{\hat{\Sigma}}_{H}$ et $\mathcal{D}^{\Sigma}_{H} = \mathcal{D}^{\hat{\Sigma}}_{H}$.</u>

Soient $x, y \in E, \sigma_1, \dots, \sigma_p, \tau_1, \dots, \tau_q \in \Sigma$.

Montrons, par récurrence sur p, que $\sigma_1 \dots \sigma_p x \in H$, $\sigma_1 \dots \sigma_p y \in H$ entraînent qu'il existe $\nu \in \Sigma$ tel que $\nu x \in H, \nu y \in H$. C'est vrai si $p = 1$; si c'est vrai pour $p-1$, et si $\sigma_1 \dots \sigma_p x, \sigma_1 \dots \sigma_p y \in H$, il existe $\tau \in \Sigma$ tel que $\tau\sigma_3 \dots \sigma_p x, \tau\sigma_3 \dots \sigma_p y \in H$ puisque H est stabilisant, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\nu \in \Sigma$ tel que $\nu x, \nu y \in H$.

Par suite, si $\sigma_1 \dots \sigma_p x \in H, \sigma_1 \dots \sigma_p y \in H$, on a, si H est fort, $x\, \mathcal{D}^{\Sigma}_{H}\, y$, et, si $\mathcal{D}^{\Sigma}_{H}$ est compatible, $\tau_2 \dots \tau_q x\, \mathcal{D}^{\Sigma}_{H}\, \tau_2 \dots \tau_q y$, donc $\tau_1 \dots \tau_q x \in H$ entraîne $\tau_1 \dots \tau_q y \in H$; et H est $\hat{\Sigma}$-fort.

IV. THEOREMES D'HOMOMORPHISMES LATERAUX EN THEORIE DES GROUPOIDES.

Le passage de la théorie des tas à la théorie des groupoïdes s'effectue en l'occurence à l'aide des côtés. En effet, de la définition même des côtés, résulte, pour tout côté c et tout théorème T du chapitre précédent;

Théorème T. Tout homomorphisme de tas qui arrive sur un tas ayant la propriété P est principal pour une partie H ayant la propriété P', et réciproquement.

un théorème de théorie des groupoïdes:

Théorème T_c. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un groupoïde ayant la propriété P(c) est principal(c) pour une partie H ayant la propriété P'(c), et réciproquement.

Chaque côté fournit donc, à partir des 17 théorèmes de théorie des tas, 17 théorèmes de théorie des groupoïdes. Dans la suite, on utilisera seulement les côtés $g, \hat{g}, m, \hat{b}$; les résultats relatifs aux côtés d et $\hat{d}$ s'en déduisent par dualité.

A. Etude des conditions portant sur H.

1. Conditions de netteté.

Soient $G = (E,\tau)$ un groupoïde, $H \in \mathfrak{P}(E)$ et c un côté.

H est : net(c) si et seulement si

$(\forall x \in E)(\exists \sigma \in c(G))\quad \sigma x \in H$

franc(c) si et seulement si

$(\forall \sigma \in c(G))(\exists x \in E)\quad \sigma x \in H$

précis(c) si et seulement si

$(\forall \tau \in c(G))(\exists x \in E)(\exists \sigma \in c(G))\quad \sigma\tau x \in H$

clair(c) si et seulement si

$(\forall x \in E)(\forall \sigma \in c(G))(\exists \tau \in c(G))\quad \sigma\tau x \in H$.

Proposition 1. net(c) $\Longrightarrow$ précis(c) ; franc(c) $\Longrightarrow$ précis(c) ;

clair(c) $\Rightarrow$ franc(c) ;et,si c est stable, clair(c) $\Rightarrow$ net(c)..

Ceci résulte des prop. 2,3 du §.II.D.4.

On prend maintenant $c \in \{g,\hat{g},d,\hat{d},m,\hat{b}\}$.

Proposition 2. net(g) $\Leftrightarrow$ franc(d) .

En effet,pour tous $x,y \in E$, $\gamma_x y = x \top y = \delta_y x$,donc $((\forall y \in E)(\exists x \in E)\ \gamma_x y\ \ H) \Leftrightarrow ((\forall y \in E)(\exists x \in E)\ \delta_y x\ \ H)$.

Proposition 3. franc($\hat{g}$) $\Rightarrow$ franc(g) et net(g) $\Rightarrow$ net($\hat{g}$).

En effet $g(G) \subseteq \hat{g}(G)$?

Proposition 4. précis(g) $\Rightarrow$ net(m).

Si H est précis(g) et si $x \in E$,il existe $a,y \in E$ tels que $\gamma_a\gamma_x y = \gamma_a\delta_y x \in H$,et,comme $\gamma_a\delta_y \in m(G)$,H est net(m).

Proposition 5. franc(m) $\Rightarrow$ clair(g).

Soient $a,x \in E$;$\gamma_a\delta_x \in m(G)$,et,si H est franc(m),il existe $b \in E$ tel que $\gamma_a\delta_x b = \gamma_a\gamma_b x \in H$;et H est clair(g).

Proposition 6. franc(m) $\Rightarrow$ clair($\hat{g}$).

Soient $x \in E$ et $\gamma \in \hat{g}(G)$; $\gamma\delta_x \in m(G)$,et,si H est franc(m), il existe $y \in E$ tel que $\gamma\delta_x y = \gamma\gamma_y x \in H$;et H est clair(g).

Proposition 7. franc(m),clair(m),franc($\hat{b}$),clair($\hat{b}$) sont équivalents.

franc(m) $\Rightarrow$ franc($\hat{b}$);en effet franc(m) $\Rightarrow$ clair($\hat{g}$) $\Rightarrow$ franc($\hat{g}$) (prop. 6,1) et de même franc(m) $\Rightarrow$ franc($\hat{d}$);or on sait que $\hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G)$ (prop.I.D.5.2);donc,si H est franc(m), pour tout $\beta \in \hat{b}(G)$ il existe $x \in E$ tel que $\beta x \in H$ et H est franc($\hat{b}$);

franc($\hat{b}$) $\Rightarrow$ franc(m) puisque $m(G) \subseteq \hat{b}(G)$.

franc(m) $\Rightarrow$ clair(m);soient $x \in E$ et $\mu \in m(G)$; $\mu\gamma_{x\top x} \in m(G)$,et,si H est franc(m),il existe $y \in E$ tel que $\mu\gamma_{x\top x} y \in H$; or $\mu\gamma_{x\top x} y = \mu\delta_y(x \top x) = \mu\delta_y\gamma_x x$ et $\mu' = \delta_y\gamma_x \in m(G)$ est tel que $\mu\mu' x \in H$, en sorte que H est clair(m).

clair(m) $\Rightarrow$ franc(m) (prop.1).

clair(m) $\Rightarrow$ clair($\hat{b}$);en effet clair(m) $\Rightarrow$ franc(m) $\Rightarrow$ clair($\hat{g}$) (prop. 1,6) et de même clair(m) $\Rightarrow$ clair($\hat{d}$);par suite,si $x \in E$ et $\beta \in \hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G)$,et si H est clair(m),donc ($\hat{g}$) et ($\hat{d}$), il existe σ,dans $\hat{g}(G)$ si $\beta \in \hat{g}(G)$,dans $\hat{d}(G)$ si $\beta \in \hat{d}(G)$,dans m(G) si

$\beta\in m(G)$,mais toujours dans $\hat{b}(G)$,tel que $\beta\sigma x\in H$;et H est clair($\hat{b}$).

clair($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ clair(m);soient $x\in E$ et $\mu\in m(G)$;$\mu^2\in\hat{b}(G)$, et,si H est clair($\hat{b}$),il existe $\beta\in\hat{b}(G)$ tel que $\mu^2\beta x\in H$;comme $\mu\beta\in m(G)$, H est clair(m).

<u>Proposition 8. précis($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ net(m).</u>

Soit $x\in E$;si H est précis($\hat{g}$),il existe $\gamma\in\hat{g}(G)$ et $y\in E$ tels que $\gamma\gamma_x y =_H \gamma\delta_y x\in H$;comme $\gamma\delta_y\in m(G)$,H est net(m).

<u>Proposition 9. net(m),précis(m),net($\hat{b}$),précis($\hat{b}$) sont équivalents.</u>

net(m) $\Longrightarrow$ net($\hat{b}$) puisque $m(G)\subsetneq\hat{b}(G)$.

net($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ précis($\hat{b}$) (prop.1).

précis($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ net(m);soit $x\in E$; $\delta_x\delta_x\in\hat{b}(G)$,et,si H est précis($\hat{b}$),il existe $y\in E$ et $\beta\in\hat{b}(G)$ tels que $\beta\delta_x\delta_x y = \beta\delta_x\gamma_y x\in H$; comme $\beta\delta_x\gamma_y\in m(G)$,H est net(m).

net(m) $\Longrightarrow$ précis(m) (prop.1);

précis(m) $\Longrightarrow$ net(m);soit $x\in E$;$\gamma_x\delta_x\in m(G)$,et,si H est précis(m),il existe $y\in E$ et $\mu\in m(G)$ tels que $\mu\gamma_x\delta_x y = \mu\gamma_x\gamma_y x\in H$; comme $\mu\gamma_x\gamma_y\in m(G)$,H est net(m).

Les prop. 1 à 9 permettent de tracer un diagramme des implications connues entre toutes ces notions:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \text{net}(\hat{g}) \arrow[drr, Rightarrow] & & & & \\
 & \text{franc}(m) \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{clair}(\hat{g}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{franc}(\hat{g}) \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \text{précis}(\hat{g}) \arrow[r, Rightarrow] & \text{précis}(m) \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
\text{clair}(\hat{b}) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{clair}(m) \arrow[r, Rightarrow] & \text{clair}(g) \arrow[r, Rightarrow] & \text{franc}(g) \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{net}(d) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{précis}(d) \arrow[r, Rightarrow] & \text{net}(\hat{b}) \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{net}(m) \\
 & \text{franc}(\hat{b}) \arrow[ur, Leftrightarrow] & & & & \text{net}(\hat{d}) & & \text{précis}(\hat{b}) \arrow[ur, Leftrightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Des 24 notions étudiées,16 au plus sont distinctes d'après les prop. 7,9,2 et sa duale.Nous ignorons si les implications sont strictes.

Si le groupoïde considéré est un demi-groupe $D=(E,.)$ on a des implications supplémentaires.Tout d'abord $g(D) = \hat{g}(D)$,$d(D) = \hat{d}(D)$ (prop.I.D.6.2).

<u>Proposition 10. Dans un demi-groupe,</u>

<u>net(m) $\Longleftrightarrow$ précis(g) $\Longleftrightarrow$ précis(d) $\Longleftrightarrow$ bilatèrement net .</u>

En effet H est net(m) si et seulement si

$(\forall x\in E)(\exists a,b\in E)\ axb\in H$,

et précis(g) si et seulement si
$(\forall a\in E)(\exists x,b\in E)\ abx\in H$;

ces conditions sont équivalentes;dualement net(m) $\Leftrightarrow$ précis(d);on reconnait dans la première condition la condition "bilatèrement net" de CROISOT [8],que l'on appellera dans la suite "médianement net",ou m-net.

Proposition 11. Dans un demi-groupe, franc(m) $\Leftrightarrow$ clair(g) $\Leftrightarrow$ clair(d) $\Leftrightarrow$ totalement net.

H est franc(m) si et seulement si
$(\forall a,b\in E)(\exists x\in E)\ axb\in H$,
et clair(g) si et seulement si
$(\forall a,x\in E)(\exists b\in E)\ abx\in H$;

ces conditions sont équivalentes;dualement franc(m) $\Leftrightarrow$ clair(d);on reconnait dans la première condition la condition "totalement net" introduite par DESQ [9].

Proposition 12. Dans un demi-groupe,net(g) $\Leftrightarrow$ net à gauche.

H est net(g) si et seulement si
$(\forall x\in E)(\exists a\in E)\ ax\in H$

on reconnait dans cette condition la condition "net à gauche" de DUBREIL [11].

Dans un demi-groupe,les 24 conditions latérales de netteté se réduisent à quatre conditions connues,selon le tableau:

Conditions	$g = \hat{g}$	$d = \hat{d}$	m	$\hat{b}$
net	net à gauche	net à droite	m. net	m. net
franc	net à droite	net à gauche	t. net	t. net
précis	m. net	m. net	m. net	m. net
clair	t. net	t. net	t. net	t. net

2.Résidus.

Soient $G = (E,\tau)$ un groupoïde,$H\in\mathfrak{P}(E)$ et c un côté.

De même que l'équivalence principale définie par H dans G_c a été notée $\mathcal{L}_H^c$,le résidu intérieur associé à H dans G_c sera noté W_H^c,et le résidu extérieur V_H^c.

Proposition 1. $W_H^g = \delta^{-1}(V_H^d), W_H^d = \gamma^{-1}(V_H^g)$.

En effet $W_H^c = (E-H) .^{\cdot} c(G)$, $V_H^c = (E-H)^{\cdot}._{c(G)}E$;
la proposition résulte alors de la prop.II.A.3.1.

Proposition 2. $W_H^{\hat{b}} = W_H^{\hat{g}} \cap W_H^{\hat{d}} \cap W_H^m$; $W_H^{\hat{g}} \subseteq W_H^g$.

En effet $\hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G)$ et $g(G) \subseteq \hat{g}(G)$.

Proposition 3. $W_H^{\hat{g}}$ est un idéal à gauche, $W_H^{\hat{d}}$ un idéal à droite, W_H^m et $W_H^{\hat{b}}$ des idéaux bilatères.

Ceci résulte des prop. 2,3 du §.II.D.5.

Proposition 4. Dans un demi-groupe, $W_H^g = {}_H W$, $W_H^d = W_H$, $W_H^m = \gamma^{-1}(W_H'^{g}) = \delta^{-1}(W_H'^{d}) = {}_H W \,^{\cdot}.\, E = W_H \,.^{\cdot}\, E$.

${}_H W$ et W_H sont les résidus de DUBREIL[11], W'_H le résidu de CROISOT[8]; les dernières égalités résultent de la prop.II.D.4.1. $W_H^{\hat{b}}$ est alors déterminé par la prop.2.

Dans les énoncés qui nous intéressent, le r.i. intervient par des conditions de trivialité, ou de consistance.

H est trivial(c) si et seulement si $H \subseteq E - c(G)E$.

Proposition 5. Les conditions suivantes sont équivalentes: a- H est trivial(g); b- H est trivial($\hat{g}$); c- H est trivial(d); d- H est trivial($\hat{d}$); e- H est trivial($\hat{b}$); f- $H \subseteq E - E\tau E$.

Il est clair que $a \Leftrightarrow c \Leftrightarrow f$.

D'autre part trivial($\hat{g}$) entraîne trivial(g) car $g(G) \subseteq \hat{g}(G)$; réciproquement, trivial(g) entraîne trivial($\hat{g}$) car $\hat{g}(G)E \subseteq g(G)\,E = E\tau E$; en effet, pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$, $\gamma_{a_1} \cdots \gamma_{a_n} E \subseteq \gamma_{a_1} E \subseteq E\tau E$. Donc $a \Leftrightarrow b$; de même $c \Leftrightarrow d$ et $e \Leftrightarrow a \,\&\, c$.

Proposition 6. Trivial($\hat{b}$) entraîne trivial(m); dans un demi-groupe, H est trivial(m) si et seulement si il est contenu dans $E - E^3$

En effet $m(G) \subseteq \hat{b}(G)$, et, si G est un demi-groupe, $m(G)E = E^3$.

Proposition 7. Dans tout groupoïde:

consistant(g) $\Leftrightarrow$ consistant($\hat{g}$) $\Leftrightarrow$ consistant à droite,
consistant(d) $\Leftrightarrow$ consistant($\hat{d}$) $\Leftrightarrow$ consistant à gauche,
consistant($\hat{b}$) $\Leftrightarrow$ consistant.

En effet, les parties consistantes d'un tas sont les complémentaires des idéaux, et de même les parties consistantes (d'un côté éventuellement) d'un groupoïde sont les complémentaires des idéaux (de l'autre côté).

3. Conditions supplémentaires de netteté.

Soient $G = (E, \tau)$ un groupoïde, $H \in \mathfrak{P}(E)$ et c un côté.

H est bifranc(c) si et seulement si
$(\forall \sigma, \tau \in c(G))(\exists x \in E)\ \sigma\tau x \in H$;

et on vérifie immédiatement que H est transducide(c) si et seulement si

$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\upsilon \in c(G))(\ \sigma y \in H, \upsilon x \in H \Rightarrow (\exists \tau \in c(G))\ \sigma\tau x \in H\ )$,

et loyal(c) si et seulement si

$(\forall y,t \in E)(\forall \sigma,\tau,\upsilon \in c(G))(\ \sigma y \in H,\ \upsilon\tau t \in H \Rightarrow (\exists x \in E)\ \sigma\tau x \in H\ )$

(cf. déf. III.D.3.1 et III.F.2.1).

On sait que, si c est stable, bifranc(c) $\Longleftrightarrow$ franc(c) (prop. 1,2 du §.III.D.2); en général bifranc(c) $\Longrightarrow$ franc(c). Il reste à étudier les conditions bifranc(c) et bifranc(d) dans un groupoïde.

Proposition 1. franc($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ bifranc(g).

En effet franc($\hat{g}$) $\Longleftrightarrow$ bifranc($\hat{g}$), et, puisque $g(G) \subseteq \hat{g}(G)$ bifranc($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ bifranc(g).

Ceci permet de placer bifranc(g) dans le diagramme d'implications du §.1.

On sait que franc(c) et loyal(c) $\Longleftrightarrow$ bifranc(c) (prop.III.F.2.1). Entre les diverses conditions loyal(c) existent les implications:

Proposition 2. loyal($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ loyal(g), et loyal($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ loyal($\hat{g}$), loyal($\hat{d}$) et loyal(m) .

En effet $g(G) \subseteq \hat{g}(G) \subseteq b(G)$, $m(G) \subseteq b(G)$.

Proposition 3. précis et loyal, ($\hat{g}$), ($\hat{d}$) et (m) $\Longrightarrow$ loyal($\hat{b}$).

En effet $\hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G)$; si $\sigma \in \hat{b}(G)$, on a, par exemple, $\sigma \in \hat{g}(G)$, et, si H est précis-et-loyal ($\hat{g}$), $H \,.^{\boldsymbol{\cdot}}\, \sigma$ est vide ou franc($\hat{g}$), donc vide ou franc($\hat{b}$); donc, si H est précis-et-loyal ($\hat{g}$), ($\hat{d}$) et (m), il est loyal($\hat{b}$).

Enfin, on sait que net-franc-et-translucide (c) entraîne clair(c), et que clair(c) entraîne translucide(c) (prop.III.D.3.1).

Proposition 4. net-et-translucide ($\hat{g}$), ($\hat{d}$) et (m) $\Longrightarrow$ translucide($\hat{b}$).

En effet $\hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G)$; si H est net-et-translucide ($\hat{g}$), ($\hat{d}$) et (m), et si $\sigma \in \hat{b}(G)$, on a, par exemple, $\sigma \in \hat{g}(G)$, et $H \,.^{\boldsymbol{\cdot}}\, \sigma$ est vide ou net($\hat{g}$), donc vide ou net($\hat{b}$), en sorte que H est translucide($\hat{b}$).

<u>Proposition 5. Dans un demi-groupe, translucide(g) $\Leftrightarrow$ translucide(d).</u>

H est translucide(g) si et seulement si

$(\forall x,y,a,c \in E)(\ cx \in H, ay \in H \Rightarrow (\exists b \in E)\ abx \in H\ )$,

translucide(d) si et seulement si

$(\forall x,y,a,c \in E)(\ xc \in H, ya \in H \Rightarrow (\exists b \in E)\ xba \in H\ )$;

ces conditions ne diffèrent que par les lettres qui désignent les éléments.

Le lecteur verra sans peine que, dans un groupoïde quelconque, les deux conditions diffèrent par la disposition des parenthèses dans l'écriture de abx .

4. Conditions de force.

Soient $G = (E,\tau)$ un groupoïde, $H \in \mathfrak{P}(E)$ et c un côté.

H est fort(c) si et seulement si

$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau \in c(G))(\ \sigma x \in H, \sigma y \in H, \tau x \in H \Longrightarrow \tau y \in H\ )$

p-fort-g(c) si et seulement si

$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma \in c(G))(\ x \in H, y \in H, \sigma x \in H \Longrightarrow \sigma y \in H\ )$

robuste(c) si et seulement si

$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau,\rho,\nu \in c(G))(\ \rho\sigma x \in H, \rho\tau x \in H, \nu\sigma y \in H \Longrightarrow \nu\tau y \in H\ )$.

Proposition 1. fort($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ fort ($\hat{g}$),($\hat{d}$) et (m) ; fort($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ fort(g) .

En effet, lorsque $c_1(G) \subseteq c_2(G)$, fort(c_2) $\Longrightarrow$ fort(c_1).

Proposition 2. p-fort-g($\hat{b}$) $\Longleftrightarrow$ p-fort-g ($\hat{g}$),($\hat{d}$) et (m) (et de même pour p-fort-d).

En effet $\hat{b}(G) = \hat{g}(G) \cup \hat{d}(G) \cup m(G)$, donc l'implication qui définit H p-fort-g est vérifiée pour tout $\sigma \in \hat{b}(G)$ si et seulement si elle l'est pour tout $\sigma \in \hat{g}(G)$, tout $\sigma \in \hat{d}(G)$ et tout $\sigma \in m(G)$.

Proposition 3. p-fort-g($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ p-fort-g(g).

En effet $g(G) \subseteq \hat{g}(G)$.

(Proposition 4. t-fort($\hat{b}$) $\Longleftrightarrow$ t-fort(m), quand $H \cap W_H^m = \emptyset$.

L'implication vers la droite résulte des prop. 1 , 2. Réciproquement, si H est t-fort(m), et disjoint de W_H^m, H est soit vide et alors t-fort($\hat{b}$); soit non vide et alors classe de $\mathfrak{L}_H^m$ différente de W_H^m (prop. 1,2 du § II.D.8), donc il existe $\mu \in m(G)$ tel que $H = H \,.^{\cdot}\, \mu$; pour tout $x \in E$, $\mu x \in H \Longleftrightarrow x \in H$. H est alors fort($\bar{\bar{b}}$) car, si $x,y \in E$ et $\sigma,\tau \in \bar{\bar{b}}(G)$ sont tels que $\sigma x \in H, \sigma y \in H, \tau x \in H$, alors $\mu\sigma x \in H, \mu\sigma y \in H, \mu\tau x \in H$ et, comme $\mu\sigma, \mu\tau \in m(G)$ et que H est fort(m), $\mu\tau y \in H$ et $\tau y \in H$. H, étant fort($\bar{\bar{b}}$), est t-fort($\hat{b}$) (prop.II.D.8.5).)

Proposition 5. fort(d) $\Longleftrightarrow$ fort(g).

En remplaçant $g(G)$ et $d(G)$ par leur définition, il vient que H est fort(g) si et seulement si

$(\forall x,y,a,b \in E)(\ a\tau x \in H, a\tau y \in H, b\tau x \in H \Longrightarrow b\tau y \in H\ )$

et fort(d) si et seulement si

$(\forall x,y,a,b \in E)(\ x\tau a \in H, y\tau a \in H, x\tau b \in H \Longrightarrow y\tau b \in H\ )$;

ces conditions ne diffèrent que par les lettres qui désignent les éléments.

Proposition 6. fort(m) $\Longrightarrow$ robuste(g).

Si H est fort(m), et si $x,y,a,b,c,d \in E$ sont tels que $\gamma_c\gamma_a x = \gamma_c\delta_x a \in H$, $\gamma_c\gamma_b x = \gamma_c\delta_x b \in H$, $\gamma_d\gamma_a y = \gamma_d\delta_y a \in H$, comme $\gamma_c\delta_x, \gamma_d\delta_y \in m(G)$, on a $\gamma_d\delta_y b = \gamma_d\gamma_b y \in H$ et H est robuste(g).

Les conditions robuste(g) et robuste(d) diffèrent, le lecteur le verra sans peine, par la disposition des parenthèses.

Proposition 7. robuste($\hat{b}$) $\Longrightarrow$ robuste ($\hat{g}$),($\hat{d}$) et (m) ; robuste($\hat{g}$) $\Longrightarrow$ robuste(g).

En effet $g(G) \subseteq \hat{g}(G) \subseteq \hat{b}(G)$, $m(G) \subseteq \hat{b}(G)$.

Si G est un demi-groupe D = (E,.), on a des implications supplémentaires. Tout d'abord fort(g) et fort($\hat{g}$), p-fort-g(g) et p-fort-g($\hat{g}$) , robuste(g) et robuste($\hat{g}$) , sont deux à deux équivalents.

Proposition 8. Dans un demi-groupe,
fort(g) $\Longleftrightarrow$ fort(d) $\Longleftrightarrow$ fort .

Ceci résulte de l'écriture des conditions (prop.5, dém.); "fort" est la condition classique de DUBREIL[11].

Proposition 9. Dans un demi-groupe,
fort(m) $\Longleftrightarrow$ robuste(g) $\Longleftrightarrow$ robuste(d) $\Longleftrightarrow$ bilatèrement fort .

En effet H est fort(m) si et seulement si

$(\forall x,y,a,b,c,d \in E)(axb \in H, ayb \in H, cxd \in H \Longrightarrow cyd \in H)$,

et robuste(g) si et seulement si

$(\forall x,y,a,b,c,d \in E)(cax \in H, cbx \in H, day \in H \Longrightarrow bdy \in H)$;

ces conditions ne diffèrent que par les lettres qui désignent les éléments; dualement fort(m) $\Longleftrightarrow$ robuste(d) ; enfin on reconnait dans la première la condition "bilatèrement fort" de CROISOT[8], que nous appelons dans la suite médianement fort, ou m-fort.

5.Conditions sous-stabilisant,stabilisant,parfait.

Les deux premières ne sont à envisager que dans des tas non nécessairement stables,donc seulement dans G_g et $G_{\hat{d}}$,$G = (E,\tau)$ étant un groupoïde qu'on ne supposera pas associatif.Soit $H \in \mathfrak{P}(E)$.

H est sous-stabilisant(g) si et seulement si

$$(\forall x,a,b \in E)(\ a\tau(b\tau x) \in H \implies (\exists c \in E)\ c\tau x \in H\ ),$$

et stabilisant(g) si et seulement si

$$(\forall x,y,a,b \in E)(\ a\tau(b\tau x) \in H,\ a\tau(b\tau y) \in H \implies (\exists c \in E)\ c\tau x \in H, c\tau y \in H\ ).$$

H est parfait(c),c étant un côté,si et seulement si il est non vide,fort(c),p-fort-g(c),stabilisant(c) et disjoint de W_H^c.

Proposition 1. Si H est stabilisant(g),disjoint de W_H^g et parfait($\hat{g}$),H est parfait(g).

H est alors non vide,fort(g) (prop.4.1),p-fort-g(g) (prop.4.3),donc parfait(g). De même:

Proposition 2. Si H est parfait($\hat{b}$) et disjoint de $W_H^{\hat{g}}$ (resp. $W_H^{\hat{d}}$,W_H^m),H est parfait($\hat{g}$) (resp. $\hat{d}$,m).

H est alors non vide,fort ($\hat{g}$),($\hat{d}$) et (m) (prop.4.1) et p-fort-g ($\hat{g}$),($\hat{d}$) et (m) (prop.4.2).

Proposition 3. Dans un demi-groupe, parfait(g) et parfait à gauche, parfait(d) et parfait à droite , parfait(m) et "bilatèrement" parfait ,sont deux à deux équivalents pour tout $H \neq \emptyset$.

Ces conditions sont dues à DUBREIL [11] et CROISOT [8];elles ne sont pas définies pour la partie vide.Pour un sous-ensemble non vide,parfait à gauche,par exemple,équivaut à fort et contenu dans une classe de l'équivalence principale,différente du résidu, donc équivaut à parfait(g).Dans la suite,on dira médianement parfait au lieu de bilatèrement parfait.

B. Etude des conditions portant sur le groupoïde image (cas sans zéro).

Soit $G = (E, \ )$ un groupoïde.

1. Injectivité.

Proposition 1. Pour tout groupoïde,
injectif(g) $\Longleftrightarrow$ injectif($\hat{g}$) $\Longleftrightarrow$ simplifiable à gauche
injectif(d) $\Longleftrightarrow$ injectif($\hat{d}$) $\Longleftrightarrow$ simplifiable à droite
injectif($\hat{b}$) $\Longleftrightarrow$ simplifiable .

L'ensemble des injections de E vers E est stable; par suite, injectif(g) $\Longleftrightarrow$ injectif($\hat{g}$) , injectif(d) $\Longleftrightarrow$ injectif($\hat{d}$) , injectif($\hat{b}$) $\Longleftrightarrow$ injectif(b) $\Longleftrightarrow$ injectif (g) et (d) . Enfin il est clair que G est injectif(g) si et seulement si il vérifie la règle de simplification à gauche, nous disons qu'il est simplifiable à gauche; de même à droite; simplifiable est mis pour: simplifiable à droite et à gauche.

Proposition 2. Un groupoïde est injectif(m) si et seulement si il est simplifiable.

Un groupoïde simplifiable est injectif($\hat{b}$) (prop.1), donc injectif(m). Réciproquement, si G est injectif(m) et si $a, b, c \in E$ sont tels que $a\tau b = a\tau c$, on a $\delta_{a\gamma_a} b = (a\tau b)\tau a = (a\tau c)\tau a = \delta_{a\gamma_a} c$, et, comme $\delta_{a\gamma_a} \in m(G)$, $b = c$, donc G est simplifiable à gauche; dualement, G est simplifiable à droite, donc simplifiable.

2. Surjectivité.

Proposition 1. Pour tout groupoïde, les conditions de chaque ligne sont équivalentes:

a- surjectif(g), surjectif($\hat{g}$) et existence des quotients à droite;
b- surjectif(d), surjectif($\hat{d}$) et existence des quotients à gauche;
c- surjectif($\hat{b}$) et existence des quotients à droite et à gauche.

Il est clair que G est surjectif(g) (resp. d) si et seulement si il vérifie l'axiome d'existence des quotients à droite (resp. à gauche); on finit comme pour le cas injectif.

Proposition 2. Un groupoïde est surjectif(m) si et seule-

<u>ment si il vérifie l'axiome d'existence des quotients à droite et à gauche.</u>

Un groupoïde vérifiant cet axiome est surjectif($\hat{b}$) (prop.1), donc surjectif(m). Réciproquement, si G est surjectif(m), et si $a,b \in E$, $\gamma_a \delta_b \in m(G)$ est une surjection, donc aussi γ_a, et de même δ_b; donc G vérifie l'axiome d'existence des quotients à droite et à gauche.

<u>Proposition 3. Pour tout groupoïde, les conditions suivantes sont équivalentes:</u>
<u>a- G est bijectif(m); b- G est bijectif($\hat{b}$); c- G est un quasi-groupe.</u>

Ceci résulte des prop. 1, 2, 1.1, 1.2.

3. Existence d'éléments nets; noix.

Les résultats du §.A.1 permettent de traduite aisément l'existence d'un élément net(c) dans un groupoïde lorsque c est un des côtés étudiés dans ce chapitre.

Si c est stable, l'existence d'un élément net(c) équivaut à celle d'une noix(c), qui est alors l'ensemble des éléments nets(c) (prop.III.B.1.4).

<u>Proposition 1. Une noix($\hat{g}$) (resp. $\hat{d}$, $\hat{b}$) est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) non vide minimum.</u>

Ceci résulte de la prop.I.E.3.2.

On dira désormais <u>noix à gauche</u> (resp. <u>noix à droite</u>, <u>noix</u>).

<u>Proposition 2. Une noix(m) est une noix($\hat{b}$) et réciproquement.</u>

Ceci résulte de la prop.A.1.9. On peut aussi le montrer directement.

4. Transitivité.

Proposition 1. Un groupoïde est transitif(g) (resp. d) si et seulement si il vérifie l'axiome d'existence des quotients à gauche (resp. à droite).

Ceci résulte des définitions.

Proposition 2. Un groupoïde est transitif ($\hat{g}$) (resp. $\hat{d}$, $\hat{b}$, m) si et seulement si il est simple à gauche (resp. simple à droite, simple, simple).

Ceci résulte des prop. III.C.1.2 et I.E.3.2, et, dans le cas m, de la prop. 3.2 (un groupoïde est dit simple (d'un côté) si et seulement si il n'a pas d'idéal propre (de ce côté)).

Proposition 3. surjectif(g) $\Longleftrightarrow$ transitif(d) ; surjectif(g) $\Longrightarrow$ transitif($\hat{d}$) $\Longrightarrow$ simple .

Ceci résulte des prop. 3.1 , 4.1 , et du fait qu'un groupoïde qui vérifie l'axiome des quotients à droite n'a pas d'idéal à droite propre.

5. Stationnarité.

G est stationnaire(c) si et seulement si
$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau \in c(G))(\ \sigma x = \tau x \Longrightarrow \sigma y = \tau y\ )$.

Proposition 1. injectif(d) $\Longrightarrow$ stationnaire(g).

Ceci résulte de la prop.1.1.

Proposition 2. Un groupoïde est stationnaire($\hat{b}$) si et seulement si c'est un demi-groupe abélien et stationnaire(g).

Tout d'abord un demi-groupe abélien et stationnaire (g) D est stationnaire($\hat{b}$) car $\hat{b}(D) = g(D)$. Réciproquement un groupoïde stationnaire($\hat{b}$) $\overset{G}{\downarrow}$est stationnaire(g) car $g(G) \subseteq \hat{b}(G)$.

G est abélien; soient en effet $a,b \in E$:

$$a\tau a = a\tau a \Longrightarrow \gamma_a a = \delta_a a \Longrightarrow \gamma_a b = \delta_a b \Longrightarrow a\tau b = b\tau a \quad .$$

G est associatif; soient en effet $a,b,c \in E$:

$$(a\tau b)\tau a = a\tau(a\tau b) = a\tau(b\tau a) \Longrightarrow \gamma_{a\tau b}a = \gamma_a\gamma_b a \Longrightarrow \gamma_{a\tau b}c = \gamma_a\gamma_b c \Longrightarrow (a\tau b)\tau c = a\tau(b\tau c) \ .$$

De même

Proposition 3. Un groupoïde simplifiable est stationnaire (m) si et seulement si c'est un semi-groupe abélien.

Un semi-groupe abélien $D = (E,.)$ est stationnaire(m) car, pour tous $a,b,c,d,x,y \in E$:

$$axb = cxd \Rightarrow ab = cd \Rightarrow ayb = cyd \ .$$

Réciproquement, si G est stationnaire(m) et simplifiable, G est injectif(m) (prop.1.2), et stationnaire($\hat{b}$), car, pour tout $x \in E$, et tous $\beta, \beta' \in \hat{b}(G)$, on a, μ étant un élément arbitraire de $m(G)$:

$$\beta x = \beta' x \Rightarrow \mu\beta x = \mu\beta' x \Rightarrow \mu\beta = \mu\beta' \Rightarrow \beta = \beta' \ ;$$

donc G est abélien et associatif.

La condition stationnaire($\hat{g}$) n'entraîne ni la commutativité, ni l'associativité. Par exemple, si E est l'ensemble des entiers natürels non nuls, et si, pour tous $a,b \in E$, $a\tau b = 2a+b$, G est simplifiable, donc stationnaire(g); et on a identiquement $\gamma_a\gamma_b = \gamma_{a+b}$, de sorte $g(G)$ est stable, et que G est stationnaire($\hat{g}$). G n'est pas un demi-groupe et même ne contient aucun triple associatif, car, si $a,b,c \in E$:

$$(a\tau b)\tau c = a\tau(b\tau c) \Rightarrow \gamma_{a\tau b}c = \gamma_a\gamma_b c \Rightarrow \gamma_{a\tau b} = \gamma_a\gamma_b = \gamma_{a+b}$$
$$\Rightarrow a\tau b = a+b \ ,$$

ce qui est impossible. G n'est pas abélien, car $a\tau b = b\tau a \Rightarrow a = b$.

On a toutefois des propriétés d'associativité affaiblie, comme:

Proposition 4. Si G est stationnaire($\hat{g}$) et a un élément unité à droite e, c'est un demi-groupe.

En effet, si $a,b,c \in E$:

$$(a\tau b)\tau e = a\tau b = a\tau(b\tau e) \Rightarrow (a\tau b)\tau c = a\tau(b\tau c) \ .$$

Proposition 5. Si G est stationnaire($\hat{g}$) et surjectif(d), $g(G)$ est stable.

En effet, si $a,b \in E$, il existe $c \in E$ tel que $c\tau a = \gamma_a\gamma_b a$; donc tel que $\gamma_a\gamma_b = \gamma_c$.

Enfin le résultat ci-dessous nous a été communiqué par G. MATTENET:

Proposition 6. Un quasi-groupe est stationnaire($\hat{g}$) si et seulement si il est isotope $(1,\varphi,\varphi)$ d'un groupe (c'est-à-dire, $G = (E,\top)$ étant ce quasi-groupe, s'il existe une loi de groupe $*$ sur E et une bijection φ de E vers E telle que $a\top b = c$ soit équivalent à $a*\varphi(b)=\varphi(c)$ pour tous $a,b,c \in E$).

Si G est un quasi-groupe, γ est une bijection de E vers g(G); donc, si $a,b \in E$, il existe un $c \in E$ et un seul tel que $\gamma_a\gamma_b = \gamma_c$ (prop.5); posons $c = a*b$. γ établit donc un isomorphisme entre le demi-groupe g(G) et $(E,*)$; or G est injectif(c) et transitif(g), donc g(G) est un groupe de bijections (prop.III.C.2.2); et $*$ est une loi de groupe sur E. On notera que l'élément unité de ce groupe, e, est élément unité à gauche de G car $\gamma_e = I_E$. Soit alors φ la bijection inverse de δ_e; si $a,b,c \in E$, on a $b = \varphi(b)\top e$, $c = \varphi(c)\top e$; et

$$a\top b = c \iff a\top(\varphi(b)\top e) = \varphi(c)\top e \iff a*\varphi(b) = \varphi(c) .$$

Réciproquement, si $*$ est une loi de groupe sur E et φ une bijection de E vers E, telle que, pour tous $a,b,c \in E$, $a\top b = c$ soit équivalent à $a*\varphi(b) = \varphi(c)$, on a identiquement $\varphi(a\top b) = a*\varphi(b)$ et $\varphi(a\top(b\top c)) = a*\varphi(b\top c) = a*\varphi(b)*\varphi(c) = \varphi(a\top b)*\varphi(c) = \varphi((\varphi(a\top b))\top c)$, d'où identiquement $a\top(b\top c) = (\varphi(a\top b))\top c$, en sorte que g(G) est stable; comme G est un quasi-groupe, donc stationnaire(g), G est stationnaire($\hat{g}$).

Il est possible de choisir $*$ et φ de manière que G ne soit pas associatif; g est associatif si et seulement si $\gamma_a\gamma_b = \gamma_{a\top b}$ pour tous $a,b \in E$, donc si et seulement si $a\top b = a*b$ pour tous $a,b \in E$; ceci équivaut à $\varphi(a\top b) = a*\varphi(b) = \varphi(a*b)$, ou encore, φ étant une loi de groupe, à $\varphi(a) = a*\varphi(e)$. Or il existe des groupes tels que toute bijection ne soit pas une translation à droite (groupes d'ordre 3 par exemple).

6. Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Ce sont les conditions des théorèmes 1 à 8 du §.III. D.5 prises dans le tas G_g, et celles des théorèmes 1S à 8S prises dans les tas $G_{\hat{g}}, G_m, G_{\hat{b}}$. Rien n'est écrit sur les cas d et d qu'on étudie par dualité. Le tableau ci-dessous contient, dans la première colonne un n° de théoreme, dans la seconde la condition correspondante, et, dans la colonne associée au côté $c \in \{g, \hat{g}, m, \hat{b}\}$, une condition nécessaire et suffisante pour que G_c vérifie cette condition. Le numéro de théorème est à entendre tel quel pour c=g, suivi de S pour les autres côtés.

n°	conditions	g	ĝ	m	b̂
1	injectif élt. net	simplif. à g. élt. net à g.	simplif. à g. noix à g.	simplifiable noix	simplifiable noix
2	bijectif élt. net	simplif. à g. quot. à d. élt. net à g.	simplif. à g. quot. à d. noix à g.	simplifiable quasi-groupe	simplifiable quasi-groupe
3	injectif transitif	simplif. à g. quot. à g.	simplif. à g. simple à g.	simplifiable simple	simplifiable simple
4	bijectif transitif	simplif. à g. quot. d. g.	simplif. à g. quot. à d. simple à g.	quasi-groupe	quasi-groupe
5	injectif stationnaire élt. net	simplif. à g. station.(g) élt. net à g.	simplif. à g. station.(ĝ) noix à g.	groupe abélien	groupe abélien
6	bijectif stationnaire élt. net	simplif. à g. station.(g) quot. à d. élt. net à g.	simplif. à g. station.(ĝ) quot. à d. noix à g.	groupe abélien	groupe abélien
7	injectif stationnaire transitif	simplif. à g. station.(g) quot. à g.	simplif. à g. station.(ĝ) simple à g.	groupe abélien	groupe abélien
8	bijectif stationnaire transitif	simplif. à g. station.(g) quot. d. g.	simplif. à g. station.(ĝ) quot. à d. simple à g.	groupe abélien	groupe abélien

Pour les conditions de la colonne de $\hat{g}$, on notera que

Proposition 1. Un groupoïde simplifiable à gauche, ayant une noix à gauche et stationnaire($\hat{g}$) est simple à gauche et vérifie l'axiome des quotients à droite; de plus les produits finis de translations à gauche forment un groupe de bijections.

Ceci résulte de la prop.III.C.2.2. Par suite les quatre dernières conditions de la colonne $\hat{g}$ sont équivalentes. De même pour m et $\hat{b}$.

Les conditions des colonnes m et $\hat{b}$ sont deux à deux équivalentes, comme il résulte des prop. 1.1, 1.2, 2.3, 3.2, 4.2, 5.2, 5.3.

Les conditions des colonnes g et $\hat{g}$ n'entraînent pas la condition "quasi-groupe". Soit $K=(E,*)$ un groupe, E étant infini, e l'élément unité de K, $a\in E-e$, et φ une bijection de $E-a$ vers E; définissons un groupoïde $G=(E,\tau)$ par

$$(\forall x,y\in E)\begin{cases} x\tau y = \varphi(x)*y & \text{si } x\in E-a \\ a\tau y = \varphi(e)*y\ . \end{cases}$$

φ étant une bijection, on a $g(G)=g(K)$; donc $g(G)=\hat{g}(G)$ est un groupe simplement transitif de bijections, et G est bijectif-stationnaire-transitif (g) et $(\hat{g})$; G n'est pas un quasi-groupe car $a\tau y = e\tau y$ pour tout $y\in E$ alors que $a\neq e$.

De même un groupoïde simplifiable et simple n'est pas un quasi-groupe car c'est le cas du groupoïde du §.III.C.3, qui, étant simple à droite, est simple.

7. Application aux quasi-groupes.

Quatre cases du tableau du §.6 contiennent la condition "quasi-groupe", d'où quatre théorèmes d'homomorphisme, $2S_m$, $2S_{\hat{b}}$, $4S_m$, $4S_{\hat{b}}$, avec sur H les conditions suivantes:

$2S_m$: fort(m), p-fort-g(m), net(m), franc(m);

$2S_{\hat{b}}$: fort($\hat{b}$), p-fort-g($\hat{b}$), net($\hat{b}$), franc($\hat{b}$);

$4S_m$: fort(m), clair(m);

$4S_{\hat{b}}$: fort($\hat{b}$), clair($\hat{b}$).

La plus faible des conditions est, d'après les résultats de la section A, la troisième; de plus l'équivalence nucléaire est, d'après $4S_m$ et $4S_{\hat{b}}$, principale (m) et ($\hat{b}$) pour chacune de ses classes. On peut alors énoncer:

<u>Théorème 1. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un quasi-groupe est principal (m) pour une partie H forte(m) et franche(m), et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire, auquel cas $\mathcal{P}_H^m = \mathcal{P}_H^{\hat{b}}$.</u>

En particulier

<u>Théorème 2. Toute équivalence compatible et simplifiable d'un quasi-groupe est équiprincipale (m) et ($\hat{b}$).</u>

Une telle équivalence est en effet équivalence nucléaire d'un homomorphisme de quasi-groupes.

Théorème 3. Si $Q = (E,\tau)$ est un quasi-groupe, et si $H \in \mathfrak{P}(E)$ est non vide, H est classe pour une équivalence compatible et simplifiable de Q si et seulement si il est t-fort(m).

D'après le théorème 1, une telle équivalence est principale(m) pour H et H est fort(m) et franc(m); donc $W_H^m = \emptyset$ et H est t-fort(m) (prop.II.D.8.4). Réciproquement, si H est t-fort(m) et non vide, H est franc(m), car tout élément de E est franc(m) par le théorème 1 appliqué à l'homomorphisme identique; donc $W_H^m = \emptyset$, et H est classe de $\mathfrak{L}_H^m$ qui (théorème 1) est simplifiable, et (prop.II.B.3.1) compatible.

D'autre part, l'introduction de conditions étrangères à la théorie des tas permet d'énoncer des théorèmes d'homomorphisme pour les quasi-groupes à idempotent, ou à élément unité (boucles).

Théorème 4. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un quasi-groupe à idempotent est principal(m) pour une partie H forte(m), p-forte-g(m), franche(m) et stable, et réciproquement.

On peut prendre pour H la classe image réciproque de l'idempotent, qui, compte tenu du théorème 1, vérifie ces propriétés. Réciproquement, un homomorphisme de groupoïdes soumis aux conditions de l'énoncé arrive sur un quasi-groupe (théorème 1); et H est contenu dans une classe de l'équivalence nucléaire, qui, puisque H est stable, s'envoie sur un idempotent

Proposition 1. Un idempotent e d'un quasi-groupe $Q = (E,\tau)$ est élément unité si et seulement si

$$(\forall x,y \in E) \quad x\tau(e\tau y) = (x\tau e)\tau y \ .$$

La condition est évidemment nécessaire; si elle est remplie, on a, pour tout $x \in E$:

$$e\tau(e\tau x) = (e\tau e)\tau x = e\tau x \implies e\tau x = x \ ,$$

donc e est élément unité à gauche, et de même à droite.

Définition 1. Si $G = (E,\tau)$ est un groupoïde et $H \in \mathfrak{P}(E)$, H est dite *médianement préassociative* si et seulement si

$$(\forall \mu \in m(G))(\forall x,y \in E)(\forall h \in H)(\ \mu(x\tau(h\tau y)) \in H \iff \mu((x\tau h)\tau y) \in H\ ).$$

Théorème 5. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur une boucle est principal(m) pour une partie H forte(m), p-forte-g (m),franche(m),stable et médianement préassociative,et réciproquement.

Ceci résulte de la prop.1 et du théorème 4.

C.Etude des conditions portant sur le demi-groupe image (cas sans zéro)

Soit $D = (E,.)$ un demi-groupe.

1.Propriétés supplémentaires.

Proposition 1. Dans un demi-groupe, surjectif(g) $\Leftrightarrow$ simple à droite.

Ceci résulte des prop. 2,3 du §.B.4.

Proposition 2. Dans un demi-groupe, stationnaire(g) $\Leftrightarrow$ stationnaire à gauche.

D est en effet stationnaire(g) si et seulement si $(\forall a,b,x,y \in E)(ax = bx \Longrightarrow ay = by)$;
on reconnait la condition "stationnaire à gauche" de THEODOSSIS[24] (voir aussi THIERRIN[25]).

2.Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

On les déduit de celles du §.B.6;il n'y a pas lieu de distinguer ici les cas g et ĝ.On obtient alors un tableau analogue à celui du §.B.6.Le passage est immédiat,sauf dans les cas faisant l'objet des propositions suivantes:

Proposition 1. Un demi-groupe bijectif-à-noix (g),c'est-à-dire ayant une noix à gauche,simplifiable à gauche et simple à droite, est un groupe et réciproquement.

On sait (CLIFFORD et MILLER[5]) que,si,dans un demi-groupe,l'ensemble des éléments nets à gauche et l'ensemble des éléments nets à droite sont non vides,ils coïncident et sont un sous-groupe.Ici il existe un élément net à gauche et tout élément est net à droite.

Proposition 2. Un demi-groupe injectif-stationnaire-à-noix (g),c'est-à-dire ayant une noix à gauche,simplifiable à gauche et stationnaire à gauche,est un groupe,et réciproquement.

Un tel demi-groupe est surjectif(g) (prop.III.C.2.2). et la proposition résulte de la prop.1.

On a alors le tableau:

n°	conditions	$g = \mathfrak{g}$	m	$\mathfrak{b}$
1S	injectif noix	simplif. à gauche noix à gauche	semi-groupe noix	semi-groupe noix
2S	bijectif noix	groupe	groupe	groupe
3S	injectif transitif	simplif. à gauche simple à gauche	semi-groupe simple	semi-groupe simple
4S	bijectif transitif	groupe	groupe	groupe
5S 7S 8S	injectif stationnaire noix	groupe	groupe abélien	groupe abélien

Les conditions des première et troisième lignes ne définissent pas des groupes;on connait un demi-groupe simplifiable à gauche et simple à gauche qui n'est pas un groupe (cf. par exemple BAER et LEVI [2]),et un semi-groupe simple qui n'est pas un groupe (cf. par exemple ANDERSEN [1]).

3.Théorèmes d'homomorphisme pour les groupes.

On considère ici tout d'abord des théorèmes de théorie des demi-groupes.

Les théorèmes utilisant l'équivalence principale à gauche sont,d'après le tableau du §.2,les théorèmes $2S_g$,$4S_g$,$5S_g$,$7S_g$, $8S_g$,les conditions respectives sur H étant:

$2S_g$: fort(g),p-fort-g(g),net(g),franc(g) ;

$4S_g$: fort(g),clair(g) ;

$5S_g$: fort(g),robuste(g),p-fort(g),net(g) ;

$7S_g$: fort(g),robuste(g),net(g),translucide(g) ;

$8S_g$: fort(g),robuste(g),clair(g) .

et on peut prendre pour H tout classe de l'équivalence nucléaire ($4S_g$). Les systèmes de conditions les plus faibles (ou minimaux) sont ceux des théorèmes $2S_g$,$4S_g$,$5S_g$.Nous énonçons les théorèmes correspondants dans l'ordre 4-2-5 afin de mettre en évidence le remplacement progressif des conditions de netteté par des conditions de force :

Théorème 1. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal à gauche pour une partie H forte et totalement nette, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Théorème 2. Tout homomoephisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal à gauche pour une partie H forte, p-forte-g(g) et nette, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

net signifie : net à droite et à gauche.

Théorème 3. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal à gauche pour une partie H forte, p-forte-g(g), médianement forte et nette à gauche, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Les théorèmes utilisant l'équivalence principale médiane sont, d'après le tableau du §.2, les théorèmes $2S_m$ et $4S_m$, les conditions respectives sur H étant :

$2S_m$: fort(m), p-fort-g(m), net(m), franc(m) ;

$4S_m$: fort(m), clair(m) ;

et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire. Le second système de conditions est le plus faible, et on énonce

Théorème 4. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal médianement pour une partie H médianement forte et totalement nette, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Les théorèmes utilisant l'équivalence principale bilatère sont de même les théorèmes $2S_{\hat{b}}$ et $4S_{\hat{b}}$, avec les conditions sur H

$2S_{\hat{b}}$: fort($\hat{b}$), p-fort-g($\hat{b}$), net($\hat{b}$), franc($\hat{b}$) ;

$4S_{\hat{b}}$: fort($\hat{b}$), clair($\hat{b}$) ;

ces conditions sont plus fortes que les conditions des théorèmes $2S_m$ et $4S_m$, en sorte que le seul intérêt des théorèmes $2S_{\hat{b}}$ et $4S_{\hat{b}}$ est de nous apprendre que l'équivalence nucleaire d'un homomorphisme de demi-groupes est principale($\hat{b}$) pour chacune de ses classes, quand cet homomorphisme arrive sur un groupe.

On a aussi des théorèmes d'homomorphisme pour les groupes abéliens. Enonçons par exemple le théorème $5S_m$, qui donne pour H

$5S_m$: fort(m), p-fort-g(m), robuste(m), net(m) :

Théorème 5. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe abélien est principal médianement pour une partie H médianement forte, p-forte-g(m), robuste(m) et médianement nette, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

H est robuste(m) si et seulement si

$(\forall a,b,c,d,e,f,g,h,x,y \in E)(\ aexfb \in H, agxhb \in H, ceyfd \in H \implies cgyfd \in H\ )$

(cf § A.4, avec $\rho = \mu(a,b)$, $\upsilon = \mu(c,d)$, $\sigma = \mu(e,f)$, $\tau = \mu(g,h)$). Cette condition ne peut être considérée comme une condition explicite de commutativité, et il en est de même des autres conditions imposées à H. De plus la condition de netteté est très faible. Le théorème $8S_m$ donne pour H les conditions: médianement forte, robuste(m), totalement nette; ce système est sans condition explicite de commutativité, mais la condition de netteté est beaucoup plus forte.

Enfin les théorèmes 1 à 5 s'étendent sans grand changement aux groupoïdes par utilisation de $\hat{g}$ et m; les conditions sur H peuvent être prises dans les énoncés $4S_{\hat{g}}$, $2S_{\hat{g}}$, $5S_{\hat{g}}$, $4S_m$, $5S_m$. Donnons par exemple l'énoncé analogue au théorème 4:

Théorème 6. Tout homomorphisme d'un groupoïde sur un demi-groupe qui arrive sur un groupe est principal(m) pour une partie H forte(m) et claire(m), et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

On peut aussi employer les énoncés $4S_g$, $2S_g$, $5S_g$, qui donnent d'autres systèmes de conditions (utilisant en particulier la condition "stabilisant(g)").

4. Théorème d'homomorphisme pour les semi-groupes à noix.

C'est le théorème $1S_m$ pour les demi-groupes:

Théorème 1. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un semi-groupe à noix est principal médianement pour une partie H

<u>médianement forte,p-forte-g(m) et médianement nette,et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui s'envoie sur un élément de la noix.</u>

H est p-forte-g(m) si et seulement si elle est indivisible pour $|_H$ (prop.II.D.8.1);cet énoncé est donc le théorème de

CROISOT[8]cité dans l'introduction.

D.Etude des conditions portant sur le groupoïde image (cas avec zéro).

Soient G = (E,τ) un groupoïde,c un côté,z un zéro(c) de G.On sait (prop. 1 , 2 du §.I.F.2) qu'il y a identité entre zéro(g), zéro($\hat{g}$) et zéro à gauche ,et entre zéro,zéro(m),bizéro(m),zéro($\hat{b}$),bizéro($\hat{b}$) et même zéro(b).

1.z-séparation.

G est z-séparé(c) si et seulement si
$(\forall x\in E)(\ x\neq z \Rightarrow c(G)x \not\subseteq \{z\})$.

Proposition 1. G est z-séparé(g) (resp. d) si et seulement si

$(\forall x\in E)(\ x\neq z \Rightarrow (\exists a\in E)\ a\tau x\neq z\ )$ (resp. $x\tau a\neq z$) .

Proposition 2. Pour tout groupoïde G,
z-séparé($\hat{g}$) $\Leftrightarrow$ z-séparé(g) .

z-séparé(g) $\Rightarrow$ z-séparé($\hat{g}$) car $g(G)\subsetneq \hat{g}(G)$.
z-séparé($\hat{g}$) $\Rightarrow$ z-séparé(g) car si $x\in E$ est tel que $g(G)x \subseteq \{z\}$,alors $\hat{g}(G)x\subseteq\{z\}$.

Proposition 3. G est z-séparé($\hat{b}$) si et seulement si
$(\forall x\in E)(\ x\neq z \Rightarrow (\exists a\in E)\ a\tau x\neq z$ ou $x\tau a\neq z\ )$.

En effet G a cette propriété si et seulement si il est z-séparé(b);et,comme dans la prop.2, z-séparé($\hat{b}$) $\Rightarrow$ z-séparé(b) .

Proposition 4. Pour tout groupoïde,
z-séparé (g) et (d) $\Rightarrow$ z-séparé(m) $\Rightarrow$ z-séparé($\hat{b}$) .

Si G est z-séparé(g) et z-séparé(d),et si $x\in E-z$, il existe $a\in E$ tel que $a\tau x\neq z$,et $b\in E$ tel que $(a\tau x)\tau b\neq z$,donc $\delta_b\gamma_a\in m(G)$ est tel que $\delta_b\gamma_a x\neq z$,et G est z-séparé(m) .Si G est z-séparé(m),il est z-séparé($\hat{b}$).

Proposition 5. Un demi-groupe est z-séparé(m) si et seulement si il est z-séparé (g) et (d).

Un demi-groupe $D = (E,.)$ est z-séparé(m) si et seulement si, pour tout $x \in E - z$, il existe $a,b \in E$ tels que $axb \neq z$; en particulier, $ax \neq z$ et $xb \neq z$, et D est z-séparé (g) et (d). La réciproque résulte de la prop.4.

2. z-injectivité, injectivité.

Proposition 1. G est z-injectif(g), (resp. $\hat{g}$, d, $\hat{d}$, $\hat{b}$) si et seulement si z est un zéro à gauche (resp. zéro à gauche, zéro à droite, zéro) de G et si l'égalité est simplifiable à gauche (resp. à gauche, à droite, à gauche et à droite) sur $E - z$.

On dira plutôt que G est z-simplifiable à gauche (resp. z-simplifiable à droite, z-simplifiable).

Prouvons d'abord que l'ensemble des $\sigma \in \hat{g}(G)$ (resp. $\hat{d}(G)$, $\hat{b}(G)$) tels que, z étant un zéro à gauche (resp. zéro à droite, zéro) de G, $\sigma x = \sigma y \neq z$ entraîne $x = y$ pour tous $x,y \in E$, est stable; en effet, si σ et τ ont cette propriété,

$$(\forall x,y \in E)(\ \sigma\tau x = \sigma\tau y \neq z \Longrightarrow \tau x = \tau y \neq z \Longrightarrow x = y\ ).$$

Par suite, G est z-injectif($\hat{g}$) (resp. $\hat{d}$, $\hat{b}$) si et seulement si il est z-injectif(g) (resp. d, b); donc si et seulement si G est z-simplifiable à gauche (resp. z-simplifiable à droite, z-simplifiable).

Proposition 2. Un groupoïde z-séparé(m) est z-injectif(m) si et seulement si il est z-simplifiable.

Un groupoïde z-simplifiable est z-injectif($\hat{b}$), donc z-injectif(m) puisque $m(G) \subseteq \hat{b}(G)$. Réciproquement, si G est z-injectif(m) et z-séparé(m), et si $x,y \in E$ et $\beta \in \hat{b}(G)$ sont tels que $\beta x = \beta y \neq z$,il existe $\mu \in m(G)$ tel que $\mu\beta x = \mu\beta y \neq z$,et $x = y$,donc G est z-injectif($\hat{b}$),et z-simplifiable.

<u>Proposition 3. Un groupoïde injectif(g) n'a pas de zéro à droite.</u>

Si z est un zéro à droite, $\gamma_z = \kappa_z$ n'est pas une injection.

<u>Proposition 4. Les conditions injectif(m) et à zéro(m),ou injectif($\hat{b}$) et à zéro($\hat{b}$), sont incompatibles.</u>

Ceci résulte des prop. III.E.3.2, III.E.3.3 , I.F.2.1.

3.z-surjectivité,surjectivité.

G est z-surjectif(c) si et seulement si tout élément de c(G) différent de κ_z est une surjection.

Cette condition s'exprime simplement dans le cas où $c = g$.

<u>Définition 1. Si z est un zéro(c) d'un groupoïde $G = (E,\tau)$, on appelle annulateur à gauche relatif à z de G , et on note Z_g,</u>

$$Z_g = z \,\dot{}\, . E$$

<u>qui est aussi l'ensemble des $x \in E$ tels que $\gamma_x = \kappa_z$.</u>

<u>Proposition 1. G est z-surjectif(g) si et seulement si z est un zéro à gauche de G et si</u>

$$(\forall a \in E - Z_g)(\forall y \in E)(\exists x \in E) \quad a\tau x = y \quad .$$

En effet $a \in Z_g$ équivaut à $\gamma_a = \kappa_z$.

<u>Proposition 2. Pour tout groupoïde,</u>

<u>z-surjectif($\hat{g}$) $\Longleftrightarrow$ z-surjectif(g)</u>

<u>z-surjectif($\hat{b}$) $\Longleftrightarrow$ z-surjectif(g) et z-surjectif(d).</u>

Les implications vers la droite résultent des inclusions $g(G) \subseteq \hat{g}(G), g(G) \subseteq \hat{b}(G), d(G) \subseteq \hat{b}(G)$ .Réciproquement,soit G un groupoïde z-injectif(g);pour tout $a \in E$, $\kappa_z\gamma_a = \kappa_z$, $\gamma_a\kappa_z = \kappa_{\gamma_a z} = \kappa_z$; donc si $\gamma = \gamma_{a_1} \cdots \gamma_{a_n} \in \hat{g}(G)$, $\gamma \neq \kappa_z$ entraîne $\gamma_{a_i} \neq \kappa_z$ pour tout i ; par suite γ_{a_i} est une surjection pour tout i,et γ est une surjection.

On démontre de même, $\hat{b}(G)$ étant engendré par $g(G) \cup d(G)$, que, si G est z-surjectif(g) et z-surjectif(d), il est z-surjectif($\hat{b}$).

Proposition 3. Pour un groupoïde z-séparé(m), z-surjectif(m) $\Longleftrightarrow$ z-surjectif($\hat{b}$).

Tout groupoïde z-surjectif($\hat{b}$) est z-surjectif(m) puisque $m(G) \subseteq \hat{b}(G)$. Réciproquement, si G est z-séparé(m), m(G) n'est pas réduit à κ_z, il existe $\mu \in m(G), \mu \neq \kappa_z$; on suppose alors G z-surjectif(m); si $\beta \in \hat{b}(G), \beta \neq \kappa_z$, il existe $a \in E$ tel que $\beta a \neq z$, et, μ étant surjectif, il existe $b \in E$ tel que $\mu b = a$, donc que $\beta\mu b = \beta a \neq z$, en sorte que $\beta\mu \neq \kappa_z$; comme $\beta\mu \in m(G)$, $\beta\mu$ est surjectif, et β est surjectif.

Proposition 4. Un groupoïde ayant un zéro à gauche z est surjectif(g) si et seulement si il est z-surjectif(g) et si $Z_g = \emptyset$. Un tel groupoïde n'a pas de zéro à droite.

En effet κ_z n'est pas une surjection, et la première assertion est évidente. Pour la seconde, s'il existait un zéro à droite, z serait un zéro, et appartiendrait à Z_g, qui serait non vide.

Proposition 5. Les conditions surjectif(m) et à zéro(m), ou surjectif(b) et à zéro(b), sont incompatibles.

En effet un groupoïde qui vérifierait ces conditions serait surjectif(g) avec un zéro à droite.

4. Existence d'éléments z-nets différents de z; z-noix.

$h \in E$ est z-net(c) si et seulement si

$(\forall x \in E - z)(\exists \sigma \in c(G)) \quad \sigma x = h$.

Proposition 1. Dans un groupoïde z-séparé(m), il y a identité entre les éléments z-nets(m) et les éléments z-nets($\hat{b}$).

Dans un groupoïde quelconque, tout élément z-net(m) est z-net($\hat{b}$), puisque $m(G) \subseteq \hat{b}(G)$. Réciproquement, si G est z-séparé(m) et $h \in E$ z-net($\hat{b}$), pour tout $x \in E - z$ il existe $\mu \in m(G)$ tel que $\mu x \neq z$, et $\beta \in \hat{b}(G)$ tel que $\beta\mu x = h$; comme $\beta\mu \in m(G)$, h est z-net(m).

Pour les côtés stables ($\hat{g}, \hat{d}$, m, $\hat{b}$), on préfère considérer des z-noix.

Proposition 2. Une z-noix($\hat{g}$) (resp. $\hat{d}, \hat{b}$) est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) non contenu dans $\{z\}$ minimum.

Ceci résulte de la prop.I.E.3.2. On dira plutôt que c'est une z-noix à gauche (resp. z-noix à droite, z-noix).

Proposition 3. Dans un groupoïde z-séparé(m), une z-noix(m) est une z-noix, et réciproquement.

Ceci résulte des prop. 1 et III.B.3.2.

5. z-transitivité.

G est z-transitif(c) si et seulement si z est un zéro(c) de G et si

$$(\forall x,y \in E - z)(\exists \sigma \in c(G)) \ \sigma x = y \ .$$

Proposition 1. G est z-transitif(g) si et seulement si z est un zéro à gauche de G et si

$$(\forall x,y \in E - z)(\exists a \in E) \ \ a\tau x = y \ .$$

Pour les côtés stables, on préfère des conditions sur les idéaux.

Définition 1. G est dit presque z-simple à gauche si et seulement si z est un zéro à gauche de G et si G n'a pas d'idéal à gauche propre, sauf $\{z\}$ et peut-être $E - z$.

Proposition 2. Un groupoïde est z-transitif($\hat{g}$) si et seulement si il est presque z-simple à gauche, et z-séparé($\hat{g}$).

Ceci résulte de la prop.III.E.1.2.

Définition 2. G est dit z-simple (resp. z-simple à gauche, z-simple à droite) si et seulement si z est un zéro (resp. zéro à gauche, zéro à droite) de G et si G n'a pas d'idéal bilatère (resp. à gauche, à droite) propre, sauf $\{z\}$.

Proposition 3. Un groupoïde est z-transitif(m) si et seulement si il est z-simple et z-séparé(m), et z-transitif($\hat{b}$) si et seulement si il est z-simple et z-séparé($\hat{b}$).

Ceci résulte de la prop.III.E.1.2 pour le cas $\hat{b}$, et de la prop.4.1 pour le cas m.

Proposition 4. Si z est un zéro de G, G est z-transitif($\hat{g}$) si et seulement si il est z-simple à gauche et z-séparé($\hat{g}$).

E - z n'est pas en ce cas un idéal à gauche.

Proposition 5. Si z est un zéro de G, G est z-transitif(g) si et seulement si il est z-surjectif(d) et si $Z_d = \{z\}$.

Ceci résulte des prop. 1 et 3.1.

6.z-stationnarité.

G est z-stationnaire(c) si et seulement si z est un zéro(c) de G et si

$$(\forall x,y \in E)(\forall \sigma,\tau \in c(G))(\ \sigma x = \tau x \neq z \Rightarrow \sigma y = \tau y\ ).$$

Le groupoïde ci-dessous est z-stationnaire($\hat{b}$),mais, malgré des propriétés complémentaires assez fortes,n'est ni abélien ni associatif,en sorte que les prop. 2 , 3 du § B.5 n'ont pas d'analogue avec la z-stationnarité.

On prend E = {a,b,z},τ étant définie par la table:

	a	b	z
a	z	a	z
b	b	z	z
z	z	z	z

Ce groupoïde est z-simplifiable;ses seuls idéaux à gauche sont ∅,{z} et E ; en particulier il est z-simple,et z-transitif($\hat{g}$).Il est z-séparé (g) et (d),donc (m) et ($\hat{b}$) (prop.D.1.4).

Cherchons $\hat{b}(G)$;on a $\gamma_z = \delta_z = \kappa_z$,et $\gamma_a,\gamma_b,\delta_a,\delta_b$ sont données par

	a	b	z
κ_z	z	z	z
γ_a	z	a	z
γ_b	b	z	z
δ_a	z	b	z
δ_b	a	z	z

Il se trouve que ces applications se composent conformément à la table

	κ_z	γ_a	γ_b	δ_a	δ_b
κ_z	κ_z	κ_z	κ_z	κ_z	κ_z
γ_a	κ_z	κ_z	δ_b	γ_a	κ_z
γ_b	κ_z	δ_a	κ_z	κ_z	γ_b
δ_a	κ_z	κ_z	γ_b	δ_a	κ_z
δ_b	κ_z	γ_a	κ_z	κ_z	δ_b

par suite b(G) = $\hat{b}$(G) (on vérifie aussi $\hat{g}$(G) = m(G) = $\hat{b}$(G),d(G) = $\hat{d}$(G)) en sorte que la seconde table est celle de $G_{\hat{b}}$ .Dans cette table,un élément différent de z figure au plus une fois dans chaque colonne, en sorte que G est z-stationnaire($\hat{b}$).

G n'est pas abélien car $a\tau b = a \neq b = b\tau a$ et n'est pas associatif car $a\tau(a\tau b) = a\tau z = z \neq a = a\tau b = (a\tau b)\tau b$.

7.Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Le tableau ci-dessous est fait avec les mêmes conventions que celui du §.B.6, à partir des théorèmes Z1 à Z9S du §.III. F.5.

n°	conditions	g	ĝ	m	b̂
Z1	z-injectif élt.z-net ≠ z	z-simplif. g élt.z-net(g)≠z	z-simplif. g z-séparé(ĝ) z-noix à g.	z-simplif. z-séparé(m) z-noix	z-simplif. z-séparé(b̂) z-noix
Z2	z-bijectif élt.z-net≠z	z-simplif.g z-surject.(g) élt.z-net(g)≠z	z-simplif. g z-surject?(g) z-séparé(ĝ) z-noix à g.	z-simplif. z-surject.(m) z-séparé(m) z-noix	z-simplif. z-surject.(b̂) z-séparé(b̂) z-noix
Z3	z-injectif z-transitif	z-simplif.g z-trans.(g)	z-simplif. g z-séparé(ĝ) p.z-simple g	z-simplif. z-séparé(m) z-simple	z-simplif. z-séparé(b̂) z-simple
Z4	z-bijectif z-transitif	z-simplif.g z-surject?(g) z-trans.(g)	z-simplif. g z-surject.(g) z-séparé(ĝ) p.z-simple g	z-simplif. z-surject.(m) z-séparé(m) z-simple	z-simplif. z-surjectif(b̂ z-séparé(b̂) z-simple
Z5	z-injectif z-station? élt.z-net≠z	z-simplif.g z-stat.(g) élt.z-net(g)≠z	z-simplif. g z-stat.(ĝ) z-séparé(ĝ) z-noix à g.	z-simplif. z-stat.(m) z-séparé(m) z-noix	z-simplif. z-stat.(b̂) z-séparé(b̂) z-noix
Z6	z-bijectif z-station. élt.z-net≠z	z-simplif.g z-surject.(g) z-stat.(g) élt.z-net(g)≠z	z-simplif. g z-surject?(g) z-stat.(ĝ) z-séparé(ĝ) z-noix à g.	z-simplif. z-surject.(m) z-stat.(m) z-séparé(m) z-noix	z-simplif. z-surjectif(b̂) z-stat.(b̂) z-séparé(b̂) z-noix
Z7	z-injectif z-station. z-transitif	z-simplif.g z-stat.(g) z-trans.(g)	z-simplif. g z-stat.(ĝ) z-séparé(ĝ) p.z-simple g	z-simplif. z-stat.(m) z-séparé(m) z-simple	z-simplif. z-stat.(b̂) z-séparé(b̂) z-simple
Z8	z-bijectif z-station. z-transitif	z-simplif.g z-surject.(g) z-stat.(g) z-trans.(g)	z-simplif. g z-surject.(g) z-stat.(ĝ) z-séparé(ĝ) p.z-simple g	z-simplif. z-surject.(m) z-stat.(m) z-séparé(m) z-simple	z-simplif. z-surject.(b̂) z-stat.(b̂) z-séparé(b̂) z-simple
Z9S	injectif z-station. z-noix		simplif. à g. z-stat.(ĝ) z-noix à g.		

Le théorème Z9S ne s'applique pas au côté non stable g, et ne s'applique pas davantage à m et b̂ en vertu de la prop.2.4.

Les conditions des colonnes g et ĝ n'entraînent pas la condition "quasi-groupe avec zéro", comme le montre l'exemple suivant. Prenons $E = \{a,b,z\}$, τ étant définie par la table

	a	b	z
a	b	a	z
b	b	a	z
z	a	b	z

Les translations à gauche de G sont $\gamma_a = \gamma_b$, et $\gamma_z = I_E$; ce sont des bijections, et, comme $\gamma_a^2 = I_E$, $\hat{g}(G) = g(G)$. La table de G_g est

	a	b	z
γ_a	b	a	z
I_E	a	b	z

tout élément différent de z figure une fois et une seule dans chaque colonne autre que celle du zéro à gauche z, donc $G_g = G_{\hat{g}}$ est z-stationnaire et z-transitif, et bien sûr bijectif. G vérifie donc toutes les conditions des colonnes de g et $\hat{g}$. Ce n'est pas un quasi-groupe avec zéro car il n'est pas z-simplifiable à droite.

Il est probable que les conditions des colonnes de m et $\hat{b}$ n'entraînent pas non plus la condition "quasi-groupe avec zéro", mais nous ne connaissons pas de contre-exemple. Toutefois le groupoïde du §.6 vérifie les conditions des théorèmes $Z7_m$ et $Z7_{\hat{b}}$, donc aussi les conditions plus faibles, et n'est pas un quasi-groupe avec zéro; il ne lui manque que d'être z-surjectif($\hat{b}$). On verra au §.V.D.1 un contre-exemple analogue pour les conditions des théorèmes $Z4_m$ et $Z4_{\hat{b}}$.

8. Addition de l'intégrité.

Les conditions des colonnes de m et $\hat{b}$ se simplifient quelque peu si on suppose que le groupoïde qui les vérifie est intègre.

Proposition 1. Un groupoïde ayant un zéro z et intègre est z-séparé(m) et ($\hat{b}$).

En effet, si $x \neq z$, $x\tau(x\tau x) \neq z$.

Proposition 2. Un groupoïde ayant un zéro z et intègre vérifie la condition du théorème ZN_m (resp. $ZN_{\hat{b}}$) ($N = 1,2...,8$) si et seulement si il résulte de l'adjonction de z à un groupoïde vérifiant la condition du théorème N_m (resp. $N_{\hat{b}}$) (pour la même valeur de N).

Ceci résulte des prop. 1, 2, 3, 4, 5, 6 du §.III.E. 2, et de la prop. I.F.5.1.

Cette proposition permet de déduire instantanément le tableau ci-dessous de celui du §.B.6.Dans les conditions ci-dessous, l'intégrité est sous-entendue.

n°	conditions	m	$\hat{b}$
Z1S	z-injectif élt.z-net≠z	z-simplifiable z-noix	z-simplifiable z-noix
Z2S	z-bijectif élt.z-net≠z	quasi-groupe avec zéro	quasi-groupe avec zéro
Z3S	z-injectif z-transitif	z-simplifiable z-simple	z-simplifiable z-simple
Z4S	z-bijectif z-transitif	quasi-groupe avec zéro	quasi-groupe avec zéro
Z5S à Z8S	z-station. etc.	groupe abélien avec zéro	groupe abélien avec zéro

Il reste à traduire sur H la condition que le groupoïde image est intègre.Or on sait que la classe qui s'envoie sur z est dans tous les cas le résidu intérieur de H dans le tas considéré (prop. III.A.4.1).

Un idéal bilatère d'un groupoïdé G = (E,τ) est dit complètement premier (cf. FITTING [15]) si et seulement si

$$(\forall x,y \in E)(\ x\tau y \in A \implies x \in A \quad \text{ou} \quad y \in A\ ) .$$

Proposition 3. Soit f un homomorphisme de groupoïdes arrivant sur un groupoïde G ayant un zéro z,et principal(c) pour une partie H de sorte que $W_H^c = f^{-1}(z)$;G est intègre si et seulement W_H^c est complètement premier.

En effet G est intègre si et seulement si {z} est complètement premier,et la proposition résulte alors du comportement de cette notion d'idéal bilatère complètement premier,par homomorphisme.

On observera que l'addition de l'intégrité n'a pas été faite aux conditions des colonnes de g et $\hat{g}$ du tableau du §.7.La raison en est,d'abord,que cette addition est plus sympathique dans le cas où le zéro considéré est un zéro à droite,ce qui ajoute une condition sur $W_H^{\hat{g}}$;et surtout qu'elle n'entraîne pas de modification des conditions,hormis la suppression de l'hypothèse de z-séparation.Les méthodes ci-dessus permettent toutefois de la faire sans aucune difficulté.

E. Etude des conditions portant sur le demi-groupe image (cas avec zéro).

Soit $D = (E,.)$ un demi-groupe.

1. Propriétés supplémentaires.

Proposition 1. Si un demi-groupe a un zéro à gauche z et un seul, c'est un zéro.

Si $a \in E$, za est un zéro à gauche car $E \neq \{za\}$ et, pour tout $x \in E$, $xza = za$; donc $za = z$; et z est un zéro.

Or on notera qu'un demi-groupe ayant un zéro à gauche z et uniprincipal (g) ou ($\hat{g}$) pour un élément différent de z n'a qu'un seul zéro à gauche (prop.III.A.4.3b). Tous les demi-groupes considérés dans cette section ont donc un zéro.

Proposition 2. Pour un demi-groupe ayant un zéro z: presque z-simple à gauche $\Leftrightarrow$ z-simple à gauche.

$E - z$ ne peut alors être un idéal à gauche.

Proposition 3. Dans un demi-groupe ayant un zéro z, Z_g et Z_d sont des idéaux bilatères, et $z \in Z_g \cap Z_d$.

En effet $aE = z$ entraîne $axE = z$ et $xaE = xz = z$ pour tous $x \in E$ et $a \in Z_g$; donc Z_g, et, dualement, Z_d, est un idéal bilatère.

2. Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Le tableau du §.D.7 donne, par addition de l'associativité aux conditions qui y figurent, un tableau analogue pour les demi-groupes ayant un zéro. L'addition est immédiate, sauf pour les cases faisant l'objet des propositions suivantes.

Ces propositions peuvent être considérés comme des théorèmes d'axiomatique des groupes avec zéro. On partira du résultat suivant (STOLT [22], déf.4 du ch.II):

Un demi-groupe partiel, vérifiant l'axiome d'existence des quotients à gauche, ne contenant pas plus d'un élément unité à droite et tel qu'il existe des éléments c,e vérifiant $ce = c$,est un groupe,ét réciproquement.

Par demi-groupe partiel,il faut entendre un couple (E,.) d'un ensemble non vide E et d'une loi de composition incomplète, notée ici multiplicativement,et telle que,pour tous $a,b,c \in E$, si $(ab)c$ et $a(bc)$ sont définis tous deux,ils sont égaux.Un élément unité à droite d'un demi-groupe partiel est un élément e de E tel que,pour tout $x \in E$, le produit xe soit défini et égal à x .

La démonstration ci-dessous est tirée de la démonstration originale de [22] .La réciproque est triviale.La partie directe repose sur les lemmes suivants.

Lemme 1. Dans un demi-groupe partiel ayant des quotients à gauche et un élément unité à droite **e** :

$(\forall p,q,r,s \in E)(\ pq = e \ \text{ et } \ rq = s \implies sp = r\ ).$

Il existe $m \in E$ tel que $mp = r$;alors $m(pq) = me = m$ et $(mp)q = rq = s$ sont définis;par suite $m = s$,et le produit sp est défini et égal à r.

Lemme 2. Dans un demi-groupe partiel ayant des quotientsà gauche et un élément unité à droite e :

$(\forall p,q,r,s \in E)(\ pq = e \ \text{ et } \ sp = r \implies rq = s\ ).$

Il existe $m \in E$ tel que $mq = s$;d'après le lemme 1, $sp = m$;donc $m = r$,et le produit rq est défini et égal à s.

L'utilité de ces lemme résulte du

Lemme 3. Dans un demi-groupe partiel ayant des quotients à gauche,

$(\forall c,e \in E)(\ ce = c \implies$ e est élément unité à droite).

Soit $x \in E$; il existe $y,u \in E$ tels que $ye = x$, $uc = y$ alors $u(ce) = uc = y$ et $(uc)e = ye = x$ sont définis;par suite $y = x$, et le produit xe est défini et égal à x ,pour tout $x \in E$.

Soit alors D un demi-groupe partiel ayant des quotients à gauche,pas plus d'un élément unité à droite,et des éléments c,e tels que $ce = c$. e est élément unité à droite (lemme 3).Soit $a \in E$.

Il existe $u,a' \in E$ tels que $ua = a$, $a'a = e$;et $aa' = u$ (lemme 1).Il existe aussi $\bar{a} \in E$ tel que $\bar{a}a' = e$;et $ea = \bar{a}$ (lemme 2).Donc $(ea)a' = \bar{a}a' = e$;donc,si eu est défini, $eu = e(aa')$ et $eu = e$.

Or il existe $v,f \in E$ tels que $vu = e$, $fv = e$;alors (lemme 2) eu est défini et égal à f.

Par suite $eu = e$; u est donc élément unité à droite (lemme 3),et $u = e$;il en résulte $a'a = e = aa'$;et $ea = a$,de sorte que e est élément unité.

Si maintenant $b \in E$,il existe $b',d \in E$ tels que $b'b = e$, $db' = a$;par suite (lemme 2) ab est défini et égal à d .La loi de D n'est donc incomplète qu'en apparence;et les propriétés de e font que D est un groupe.

On démontre alors les propositions suivantes:

Proposition 1. Un demi-groupe z-injectif(g),z-transitif(g) et z-stationnaire(g) est un groupe avec zéro,et réciproquement.

Un groupe avec zéro possède évidemment les propriétés requises,d'être z-simplifiable à gauche,z-stationnaire(g),et z-transitif(g) qui équivaut à

$$(\forall x,y\in E)(\ x\neq z \Longrightarrow (\exists a\in E)\ ax = y\ )$$

puisque $zx = z$ .Réciproquement,soit D un tel demi-groupe.

Si $a\in E-z$,il existe $u\in E$ tel que $ua = a$;et $u^2a = ua = a \neq z$ entraîne $u^3 = u^2$,donc $u^4 = u^3 = u^2$,et $e = u^2$ est tel que $ea = a$ et $e^2 = e$. $e \neq z$ car $ea = a \neq z$;par suite il existe y E tel que $ye = a$,et $a = ye = yee = ae$.

Supposons que f,g soient éléments unités à droite pour $E-z$; alors $af = ag = a \neq z$ entraîne $f = g$.

Considérons alors l'ensemble $E-z$,auquel la restriction de la loi de D donne une structure de demi-groupe partiel (si $x,y\in E-z$, xy est défini dans $E-z$ si et seulement si $xy \neq z$ dans D,et pris alors égal à sa valeur dans D).Ce demi-groupe partiel vérifie l'axiome d'existence des quotients à gauche,ne contient pas plus d'un élément unité à droite,et contient des éléments a,e tels que $ae = a$;donc c'est un groupe,et D est un groupe avec zéro.

Proposition 2. Un demi-groupe z-bijectif(g),z-stationnaire (g),z-séparé(g) et à z-noix à gauche,est un groupe avec zéro,et réciproquement.

Un groupe avec zéro est évidemment un demi-groupe z-simplifiable à gauche,z-surjectif(g) qui s'exprime par

$$(\forall a\in E)(\ aE \neq \{z\} \Longrightarrow aE = E\ ),$$

z-stationnaire(g) et ayant un élément z-net(g) différent de z, h .Réciproquement,soit D un tel demi-groupe.

h étant z-net(g) différent de z , il existe $u\in E$ tel que $uh = h$;comme ci-dessus, $u^2h = uh = h \neq z$ entraîne $u^3 = u^2$, $u^4 = u^3 = u^2$,et $e = u^2$ est tel que $e^2 = e$ et $eh = h$ .Comme $e \neq z$ puisque $eh = h \neq z$,il existe $k\in E$ tel que $ke = h$,et $he = kee = h$.

Soit alors $x \in E - z$ .Comme $eE \neq \{z\}$, $eE = E$ et il existe $y \in E$ tel que $ey = x$;donc $ex = eey = x$ .Comme $x \neq z$,il existe $v \in E$ tel que $vx = h$,et $vxe = he = h = vx \neq z$ entraîne $xe = x$ .Comme $ez = ze = z$,e est élément unité.

Par suite,pour tout $x \in E - z$, $xE \neq z$ puisque $xe = x$; donc $xE = E$,et,pour tout $a \in E$,il existe $t \in E$ tel que $xt = a$.

Considérons alors l'ensemble $E - z$,auquel la restriction de la loi de D donne une structure de demi-groupe partiel.Ce demi-groupe partiel vérifie l'axiome d'existence des quotients à droite,ne contient pas plus d'un élément unité à gauche puisqu'il a déjà un élément unité,et contient des éléments h,e tels que $eh = h$;donc c'est un groupe,et D est un groupe avec zéro.

Proposition 3. Un demi-groupe z-bijectif(g) et z-transitif (g) est un groupe avec zéro,et réciproquement.

Un groupe avec zéro est évidemment un demi-groupe z-simplifiable à gauche,zèsurjectif à gauche qui s'exprime par

$$(\forall a \in E)(\ aE \neq \{z\} \Longrightarrow aE = E\ )\ ,$$

et z-transitif(g) qui équivaut à

$$(\forall x,y \in E)(\ x \neq z \Longrightarrow (\exists a \in E)\ ax = y\ )\ .$$

Réciproquement,soit D un tel demi-groupe.

Si on avait $Z_g = E$, cela entraînerait $E^2 = \{z\}$ et D ne serait pas z-transitif(g);donc il existe $c \in E - Z_g$,et,γ_c étant une surjection,il existe $e \in E$ tel que $ce = c$.

Si f,g sont éléments unité à droite pour $E - z$,et si $a \in E - z$, $af = ag = a \neq z$ entraîne $f = g$.

Considérons alors le demi-groupe partiel de support $E - z$,dont la loi est la restriction de celle de D. Il vérifie l'axiome d'existence des quotients à gauche,n'a pas plus d'un élément unité à droite et contient des éléments c,e tels que $ce = c$;donc c'est un groupe,et D est un groupe avec zéro.

Proposition 4. Un demi-groupe z-surjectif(m),z-séparé(m) et à z-noix(m) est un groupe avec zéro,et réciproquement.

Un groupe avec zéro est évidemment un demi-groupe z-surjectif(m) et ayant un élément z-net(m) différent de z. Réciproquement, soit D un tel demi-groupe. D est z-surjectif($\hat{\mathfrak{b}}$) (prop.D.3.3).

Si $x \in E - z$, il existe $u, v \in E$ tels que $uxv = h \neq z$; par suite $xE \neq \{z\}$, $Ex \neq \{z\}$ et γ_x, δ_x sont des surjections; pour tout $y \in E$, il existe donc $a, b \in E$ tels que $xa = bx = y$.

Si e,f sont éléments unité à droite de $E - z$,on a $ef = e$;d autre part il existe a E tel que $f = ea$,et $ef = eea = ea = f$,d'où $e = f$.

Le demi-groupe partiel de support $E - z$, dont la loi est la restriction de celle de D, vérifie donc l'axiome d'existence des quotients à gauche, et à droite, donc contient des éléments c, e tels que $ce = c$, et n'a pas plus d'un élément unité à droite; c'est donc un groupe, et D est un groupe avec zéro.

<u>Proposition 5. Un demi-groupe z-injectif($\hat{\mathfrak{b}}$),z-stationnaire($\hat{\mathfrak{b}}$) et z-transitif($\hat{\mathfrak{b}}$) est un groupe abélien avec zéro,et réciproquement.</u>

Un groupe abélien avec zéro est évidemment un demi-groupe z-simplifiable, z-stationnaire($\hat{\mathfrak{b}}$) et z-transitif($\hat{\mathfrak{b}}$) qui équivaut à

$$(\forall x, y \in E)(\ x \neq z \implies (\exists \beta \in \hat{\mathfrak{b}}(D))\ \ \beta x = y\ ).$$

Réciproquement, soit D un tel demi-groupe, Et soit $a \in E - z$.

Il existe $\beta \in \hat{\mathfrak{b}}(D)$ tel que $\beta a = a$ .Or on sait que $\hat{\mathfrak{b}}(D) = g(D) \cup d(D) \cup m(D)$.

Si $\beta \in g(D)$, il existe $u \in E$ tel que $ua = a$. $u^2 \neq z$ car $u^2 a = ua = a \neq z$;de $uu = uu \neq z$ résulte alors $au = ua = a \neq z$ et $ab = ba$ pour tout $b \in E$. De même si $\beta \in d(D)$.

Si $\beta \in m(D)$, il existe $u, v \in E$ tels que $uav = a$. $u^2 \neq z$ car $u^2 av^2 = uav = a \neq z$;de $uu = uu \neq z$ résulte alors $au = ua$;or $ua \neq z$ car $uav = a \neq z$,donc $ab = ba$ pour tout $b \in E$.

Comme $zb = bz$ pour tout $b \in E$, D est abélien. Par suite, $\hat{\mathfrak{b}}(D) = g(D)$,et D est z-injectif(g), z-stationnaire(g) et z-transitif(g); et c'est un groupe avec zéro (prop.1).

<u>Proposition 6. Un demi-groupe z-bijectif($\hat{\mathfrak{b}}$),z-séparé($\hat{\mathfrak{b}}$) et à z-noix($\hat{\mathfrak{b}}$),est un groupe avec zéro,et réciproquement.</u>

Un groupe avec zéro est évidemment un demi-groupe z-simplifiable, z-surjectif($\hat{\mathfrak{b}}$) ayant un élément z-net($\hat{\mathfrak{b}}$) $h \neq z$. Réciproquement, soit D un tel demi-groupe. Appelons N sa z-noix.

Supposons $Z_g \neq \{z\}$ et $Z_d \neq \{z\}$. Alors $N \subsetneq Z_g \cap Z_d$ (prop. 1.3), et $h \in Z_g \cap Z_d$; par suite $\hat{\mathfrak{b}}(D)\ h = hE \cup Eh \cup EhE = \{z\}$ et $h \notin \hat{\mathfrak{b}}(D)h$, en contradiction avec l'hypothèse que h est z-net($\hat{\mathfrak{b}}$). Par suite l'un des deux idéaux, Z_d par exemple, est réduit à z.

Si $a \in E - z$, $\delta_{a|}$ est alors une surjection et, pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $xa = y$.

Supposons d'autre part $Z_g = E$; cela entraînerait $E^2 = \{z\}$ et $Z_d = E$; par suite il existe $c \in E - Z_g$; γ_c est une surjection et il existe $e \in E$ tel que $ce = c$.

Enfin si e, f sont éléments unité à droite de $E - z$, et si a $E - z$, $ae = af = a \neq z$ entraîne $e = f$.

Le demi-groupe partiel de support $E - z$ dont la loi est la restriction de celle de D, vérifie donc l'axiome d'existence des quotients à gauche, contient des éléments c, e tels que $ce = c$ et n'a pas plus d'un élément unité à droite; c'est donc un groupe, et D est un groupe avec zéro.

On a alors le tableau ci-dessous. Les divers raffinements des théorèmes Z1S à Z8S ne sont pas à considérer ici car le tas image a toujours un bizéro donc n'est jamais injectif. De même ne s'occupe-t-on pas du théorème Z9S.

n°	conditions	$g = \hat{g}$	m	$\hat{b}$
Z1S	z-injectif z-séparé z-noix	z-simplif. à g. z-séparé(g) z-noix à gauche	z-simplifiable z-séparé(m) z-noix	z-simplifiable z-séparé($\hat{b}$) z-noix
Z2S	z-bijectif z-séparé z-noix	z-simplif. à g. z-surjectif(g) z-séparé(g) z-noix à gauche	groupe avec zéro	groupe avec zéro
Z3S	z-injectif z-transitif	z-simplif. à g. z-séparé(g) z-simple à g.	z-simplifiable z-séparé(m) z-simple	z-simplifiable z-séparé($\hat{b}$) z-simple
Z4S	z-bijectif z-transitif	groupe avec zéro	groupe avec zéro	groupe avec zéro
Z5S	z-injectif z-station. z-séparé z-noix	z-simplif. à g. z-station.(g) z-séparé(g) z-noix à gauche	z-simplifiable z-station.(m) z-séparé(m) z-noix	z-simplifiable z-station.($\hat{b}$) z-séparé($\hat{b}$) z-noix
Z6S	z-bijectif z-station. z-séparé z-noix	groupe avec zéro	groupe abélien avec zéro	groupe abélien avec zéro
Z7S	z-injectif z-transitif z-station.	groupe avec zéro	z-simplifiable z-station.(m) z-séparé(m) z-simple	groupe abélien avec zéro
Z8S	z-bijectif z-station. z-transitif	groupe avec zéro	groupe abélien avec zéro	groupe abélien avec zéro

Considérons le demi-groupe D de support $E = \{e,a,z\}$ de table

.	e	a	z
e	e	a	z
a	a	z	z
z	z	z	z

(isomorphe au demi-groupe n°5 de la table de FORSYTHE [16]). D est abélien et unitaire, par suite $D_g = D_d = D_{\hat{b}} = D_m$. D est z-simplifiable à gauche, z-stationnaire à gauche (D et D_g ayant la même table), et a est z-net(g) car figure dans toute colonne. D vérifie donc les conditions des théorèmes $Z5S_g$, $Z5S_m$, $Z5S_{\hat{b}}$ et il en résulte que ces conditions n'entraînent pas la condition "groupe avec zéro" car D n'est pas intègre. A fortiori celles des théorèmes $Z1S_g$, $Z1S_m$, $Z1S_{\hat{b}}$.

D'autre part les conditions des théorèmes $3S_g$, $3S_m$,

$3S_{\hat{b}}$ n'entraînent pas la condition "groupe";l'addition d'un zéro aux contre-exemples correspondants fournit des contre-exemples qui montrent que les conditions des théorèmes $Z3S_g$,$Z3S_m$, $Z3S_{\hat{b}}$ n'entraînent pas la condition "groupe avec zéro" (prop.D.8.2).

Il reste les conditions des théorèmes $Z2S_g$ et $Z7S_m$; nous ignorons si ces conditions entraînent ou non la condition "groupe avec zéro".

3.Addition de l'intégrité.

Elle se fait comme au §.D.8 et ne soulève aucun problème d'axiomatique à cause de la prop.D.8.2.,dont l'extension au cas g ne soulève aucune difficulté à cause de la prop.I.F.5.1.

On obtient le tableau:

n°	conditions	$g = \hat{g}$	m	$\hat{b}$
Z1S	z-injectif z-séparé z-noix	z-simplif. à g. z-noix à gauche	z-simplifiable z-noix	z-simplifiable z-noix
Z2S	z-bijectif z-séparé z-noix	groupe avec zéro	groupe avec zéro	groupe avec zéro
Z3S	z-injectif z-transitif	z-simplif. à g. z-simple à g.	z-simplifiable z-simple	z-simplifiable z-simple
Z4S	z-bijectif z-transitif	groupe avec zéro	groupe avec zéro	groupe avec zéro
Z5S à Z8S	z-station. etc.	groupe avec zéro	groupe abélien avec zéro	groupe abélien avec zéro

Dans ce tableau,la condition d'intégrité est sous-entendue.Les conditions des premières et troisième lignes ne définissent pas des groupes avec zéro,d'après les résultats du §.C.2.

L'addition de l'intégrité présente de l'intérêt pour les théorèmes $Z5S_g$, $Z5S_m$, $Z5S_{\hat{b}}$ dont les conditions définissent alors des groupes avec zéro,et peut-être pour les théorèmes $Z2S_g$ et $Z7S_m$.

4.Théorèmes d'homomorphisme pour les groupes avec zéro.

Examinons d'abord ceux de ces théorèmes où ne figure pas l'hypothèse d'un résidu consistant,donc obtenus à partir des théorèmes du § 2.

Dans la théorie à gauche,on a,selon les énoncés,les conditions suivantes sur H:

$Z4S_g$: fort(g),non trivial(g),flou(g),loyal(g),translucide(g)
$Z6S_g$: parfait(g),robuste(g),flou(g),loyal(g)
$Z7S_g$: fort(g),robuste(g),non trivial(g),flou(g),translucide(g)
$Z8S_g$: fort(g),robuste(g),non trivial(g),flou(g),translucide(g),loyal(g)

La condition du théorème $Z8S_g$ est sans intérêt.Il reste trois théorèmes:

Théorème 1. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche pour une partie H forte, non triviale,floue à gauche,loyale(g) et translucide,et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Théorème 2. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche pour une partie H parfaite à gauche,médianement forte,floue à gauche et loyale(g),et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Théorème 3. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche pour une partie H forte, médianement forte,non triviale,floue à gauche et translucide,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Dans la théorie médiane,on a deux énoncés donnant sur H les conditions suivantes:

$Z2S_m$: parfait(m),flou(m),loyal(m)
$Z4S_m$: fort(m),non trivial(m),flou(m),loyal(m),translucide(m) .

Théorème 4. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal(m) pour une partie H médianement parfaite,médianement floue et loyale(m),et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Théorème 5. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal(m) pour une partie H médianement forte,non triviale(m),médianement floue,loyale(m) et translucide(m),et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

On laisse de côté les théorèmes de la théorie bilatère qui donnent sur H des conditions plus fortes.

Examinons maintenant les théorèmes où le résidu est supposé complètement premier,qui proviennent du tableau du § 3 . On ne garde que les énoncés intéressants,où l'addition de cette condition permet effectivement d'affaiblir les autres conditions imposées à H.

Dans la théorie à gauche,on a deux énoncés,et,pour H:

$Z2S_g$: parfait(g),flou(g),loyal(g),W_H^g complètement premier

$Z5S_g$: parfait(g),robuste(g),flou(g),W_H^g complètement premier .

Théorème 6. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche pour une partie H parfaite à gauche,floue à gauche,loyale(g) et de résidu à gauche complètement premier,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Théorème 7. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche pour une partie H parfaite à gauche,médianement forte,floue à gauche et de résidu à gauche complètement premier,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Dans la théorie médiane,on n'a pas d'énoncé intéressant concernant les groupes avec zéro non nécessairement abéliens;de même dans la théorie bilatère.

On peut considérer les théorèmes 1,6,7,5 comme les analogues,dans le cas "avec zéro",des théorèmes 1,2,3,4 respectivement du § C.3.Les conditions "net à droite" ou "totalement net" du § C.3 sont remplacées ici par des conditions non classiques,"loyal" ou "translucide";le théorème le plus remarquable à ce sujet est le 7,qui n'utilise que des conditions classiques.

V. THEOREMES D'HOMOMORPHISME BILATERAUX EN THEORIE DES GROUPOIDES.

A. Propriétés générales.

1. Combinaisons possibles.

On se propose de donner des théorèmes d'homomorphisme analogues à ceux du chapitre précédent, concernant les groupoïdes G tels que, c et c' étant des côtés pris parmi $g, \hat{g}, d, \hat{d}, m, \hat{b}$, G_c et $G_{c'}$, vérifient chacun une des conditions du chapitre III.

Proposition 1. On n'obtient aucun théorème nouveau avec c = c'.

Les conditions du chapitre III se répartissent en conditions "sans zéro" et conditions "avec zéro"; la conjonction de deux conditions de même nature est une condition de même nature, la conjonction de deux conditions de nature différente est contradictoire.

De même on ne pourra pas accoupler une condition sans zéro de côté $g, \hat{g}, m, \hat{b}$, qui entraîne la règle de simplification à gauche, avec une condition avec zéro de côté $d, \hat{d}, m, \hat{b}$, qui entraîne l'existence d'un zéro à droite.

Les mariages contre nature étant ainsi écartés, notre intérêt sera limité aux combinaisons g-d, $\hat{g}$-$\hat{d}$, g-m de conditions de même espèce. Si c'est l'espèce "avec zéro", les propriétés des groupoïdes font que le zéro est le même dans les deux conditions et que c'est un zéro de G.

2. Groupoïdes uniprincipaux de deux côtés pour le même élément.

Avec les notations du §.1, un homomorphisme de groupoïdes f arrivant sur G est principal(c) pour une partie H et principal(c') pour une partie H'. Nous nous intéressons particulièrement au cas où H = H'. Comme on peut toujours prendre pour H (resp. H') une classe de l'équivalence nucléaire de f provenant d'un élément net(c) ou z-net(c) (resp. c') de G, ce cas se présentera chaque fois que G aura un élément à la fois net(c) et net(c') (ou z-net(c) et z-net(c'))

Cette circonstance se produit automatiquement chaque fois qu'une condition de transitivité ou de z-transitivité est imposée à G. On a aussi les cas suivants:

Proposition 1. Dans un groupoïde $G = (E,\tau)$, une noix à gauche L et une noix à droite R se rencontrent.

En effet $R\tau L \subseteq R \cap L$.

Proposition 2. Dans un groupoïde, l'idéal bilatère engendré par une noix (resp. z-noix) à gauche est une noix (resp. z-noix); et, s'il existe à la fois une noix (resp. z-noix) à gauche et une noix (resp. z-noix), la seconde est l'idéal bilatère engendré par la première, donc la contient.

(On rappelle que les groupoïdes considérés dans ce chapitre, s'ils ont un zéro(c), ont un zéro (§.1).) L'idéal bilatère engendré par une noix (resp. z-noix) à gauche est un idéal bilatère non vide (resp. non contenu dans $\{z\}$) évidemment minimum; la seconde assertion résulte alors de l'unicité de la noix (resp. z-noix) si elle existe.

Proposition 3. Dans un demi-groupe $D = (E,.)$, une noix (resp. z-noix) à gauche est une noix (resp. z-noix); s'il existe une noix (resp. z-noix) à gauche et une noix (resp. z-noix) à droite, elles sont égales.

Soit L une noix (resp. z-noix) à gauche; c'est en particulier un idéal à gauche minimal (resp. z-minimal); par suite, pour tout $x \in E$, Lx est un idéal à gauche minimal (resp. z-minimal ou égal à $\{z\}$) (CLIFFORD et PRESTON [6], p.69, lemme 2.32); et $Lx \subseteq L$. L est donc un idéal bilatère, donc évidemment une noix (resp. z-noix). La dernière assertion résulte alors de l'unicité de la noix (resp. z-noix) si elle existe (dans le cas sans zéro, cf. aussi CLIFFORD et MILLER [5]).

Dans un groupoïde quelconque, il peut exister une z-noix à gauche et une z-noix à droite, d'intersection réduite à z. Ceci arrive aussi dans un groupoïde z-séparé (g) et (d), comme le groupoïde suivant G, de support $E = \{a,b,c,z\}$, dont la loi τ a pour table

T	a	b	c	z
a	a	b	z	z
b	z	z	b	z
c	z	a	z	z
z	z	z	z	z

Les idéaux à gauche sont $\emptyset,\{z\},\{a,z\},\{a,b,z\}$, E ;les idéaux à droite, $\emptyset,\{z\},\{b,z\},\{a,b,z\}$, E .$\{a,z\}$ est donc une z-noix à gauche,$\{b,z\}$ une z-noix à droite,et leur intersection est réduite à z . G est z-séparé (g) et (d).

Il est néanmoins des conditions qui impliquent qu'une z-noix à gauche et une z-noix à droite ont une intersection non triviale (par exemple,l'associativité).De plus

Proposition 4. Dans un groupoïde intègre,une z-noix à gauche et une z-noix à droite ont une intersection non réduite à z.

Ceci résulte de la prop.1.

Les prop. 1,2,4 permettent,avec les propriétés des noix ou z-noix,de trouver un élément pour lequel G soit uniprincipal de deux côtés dans les cas suivants: combinaisons g-m ,cas sans zéro et avec zéro (car un élément net(g) ou z-net(g) est aussi net($\hat{g}$) ou z-net ($\hat{g}$));combinaisons $\hat{g}$-$\hat{d}$,cas sans zéro,cas avec zéro si intègre;combinaisons g-d dans le seul cas associatif (prop.3),avec ou sans zéro.

Dans les autres cas,la condition imposée à G sera un peu plus forte que la conjonction des deux conditions de théorie des tas,car on demandara que G ait un élément à la fois net (g) et net(d), ou z-net($\hat{g}$) et z-net($\hat{d}$),ou z-net(g) et z-net(d).

3.Parties symétriques.

Soient $G = (E,\tau)$ un groupoïde, $H \in \mathfrak{P}(E)$, c, c' deux côtés.

<u>Définition 1. H est dit c-c'-symétrique (ou symétrique si c-c' = g-d) si et seulement si $\mathcal{R}_H^c = \mathcal{R}_H^{c'}$.</u>

On prendra garde que la définition d'une partie symétrique dans un demi-groupe ne coïncide pas exactement avec la définition classique introduite par DUBREIL[11],puisque nous n'imposons pas l'égalité des résidus à gauche et à droite.Les deux notions coïncident toutefois dans les cas usuels (prop.3).

<u>Proposition 1. Pour une partie c-c'-symétrique, p-fort-g(c) $\Longleftrightarrow$ p-fort-g(c').</u>

Ceci résulte de la prop.II.D.8.1.

<u>Proposition 2. Si H est symétrique et sous-stabilisant (g) et (d),et si W_H^g, W_H^d sont non vides,ils sont égaux.</u>

W_H^g est alors un idéal à gauche,et W_H^d un idéal à droite,non vides;donc ils se rencontrent,puisque $W_H^d \tau W_H^g \subseteq W_H^d \cap W_H^g$ .Et,comme ce sont deux classes de $\mathcal{R}_H^g = \mathcal{R}_H^d$,ils sont égaux.

<u>Proposition 3. Si H est $\hat{g}$-$\hat{d}$-symétrique,fort($\hat{g}$) et fort($\hat{d}$), (ou si $W_H^{\hat{g}}$, $W_H^{\hat{d}}$ sont non vides) $W_H^{\hat{g}} = W_H^{\hat{d}}$ .En particulier,dans un demi-groupe,si H est fort et symétrique, $W_H^g = W_H^d$.</u>

Si $W_H^{\hat{g}}$ et $W_H^{\hat{d}}$ sont non vides,ils sont égaux comme à la prop.2.Supposons donc $W_H^{\hat{g}} = \emptyset$, $W_H^{\hat{d}} \neq \emptyset$ (l'autre cas étant dual).

$W_H^{\hat{d}}$ est alors classe de $\mathcal{R}_H^{\hat{d}} = \mathcal{R}_H^{\hat{g}}$;et,H étant fort($\hat{g}$) et net($\hat{g}$),il existe $\gamma \in \hat{g}(G)$ tel que $W_H^{\hat{d}} = H \mathbin{.^{\cdot}} \gamma$ .Et,si $w \in W_H^{\hat{d}}$, $w\tau E \subseteq W_H^{\hat{d}}$,donc $\gamma\gamma_w E \subseteq H$ et $H \mathbin{.^{\cdot}} \gamma\gamma_w = E$,en sorte que E est classe de $\mathcal{R}_H^{\hat{g}} = \mathcal{R}_H^{\hat{d}}$,et que $W_H^{\hat{d}} = E$; H est donc trivial($\hat{d}$),par suite trivial($\hat{g}$) (prop.IV.A.2.5),et $W_H^{\hat{g}} = E$,ce qui est absurde.

<u>Proposition 4. Si H est g-m-symétrique et sous-stabilisant (g),et si W_H^g, W_H^m sont non vides,ils sont égaux.</u>

W_H^m étant un idéal bilatère,l'égalité se démontre comme celle de la prop.2.

<u>Proposition 5. Si H est $\hat{g}$-m-symétrique,fort($\hat{g}$) et fort(m) (ou si $W_H^{\hat{g}}$, W_H^m sont non vides), $W_H^{\hat{g}} = W_H^m$.</u>

<u>En particulier,dans un demi-groupe,si H est g-m-symétrique,fort et médianement fort, $W_H^g = W_H^m$.</u>

Si $W_H^{\hat{g}}$, W_H^m sont non vides,ils sont égaux comme à la prop.4.Supposons donc l'un vide et l'autre non.

Si $W_H^{\hat{g}} = \emptyset$ et $W_H^m \neq \emptyset$, H est net($\hat{g}$) et non net(m),ce qui est absurde.

Si $W_H^m \neq \emptyset$ et $W_H^{\hat{g}} \neq \emptyset$, $W_H^{\hat{g}}$ est classe de $\mathfrak{D}_H^{\hat{g}} = \mathfrak{D}_H^m$,et, comme H est fort(m) et net(m),il existe $\mu \in m(G)$ tel que $W_H^{\hat{g}} = H \cdot^{\cdot} \mu$. Si $w \in W_H^{\hat{g}}$, $E\tau w \subseteq W_H^{\hat{g}}$ et $\mu\delta_w E = \mu(E\tau w) \subsetneq H$,de sorte que $E = H \cdot^{\cdot} \mu\delta_w$ est classe de $\mathfrak{D}_H^m = \mathfrak{D}_H^{\hat{g}}$,et que $W_H^{\hat{g}} = E$; H est donc trivial($\hat{g}$),par suite trivial(m) (prop.IV.A.2.6),et $W_H^m = E$,ce qui est absurde.

Il résulte des prop. 3 et 5 que,pour une partie $\hat{g}$-$\hat{d}$-symétrique,forte($\hat{g}$) et forte($\hat{d}$), net($\hat{g}$) équivaut à net($\hat{d}$) ;que, pour une partie $\hat{g}$-m-symétrique,forte($\hat{g}$) et forte(m), net($\hat{g}$) équivaut à net(m) .

<u>Proposition 6. Dans un demi-groupe,si H est symétrique, parfait(g) $\Longleftrightarrow$ parfait(d).</u>

Si H vérifie une des deux conditions,il est fort et non vide;pour un tel H, p-fort-g(g) et p-fort-g(d) sont équivalents (prop.1),disjoint de W_H^g et disjoint de W_H^d sont équivalents (prop.3).

B.Groupoïdes sans zéro avec condition bilatérale.

1.Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Elles s'écrivent immédiatement à partir du tableau du §.IV.B.6 et des remarques suivantes:un quasi-groupe est un groupoïde bijectif (g) et (d);un groupoïde injectif(g) est stationnaire(d) et un groupoïde surjectif(g) est transitif(d) et réciproquement (prop. IV.B.4.3 et IV.B.5.2).

Les conditions où ne figure pas de transitivité sont parfois légèrement renforcées comme expliqué au §.A.2.

Combinaisons g-d

g \ d	inj. élt?net	bij. élt.net	inj. trans.	bij. trans.
injectif élt. net	simplif. é.n.(g et d)	simplif. quot. à g. élt.net(d)	simplif. quot. à d. élt.net(g)	quasi-groupe
bijectif élt.net	simplif. quot. à d. élt.net(g)	quasi-groupe	simplif. quot. à d. élt.net(g)	quasi-groupe
injectif transitif	simplif. quot. à g. élt.net(d)	simplif. quot. à g. élt.net(d)	quasi-groupe	quasi-groupe
bijectif transitif	quasi-groupe	quasi-groupe	quasi-groupe	quasi-groupe

Combinaisons ĝ-d̂

ĝ \ d̂	inj. à noix	bij. à noix	inj. trans.	bij. trans.
injectif noix	simplif. noix à g. noix à d.	simplif. quot. à g. noix à d.	simplif. simple à d. noix à g.	simplif. quot. à g. simple à d.
bijectif noix	simplif. quot. à d. noix à g.	quasi-groupe	simplif. quot. à d. noix à g.	quasi-groupe
injectif transitif	simplif. simple à g. noix à d.	simplif. quot. à g. noix à d.	simplif. simple à g. simple à d.	simplif. quot. à g. simple à d.
bijectif transitif	simplif. quot. à d. simple à g.	quasi-groupe	simplif. quot. à d. simple à g.	quasi-groupe

Combinaisons g-m

g \ m	inj. à noix	bij. à noix	inj. trans.	bij. trans.
injectif élt. net	simplif. élt.net(g)	quasi-groupe	simplif. simple élt.net(g)	quasi-groupe
bijectif élt. net	simplif. quot. à d. élt.net(g)	quasi-groupe	simplif. quot. à d. élt.net(g)	quasi-groupe
injectif transitif	simplif. quot. à g.	quasi-groupe	simplif. quot. à g.	quasi-groupe
bijectif transitif	quasi-groupe	quasi-groupe	quasi-groupe	quasi-groupe

On notera que toute condition de stationnarité est exclue de ces tableaux.Pour le premier,la simplifiabilité entraîne la stationnarité (g) et (d)Pour le troisième aussi,la condition stationnaire(g) n'est pas à considérer;la condition stationnaire(m) équivaut (prop.IV.B.5.3) à l'associativité et commutativité:voir §.C.1.

Pour le second tableau,les conditions stationnaire($\hat{g}$) et stationnaire($\hat{d}$) s'ajoutent simplement aux autres;on se souviendra toutefois qu'un tas stable injectif stationnaire à noix est bijectif et transitif.

La structure des quasi-groupes stationnaires ($\hat{g}$) ou ($\hat{d}$) est précisée par la prop.IV.B.5.6.Le second tableau introduit des quasi-groupes stationnaires ($\hat{g}$) et ($\hat{d}$),dont on peut dire que:

Proposition 1. Un quasi-groupe stationnaire ($\hat{g}$) et ($\hat{d}$) est un groupe,et réciproquement.

On a noté,(prop.IV.B.5.6,dém.) qu'un quasi-groupe stationnaire($\hat{g}$) a un élément unité à gauche ;donc,s'il est aussi stationnaire($\hat{d}$),c'est un groupe (prop.IV.B.5.4);la réciproque est triviale.

Le groupoïde du §.III.C.3 est simplifiable,vérifie l'axiome d'existence des quotients à gauche,est simple à droite et a des éléments nets(b),mais n'est pas un quasi-groupe.Il en résulte que les conditions écrites dans les tableaux ci-dessus,(sauf la condition "quasi-groupe"),qui sont vérifiées par ce groupoïde,n'entraînent pas la condition "quasi-groupe".Ce groupoïde n'est pas stationnaire($\hat{g}$) ou ($\hat{d}$) et il se peut que certaines des conditions non écrites entraînent la condition "quasi-groupe".

2.Théorèmes d'homomorphisme pour les quasi-groupes.

Prenons d'abord les théorèmes g-d.

Notons d'abord que les conditions imposées à un groupoïde G dans le tableau du §.1 pour qu'il soit un quasi-groupe sont redondantes.C'est ainsi que,si G_g et G_d sont bijectifs,G est un quasi-groupe.Par suite,soit f un homomorphisme de groupoïdes arrivant sur G, principal (g) (donc (d)) pour une partie H symétrique,forte(g) (donc (d)) stabilisante (g) et (d) et bifranche (g) et (d) (donc nette (g) et (d)) ; G_g et G_d sont en ce cas injectifs (prop. II.D.6.6 et III.A.1.2) et surjectifs (lemme III.D.2.1), et G est un quasi-groupe. Or, d'après le théorème 2_g-2_d, tout homomorphisme de groupoïdes arrivant sur un quasi-groupe est principal (g) et (d) pour une partie H, ipso facto symétrique, parfaite-nette-bifranche (g) et (d), et l'on peut énoncer :

Théorème 1. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un quasi-groupe est principal (g) (donc (d)) pour une partie H symétrique,forte(g) (donc (d)),stabilisante (g) et (d),bifranche (g) et (d),et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

La dernière assertion sur H résulte de ce que tout élément d'un quasi-groupe est net (g) et (d).

De même,si G_g est bijectif-transitif,et G_d injectif, G est un quasi-groupe.Par suite,soit f un homomorphisme de groupoïdes arrivant sur G,principal(g) (donc(d)) pour une partie H symétrique, forte(g),stabilisante(g),claire(g),bifranche(g) (donc forte(d) et nette(d)) et stabilisante(d);G_g est en ce cas bijectif transitif (théorème 4) et G_d injectif (prop. II.D.6.6 et III.A.1.2),et G est un quasi-groupe.Or,d'après le théorème 4_g-1_d,tout homomorphisme de groupoïdes arrivant sur un quasi-groupe est principal (g) et (d) pour une partie H,ipso facto symétrique,forte-stabilisante-claire-bifranche (g) et parfaite-nette (d),donc stabilisante(d);et l'on peut énoncer:

Théorème 2. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un quasi-groupe est principal (g) (donc (d)) pour une partie H symétrique,forte(g) (donc (d)),stabilisante (g) et (d),clair (g) et bifranche(g),et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

On a bien entendu l'énoncé dual.

Enfin l'énoncé 3_g-3_d donne immédiatement

Théorème 3. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un quasi-groupe est principal (g) (donc (d)) pour une partie H symétrique, forte(g) (donc (d)), stabilisante (g) et (d), claire(g) et (d) et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

En effet net (g) et (d) et translucide(g) équivaut à clair(g), puisque net(d) équivaut à franc(g).

Enfin, tout autre énoncé du tableau des combinaisons g-d donne sur H des conditions plus fortes que l'une des conditions des théorèmes précédents.

Pour les théorèmes $\hat{g}$-$\hat{d}$, on procède de la même façon; le théorème $2_{\hat{g}}$-$2_{\hat{d}}$, et le même raisonnement direct que pour le théorème 1, conduisent au

Théorème 4. Tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un quasi-groupe est principal ($\hat{g}$) (donc ($\hat{d}$)) pour une partie H $\hat{g}$-$\hat{d}$-symétrique, forte ($\hat{g}$) et ($\hat{d}$), franche ($\hat{g}$) et ($\hat{d}$), et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Pour les théorèmes g-m, les énoncés où G_m est supposé bijectif au moins ne donneront pas, même avec un raisonnement direct, des conditions sur H plus faibles que celle du théorème IV.B.7.1. (à savoir forte(m) et franche(m)). Le théorème 4_g-1_m, et un raisonnement direct analogue à celui du théorème 2, donnent pour H les conditions: g-m-symétrique, forte-stabilisante-claire-bifranche (g) (donc nette(m)) et forte(m); on a un apport important de conditions nouvelles pour un gain que l'on peut estimer faible sur la condition de netteté.

On peut, par des procédés analogues à ceux du §.IV. B.7, déduire de ces théorèmes des théorèmes d'homomorphisme pour les boucles, ou des propriétés des quasi-groupes.

C. Demi-groupes sans zéro avec condition bilatérale.

1. Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

On les a tout de suite avec la:

Proposition 1. Un semi-groupe ayant un élément net d'un côté est un groupe, et réciproquement.

Soit h un élément net à gauche du semi-groupe $D = (E,.)$ Il existe $e \in E$ tel que $eh = h$; de $eeh = eh$ résulte $ee = e$, et, D étant un semi-groupe, e est élément unité (pour tout x E, $eex = ex$ entraîne $ex = x$, et $xee = xe$, $xe = x$). D'autre part, il existe $h \in E$ tel que $h'hh = h = eh$, donc que $h'h = e$; et e est net à gauche (prop. III.B.1.4), donc D est un groupe. La réciproque est triviale.

Il en résulte que toutes les cases des tableaux de combinaisons g-d et g-m sont occupées par des groupes. (éventuellement abéliens en présence de la condition "stationnaire(m)").

2. Théorèmes d'homomorphisme pour les groupes.

Pour les théorèmes g-d, il résulte immédiatement du théorème B.2.1 (ou B.2.4), ou on démontre de la même façon, que

Théorème 1. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal à gauche (donc à droite) pour une partie H symétrique, forte et nette à gauche (donc à droite), et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Ceci est le théorème de DUBREIL[11] et CROISOT[8] rappelé dans l'introduction; à ceci près que la notion de partie symétrique de l'énoncé ci-dessus est plus faible, ce qui permet d'améliorer un peu l'énoncé classique au moyen de la prop. A.3.3.

Pour les théorèmes g-m, l'énoncé E_g-E_m donne pour H les conditions: g-m-symétrique, fort(g), fort(m), p-fort-g(m) (donc (g)), net(m) (donc (g), prop. A.3.5); réciproquement, si un homomorphisme de demi-groupes arrivant sur D est principal(m) pour une partie H forte(m), p-forte-g(m) et nette à gauche, D_m est injectif(m), et D contient un élément net à gauche, image de la classe contenant H ; donc c'est un groupe (prop.1) et il vient

Théorème 2. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe est principal(m) pour une partie H médianement forte, p-forte-g(m) et nette à gauche, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire.

Ceci est un théorème de CROISOT[8]; dans l'énoncé original, "bilatèrement parfait" était mis pour "fort(m) et p-fort-g(m)", mais ces conditions sont trivialement équivalentes pour une partie médianement nette.

Les autres théorèmes g-d (resp. g-m) donnent pour H des conditions plus fortes que celles du théorème 1 (resp. 2).

D. Groupoïdes avec zéro et condition bilatérale

1. Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Elles s'écrivent immédiatement à partir du tableau du §.IV.D.7, en utilisant les remarques suivantes: un groupoïde z-transitif(g) est z-surjectif(d) (prop.IV.D.5.5); et

Proposition 1. Un groupoïde z-simplifiable à gauche est z-stationnaire(d).

Si G = (E, τ) est un tel groupoïde, pour tous a, b, c, d $\in$ E

$$a\tau c = a\tau d \not\equiv z \Longrightarrow c = d \Longrightarrow b\tau c = b\tau d \, .$$

Les tableaux ci-dessous sont faits avec les conventions habituelles, sauf que les éléments z-nets qui y figurent sont supposés implicitement différents de z. Certaines conditions ont été renforcées, comme expliqué au §.A.2, en supposant l'existence d'un élément z-net (g) et (d).

Combinaisons g-d

g \ d	z-injectif ét.z-net≠ z	z-bijectif ét.z-net≠ z	z-injectif z-transitif	z-bijectif z-transitif
z-injectif ét.z-net≠ z	z-simplif. é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-surject.(d) é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-trans.(d) ét.z-net(g)	z-simplif. z-surject.(d) z-trans.(d) ét.z-net(g)
z-bijectif ét.z-net≠ z	z-simplif. z-surject.(g) é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-surject.(g) z-surject?(d) é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-trans.(d) ét.z-net(g)	z-simplif. z-surject.(d) z-trans.(d) ét.z-net(g)
z-injectif z-transitif	z-simplif. z-trans.(g) ét.z-net(d)	z-simplif. z-trans.(g) ét.z-net(d)	z-simplif. z-trans.(g) z-trans.(d)	z-simplif. z-trans.(g) z-trans.(d)
z-bijectif z-transitif	z-simplif. z-surject.(g) z-trans.(g) ét.z-net(d)	z-simplif. z-surject.(g) z-trans.(g) ét.z-net(d)	z-simplif. z-trans.(g) z-trans.(d)	z-simplif. z-trans.(g) z-trans.(d)

Combinaisons ĝ-d̂

ĝ \ d̂	z-injectif et z-net≠ z	z-bijectif ét.z-net≠ z	z-injectif z-séparé p.z-simple	z-bijectif z-séparé p.z-simple
z-injectif ét.z-net≠ z	z-simplif. é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-surject.(d) é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple d z-noix à g.	z-simplif. z-sép.(g&d) z-surject.(d) z-simple d z-noix à g.
z-bijectif ét.z-net≠ z	z-simplif. z-surject?(g) é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-surject?(g) z-surject?(d) é.z-n.(g&d)	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple d z-noix à g.	z-simplif. z-sép.(g&d) z-surject?(d) z-simple d z-noix à g.
z-injectif z-séparé p.z-simple	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple g z-noix à d?	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple g z-noix à d.	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple g z-simple d	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple g z-simple d
z-bijectif z-séparé p.z-simple	z-simplif. z-sép.(g&d) z-surject?(g) z-simple g z-noix à d.	z-simplif. z-sép.(g&d) z-surject.(g) z-simple g z-noix à d.	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple g z-simple d	z-simplif. z-sép.(g&d) z-simple g z-simple d

Combinaisons g-m

g \ m	z-injectif dt.z-net $\neq$ z	z-bijectif dt.z-net $\neq$ z	z-injectif z-transitif	z-bijectif z-transitif
z-injectif dt.z-net $\neq$ z	z-simplif. z-separe(m) e.z-net(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surject.(m) dt.z-net(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-simple dt.z-net(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surject.(m) z-simple dt.z-net(g)
z-bijectif dt.z-net $\neq$ z	z-simplif. z-surjec.(g) z-séparé(m) dt.z-net(g)	z-simplif. z-surjec.(m) z-séparé(m) él.z-net(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(g) z-simple él.z-net(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(m) z-simple élt.z-net(g)
z-injectif z-transitif	z-simplif. z-séparé(m) z-trans.(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(m) z-trans.(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-trans.(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(m) z-trans.(g)
z-bijectif z-transitif	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(g) z-trans.(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(m) z-trans;(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(g) z-trans.(g)	z-simplif. z-séparé(m) z-surjec.(m) z-trans.(g)

Les conditions de z-stationnarité ne figurent pas dans ces tableaux.Dans le tableau des combinaisons g-d,elles n'ont pas à figurer (prop.1).Dans les deux autres,elles se rajoutent simplement aux autres conditions.

Le groupoïde ci-dessous vérifie toutes les conditions du tableau g-d et n'est pas un quasi-groupe avec zéro.Son support est l'ensemble N des entiers naturels,positifs ou nul,et sa loi τ,dont la table commence par

τ	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	2	3	4	5	
2	0	1	0	3	2	5	4	
3	0	2	3	0	1	6	7	
4	0	3	2	1	0	7	6	
5	0	4	5	6	7	0	1	
6	0	5	4	7	6	1	0	
⋮								

est définie,comme celle du groupoïde du §.III.C.3,par la donnée des produits $0\tau n = n\tau 0 = 0$ et $1\tau n = n\tau 1 = \sup(n-1, 0)$ pour tout n , et par le même axiome ii),mais appliqué seulement aux produits de nombres non nuls (dans le prolongement de la table,on ne tient pas compte de la ligne ni de la colonne de 0).

Ce groupoïde est abélien, et on montre, comme au §. III.C.3, que tout élément de N figure une fois et (sauf 0) une seule dans toute ligne, et dans toute colonne (sauf celles de 0); ce groupoïde est donc z-simplifiable, z-transitif(g) et z-transitif(d). Ce n'est pas un quasi-groupe avec zéro car il n'est pas intègre.

Ce groupoïde G, étant abélien, est tel que $\hat{b}(G) = \hat{g}(G)$; il est donc z-injectif($\hat{b}$), z-surjectif($\hat{b}$), z-transitif($\hat{b}$); comme il est z-séparé (g) et (d), il est z-séparé(m) et est aussi z-injectif-z-surjectif-z-transitif (m), fournissant ainsi les contre-exemples annoncés au §.IV.D.7.

Il est probable que de même les conditions des tableaux $\hat{g}$-$\hat{d}$ et g-m ne définissent pas un quasi-groupe avec zéro. Le groupoïde ci-dessus vérifie les plus fortes des conditions écrites de ces tableaux, mais n'est pas z-stationnaire($\hat{g}$) car

$$\gamma_1\gamma_3 1 = \gamma_1\ 2 = 1 = \gamma_2 1\ ,\ \gamma_1\gamma_3 2 = \gamma_1 3 = 2 \neq 0 = \gamma_2 2\ .$$

il n'est donc pas z-stationnaire ($\hat{d}$), (m) ou ($\hat{b}$); on se consolera en remarquant que ces conditions ne résultent pas des autres dans un groupoïde avec zéro.

2. Addition de l'intégrité.

Les groupoïdes obtenus sont ceux qui résultent de l'adjonction d'un zéro à ceux du §.B.1.

E. Demi-groupes avec zéro et condition bilatérale.

1. Conditions faisant l'objet de théorèmes d'homomorphisme.

Elle s'écrivent immédiatement à partir du tableau du §.IV.E.2 et des propositions suivantes:

<u>Proposition 1. Un demi-groupe z-injectif(g), z-transitif(g) et z-injectif(d) est un groupe avec zéro, et réciproquement.</u>

Un tel demi-groupe est z-stationnaire(g) (prop.D.1.1) donc c'est un groupe avec zéro (prop.IV.E.2.1). La réciproque est triviale

Proposition 2. Un demi-groupe z-bijectif(g),z-séparé(g),à z-noix(g) et z-injectif(d) est un groupe avec zéro,et réciproquement.

Un tel demi-groupe est z-stationnaire(g),et cela résulte de la prop.IV.E.2.2.

Il résulte de ces propositions que toutes les conditions du tableau g-d,sauf peut-être celle du théorème $Z1S_g$-$Z1S_d$,sont équivalentes à la condition "groupe avec zéro".

Proposition 3. Un demi-groupe z-injectif(g),z-transitif(g), z-injectif(m) et z-séparé(m) est un groupe avec zéro,et réciproquement.

Il est en effet z-injectif(d).

Proposition 4. Un demi-groupe z-injectif(m),z-transitif(m) et à z-noix(g) est un groupe avec zéro,et réciproquement.

La z-noix(g) est une z-noix($\hat{b}$) (prop.A.2.3),donc un tel demi-groupe,étant z-séparé(g),est z-transitif(g);la proposition résulta alors de la prop.3.

Enfin un demi-groupe z-bijectif(m),z-séparé(m) et à z-noix(m) est un groupe avec zéro,et réciproquement (prop.IV.E.2.4).

Il résulte de ces propositions que toutes les conditions du tableau g-m,sauf peut-être celles des théorèmes $Z1S_g$-$Z1S_m$, $Z1S_g$-$Z5S_m$, $Z5S_g$-$Z1S_m$, $Z5S_g$-$Z5S_m$,sont équivalentes à la condition "groupe avec zéro" (ou "groupe abélien avec zéro" en présence de "z-stationnaire(m)").

Les tableaux ci-dessous ont élé concentrés de manière à mettre en évidence les conditions plus faibles.Celles-ci n'ont pas besoin d'être renforcées en vue d'obtenir des éléments symétriques (prop.A.2.3).

Combinaisons g-d

g \ d	z-injectif z-séparé z-noix	plus fortes
z-injectif z-séparé z-noix	z-simplifiable z-séparé(g et d) z-noix (g et d)	groupe avec zéro
plus fortes	groupe avec zéro	groupe avec zéro

Combinaisons g-m

g \ m	z-injectif z-séparé z-noix	z-injectif z-séparé z-stationnaire z-noix	plus fortes
z-injectif z-séparé z-noix	z-simplifiable z-séparé (g et d) z-noix à gauche	z-simplifiable z-séparé (g et d) z-stationnaire(m) z-noix(à gauche	groupe avec zéro (évt. abélien)
z-injectif z-séparé z-station. z-noix	z-simplifiable z-séparé (g et d) z-noix à gauche	z-simplifiable z-séparé (g et d) z-stationnaire(m) z-noix à gauche	groupe avec zéro (évt. abélien)
plus fortes	groupe avec zéro (évt. abélien)	groupe avec zéro (évt. abélien)	groupe avec zéro (évt. abélien)

Le demi-groupe du §.IV.E.2 est z-injectif-z-séparé-z-stationnaire-à-z-noix (g),(d),(m) et ($\hat{b}$),et ce n'est pas un groupe avec zéro.Les conditions les plus faibles des tableaux ci-dessus n'entraînent donc pas la condition "groupe avec zéro".

2.Addition de l'intégrité.

Les demi-groupes obtenus sont ceux qui résultent de l'adjonction d'un zéro à ceux du §.C.1.Ce sont donc des groupes avec zéro (éventuellement abéliens en présence de la condition "z-stationnaire(m)").

3.Théorèmes d'homomorphisme pour les groupes avec zéro.

Examinons d'abord les théorèmes g-d,en premier ceux où l'intégrité de l'image n'est pas explicitement supposée.

En prenant des conditions minimales sur l'image,on considère les énoncés suivants,donnant pour H les conditions:

$Z1S_g-Z2S_d$: symétrique,parfait(g),flou(g)
parfait(d),flou(d),loyal(d)

$Z1S_g-Z3S_d$: symétrique,parfait(g),flou(g)
fort(d),non trivial(d),flou(d),translucide(d)

$Z1S_g-Z5S_d$: symétrique,parfait(g),flou(g)
parfait(d),flou(d),robuste(d).

Les conditions du premier énoncé peuvent être amputées de "parfait(d),flou(d)" puisque H est fort et symétrique.Il vient:

Théorème 1. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche (donc à droite) pour une partie H symétrique,parfaite à gauche,floue à gauche et loyale(d),et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Les conditions du second énoncé peuvent être affaiblies en : symétrique,fort,flou(g),non trivial,translucide(d),puisque l'énoncé $Z3S_g-Z3S_d$ permet de choisir ainsi H.

Théorème 2. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche (donc à droite) pour une partie H symétrique,forte,non triviale,floue à gauche et translucide,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Les conditions du troisième énoncé peuvent être amputées de "parfait(d),flou(d)" puisque H est fort et symétrique;d'où

Théorème 3. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche (donc à droite) pour une partie H symétrique,parfaite à gauche,floue à gauche et médianement forte,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.

Voyons maintenant les énoncés où l'image est supposée explicitement intègre.La condition la plus faible sur H est donnée par l'énoncé $Z1S_g-Z1S_d$ et c'est: symétrique,parfait(g),flou(g),parfait(d), flou(d) (ces deux dernières conditions pouvant être supprimées puisque H est fort et symétrique),et $W^g_H = W^d_H$ complètement premier.

On peut supposer que H est seulement symétrique,fort, flou et non trivial,et que $W = W_H^g = W_H^d$ est complètement premier.

En ce cas $W_H^m = W$; soient x,y des éléments quelconques de E; si $w \in W$, $xw \in W$, et $xwy \in H$ est impossible,donc $w \in W_H^m$; réciproquement,si $w \in W_H^m$,et si $a \in E - W$, $xwa \in H$ est impossible,donc $wa \in W$,et $w \in W$.

Par suite H est loyal(g);car si a,b,u,v,y $\in E$ sont tels que $ay \in H$, $ubv \in H$,alors $a \notin W$, $b \notin W_H^m = W$,donc $ab \notin W$ et il existe $x \in E$ tel que $abx \in H$ .De même H est loyal(d).

Le demi-groupe où arrive l'homomorphisme considéré a un zéro z et est z-injectif;d'après le lemme III.F.2.1 , il est z-surjectif (g) et (d).Comme il est intègre,c'est un groupe avec zéro (§ 2).Et on peut énoncer:

<u>Théorème 4. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive sur un groupe avec zéro est principal à gauche (donc à droite) pour une partie H symétrique,forte,non triviale,floue à gauche et de résidu à gauche complètement premier,et réciproquement;et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.</u>

Ce théorème est un théorème classique de P. DUBREIL [11] et R. CROISOT [7],légèrement amélioré par l'emploi d'une notion de partie symétrique plus faible,et la prop.A.3.3.Il est difficile de savoir si l'emploi de la théorie des tas a réellement raccourci la démonstration de ce théorème;on notera qu'il se déduit très facilement, mais non immédiatement,de la théorie générale.

Contentons-nous,pour les théorèmes g-m,du cas intègre;l'énoncé $Z1S_g$-$Z1S_m$ donne alors pour H les conditions: g-m-symétrique,parfait(g),flou(g),parfait(m),flou(m),W_H^m complètement premier.

Procédant comme pour le théorème C.2.2,supposons seulement H parfait(m),flou(m),$W_H^g \subseteq W_H^m$ et W_H^m complètement premier;le demi-groupe où arrive l'homomorphisme considéré a un zéro z,est z-injectif, et la classe contenant H s'envoie sur un élément z-net(g);comme il est intègre,c'est un groupe avec zéro (prop.C.1.1),et on peut énoncer:

<u>Théorème 5. Tout homomorphisme de demi-groupes qui arrive</u>

<u>sur un groupe avec zéro est principal(m) pour une partie H médianement parfaite, médianement floue, dont le résidu médian est complètement premier et contient le résidu à gauche, et réciproquement; et on peut prendre pour H toute classe de l'équivalence nucléaire qui ne s'envoie pas sur le zéro.</u>

Ce théorème est analogue au théorème C.2.2; l'affaiblissement des conditions sur H s'est d'ailleurs opéré de la même façon

* * *

Terminons par une remarque non dépourvue d'importance.

Nous ne nous sommes pas préoccupés, dans ce qui précède, du problème de la recherche des groupoïdes ayant telle propriété et qui sont images homomorphes d'un groupoïde donné (par exemple, recherche des groupes images homomorphes d'un demi-groupe). Les théorèmes fournis par la théorie des tas permettent cependant de résoudre ce problème, chaque fois que la condition imposée au groupoïde recherché fait l'objet d'un théorème d'homomorphisme.

Supposons que tout homomorphisme de groupoïdes qui arrive sur un groupoïde ayant la propriété P soit principal(c) pour une partie H soumise aux conditions C, et réciproquement. Alors:

la recherche des groupoïdes images homomorphes du groupoïde donné G = (E,τ), et ayant la propriété P, équivaut à celle des parties H de E vérifiant les conditions C et <u>telles que $\mathfrak{L}_H^c$ soit compatible</u>;

la recherche des demi-groupes images homomorphes de G et ayant la propriété P équivaut à celle des parties H de E vérifiant les conditions C et <u>telles que $\mathfrak{L}_H^c$ soit compatible et associative</u> (une équivalence $\mathfrak{R}$ sur E est associative si l'on a identiquement $x\tau(y\tau z)\ \mathfrak{R}\ (x\tau y)\tau z$).

Les conditions supplémentaires imposées à H par l'intermédiaire de $\mathfrak{L}_H^c$ sont faciles à exprimer élémentairement, surtout si H est fort(c). La condition d'associativité est vérifiée trivialement si G est un demi-groupe. La condition de compatibilité est vérifiée trivialement quand c = m ou $\hat{b}$, et quand les conditions C entraînent que H est g-m-symétrique, ou $\hat{g}$-$\hat{d}$-symétrique; des propriétés de compatibilité de $\mathfrak{L}_H^c$ peuvent aussi être déduites de la prop. III.G.2.2. Hormis ces cas, la recherche des groupoïdes, ou demi-groupes, images homomorphes de G, et ayant la propriété P <u>n'équivaut pas</u> à celle des parties de E vérifiant C.

Index terminologique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] : O. ANDERSEN. Ein bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen. Thèse (Staatsexamensarbeit),Hambourg, 1952 (cité dans [6]).
[2] : R. BAER et F. LEVI . Sitzber. Heidelberger Akad. Wiss.,Abh. 2, (1932),1-12.
[3] : R.H. BRUCK. A survey of binary systems. Berlin, Springer-Verlag, 1958 (Ergeb. der Math.,neue Folge,20).
[4] : J. CALAIS. Sém. DUBREIL-PISOT,16° ann. (1962-63),n°12.
[5] : A.H. CLIFFORD et D.D. MILLER. Amer. J. Math. 70 (1948) 117-125.
[6] : A.H. CLIFFORD et G.B. PRESTON. The algebraic théory of semi-groups,vol.1. Amer. Math. Soc.,Providence,1961.
[7] : R. CROISOT. Bull. Soc. Math. France. 80 (1952),217-223.
[8] : R. CROISOT. J. Math. Pures et Appl.(9),36 (1957),373-417.
[9] : R. DESQ. C. R. Acad. Sci. 254 (1962) 2271-2273.
[10] : R. DESQ. C. R. Acad. Sci. 255 (1962) 2348-2350.
[11] : P. DUBREIL. Mém. Acad. Sci.(2),63 (1941),n°3.
[12] : P. DUBREIL. C. R. Acad. Sci. 215 (1942) 239-241.
[13] : P. DUBREIL. Bull. Soc. Math. France. 81 (1953) 289-306.
[14] : P. DUBREIL et R. CROISOT. Collect. Math. 7 (1954) 193-203.
[15] : H. FITTING. Math. Ann. 111 (1935) 19-41.
[16] : G.E. FORSYTHE. Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955) 443-447.
[17] : P. GABRIEL. Thèse,Paris
[18] : P.A. GRILLET. Séminaire DUBREIL-PISOT,15° ann. (1961-62),n°2.
[19] : P.A. GRILLET. C. R. Acad. Sci. 256 (1963) 2739-2741.
[20] : P.A. GRILLET. Séminaire DUBREIL-PISOT,17° ann. (1963-64),n°2.
[21] : M. KOSKAS. Séminaire DUBREIL-PISOT,16° ann. (1962-63),n°10.
[22] : B. STOLT. Über Axiomsysteme,die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Thèse. Almqvist et Wicksells,Uppsala,1953.
[23] : M. TEISSIER. C. R. Acad. Sci. 232 (1951),1987-1989.
[24] : C. THEODOSSIS. Thèse d'Univ.,Paris
[25] : G. THIERRIN. Acad. Roy. Belgique;Sci.(5),41 (1955) 83-92.

(Manuscrit reçu le 7 juillet 1964)