MÉMOIRES DE LA S. M. F.

L. CLOZEL

Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés $\mathfrak{p}$-adiques et caractères des groupes réductifs

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 39-64

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__39_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 39-64

THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT POUR LES VARIÉTÉS $\mathfrak{p}$-ADIQUES ET CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS

L. CLOZEL (*)

(*) CNRS, Paris
Institute for Advanced Study, Princeton, USA (1983-84)

Partially supported by NSF grant MCS-82 11 506.

L. CLOZEL

1. INTRODUCTION.

Soit F un corps $\mathfrak{p}$-adique. (Nous ne faisons pas d'hypothèse sur la caractéristique de F). Si X est une variété analytique sur F, et C un corps de caractéristique nulle, par exemple le corps des complexes, on peut étudier les distributions sur X à valeurs dans C : ce sont les formes linéaires sur l'espace $C_c^\infty(X,C)$ des fonctions localement constantes de X dans C.

Comme Daniel Heifetz l'a montré dans sa thèse [9], les propriétés élémentaires des distributions décrites par exemple dans [11] - comportement par image directe et inverse, front d'onde, principe de la phase stationnaire - s'étendent à de telles distributions sur les variétés $\mathfrak{p}$-adiques. D. Heifetz s'en sert alors pour étendre aux groupes $\mathfrak{p}$-adiques la notion, due à Howe, de front d'onde d'une représentation.

Le but de cette note est de remarquer qu'une autre propriété élémentaire des distributions, le théorème d'Atiyah-Bott, s'étend sans changement notable aux fibrés sur les variétés $\mathfrak{p}$-adiques qui interviennent dans la théorie des représentations ("fibrés admissibles").

Nous démontrons en fait deux "théorèmes d'Atiyah-Bott". Le premier (Prop. 1) ne s'applique qu'aux fibrés de dimension finie et est l'exact analogue du théorème réel ; nous ne faisons qu'esquisser sa démonstration, puisqu'il suffit d'imiter celle de [11]. Dans le § 4, nous démontrons une extension du théorème aux fibrés admissibles de dimension infinie (Prop. 2) : ce sont de tels fibrés qui interviennent, en général, dans la théorie des représentations des groupes réductifs. Dans les § 5-6, nous appliquons ceci aux représentations admissibles des groupes réductifs. Nous obtenons ainsi une démonstration très simple des formules obtenues par van Dijk pour les caractères des représentations induites [6], ainsi que les formules analogues pour les caractères tordus qui interviennent dans la théorie du changement de base [13]. Ceci donne une preuve très facile du résultat d'induction dans la démonstration des identités de Shintani (Théor. 2), au moins pour GL(n). Pour donner un sens à ce théorème, nous avons été amené à étendre aux caractères tordus le théorème d'Harish-Chandra assurant que les caractères admissibles sont lisses sur l'ensemble régulier (Théor. 1).

L'essentiel de ce travail a été fait au printemps 1981, lors d'un séjour au Sonderforschungsbereich "Theoretische Mathematik" de Bonn. Je suis heureux de remercier l'Université de Bonn, et tout particulièrement G. Harder, de leur hospitalité. Les résultats ont été annoncés lors d'un colloque organisé à Vancouver en août 1981 par W. Casselman.

2. FIBRÉS LISSES ET ADMISSIBLES SUR LES VARIÉTÉS $\mathfrak{p}$-ADIQUES.

2.1. Dans la suite de l'article, F est un corps $\mathfrak{p}$-adique (un corps localement compact non-archimédien) et C un corps de caractéristique nulle. On note $|x|$ la valeur absolue normalisée de $x \in F$: on a donc $|x| \in \mathbb{Q} \subset C$. On considère des variétés *analytiques* X,Y,... sur F ; les morphismes de variétés sont supposés *localement analytiques*.

Soit X une variété analytique sur F. Un *fibré vectoriel lisse* sur X, $\mathcal{E}$, est défini de la façon suivante : localement (sur tout ouvert-fermé assez petit U de X) on a

$$(*) \qquad \mathcal{E}|_U \cong U \times E,$$

E étant un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie) sur C ; E n'est muni d'aucune topologie. Si U,V sont deux ouverts-fermés de X, les trivialisations locales de $\mathcal{E}|_U$ et $\mathcal{E}|_V$ donnent de la façon habituelle un cocycle

$$C_{U,V} : U \cap V \to GL(E).$$

On suppose que pour tous vecteurs $v,w \in E$, l'ensemble $\{y \in U \cap V : C_{U,V}(y)v = w\}$ est ouvert dans $U \cap V$.

Une *section lisse* du fibré $\mathcal{E}$ est une section de $\mathcal{E}$ comme fibré vectoriel donnée, dans les trivialisations locales $(*)$, par des applications $x \to (x,s(x))$ où $s(x)$ est une application localement constante $U \to E$. On vérifie que cette définition, pour un fibré lisse, est indépendante de la trivialisation. On note $C_c^\infty(X,\mathcal{E})$ l'espace des sections lisses à support compact de $\mathcal{E}$. Un fibré lisse sur X peut être aussi défini par la donnée de ses cocycles $C_{U,V} : U \cap V \to GL(E)$ satisfaisant la condition de différentiabilité, ainsi que la relation de cocycle habituelle (cf. e.g. [16, ch. 1]).

Remarque : Cette notion de fibrés est analogue à la notion de "ℓ-faisceaux" de Bernstein-Zelevinskii [2]. En particulier, le faisceau des sections lisses de $\mathcal{E}$ est un ℓ-faisceau.

Exemples. 1. Soit $X = G/H$, où G est un groupe de Lie sur F et H un sous-groupe fermé de G. Si π_H est une représentation lisse ([15] : ce sont les représentations "algébriques" de [2]) de H sur un espace vectoriel E sur C, elle définit un fibré homogène lisse $\mathcal{E}$ sur X. La représentation induite (resp. induite à support compact) agit sur les sections lisses (resp. lisses à support compact) de $\mathcal{E}$.

2. Soit X une variété analytique, $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X par des ouverts-fermés locaux ; on suppose que pour $U \in \mathfrak{U}$, on a un isomorphisme analytique j_U de U sur un ouvert de F^n, où $n = \dim(X)$.

On définit un cocycle à valeurs dans C^X de la façon suivante : si $U,V \in \mathfrak{U}$, on a une application $j_U j_V^{-1}$ de $j_V(U \cap V) \subset F^n$ dans $j_U(U \cap V)$. On peut considérer sa différentielle $d(j_U j_V^{-1})$; on définit alors $C_{U,V}(x) = |\det(d(j_U j_V^{-1})_x)|$. Ceci définit un fibré sur X, noté $|\Lambda|(X)$, le fibré des *densités* sur X. Si ϕ est un section à support compact de $|\Lambda|(X)$, l'intégrale $\int_X \phi$ est bien définie, comme le montre la formule de changement de variables ([6, Théor. 1]). Une telle section sera appelée densité sur X.

Les opérations fonctorielles bien connues sur les fibrés différentiables s'étendent aux fibrés lisses ; nous ne donnons pas de détails. Si $f : X \to Y$ est localement analytique et si $\mathcal{E}$ est un fibré lisse sur Y, on peut ainsi définir son image réciproque $f^{\#}\mathcal{E}$ sur X. La fibre de $\mathcal{F} = f^{\#}\mathcal{E}$ au point $x \in X$ s'identifie canoniquement à la fibre $\mathcal{E}_{f(x)}$ de $\mathcal{E}$ au point f(x). Soit $\mathcal{E} \to X$, $\mathcal{F} \to Y$ deux fibrés lisses. Un *morphisme de fibrés* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (Atiyah-Bott [1]) est la donnée d'un couple (f,r) où f est un morphisme : $X \to Y$, et r une section lisse du fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(f^{\#}\mathcal{F}, \mathcal{E})$.

Plutôt que de définir le fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{G}, \mathcal{E}$ sont de dimension infinie, précisons les conditions que nous imposons à r. Tout d'abord, r est la donnée d'une famille d'homomorphismes $r(x) : (f^{\#}\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_{f(x)} \to \mathcal{E}_x$. La condition de différentiabilité est la suivante : fixons des trivialisations locales $\mathcal{F} \cong U \times F$, $\mathcal{E} \cong V \times E$, U étant un voisinage de f(x) et $V \subset f^{-1}(U)$ un voisinage de x. On peut alors identifier r(y), pour $y \in V$, à un homomorphisme $F \to E$; on impose que pour tout $u \in F$, $v \in E$, l'ensemble $\{y \in V \mid r(y)u = v\}$ soit ouvert dans V.

Si (f,r) est un tel morphisme de fibrés, il définit une application entre les espaces de sections $C^\infty(Y, \mathcal{F}) \to C^\infty(X, \mathcal{E})$ qui à s(y) associe $t(x) = r(x)s(f(x))$.

2.2. Soit X une variété analytique, que nous supposons dorénavant *compacte*. Si Y est une variété, une *action* de Y sur X est une application *localement* analytique $f : Y \times X \to X$. Elle est *localement transitive* ([11, p. 312]) si pour tout (y,x), la différentielle : $T_y(Y) \to T_{f(y,x)}(X)$ est surjective.

Lemme 1. Soit $f_0 : X \to X$ un morphisme. Il existe alors une variété Y munie d'un point y_0 et une action localement transitive $f : Y \times X \to X$ telle que $f(y_0,.) = f_0$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où f_0 est l'identité : en effet, si $g : Y \times X \to X$ résout le problème avec $g_0 = g(y_0,.)$ égale à l'identité, on peut considérer $f_y = g_y \circ f$; le diagramme $X \times Y \xrightarrow[(f,1)]{} X \times Y \xrightarrow[g]{} X$ montre que (f_y) est localement submersive.

Soit alors $f_0 = 1$. Le problème est évidemment local, donc on peut supposer que $X = (\mathcal{O}_F)^n$, $n = \dim(X)$, $\mathcal{O}_F$ étant l'anneau des entiers de F ; on peut même supposer que $n=1$. Prenant $Y = \mathcal{O}_F$, l'application $f(y,x) = y + x$ (avec $y_0 = 0$) donne une déformation localement transitive de l'identité. □

Lemme 2. Soit $\mathcal{E}$ un fibré lisse de dimension finie sur X, (f,r) un endomorphisme de $\mathcal{E}$. Soit $(f_y)_{y \in Y}$ une action localement transitive de Y sur X prolongement $f = f_{y_0}$. Alors on peut, au moins pour y dans un voisinage de y_0, compléter f_y en un morphisme de fibrés (f_y,r_y) de $\mathcal{E}$, dépendant différentiablement de y, et tel que $r_{y_0} = r$.

Remarque 1. La différentiabilité en y se traduit par la condition suivante : localement (cf. avant le lemme 1), r_y est donné par des endomorphismes de la fibre $r_y(x) : E \to E$ où $x \in V \subset X$. On impose alors que l'ensemble $\{(y,x) \in Y \times V :$ $r_y(x)u = v\}$ soit ouvert dans $Y \times V$ pour tous vecteurs $u,v \in E$.

Remarque 2. D'après Guillemin-Sternberg ([11, p. 320]), ceci est en général faux pour les variétés réelles.

Démonstration. On peut écrire X comme réunion disjointe d'ouverts-compacts qui trivialisent $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est isomorphe au fibré trivial $X \times E$, $\dim E < \infty$. On se fixe un tel isomorphisme : r est alors donné par une application $x \to r(x) \in \mathrm{Hom}(E,E)$, localement constante. Pour prolonger $r = r_{y_0}$ en r_y $(y \in Y)$, il suffit d'étendre cette application en une application localement constante de $X \times Y$ dans $\mathrm{Hom}(E,E)$, ce qui est évidemment possible. □

2.3. Dans le cas où les fibrés considérés sont de dimension infinie, nous allons introduire une dernière définition. Supposons d'abord que $\mathcal{E} \to X$ est de dimension finie. Soit $f = (f_y) : Y \times X \to X$ une action localement transitive de Y sur X, relevée par des morphismes de fibrés r_y. Pour tout y, et toute section ψ de $\mathcal{E}$, on notera pour simplifier $f_y^*\psi$ la section donnée par $f_y^*\psi(x) = r_y\psi(f(y,x))$. Si ϕ est une densité sur Y, l'opérateur

$$A_\phi : (A_\phi\psi)(x) = \int_Y \phi(y) r_y \psi(f(y,x))dy$$

est un endomorphisme de $C_c^\infty(X, \mathcal{E})$. En utilisant la propriété de submersivité de f, on vérifie facilement qu'il est de rang fini. (Si par exemple $\mathcal{E}$ est trivial de fibre C, A_ϕ est donné par le noyau $k(x_1,x_2) \in C_c^\infty(X \times X)$, où $k(x_1,x_2) = \int_{Y_{x_1,x_2}} \phi(y)dy/_{dx}$ est donné par "intégration sur les fibres" ; $Y_{x_1,x_2} = \{y \mid f(y,x_1) = x_2\}$ est lisse par transitivité. Il est bien connu qu'un tel opérateur à noyau lisse est de rang fini).

Supposons maintenant que $\mathcal{E} \to X$ est de dimension infinie. On dira alors que la donnée (f_y,r_y), où f_y est une action localement transitive sur la base relevée par r_y au fibré, est *admissible* si, pour toute densité ϕ (localement constante à support compact) sur Y, l'opérateur A_ϕ est de rang fini.

<u>Exemple</u>. Supposons que G est un groupe de Lie sur F, et H un sous-groupe fermé. L'action de G sur X = G/H est localement transitive, et se relève canoniquement au fibré défini par une représentation (π_H,E) de H. ([11, p. 312-313]). Supposons X compact. La donnée canonique (g,r_g) est alors admissible si la représention π_H est admissible.

2.4. Soit $f : X \to X$. On rappelle que f est *transverse à l'identité* si, en tout point fixe x de f, on a $\det(1-df_x) \neq 0$. Ceci implique en particulier que les points fixes de f sont isolés, et donc en nombre fini si X est compacte.

2.5. Nous utiliserons sans commentaires les notions de distributions et de fonctions généralisées [11], qui s'étendent immédiatement aux variétés $\mathfrak{p}$-adiques.

3. <u>LE THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT</u>.

<u>Proposition 1</u>.

Soit $\mathcal{E} \to X$ un fibré lisse de dimension finie sur la variété compacte X. Soit $f : X \to X$ un endomorphisme de X transverse à l'identité, relevé au fibré $\mathcal{E}$ par r. Soit (f_y,r_y) une famille différentiable d'endomorphismes de $\mathcal{E}$ étendant $(f,r) = (f_{y_0},r_{y_0})$, l'action (f_y) de Y sur X étant localement transitive.

(i) Pour toute densité lisse à support compact $\phi(y)dy$ sur Y, l'opérateur $A_\phi = \int_Y \phi(y) \ddot{f}_y^* \, dy$ est de rang fini. Soit trace (A_ϕ) sa trace : l'application

$\phi\, dy \to \mathrm{trace}(A_\phi)$ définit donc une fonction généralisée sur Y.

(ii) Au point y_0, cette fonction généralisée est en fait une fonction lisse, de valeur

$$\mathrm{trace}(f^*) = \sum_{x\in X\,:\,f(x)=x} \frac{\mathrm{trace}\ r(x)}{|\det(1-df_x)|}.$$

<u>Remarque</u>. Dans la formule donnant $\mathrm{trace}(f^*)$, df_x est un endomorphisme de l'espace tangent $T_x(X)$, et $r(x) : \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{f(x)} \to \mathcal{E}_x$ puisque $f(x) = x$.

Ce théorème est l'analogue exact du théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés réelles, tel qu'il est énoncé par Guillemin-Sternberg [11, ch. VI, Prop. 2.1]. On a déjà esquissé la démonstration de la partie (i). Il reste à démontrer que la distribution obtenue est une fonction au point y_0, et à obtenir la formule de Lefschetz. Répétons la démonstration bien connue.

En localisant, on voit aisément qu'on peut faire les hypothèses simplificatrices suivantes : $X = (\mathcal{O}_F)^n$, et $\mathcal{E}$ trivial égal à $X \times C^\ell$. Le morphisme de fibrés est alors défini par une fonction lisse $r(y,x) \in \mathrm{Hom}(C^\ell, C^\ell)$. Localisant de nouveau, on peut supposer $r(y,x)$ constant. On va traiter le cas où $\mathcal{E} = X \times C$ ($\ell=1$) et où r est l'identité ; le cas général n'en diffère que par les notations. Munissons X de la mesure de Haar normalisée sur $(\mathcal{O}_F)^n$. On écrira $y.x$ pour $f(y,x)$; posons $f(y,x) = x + g(x,y)$, $g(y,x) \in (\mathcal{O}_F)^n$. On peut supposer de plus que tout $y \in Y$ a un unique point fixe dans X (s'il n'y a pas de point fixe, la Prop. 1 est trivialement vérifiée). Ce point fixe est donc l'unique solution de $g(y,x) = 0$. On utilisera sans commentaire les différentes propriétés déduite de la locale transitivité dans [11, Ch. VI].

Si ψ est une fonction sur X, on a

$$\begin{aligned}(A_\phi\psi)(x) &= \int_Y \phi(y)\psi(y.x)dy \\ &= \int_X \{\int_{Y_{xx'}} \phi(y)\psi(x')dy/_{dx'}\}dx',\end{aligned}$$

$dy/_{dx'}$ étant la mesure quotient sur la fibre (lisse) $Y_{xx'} = \{y \in Y : y.x = x'\}$. On peut encore écrire ceci :

$$(A_\phi\psi)(x) = \int_X \{\int_{g(y,x)=x'-x} \phi(y)\psi(x')dy/_{dx'}\}dx'$$

$$= \int_X \{\int_{g(y,x)=x'-x} \phi(y)\psi(x')dy/_{dg}\} dx'$$

puisque dg = dx' ; ici $dg = g^*(dx)$, où dx est la mesure de Haar sur l'image $(\mathcal{O}_F)^n$ de g ; dg définit, de la façon habituelle, une mesure transverse à la mesure sur la fibre d'équation g(y,x) = Cste : donc $dy/_{dg}$ est une mesure sur la fibre. Par intégration sur la diagonale, on obtient alors :

$$\text{trace } A_\phi = \int_X \{\int_{g(y,x)=0} \phi(y)dy/_{dg}\} dx.$$

Revenant à la notation originale :

$$g(y,x) = f(y,x) - x,$$

on voit que $dg = |\det(1-(df_y)_x)|dx$

au point (x,y) tel que $f(y,x) = f_y(x) = x$, ce qui équivaut à g(y,x) = 0. On peut donc réécrire ([1])

$$(**) \quad \text{trace } A_\phi = \int_X \int_{y.x=x} \phi(y) \; |\det(1-(df_y)_x)|^{-1}(dy/_{dx})dx$$

c'est-à-dire :

$$\text{trace } A_\phi = \int_Y \phi(y)\{\sum_{y.x=x} |\det(1-(df_y)_x)|^{-1}\}dy.$$

Ceci démontre la Prop. 1 (ii). □

4. THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT EN DIMENSION INFINIE.

X est toujours une variété compacte, $\mathcal{E} \to X$ un fibré vectoriel lisse (de dimension finie ou infinie), et (f,r) un endomorphisme de fibré de $\mathcal{E}$, avec $f : X \to X$ transverse à l'identité. Nous voulons généraliser à cette situation la formule (ii) de la Prop. 1. Cependant, les traces des endomorphismes r(x), qui apparaissent dans cette formule, ne sont plus définies ; il semble impossible d'associer une trace à f^* sans introduire d'autres données.

([1]) Dans les formules qui suivent, $(df_y)_x$ est la différentielle de f_y au point fixe x.

Supposons maintenant que $f = f_{y_0}$ a été plongée dans une action localement transitive $(f_y)_{y\in Y}$ complétée par des morphismes de fibrés $(r_y)_{y\in Y}$, comme dans le lemme 2. On suppose la donnée (f_y, r_y) admissible (§. 2.4). Donc, si ϕ est une densité sur Y, l'opérateur A_ϕ défini dans le §.2 est de rang fini.

Soit E un espace vectoriel, π une action de la variété Y sur E, i.e. une application $Y \times E \to E$, $(y,v) \to \pi(y)v$. On dit que π est *lisse* si, pour $u,v \in E$, $\{y \mid \pi(y)u = v\}$ est ouvert, et *admissible* si, pour toute densité ϕ à support compact sur Y, $\pi(\phi) = \int_Y \pi(y)\phi(y)dy$ (qui a un sens parce que π est lisse) est de rang fini. Une action admissible a un caractère, qui est la fonction généralisée sur Y définie par $\phi \to \operatorname{trace} \pi(\phi)$.

Revenons au cas qui nous intéresse. Soit $x \in X$, et $Y_{xx} = \{y \in Y : f_y(x) = x\}$: c'est une variété lisse par submersivité.

Supposons le fibré $\mathcal{E}$ trivial. On peut écrire

$$(A_\phi\psi)(x) = \int_Y \phi(y)\ r_y\psi(y.x)dy$$

avec $y.x = f(y,x)$ et $r_y : E \to E$, ψ à valeurs dans E. Donc

$$(A_\phi\psi)(x) = \int_X \{\int_{y.x=x'} \phi(y)\ r_y\psi(x')dy/_{dx'}\}dx'.$$

Il est donc clair (comme on le voit en décomposant $\phi(y)$ comme produit tensoriel suivant la fibration de Y sur X donnée par $y \to y.x$) que pour tous x,x', l'opérateur $\int_{y.x=x'} \phi(y)r_y$ doit être de rang fini. En particulier, *l'action de* Y_{xx} *sur* $\mathcal{E}_x$ *est admissible.*

Si $\psi(u)du$ est une densité sur la fibre Y_{xx}, $\operatorname{trace}(\psi du)$ est donc bien défini. On le notera $\int_{Y_{xx}} \operatorname{trace}(u|\mathcal{E}_x)\psi(u)du$; $\operatorname{trace}(u|\mathcal{E}_x)$ est donc une fonction généralisée sur Y_{xx}.

Proposition 2. Soit $\mathcal{E} \to X$ un fibré vectoriel lisse sur X compacte, (f,r) un endomorphisme de $\mathcal{E}$ prolongée par une donnée admissible $(f_y, r_y)_{y\in Y}$. On suppose que, pour tout $y \in Y$, f_y est transverse à l'identité. Si $\phi(y)dy$ est une densité sur Y, elle définit un opérateur de rang fini $A_\phi : C_c^\infty(X, \mathcal{E}) \to C_c^\infty(X, \mathcal{E})$. Soit dx une densité lisse strictement positive sur X. Alors :

$$\operatorname{trace} A_\phi = \int_X \{\int_{Y_{xx}} \frac{\operatorname{trace}(y|\mathcal{E}_x)\phi(y)dy/_{dx}}{|\det(1-df_y)_x|}\}dx$$

L'expression entre accolades a le sens suivant : puisque $\phi(y)dy$ est une densité sur Y, $\phi(y)dy/_{dx}$ définit une densité sur la fibre Y_{xx} ; on évalue alors la fonction généralisée $\operatorname{trace}(y|\mathcal{E}_x)$ contre la densité $|\det(1-df_y)_x|^{-1}\phi(y)dy/_{dx}$.

La proposition a pour conséquence immédiate :

Corollaire. Supposons que pour tout y dans un voisinage de y_0, la fonction généralisée $\operatorname{trace}(y|\mathcal{E}_x)$ soit une fonction lisse pour tout point fixe x de f_y sur X. Alors la fonction généralisée $\phi dy \to \operatorname{trace} A$ sur Y est une fonction lisse en y_0, et sa valeur est donnée par

$$\operatorname{trace}(f^*) = \sum_{y_0 . x=x} \frac{\operatorname{trace}(y_0|\mathcal{E}_x)}{|\det(1-df_{y_0})_x|}$$

Il suffit en effet de réécrire, dans ce cas, trace A_ϕ comme une fonction (lisse) sur Y intégrée contre ϕ. □

Démonstration de la Proposition 2. Le résultat est local sur Y et sur X. On peut donc supposer que $\mathcal{E} = X \times E$ (avec dim(E) peut-être infinie). L'endomorphisme de fibré est donné par $r(y,x) : E \to E$; pour tous $u,v \in E$, l'ensemble $\{r(y,x)u = v\}$ est ouvert dans $Y \times X$, mais $r(y,x)$ *n'est pas* nécessairement localement constant en dimension infinie. Ecrivons comme d'habitude :

$$A_\phi\psi(x) = \int_X \{\int_{y.x=x'} \phi(y)r(y,x)dy/_{dx'}\}\psi(x')dx'.$$

D'après l'hypothèse d'admissibilité, A_ϕ est de rang fini comme opérateur dans $C_c^\infty(X) \otimes E = C_c^\infty(X,\mathcal{E})$. Il existe donc un sous-espace de dimension finie E' de E tel que l'image de A_ϕ soit contenue dans $C_c^\infty(X) \otimes E'$. La trace de A_ϕ est donc égale à la trace de sa restriction à $C_c^\infty(X) \otimes E'$. Soit E" un supplémentaire de E' dans E, $p : E \to E'$ la projection associée. Puisque "l'intégrale" définissant A n'est qu'une somme finie, on a

$$A_\phi\psi(x) = p(A_\phi\psi(x)) = \int_X \{\int_{y.x=x'} \phi(y)p.r(x,y)dy/_{dx'}\}\psi(x')dx'.$$

Autrement dit, comme endomorphisme de $C_c^\infty(X,E')$, A_ϕ est donné par le noyau $\phi(y)pr(x,y)$: c'est donc l'opérateur A'_ϕ associé à ϕ et à l'endomorphisme de fibré $p.r(x;y)$ du fibré vectoriel $X \times E'$. (Notons que $p.r(x,y)$ est maintenant localement constant d'après l'hypothèse sur r). On peut alors appliquer le théorème d'Atiyah-Bott pour les fibrés de dimension finie : plus précisément, la formule (**), à la fin du §.3 (étendue à un fibré de dimension supérieure à 1) donne :

$$\text{trace } A_\phi = \int_X \{ \int_{Y_{xx}} \frac{\text{trace}(pr(y,x))\phi(y)}{|\det(1-df_y)_x|} dy/_{dx} \} dx$$

$$= \int_X \{ \text{trace} \int_{Y_{xx}} \frac{pr(y,x)\phi(y)}{|\det(1-df_y)_x|} dy/_{dx} \} dx$$

Par construction, $\int_X \{ \int_{Y_{xx'}} \phi(y)r(y,x)dy/_{dx'} \} \psi(x')dx'$ est dans E' pour tout $\psi \in C_c^\infty(X,E)$. Il est donc clair que $\int_{Y_{xx'}} .\phi(y)r(y,x)dy/_{dx'}$ envoie E dans E'. Par ailleurs, $|\det(1-df_y)_x|$ est une fonction localement constante sur la variété de (x,y) tels que $y.x = x$. En prenant Y et X assez petits, on peut donc la supposer constante (cela dès avant le choix de ϕ). On a alors :

$$\text{trace } A_\phi = \int_X \text{trace}(|\det(1-df_y)_x|^{-1} \int_{Y_{xx}} \phi(y)pr(y,x)dy/_{dx})dx$$

$$= \int_X \text{trace}(|\det(1-df_y)_x|^{-1} \int_{Y_{xx}} \phi(y)r(y,x)dy/_{dx})dx$$

- puisque le terme $\int \phi(y)r(y,x)dy/_{dx}$ envoie E dans E' -

$$= \int_X \{ \text{trace} \int_{Y_{xx}} \frac{r(y,x)\ (y)}{|\det(1-df_y)_x|} dy/_{dx} \} dx.$$

Mais ceci est précisément l'énoncé de la Proposition 2. □

Il est clair - par exemple à cause des exemples apparaissant en théorie des représentations (§.5) que la Proposition 2 et son corollaire ont un analogue pour certains fibrés vectoriels de dimension infinie sur des variétés *réelles*. Nous n'avons essayé ni de les formuler précisément ni de les démontrer. (On ne peut espérer étendre la démonstration ici donnée de la Proposition 2 au cas réel...).

5. CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS.

5.1. Soit maintenant $G = \underline{G}(F)$, où $\underline{G}$ est un groupe réductif connexe sur F. Soit $\underline{P}$ un parabolique de $\underline{G}$ défini sur F, $P = \underline{P}(F)$; soit $P = MN$ une décomposition de Levi de P. Soit π_M une représentation admissible de longueur finie de M. Son caractère est alors une distribution Θ_M ; on sait que, sur l'ensemble M_{reg} des éléments réguliers, Θ_M est donné par une fonction localement constante ([7]).

En faisant agir N trivialement, on peut étendre π_M en une représentation π_P de P. Soit π_G l'induite "*non-unitaire*" de π_P de G (c'est la représentation notée $\mathrm{Ind}(G,P,\pi_P)$ dans [2, §.2.21]) : elle est donnée par l'action à gauche de G sur les fonctions C^∞ de G dans l'espace de π_M qui sont localement constantes et satisfont :

$$f(hg) = \pi_P(h)f(g),\ h \in P.$$

La représentation π_G est encore admissible de longueur finie ([3,4]). Son caractère Θ_G est donc une fonction sur G_{reg}, l'ensemble des éléments réguliers de G. Nous allons montrer comment le théorème d'Atiyah-Bott (Corollaire de la Prop. 2) redémontre, sous une forme un peu différente, un théorème de van Dijk [6] donnant Θ_G en fonction de Θ_M.

La représentation π_P (dans un espace V) définit un fibré vectoriel homogène lisse sur $X = G/P$. L'action de G sur X est (localement) transitive, et se relève canoniquement en morphisme de fibrés ([11, p.313]). Ce morphisme de fibrés est admissible (cf. e.g. [6, Lemma 4]). Si $\phi \in C_c^\infty(G)$, la trace de l'opérateur A_ϕ (§.2.4) n'est autre que le caractère de Harish-Chandra trace $\pi_G(\phi) = \Theta_G(\phi)$. Supposons $g \in G$ *régulier*. Alors g définit un automorphisme transverse à l'identité de G/P. Pour le vérifier, il suffit en effet de vérifier que si $g.x = x$ ($x \in X$) on a $\det((1-dg_x)|_{T_x(X)}) \neq 0$. Dire que $g.x = x$ revient à supposer que g appartient au parabolique P_x conjugué à P associé à x ; supposons, à conjugaison près, $P_x = P$. On a alors $g \in P$; l'espace tangent à X en x s'identifie à $\underline{n}^-$, où $\underline{g} = \underline{m} + \underline{n} + \underline{n}^-$ est une décomposition triangulaire de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G, avec $\underline{m} = \mathrm{Lie}(M)$ et $\underline{n} = \mathrm{Lie}(N)$. On peut encore supposer (toujours modulo conjugaison) que $g \in M$. On a alors

$$\det((1-dg_x)|_{T_x(X)}) = \det((1-\mathrm{Ad}g)|_{\underline{n}^-}).$$

Il est bien connu que ce déterminant est non nul pour g régulier. Enfin, si $g.x = x$ et si on choisit un représentant y de x dans G, $y^{-1}gy$ appartient à P ; si $y^{-1}gy = mn$, m est régulier et donc trace $\pi_P(y^{-1}gy) = \text{trace } \pi_M(m)$ est bien défini. Il ne dépend pas du choix de y, et on le notera $\Theta_M(x^{-1}gx)$.

Toutes les hypothèses du Corollaire à la Prop. 2 sont alors vérifiées ; la trace associée par le Corollaire à l'endomorphisme g s'identifie évidemment au caractère d'Harish-Chandra $\Theta_G(g)$, et l'on obtient :

Proposition 3. (cf. [6]). Soit $g \in G$ régulier. Alors

$$\Theta_G(g) = \sum_{\substack{x \in G/P \\ g.x=x}} \frac{\Theta_M(x^{-1}gx)}{|\det(1-dg_x)|_F}$$

Remarque. La formule donnée par van Dijk ([6, Théor. 3]) est un peu différente ([2]). Pour l'obtenir à partir de la formule de Lefschetz, il suffit d'utiliser les remarques suivantes : (1) Nous avons considéré une induite *non-normalisée*, à la différence de [6]. Il faut donc, pour passer à l'induite "unitaire", remplacer π_M par $\pi_M \otimes \delta_P^{1/2}$, où δ_P est le module de P. (2) Il y a une identité standard liant $|\det(1-\mathrm{ad}g|_{\underline{n}^-})|$, δ_P et le facteur $\frac{|D_M|^{1/2}}{|D_G|^{1/2}}$ de [6]. (3) Les points fixes de g sur G/P peuvent être paramétrés par un groupe de Weyl. Nous ne donnons par les détails.

Si la caractéristique de F est nulle, et si C est le corps C des nombres complexes, Harish-Chandra [8] a montré que le caractère d'une représentation admissible de longueur finie est une fonction localement intégrable. Dans ce cas, la Prop. 3 suffit donc à déterminer le caractère Θ_G (considéré comme distribution sur G tout entier) à partir de Θ_M. En caractéristique finie, les méthodes de cet article devraient permettre de prouver directement que Θ_G est localement intégrable si Θ_M l'est (cf. [11, Prop. 2.2] dans le cas réel, quand π_M est de dimension finie).

Dans le cas réel, si l'on disposait de l'analogue de la Prop. 2, cette méthode permettrait aussi d'obtenir, à l'aide de la formule de Lefschetz, les formules de caractères démontrées par Hiraï [10].

([2]) Pour la formule de van Dijk, il faut supposer que C contient $|\omega_F|^{1/2}$, où ω_F est une uniformisante de F.

6. CARACTÈRES TORDUS.

6.1. Dans ce qui suit, nous supposerons pour simplifier que F *est de caractéristique nulle*. Remarquons toutefois que la Prop. 4 et le Théor. 1 doivent être indépendants de cette hypothèse (cf. [7]).

Soit $G = \underline{G}(F)$, où $\underline{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur F. Soit σ un automorphisme de G d'ordre $\ell > 1$ (on ne suppose pas ℓ premier). On note x^σ l'image de $x \in G$ par σ.

Pour $g \in G$, soit $Ng = gg^\sigma \dots g^{\sigma^{\ell-1}} \in G$. On dit que $g \in G$ est *σ-régulier* si Ng est un élément régulier de G. Soit $G_{\sigma\text{-reg}}$ l'ensemble des éléments σ-réguliers de G.

Soit $P = \underline{P}(F)$ un sous-groupe parabolique de G (globalement) invariant par σ. Soit $X = G/P$; si $g \in G$, soit g^* son image dans X. La Prop. 5 et le Théor. 1 qui suivent imitent des résultats de Harish-Chandra [7], ainsi que leurs démonstrations.

Proposition 4. (i) Soit $\gamma \in G_{\sigma\text{-reg}}$. Alors l'application

$$x \to (x\gamma x^{-\sigma})^*$$

est une submersion $G \to X$.

(ii) L'application $(x,p) \to x\gamma x^{-\sigma}p$ est une submersion $G \times P \to G$.

Démonstration. (cf.[7]). En remplaçant γ par $\gamma' = x\gamma x^{-\sigma}$, on vérifie aisément qu'on peut se placer en x=1 et qu'alors (i) et (ii) sont équivalents à l'assertion :

$$\underline{g} = (\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})^{-\sigma})\underline{g} + \underline{p}$$

où $\underline{g}$, $\underline{p}$ sont les algèbres de Lie sur F de G et P. Ceci se démontre comme dans [7]. Soit $\underline{p} = \underline{m} \oplus \underline{n}$, $\underline{g} = \underline{n}^- \oplus \underline{m} \oplus \underline{n}$ une décomposition triangulaire de $\underline{g}$. Soit B une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée G-invariante sur $\underline{g}$, qu'on peut même supposer σ-invariante. Soit $\underline{c} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}(\gamma)-\sigma^{-1})$. Si $X \in \underline{c}$, on a $\mathrm{Ad}(\gamma)X = \sigma^{-1}X$ d'où $\mathrm{Ad}(\gamma^\sigma\gamma^{\sigma^2}\dots\gamma^{\sigma^{\ell-1}}\gamma)X = X$, soit $\mathrm{Ad}(\gamma^{-1}N g\gamma)X = X$; puisque Ng est semi-simple régulier, on voit que $\underline{c}$ est formé d'éléments semi-simples.

Il est bien connu que l'orthogonal de $\underline{p}$ pour B est $\underline{n}$; l'orthogonal de $(\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})-\sigma)\underline{g}$ est égal au noyau de l'adjoint $(\mathrm{Ad}(\gamma)-\sigma^{-1})$, donc à $\underline{c}$. Puisque $\underline{c} \cap \underline{n} = \{0\}$, on voit que $\underline{g} = (\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})-\sigma)\underline{g} + \underline{p}$. □

Comme dans [7, Lemma 1], la Prop. 5 a le Corollaire suivant : puisque l'application $G \times P \to G$ donnée par $(x,p) \to x\gamma x^{-\sigma}p$ est submersive, on obtient par intégration sur les fibres (une fois que des mesures de Haar dg sur G et dp, invariante à gauche sur P, sont fixées) une application $\alpha \to f_{\alpha,\gamma}$ de $C_c^\infty(G \times P)$ dans $C_c^\infty(G)$; cette application est caractérisée par le fait que, si $F \in C_c^\infty(G)$:

$$\int_{G\times P} \alpha(x,p)F(x\gamma x^{-\sigma}p)dx\, dp = \int_G F(x)f_{\alpha,\gamma}(x)dx.$$

Corollaire de la Proposition 4. Soit $\alpha \in C_c^\infty(G \times P)$. Alors l'application $\gamma \to f_{\alpha,\gamma}$ de $G_{\sigma\text{-reg}}$ dans $C_c^\infty(G)$ est localement constante.

Démonstration. (cf. [7, Lemma 1 (démonstration)]). □

Soit maintenant $P = MN$ un parabolique minimal de G, et A la composante déployée de M. Nous supposerons de plus qu'il existe un sous-groupe compact de Bruhat-Tits K de G ([5, §.3.5]) relatif à A tel que $\sigma(K) = K$. Nous ne savons pas si cette hypothèse est toujours vérifiée : elle l'est, par exemple, quand σ est un automorphisme de changement de base pour un groupe de Chevalley.

Soit π une représentation admissible irréductible de G. On dit que π est *σ-stable* si π est équivalente à $\pi \circ \sigma$. Dans ce cas, il existe un opérateur I_σ de l'espace de π dans lui-même tel que $\pi(g)I_\sigma = I_\sigma\pi(g^\sigma)$ pour $g \in G$; le lemme de Schu- permet de supposer que $(I_\sigma)^\ell = 1$ (cf. [13]) après multiplication de I_σ par un scalaire. Dans ce cas, on peut définir une représentation du produit semi-direct $G \times \Sigma$, où $\Sigma = \{1,\sigma,\dots, \sigma^{\ell-1}\}$, par $\pi(g,\sigma^k) = \pi(g)(I_\sigma)^k$.

Si $f \in C_c^\infty(G)$, $\pi(f)$ est de rang fini. L'application $f \to \mathrm{trace}(\pi(f)I_\sigma)$ définit une distribution sur G. On l'appelle le *caractère tordu* de π associé au choix de I_σ. Cette distribution sera notée $\Theta_{\pi,\sigma}$, le choix de I_σ étant sous-entendu.

Plus généralement, nous pouvons considérer une représentation π, admissible de longueur finie, de G telle que $\pi \cong \pi \circ \sigma$ et que π s'étende à $G \times \Sigma$. Une telle extension étant choisie, son caractère tordu est défini de la même façon.

Si V est l'espace de π, on désigne par $\mathrm{End}^\circ(V)$ l'espace des endomorphismes $u : V \to V$ tels que $x \to \pi(x)u$ et $x \to u\pi(x)$ soient des fonctions lisses de G dans $\mathrm{End}(V)$; on a $\mathrm{End}^\circ(V) = \tilde{V} \otimes V$, où $\tilde{V}$ est le dual admissible de V.

Proposition 5. Soit π une représentation admissible de longueur finie de G, σ-stable, étendue à $G \times \Sigma$. Si $y \in G_{\sigma\text{-reg}}$, soit

$$T_{y,\sigma} = \int_K \pi(k(y,\sigma)k^{-1})dk$$

Alors $T_{y,\sigma} \in \mathrm{End}^\circ(V)$, et $y \to T_{y,\sigma}$ est une application localement constante de $G_{\sigma\text{-reg}}$ dans $\mathrm{End}^\circ(V)$.

L'intégration est par rapport à la mesure normalisée dk sur K.

Démonstration. Il existe une base de voisinages de l'unité dans G formée de sous-groupes ouverts distingués de K globalement stables par σ. Si K_0 est un tel sous-groupe, assez petit, l'espace V de π est engendré sous G par l'espace V_0 des vecteurs fixés par K_0 ; V_0 est stable par K et par σ.

On a la décomposition de Cartan $G = K\,M^+K$, où M^+ est l'ensemble des $m \in M$ tels que $<\alpha, H_M(m)> \geq 0$ pour toute racine α de N par rapport à A ([7, p.99] ; [5, §.3.5]). Si $m \in M^+$, l'application $p \to m^{-1}pm$ contracte P ; il existe donc un sous-groupe ouvert-compact P_0 de P tel que $m^{-1}P_0m \subset K_0$ pour $m \in M^+$ ([7]). Soit α la fonction caractéristique de $K \times P_0$. Considérons l'application submersive

$$G \times P \to G \times \sigma \cong G$$

$$(x,p) \to x(y,\sigma)x^{-1}.p$$

où $y \in G_{\sigma\text{-reg}}$. (Prop. 4). Par intégration le long des fibres, α définit une fonction $f_{\alpha,y} = f_y$ sur $G \times \sigma$, identifié à G par $(g,\sigma) \to g$. Par définition,

$$\int_{K \times P_0} F(k(y,\sigma)k^{-1}.p)dk\,dp = \int_G f_y(x)F(x,\sigma)dx$$

pour toute fonction $F \in C_c^\infty(G \times \sigma)$. Appliquant ceci aux coefficients de π, on obtient:

$$\int_{K \times P_0} \pi(k(y,\sigma)k^{-1})\pi(p)dk\,dp = \int_G f_y(x)\pi(x,\sigma)dx.$$

On sait que V est engendré par les vecteurs de la forme $\pi(g)v = \pi(k_1mk_2)v$, $v \in V_0$, $k_i \in K$, $m \in M^+$; puisque $KV_0 = V_0$, il est donc engendré par $\pi(KM^+)V_0$.

Pour $v \in V_o$, $k \in K$, $m \in M^+$, on a :

$$T_{y,\sigma}\pi(km)v = \int_K \pi(u(y,\sigma)u^{-1})\pi(k)\pi(m)v\ du,$$

donc par changement de variable :

$$T_{y,\sigma}\pi(km)v = \pi(k^{-\sigma})T_{y,\sigma}\pi(m)v.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\pi(f_y)I_\sigma\pi(m)v &= \int_{K\times P_o} \pi(k(y,\sigma)k^{-1})\pi(p)\pi(m)v\ dk\ dp \\ &= \int_K \pi(k(y,\sigma)k^{-1}dk.\int_{P_o} \pi(m)\pi(m^{-1}pm)v\ dp \\ &= T_{y,\sigma}\pi(m)v\end{aligned}$$

puisque $m^{-1}p\ m \in K_o$ pour $p \in P_o$, $m \in M^+$ et $\pi(K_o)v = v$. Les deux identités obtenues donnent :

$$(\star)\ T_{y,\sigma}\pi(km)v = \pi(k^{-\sigma})\pi(f_y)I_\sigma\pi(m)v.$$

Soit alors V_y l'espace engendré par les K-translatés de $\pi(f_y)V$. Puisque π est admissible, $\dim(V_y) < \infty$. L'identité $(\star)$, jointe au fait que les $\pi(km)v$ engendrent V, montre que $T_{y,\sigma}$ applique V dans V_y. Comme de plus $T_{y,\sigma}.k = k^\sigma T_{y,\sigma}$ pour tout $k \in K$, ceci implique en fait que $T_{y,\sigma} \in \mathrm{End}°(V)$. Comme de plus la fonction $f \to f_y$ est localement constante, on peut prendre $V_y = V_{y_o}$ pour y au voisinage de $y_o \in G_{\sigma\text{-reg}}$. Mais alors on voit que pour un tel y, $T_{y,\sigma}$ reste dans un espace fixe, de dimension finie, de End°(V) ; pour tout $v \in V_o$, l'application

$$y \to T_{y,\sigma}\pi(km)v = \pi(k^{-\sigma})\pi(f_y)I_\sigma\pi(m)v$$

est localement constante, donc $y \to T_{y,\sigma}w$ ($w \in V$) est localement constante. Ceci démontre la Prop. 5. □

Comme corollaire immédiat, nous avons :

Théorème 1. Soit σ un automorphisme d'ordre ℓ du groupe réductif G sur F ; on suppose que σ stabilise un sous-groupe de Bruhat-Tits K de G.

Soit π une représentation admissible de longueur finie, σ-stable, de G étendue par I_σ à $G \times \Sigma$.

Alors le caractère tordu $\Theta_{\pi,\sigma}$ de π est localement constant sur $G_{\sigma\text{-reg}}$, et égal à la fonction trace $T_{y,\sigma}$.

Démonstration. Le caractère tordu est évidemment invariant par $g \to xgx^{-\sigma}$ $(x \in G)$; on en déduit facilement que, pour $f \in C_c^\infty(G)$, $\Theta_{\pi,\sigma}(f) = \mathrm{trace}(\int_G f(y)T_{y,\sigma}dy)$.

Si de plus le support de f est dans $G_{\sigma\text{-reg}}$, l'application $y \to f(y)T_{y,\sigma}$ $(y \in \mathrm{Supp}\, f)$ est, d'après la Prop. 5, localement constante à valeurs dans End°(V). On en déduit :

$$\Theta_{\pi,\sigma}(f) = \int_G f(y)\ \mathrm{trace}\ T_{y,\sigma}dy$$

Ceci démontre le théor. 1, ainsi que la valeur du caractère :

$$\Theta_{\pi,\sigma}(y) = \mathrm{trace}\ T_{y,\sigma}. \qquad \square$$

6.2. Le Théorème 1 va maintenant nous permettre d'appliquer la Prop. 2 aux caractères tordus.

Soit donc $G = \underline{G}(F)$, $\underline{G}$ réductif connexe sur F de caractéristique 0. Soit $P = MN$ un parabolique de G stabilisé par σ ; on supposera la décomposition de Levi choisie de façon que $\sigma(M) = M$ ([3]) ; on suppose de plus que σ stabilise des sous-groupes de Bruhat-Tits de G et M.

Soit π_M une représentation admissible de longueur finie σ-stable de M, supposée étendue à $M \times \Sigma$. Elle a donc un caractère tordu $\Theta_{M,\sigma}$. Soit π_G la représentation induite (non normalisée) $\mathrm{ind}_{MN}^G\ (\pi_M \otimes 1)$.

La représentation π_G est σ-stable. Elle admet une extension canonique à $G \rtimes \Sigma$: si l'on réalise π_G par translation à droite dans l'espace des fonctions $G \xrightarrow[f]{} V_M$ (V_M l'espace de π_M) telles que $f(hg) = \pi_P(h)f(g)$ pour $h \in P$, et si I_σ^M est l'opérateur d'entrelacement tel que $\pi(m)I_\sigma^M = I_\sigma^M\ (m^\sigma)$ pour $m \in M$, l'opérateur d'entrelacement I_σ^G associe à la fonction f la fonction $g = I_\sigma^G f$ sur G définie par

([3]) C'est possible : voir §.7.

$g(x) = I_\sigma^M f(x^\sigma) \qquad (x \in G).$

Nous pouvons voir la représentation π_G étendue à $G \rtimes \Sigma$ comme induite à partir de la représentation π_P étendue à $P \rtimes \Sigma$; comme telle, elle est réalisée par des automorphismes du fibré $\mathcal{V} = G \underset{P}{\times} V_M \cong (G \rtimes \Sigma) \underset{P \rtimes \Sigma}{\times} V_M$ sur $X = G/P$. La variété $G \times \sigma$ agit localement transitivement sur X par $(g,\sigma).x = g.\sigma x$; de plus :

<u>Lemme 3</u>. Si $g \in G_{\sigma\text{-reg}}$, l'action de (g,σ) sur X est transverse à l'identité.

<u>Démonstration</u>. Rappelons que $Ng = gg^\sigma \ldots g^{\sigma^{\ell-1}}$.

Si $x \in X$, on a $(g\sigma)^\ell x = (Ng)x$. En particulier, si x est un point fixe de $g\sigma$, il est fixé par Ng ; de plus, prenant les différentielles, on voit que $d(g\sigma)_x^\ell = d(Ng)_x$ comme endomorphisme de $T_x(X)$. Si $d(g\sigma)_x$ fixe $\xi \neq 0$, on voit donc que $d(Ng)_x$ fixe ξ. Si g est σ-régulier, donc Ng régulier, c'est impossible (cf. §.5). Donc $g\sigma$ est transverse à l'identité. $\square$

Soit $x \in X$ tel que $g\, x = x$. Soit y un représentant de x dans G. On a alors $g\, y\, P = y\, P$, soit $y^{-1}gy^\sigma \in P$. On peut poser $y^{-1}gy^\sigma = mn$, $m \in M$, $n \in N$. On vérifie que m est indépendant, à σ-conjugaison près, du choix de y ($u,v \in G$ sont σ-conjugués si $u = x^{-1}vx^\sigma$ pour un $x \in G$). Par conséquent, $\Theta_{P,\sigma}(y^{-1}gy^\sigma) = \Theta_{M,\sigma}(m)$ est bien défini et ne dépend que de x : on le notera $\Theta_{M,\sigma}(x^{-1}gx^\sigma)$.

Toutes les conditions sont maintenant réunies pour appliquer le corollaire de la proposition 2 : la variété $G \times \sigma$ agit localement transitivement sur X, et $g \times \sigma$ agit de façon transverse à l'identité. A tout point fixe x de (y,σ), la fibre de $\mathcal{V}$ s'identifie à V_M, et le stabilisateur est égal à $yPy^{-\sigma}$ où y représente x ; la fonction généralisée trace$((p,\sigma)\,|\,\mathcal{V}_x)$ s'identifie canoniquement au caractère tordu $\Theta_{P,\sigma}(y^{-1}Py^\sigma)$, fonction généralisée sur $yPy^{-\sigma}$. Celui-ci est bien défini en g. On obtient donc :

<u>Proposition 6</u>. Soit g un élément σ-régulier de G. Alors, si $\Theta_{G,\sigma}$ est le caractère tordu associé à $\pi_G = \mathrm{ind}(\pi_M \otimes 1)$ et au choix canonique de I_G^σ, on a :

$$\Theta_{G,\sigma}(g) = \sum_{\substack{x \in X \\ g\sigma x = x}} \frac{\Theta_{M,\sigma}(x^{-1}gx^\sigma)}{|\det(1-d(g\sigma)_x)|_F}$$

6.3. Nous appliquons maintenant les considérations précédentes aux identités de Shintani qui apparaissent dans le changement de base. Nous traitons seulement le cas de GL(n) ; bien que l'application norme ait été définie en toute généralité par Kottwitz ([12]) nous n'avons pu étendre la démonstration suivante au cas général.

Soit donc F un corps local de caractéristique 0, E/F une extension de corps, cyclique de degré ℓ. On note σ un générateur de $\Sigma = \mathrm{Gal}(E/F)$. Soit $G = GL(n)$; σ définit un automorphisme d'ordre ℓ (encore noté σ) de G(E), ayant G(F) comme groupe des points fixes.

Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de F contenant E. Le groupe GL(n) jouit des deux propriétés suivantes (cf. [12]) :

i) Deux éléments de G(F) conjugués dans $G(\bar{F})$ le sont dans G(F).

ii) Une classe de congugaison dans $G(\bar{F})$, qui est rationnelle sur F, contient un élément de G(F).

A l'aide des propriétés (i)-(ii), on peut définir une application $\mathcal{N}$, de G(E) dans les classes de conjugaison de G(F), de la façon suivante : si $g \in G(E)$, soit $Ng = gg^{\sigma} \ldots g^{\sigma^{\ell-1}}$. On a $(Ng)^{\sigma} = g^{-1}(Ng)g$, donc la classe de conjugaison de Ng est rationnelle sur F. D'après (ii), elle rencontre G(F), en une classe de conjugaison unique d'après (i). Cette classe de conjugaison est notée $\mathcal{N}g$.

Les conditions du théorème 1 sont vérifiées par G(E) muni de l'automorphisme σ- prendre $K = G(\mathcal{O}_E)$! - donc les caractères tordus des représentations σ-stables de G(E) sont lisses sur $G(E)_{\sigma\text{-reg}}$ ([4]). Soit π une représentation irréductible admissible de G(F). On dit que la représentation σ-stable Π de G(E) (ou plutôt le couple (Π, I_{σ}), où I_{σ} entrelace Π et $\Pi \circ \sigma$ et $I_{\sigma}^{\ell} = 1$) *relève* π si l'on a l'identité de Shintani :

$$\mathrm{trace}\ \Pi(g)I_{\sigma} = \mathrm{trace}\ \pi(\mathcal{N}g)$$

pour tout g σ-régulier dans G(E). (On a utilisé, par abus de notation, l'expression trace $\pi(g)$ pour la valeur du caractère π en g, et de même dans le cas tordu). Cette définition s'étend immédiatement au cas où π, Π ne sont pas nécessairement irréductibles.

Dans la démonstration des identités de Shintani, il y a essentiellement deux étapes ; l'une, fondamentalement arithmétique, consiste à relever des π appartenant à la série discrète de G(F). L'autre, de nature géométrique, consiste à vérifier que

([4]) Il est très vraisemblable que les caractères tordus sont en fait donnés par des fonctions localement intégrables (cf. [13] pour GL(2)).

le changement de base commute à l'induction. Cette deuxième étape relève de la formule de Lefschetz.

Soit donc $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Soit π_M une représentation (admissible de longueur finie) de $M(F)$, $(\Pi_M, I_\sigma^M : (I_\sigma^M)^\ell = 1)$ une représentation (admissible de longueur finie) σ-stable de $M(E)$, munie d'un opérateur d'entrelacement involutif. Par induction, on définit, comme dans les §.5 et 6.2, une représentation π_G de $G(F)$ et une représentation σ-stable Π_G de $G(E)$ munie d'un opérateur d'entrelacement canonique I_σ^G, défini par I_σ^M.

<u>Théorème 2</u>. Supposons que (Π_M, I_σ^M) relève π_M. Alors (Π_G, I_σ^G) relève π_G.

<u>Démonstration</u>. Soit $g \in G(E)$. Si $Ng = g.g^\sigma \ldots g^{\sigma^{\ell-1}}$, on a vu qu'on pouvait écrire $Ng = x(\mathcal{N}g)x^{-1}$, avec $x \in G(\bar{F})$ et $g \in G(F)$. Donc les éléments Ng et $\mathcal{N}g$ de $G(E)$ sont conjugués dans $G(\bar{F})$; appliquant derechef la remarque (i) ci-dessus, on a donc $Ng = y(\mathcal{N}g)y^{-1}$ pour un $y \in G(E)$. Si $h = ygy^{-\sigma}$, on a donc $Nh = \mathcal{N}g$. Autrement dit, modulo σ-conjugaison, on peut supposer que $Ng \in G(F)$; la norme "concrète" Ng est alors un représentant de la classe $\mathcal{N}g$. Puisque l'assertion du Théorème 2 est inchangée lorsqu'on remplace g par un σ-conjugué, on supposera donc que $Ng \in G(F)$.

Notons Θ_π^M le caractère de π_M et $\Theta_{\Pi,\sigma}^M$ le caractère tordu de Π_M associé à I_σ^M. D'après la Prop. 3 et la Prop. 6, si l'on indexe par G les objets analogues pour G, on a, si $g \in G_{\sigma\text{-reg}}$ est tel que $Ng \in G(F)_{reg}$:

$$\Theta_\pi^G(Ng) = \sum_{\substack{Ng.x=x \\ x\in X(F)}} \frac{\Theta_\pi^M(x^{-1}Ng\ x)}{|\det(1-d(Ng))_{T_x X(F)}|_F}$$

$$\Theta_{\Pi,\sigma}^G(g) = \sum_{\substack{g\sigma x=x \\ x\in X(E)}} \frac{\Theta_{\Pi,\sigma}^M(x^{-1}gx^\sigma)}{|\det(1-d(g\sigma))_{T_x X(E)}|_F}$$

On a noté X la variété algébrique G/P. Les expressions $\Theta_\pi(x^{-1}Ng\ x)$, $\Theta_{\Pi,\sigma}(x^{-1}gx^\sigma)$ sont définies comme avant la Prop. 3 et la Prop. 6. Remarquer que l'automorphisme $d(g\sigma)$ de l'espace $T_xX(E)$ est F-linéaire, mais non E-linéaire ; son déterminant est donc pris comme automorphisme de $T_xX(E)$ considéré comme F-espace vectoriel par restriction des scalaires.

Il s'agit tout d'abord de vérifier que les sommations portent sur les mêmes ensembles. Dans $GL(n)$, le centralisateur d'un élément régulier est un tore. Remarquons que, puisque $Ng \in G(F)$, on a

$$g\,Ng = g(Ng)^{\sigma} = gg^{\sigma} \ldots g^{\sigma^{\ell-1}} g = (Ng)g.$$

Autrement dit, $g \in T(E)$ où T, le centralisateur de Ng, est un tore défini sur F. Supposons alors que Ng fixe $x \in X(F)$. Ceci veut dire que $Ng \in P_x$, où P_x est un parabolique (conjugué à P) défini sur F. Il est facile alors de voir que tout $h \in G(E)$ qui centralise Ng appartient à $P_x(E)$; en fait, si h commute à l'élément régulier Ng, il appartient à tout sous-groupe de Levi de P_x contenant Ng, et Ng étant semi-simple peut être inclus dans un sous-groupe de Levi. Donc, si h commute à Ng, h fixe x.

<u>Lemme 4</u>. On a

$$\{x \in X(F) : Ng\,x = x\} = \{x \in X(E) : g\sigma x = x\}$$

<u>Démonstration</u>. Supposons que $\sigma x = x$ ($x \in X(F)$) et $Ng\,x = x$. D'après ce qui précède, puisque g commute à Ng, on a $gx = x$, d'où $g\sigma x = x$.

Réciproquement, soit $x \in X(E)$ tel que $g\sigma x = x$. En appliquant $(g\sigma)^{\ell}$, on trouve $(Ng)x = x$. Puisque g commute à Ng, on a $gx = x$, d'où $\sigma x = x$. □

Il suffit donc de comparer les deux expressions pour Θ_{π}^{G} et $\Theta_{\pi,\sigma}^{G}$ terme à terme. Pour x fixé, les deux numérateurs sont égaux puisque (Π_M, I_{σ}^{M}) relève π_M.

<u>Lemme 5</u>. Si $Ng \in G(F)_{reg}$ fixe $x \in X(F)$,

$$|\det(1-d(g\sigma)|_{T_xX(E)})|_F = |\det(1-d(Ng)|_{T_xX(F)})|_F$$

<u>Démonstration</u>. Soit $V = T_xX$: c'est un espace vectoriel défini sur F. Posant $h = (dg)_x \in GL(V,E)$, d'où $Nh = hh^{\sigma} \ldots h^{\sigma^{\ell-1}} = d(Ng)_x \in GL(V,F)$, on voit que le Lemme se réduit à la propriété suivante :

Soit V *un espace vectoriel défini sur* F, $h \in GL(V,E)$ *tel que* $Nh \in GL(V,F)$. *Alors*

$$|\det_{\mathrm{Res}_{E/F}V(E)}(1-h \circ \sigma)|_F = |\det_{V(F)}(1-Nh)|_F .$$

Nous allons montrer qu'il y a en fait égalité sans prendre les valeurs absolues. Tout d'abord, le membre de droite est égal à $\det_{V(E)}(1-Nh)$. (Le déterminant ne change pas par extension des scalaires) et est alors défini pour tout $h \in GL(V,E)$. (Il appartient à F puisque Nh est une classe rationnelle). Il s'agit donc de montrer :

$$\det{}_{\mathrm{Res}_{E/F}V(E)}(1-h \circ \sigma) = \det{}_{V(E)}(1-Nh)$$

pour $h \in GL(V,E)$. Les deux membres sont des fonctions algébriques sur $GL(V,E)$ considéré par restriction des scalaires comme F-groupe. Il suffit donc de les évaluer sur un ensemble Zariski-dense. De plus, ils sont tous deux invariants par σ-conjugaison. En considérant la différentielle de l'application $(x,g) \to xgx^{-\sigma}$ de $G(E) \times G(F)$ dans $G(E)$, on vérifie facilement que l'ensemble des éléments σ-conjugués à $GL(V,F)$ est Zariski-dense. Le même type d'argument permet de se restreindre aux éléments σ-conjugués au tore déployé de $GL(V,F)$.

Supposons un instant que V soit de dimension 1. Soit $h \in GL(V,F) \cong F^{\times}$. L'automorphisme σ de $\mathrm{Res}_{E/F}E \cong F^{\ell}$ satisfait $\sigma^{\ell} = 1$; c'est son équation caractéristique puisque $1,\sigma,\ldots\sigma^{\ell-1}$ sont indépendants. Sur une clôture algébrique de $\bar{F}$, $1-h\sigma$ se diagonalise donc sous la forme :

$$1-h\sigma = \begin{pmatrix} 1-h & & & \\ & 1-h\varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-h\varepsilon^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

où ε est une racine primitive ℓ-ième de l'unité. On a donc

$$\det{}_{\mathrm{Res}_{E/F}E}(1-h\sigma) = 1-h^{\ell} = \det{}_F(1-h^{\ell}).$$

En général, si h appartient à un tore déployé de $GL(V,F)$, on peut décomposer V en somme de droites et appliquer le même argument. Ceci démontre le lemme 5. □

Avec cela, on a identifié tous les termes qui apparaissent dans l'expression du caractère et du caractère tordu : le Théorème 2 est démontré. □

Terminons en indiquant que, dans le cas réel (pour l'extension $E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$), l'analogue du Théorème 2 a été démontré, pour tout G, par J. Repka [14]. Par ailleurs, le Théorème 2 est formulé pour des induites *non-normalisées*. Si K = E ou F, et si $\pi_G = \mathrm{ind}(\pi_M)$ est une induite non normalisée, l'induite *normalisée* $\pi'_G = \mathrm{Ind}(\pi_M)$ est égale à $\mathrm{ind}(\pi_M\, \delta_{P,K}^{1/2})$, où $\delta_{P,K}$ est le module du parabolique $P(K)$. Il est facile de vérifier que $\delta_{P,E}(m) = \delta_{P,F}(Nm)$. On en déduit immédiatement que, si C est le corps des complexes, le Théorème 2 s'étend sans changement pour les induites normalisées. C'est la forme sous laquelle on l'utilisera en général.

7. AUTOMORPHISMES DE G ET COMPOSANTES DE LÉVI.

On a rejeté dans ce paragraphe la démonstration du résultat suivant, utilisé dans le §.6.2. Soit F un corps de caractéristique nulle.

Proposition 7. Soit $\underline{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F, σ un F-automorphisme d'ordre fini ℓ de $\underline{G}$, et $\underline{P}$ un F-sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ (globalement) stable par σ. Il existe alors un sous-groupe de Levi $\underline{M}$ de $\underline{P}$, défini sur F et (globalement) stable par σ.

Démonstration. Il est bien connu (Borel-Tits, IHES Publ. Math. 27) que les F-sous-groupes de Levi de $\underline{P}$ sont conjugués par $N = \underline{N}(F)$. On a donc, si $\underline{M}$ est un sous-groupe de Levi quelconque, défini sur F, de $\underline{P}$: $\sigma(M) = \mathrm{Ad}(n)\, \underline{M}$ pour un $n \in N$. Soit $u = n^{\sigma^{\ell-1}} n^{\sigma^{\ell-2}} \ldots n^{\sigma} n \in N$. On en déduit que $\mathrm{Ad}(u)\underline{M} = \underline{M}$. Par conséquent, $u \in N_G(M)$. Si $\underline{H}$ est le normalisateur de $\underline{M}$ dans $\underline{G}$, il est bien connu que la composante neutre (pour la topologie de Zariski) de $\underline{H}$ est égale à $\underline{M}$. Par ailleurs, si $u \in N$ normalise M, c'est encore vrai pour u^x si $x \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ est dense (pour la topologie de Zariski) dans le groupe à un paramètre, additif, $\underline{U}$ engendré par u on voit que $\underline{U} \subset \underline{H}$; puisque $\underline{U}$ est connexe, $\underline{U} \subset \underline{M}$; on en déduit, $\underline{U}$ étant un sous-groupe de $\underline{N}$, que $\underline{U} = \{1\}$.

On a donc montré que $\sigma(\underline{M}) = \mathrm{Ad}(n)\underline{M}$ pour un $n \in N$ tel que $n^{\sigma^{\ell-1}} n^{\sigma^{\ell-2}} \ldots n^{\sigma} n = 1$. Soit $\Gamma = \{1, \sigma, \ldots \sigma^{\ell-1}\}$ le groupe fini d'endomorphismes de N engendré par σ. Le groupe de cohomologie non-abélienne $H^1(\Gamma, N)$ (cf. Serre, *Corps locaux,* Annexe au Chap. VII) est représenté par les cocycles $\gamma \to Z_\gamma \in N$ $(\gamma \in \Gamma)$ tels que $Z_{\gamma\gamma'} = Z_\gamma.(Z_{\gamma'})^{\gamma}$. Soit $x = n^{-1}$: le cocycle $Z_{\sigma^k} = xx^{\sigma} \ldots x^{\sigma^{k-1}}$ $(k \geq 0)$ ne dépend que de k modulo ℓ, et définit un élément de $H^1(\Gamma, N)$. On va montrer (rappelons que $H^1(\Gamma, N)$ est muni d'un élément distingué, qu'on notera 0).

Lemme 6. On a

$$H^1(\Gamma, N) = \{0\}.$$

On en déduit que $Z_\gamma = y^{-1}y^\gamma$ pour un $y \in N$. En particulier, $n = y^{-\sigma}y$. Puisque $\sigma(\underline{M}) = Ad(n)\underline{M}$, on voit que $Ad(y)\underline{M}$ est σ-stable, d'où la Proposition 7. □

Démonstration du lemme 6. Soit $Z = \underline{Z}(F)$ le centre de N, $\underline{N}' = \underline{N}/_{\underline{Z}}$ le groupe algébrique quotient, $N' = \underline{N}'(F)$. Puisque la cohomologie *galoisienne* de Z est triviale, on a la suite exacte des points à valeurs dans F :

$$1 \to Z \to N \to N' \to 1.$$

Le groupe Γ agit par F-automorphismes sur $\underline{N}'$, et on peut supposer par récurrence le lemme 6 vrai pour N' ; comme Z est un groupe additif, donc divisible, on a aussi $H^1(\Gamma,Z) = 0$. La suite exacte en cohomologie non-abélienne (Serre, loc.cit., Proposition 2) donne alors

$$H^1(\Gamma,Z) \to H^1(\Gamma,N) \to H^1(\Gamma,N')$$

d'où $H^1(\Gamma,N) = \{0\}$. □

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.F. Atiyah, R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I, Ann. of Math. 86, 1967, 374-407.

[2] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinskii, Representations of the group GL(n,F) where F is a non-archimedian local field, Russian Math. Surveys 31 (3), 1976, 1-68.

[3] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinskii, Induced representations of reductive p-adic groups I, Ann. Sc. E.N.S., 4e série, 10, 1977, 441-472.

[4] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of $\mathfrak{p}$-adic reductive groups, preprint.

[5] P. Cartier, Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups, Proc. Symp. Pure Math. 33, 1979, part I, 111-155.

[6] G. van Dijk, Computation of Certain Induced Characters of $\mathfrak{p}$-adic Groups, Math. Ann. 199, 1972, 229-240.

[7] Harish-Chandra, A submersion principle and its applications, Proc. Indian Acad. Sc. (Math. Sci.) 90 (2), April 1981, 95-102.

[8] Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, Queen's papers in pure and applied mathematics 48, 1978, 281-347.

[9] D. Heifetz, p-Adic Oscillatory Integrals and Wave Front Sets, thèse, Columbia University, 1982.

[10] T. Hirai, The Characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ. 8 (3), 1968, 313-363.

[11] V. Guillemin, S. Sternberg, Geometric Asymptotics, Math. Surveys 14, AMS, Providence 1977.

[12] R.E. Kottwitz, Rational Conjugary classes in Reductive groups, Duke Math. J. 49 (4), 1982, 785-806.

[13] R.P. Langlands, Base Change for GL(2), Annals of Math. Study 96, 1980.

[14] J. Repka, Base Change and Induced Representations of Real Reductive groups, preprint.

[15] F. Rodier, Décomposition spectrale des représentations lisses, in Springer Lecture Notes 587, 1977.

[16] N. Wallach, Harmonic Analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, 1973.