MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES BENOIST

Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__1_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 1-37

MULTIPLICITÉ UN POUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES EXPONENTIELS

YVES BENOIST (*)

Résumé :

On donne une condition suffisante de non multiplicité pour certaines représentations cycliques liées à des espaces symétriques. On en déduit que si (G,H) est un espace symétrique exponentiel la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité.

A sufficient non multiplicity condition is given for certain cyclic representations which are related to symmetric spaces. In particular, it is proved that if (G,H) is an exponential symmetric space the induced representation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ has no multiplicity.

(*) ERA 1020 du C.N.R.S.,
UER de Mathématiques
2, Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

ESPACES SYMÉTRIQUES EXPONENTIELS

INTRODUCTION :

Soient G un groupe de Lie connexe, σ une involution de G, H l'ensemble des points fixes de σ , H_o sa composante neutre et K un sous-groupe de G tel que $H_o \subset K \subset H$. Un couple (G,K) est appelé un espace symétrique. Il est connu que, dans les deux cas suivants :

i) (G,K) espace symétrique riemannien (i.e. Ad K compact)
ii) $(G_1 \times G_1, \Delta)$ où Δ est la diagonale de $G_1 \times G_1$ (cf. [Ma 1] §.3),

la représentation du groupe G dans l'espace $L^2(G/K)$ est sans multiplicité (i.e. le commutant de cette représentation est commutatif).

Nous nous plaçons dans le cadre des groupes de Lie résolubles. Nous montrons que ce résultat est encore vrai si G a une algèbre de Lie exponentielle (corol. 3.2.1), mais peut être mis en défaut pour un groupe résoluble quelconque (exemple 3.3.2).

Voici la méthode suivie : nous montrons tout d'abord une égalité du type G = HP "décomposition de Cartan" où $P = \{g \in G/g^{-1} = g^{\sigma}\}$ (prop. 2.1). Nous associons ensuite à chaque élément du commutant une fonction généralisée sur G (l'idée d'une telle association est due à F. Bruhat : [Br] Chap. 6). Cette dernière est "H-semibiinvariante". Nous montrons auparavant une propriété des fonctions généralisées "H-semibiinvariantes" (prop. 2.3). Ceci nous permet de montrer qu'un automorphisme et un antiautomorphisme du commutant coïncident (th. 3.1).

En outre, nous précisons la désintégration de cette représentation sur $\hat{G}$: les représentations unitaires irréductibles qui y interviennent vérifient $\bar{\pi} = \pi^{\sigma}$ (th. 4.1.2). Nous interprétons ceci en termes de méthode des orbites (th. 4.3.2). Nous terminons par une propriété de ces représentations irréductibles (corol. 4.4.2) liée à notre problème par une dualité de Frobenius.

Nous donnons à nos résultats une certaine généralité de façon à retrouver le cas $(G_1 \times G_1, \Delta)$ ainsi que quelques autres. Ceci a tendance à alourdir les énoncés, mais n'entraîne aucune modification essentielle dans les démonstrations. On peut donc, en première lecture, supposer que G est un groupe exponentiel et que la représentation dont on cherche la désintégration est la représentation de G dans $L^2(G/H)$.

Ces résultats sont annoncés dans [B2], et développés dans la première partie de [B1] où les exemples sont traités de façon plus détaillée.

I. GÉNÉRALITÉS, RAPPELS :

1.1. Notations

1.1.1 Soit M une variété (paracompacte), on note $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^∞) de M à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{K}(M)$ (resp. $\mathcal{D}(M)$) le sous-espace de $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) formé des fonctions à support compact. On note $\mathcal{M}^\infty(M)$ l'espace des densités C^∞ sur M et $\mathcal{M}_c^\infty(M)$ le sous-espace des densités C^∞ à support compact. On munit ces ensembles de leur topologie usuelle.

Soient M et N deux variétés, ϕ et ψ des éléments de $\mathcal{C}(M)$ et $\mathcal{C}(N)$. On note $\phi \otimes \psi$ l'élément de $\mathcal{C}(M \times N)$ donné par, pour (m,n) dans $M \times N$, $(\phi \otimes \psi)(m,n) = \phi(m)\psi(n)$. De même, si f et g sont des difféomorphismes de M et N, on note $f \otimes g$ le difféomorphisme de $M \times N$ donné par, pour (m,n) dans $M \times N$ $(f \otimes g)(m,n) = (f(m),g(n))$. On notera souvent de la même façon une fonction et sa restriction à un sous-ensemble.

Soit $\mathcal{D}'(M)$ l'espace des distributions sur M et $\mathcal{E}'(M)$ l'espace des distributions à support compact. Soient ξ dans $\mathcal{D}'(M)$ et ϕ dans $\mathcal{D}(M)$, on note (ξ,ϕ) ou $(\xi(x),\phi(x))$, avec une lettre muette (notation abusive), l'image de ϕ par ξ . La distribution conjuguée de ξ est notée $\bar{\xi}$. On a donc, par définition $(\bar{\xi},\bar{\phi}) = \overline{(\xi,\phi)}$. Soit $\mathcal{F}(M)$ l'espace des fonctions généralisées sur M (i.e. le dual de $\mathcal{M}_c^\infty(M)$) ; pour T dans $\mathcal{F}(M)$ et μ dans $\mathcal{M}_c^\infty(M)$, on note de même (T,μ) ou $(T(x),\mu(x))$ l'image de μ par T et $\bar{T}$ la fonction généralisée conjuguée de T. Soit f un difféomorphisme de M, on note $f_*(\xi)$ la distribution image de ξ par f : $\forall \phi \in \mathcal{D}(M)$ $(f_*(\xi),\phi) = (\xi,\phi \circ f)$; et on note $T \circ f$ la fonction généralisée image réciproque de T par f : $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$ $(T \circ f,\mu) = (T,f_*(\mu))$.

1.1.2 Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, pour tout élément g de G, on note $\lambda(g)$, $\rho(g)$, $\gamma(g)$ et J les difféomorphismes de G donnés, pour x dans G, par : $\lambda(g)x = gx$, $\rho(g)x = xg^{-1}$, $\gamma(g)x = gxg^{-1}$ et $J(x) = x^{-1}$.
Notons exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G et m la multiplication de G.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite exponentielle si pour tout X dans $\mathfrak{g}$, le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$ n'est pas valeur propre de ad X. Celle-ci est alors résoluble. Un groupe de Lie est dit exponentiel s'il est connexe, simplement connexe et si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est exponentielle. Il est équivalent de dire que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G.

Soit σ un automorphisme de G, on note encore σ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ dérivé de σ. Pour X dans $\mathfrak{g}$ (resp. g dans G), on notera parfois X^σ (resp. g^σ) l'image de X (resp. g) par σ. On dit que σ est une involution s'il vérifie $\sigma^2 = 1$. On note alors H ou G_σ l'ensemble des points fixes de cette involution :

$$H = G_\sigma = \{g \in G/g^\sigma = g\}$$, on note aussi
$P = \{g \in G/g^\sigma = g^{-1}\}$, $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}/X^\sigma = X\}$ et
$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}/X^\sigma = -X\}$. Soit p la projection canonique de G sur G/H et exp l'application de $\mathfrak{p}$ dans G/H donnée par :

$$\forall X \in \mathfrak{p} \qquad \dot{\exp}\, X = p(\exp X).$$

On a l'égalité $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ et les inclusions :

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \quad ,[\mathfrak{h},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \quad \text{et } [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}.$$

1.1.3 Soient $\mathcal{H}$ un Hilbert (séparable) et Π une représentation (continue) de G d'espace $\mathcal{H}$. On note $\bar{\mathcal{H}}$ le Hilbert conjugué de $\mathcal{H}$, $\bar{\Pi}$ la représentation conjuguée de Π et Π^σ la représentation $\Pi \circ \sigma$. Rappelons que l'on appelle commutant de la représentation Π l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Pi) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})/\forall g \in G \quad \Pi(g)A = A\,\Pi(g)\}.$$

Le commutant $\mathcal{C}(\Pi)$ est une algèbre de Von Neumann. La représentation Π est dite sans multiplicité si et seulement si $\mathcal{C}(\Pi)$ est commutatif.

1.2. Vecteurs C^∞ et $C^{-\infty}$ d'une représentation :

1.2.1 Soit G un groupe de Lie et $\Pi : G \to U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{H}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation Π : $\mathcal{H}^\infty = \{v \in \mathcal{H}$/l'application de G dans $\mathcal{H} : g \to \Pi(g).v$ est $C^\infty\}$ muni de sa topologie habituelle et $\mathcal{H}^{-\infty}$ l'antidual de $\mathcal{H}^\infty$ (i.e. l'espace vectoriel des formes antilinéaires continues de $\mathcal{H}^\infty$ dans $\mathbb{C}$) muni de la topologie de dual fort. Ces espaces sont réflexifs ; l'antidual de $\mathcal{H}^{-\infty}$ s'identifie à $\mathcal{H}^\infty$; soient a dans $\mathcal{H}^{\pm\infty}$ et b dans $\mathcal{H}^{\mp\infty}$. On note $<a,b>$ l'image de b par a ; on a $<a,b> = \overline{<b,a>}$. L'espace $\mathcal{H}^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H}^{-\infty}$.

Pour g dans G, A dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et μ dans $\mathcal{M}_c(G)$ les opérateurs $\Pi(g)$, A, $\Pi(\mu)$ laissent stable $\mathcal{H}^\infty$ (on note $\Pi_\infty(g)$, A_∞ et $\Pi_\infty(\mu)$ les restrictions) et se prolongent de façon unique en des opérateurs continus de $\mathcal{H}^{-\infty}$ notés $\Pi_{-\infty}(g)$, $A_{-\infty}$ et $\Pi_{-\infty}(\mu)$; nous oterons parfois les indices $\pm\infty$ (c.f. [Ca]).

1.2.2 Soit L un sous-groupe fermé de G, μ_G une mesure de Haar sur G, Δ_G et Δ_L les fonctions modules de G et L. On note χ le caractère de L donné par, pour l dans L :

$$\chi(l) = \frac{\Delta_L(l)}{\Delta_G(l)} .$$

Soit c un caractère unitaire de L, la représentation $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c)$: "induite de L à G du caractère c" se réalise naturellement dans le quotient $L^2(G/L,c)$ de l'espace des fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ telles que :

i) $\forall g \in G \quad \forall l \in L \quad f(gl) = \chi(l)^{\frac{1}{2}}\, c(l)^{-1}\, f(g)$

ii) $\int_{G/L} |f|^2\, d\mu_{G,L} < \infty$ (c.f.[Be] pour la définition de cette intégrale) par le sous-espace des fonctions μ_G - presque partout nulles ; si c = 1, on note $L^2(G/L)$ pour $L^2(G/L,1)$. L'action de G est donnée par $\forall g,x \in G$ $(\Pi(g)f(x) = f(g^{-1}x)$ (c.f.[Be] Chap V 2.2).

La description des vecteurs C^∞ des représentations induites est due à N. S. Poulsen. Celle-ci prouve en particulier que $(L^2(G/L,c))^\infty$ est inclus dans $\mathcal{C}(G)$; cette inclusion est une application continue (c.f. [Po] th. 5.1 ou [Ca] th. 3.1).

1.2.3 Soit Π une représentation unitaire de G. On dit qu'un élément a de $\mathcal{H}_\Pi^{-\infty}$ est cyclique, s'il n'existe pas d'éléments non nuls v de $\mathcal{H}_\Pi^{\infty}$ tels que, pour tout g dans G, on ait $\langle a,\Pi(g)v\rangle = 0$. Un tel couple (Π,a) est appelé une représentation cyclique (généralisée). On dit que deux représentations cycliques (Π,a) et (Π',a') sont projectivement équivalentes, s'il existe un isomorphisme U qui entrelace Π et Π' et tel que $U_{-\infty}(a) = \lambda a'$ avec λ dans $\mathbb{C}^*$, et équivalentes si on peut choisir $\lambda = 1$.

<u>Exemple 1</u> : Soient L un sous-groupe de Lie de G, c un caractère unitaire de L et $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c)$. On sait que $\mathcal{H}_\Pi^{\infty}$ est inclus dans $\mathcal{E}(G)$ (cf. 1.2.2), dont l'application $\delta : \mathcal{H}_\Pi^{\infty} \to \mathbb{C}$ donnée par $\delta(f) = \overline{f(e)}$ est un élément de $\mathcal{H}_\Pi^{-\infty}$; cet élément est cyclique : en effet, soit f dans $\mathcal{H}_\Pi^{\infty}$ tel que, pour tout g dans G, on ait $\langle\delta,\Pi(g)f\rangle = 0$, alors $f(g^{-1}) = 0$ et $f = 0$. Le couple (Π,δ) est une représentation cyclique.

<u>Exemple 2</u> : Soient π une représentation unitaire irréductible de G et a un vecteur non nul de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, alors le couple (π,a) est une représentation cyclique : en effet, soit v non nul dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, l'ensemble $\{\pi(g)v/g \in G\}$ est un sous-ensemble G-invariant de $\mathcal{H}_\pi^{\infty}$ total dans $\mathcal{H}_\pi$; il est donc total dans $\mathcal{H}_\pi^{\infty}$ (cf. [Po] Corol. 3.4).

1.3. <u>Coefficients des représentations</u> :

1.3.1 Soient G un groupe de Lie et π une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathcal{H}_\pi$.

<u>Définition</u> : A tout couple (a,b) d'éléments de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, on associe une fonction généralisée sur G, appelée coefficient de π en (a,b), notée $T_{a,b}^\pi$ et définie par $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(G) \quad (T_{a,b}^\pi,\mu) = \langle\pi(\mu)a,b\rangle$.

Rappelons que l'application : $(\mu,a,b) \mapsto \langle\pi(\mu)a,b\rangle$ est bien définie de $\mathcal{M}_c^\infty(G) \times \mathcal{H}_\pi^{-\infty} \times \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ dans $\mathbb{C}$ car $\pi(\mu)a$ est dans $\mathcal{H}_\pi^{\infty}$; elle est séparément continue par rapport à μ, a et b ; le coefficient $T_{a,b}^\pi$ dépend linéairement de a et antilinéairement de b.

<u>Lemme 1.3.1</u> : Avec les notations précédentes ainsi que celles de 1.1, soient a et b dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ et σ une involution de G ; on a, pour g dans G

a) $T^{\pi}_{a,b} \circ \lambda(g^{-1}) = T^{\pi}_{a,\pi(g)b}$

b) $T^{\pi}_{a,b} \circ \rho(g^{-1}) = T^{\pi}_{\pi(g)a,b}$

c) $T^{\pi}_{a,b} \circ J = T^{\bar{\pi}}_{b,a}$

d) $T^{\pi}_{a,b} \circ \sigma = T^{\pi^{\sigma}}_{a,b}$

<u>Démonstration</u> : Comme l'application : $(\mu,a,b) \to \langle\pi(\mu)a,b\rangle$ est séparément continue et que $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi}$, il suffit de vérifier ces égalités pour a et b dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas, les fonctions généralisées sont de "vraies" fonctions et les égalités sont claires.

1.3.2 Dans le cas de représentations unitaires irréductibles d'un groupe compact, les coefficients vérifient les relations d'orthogonalité de Schur. Voici un résultat qui permet, dans certains cas, de suppléer à l'absence de telles relations pour un groupe de Lie quelconque.

<u>Lemme 1.3.2</u> : Soient G un groupe de Lie, π et π' deux représentations unitaires irréductibles de G, a et b deux éléments de $\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi}$ et a' et b' deux éléments de $\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi'}$;

a) Si les coefficients $T^{\pi}_{a,b}$ et $T^{\pi'}_{a',b'}$ sont égaux, alors π est équivalente à π'.

b) Dans ce cas, si U est une équivalence unitaire entre π et π' (en particulier, $U(\mathcal{H}^{\infty}_{\pi}) = \mathcal{H}^{\infty}_{\pi'}$, et U se prolonge en un isomorphisme $U_{-\infty}$ de $\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi}$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi'}$) alors il existe un nombre complexe λ non nul tel que $U_{-\infty}(a) = \bar{\lambda}\, a'$ et $U_{-\infty}(b) = \lambda^{-1} b'$.

<u>Démonstration</u> : Comme a et b sont non nuls, on peut trouver μ_1 et μ_2 dans $\mathcal{M}^{\infty}_{c}(G)$ tels que $c = \pi(\mu_1)a$ et $d = \pi(\mu_2)b$ soient tous deux non nuls. Notons alors $c' = \pi'(\mu_1)a'$ et $d' = \pi'(\mu_2)b'$. On a alors $T^{\pi}_{c,d} = T^{\pi'}_{c',d'}$; en effet, pour μ dans $\mathcal{M}^{\infty}_{c}(G)$,

$$(T^{\pi}_{c,d},\mu) = \langle\pi(\mu)\pi(\mu_1)a,\pi(\mu_2)b\rangle = \langle\pi(\mu_2^{*} * \mu * \mu_1)a,b\rangle$$

ce qui, par un calcul analogue égale $(T^{\pi'}_{c',d'},\mu)$. Mais c et d sont dans $\mathcal{H}_{\pi}$ et c' et d' sont dans $\mathcal{H}_{\pi'}$; $T^{\pi}_{c,d}$ et $T^{\pi'}_{c',d'}$ s'identifient à des fonctions continues sur G ;

donc on a, pour tout g dans G $\langle\pi(g)c,d\rangle = \langle\pi'(g)c',d'\rangle$.

Considérons alors la somme directe $\pi \oplus \pi'$, représentation de G d'espace $\mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_{\pi'}$. Si π et π' ne sont pas équivalentes, le commutant $\mathcal{C}(\pi \oplus \pi')$ est de dimension 2 : une base en est donnée par les projecteurs orthogonaux sur $\mathcal{H}_\pi$ et $\mathcal{H}_{\pi'}$. Donc l'algèbre de Von Neumann engendrée par $(\pi \oplus \pi')(G)$ est $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\pi'})$. Or, pour tout g dans G, on a l'égalité :

$$\langle(\pi \oplus \pi')(g)(c \oplus (-c')),d \oplus d'\rangle = 0$$

Cette égalité reste vraie sur l'algèbre de Von Neumann engendrée par $(\pi \oplus \pi')(G)$ ([Dil] Chap. 1 §3 Corol. 1 p. 44) ; donc, pour A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ et B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\pi'})$, on a $\langle(A \oplus B)(c \oplus (-c')), d \oplus d'\rangle = 0$ soit :

$$\langle A(c),d\rangle = \langle B(c'),d'\rangle$$

ce qui mène à une contradiction si on choisit A tel que $A(c) = d$ et B tel que $B(c') = 0$. Donc π et π' sont équivalentes.

b) Quitte à remplacer a par $U_{-\infty}(a)$ et b par $U_{-\infty}(b)$, on se ramène au cas où $\pi = \pi'$. Choisissons encore $c = \pi(\mu_1)a$ et $d = \pi(\mu_2)b$ non nuls ; on a, pour tout g dans G $\langle\pi(g)c,d\rangle = \langle\pi(g)c',d'\rangle$. Or l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\pi(G)$ est $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$. Comme en a), l'égalité se prolonge à $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ et on a pour tout A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ $\langle Ac,d\rangle = \langle Ac',d'\rangle$. Si c' n'est pas colinéaire à c, on peut choisir A de sorte que $Ac = d$ et $Ac' = 0$; ceci mène à une contradiction. Donc il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ tel que $c' = \bar{\lambda}^{-1}c$ et $d' = \lambda d$.

Supposons que l'on ait $a \neq \bar{\lambda}a'$, soit alors μ_1' dans $\mathcal{M}_c^\infty(G)$ tel que, d'une part $\pi(\mu_1')a \neq 0$, et d'autre part $\pi(\mu_1')(a-\bar{\lambda}a') \neq 0$. Le raisonnement précédent prouve qu'il existe λ' dans $\mathbb{C}$ tel que $\pi(\mu_1')a = \bar{\lambda}'\pi(\mu_1')a'$ et $\pi(\mu_2)b' = \lambda'\pi(\mu_2)b$. Cette dernière égalité, comparée à $d' = \lambda d$ et $d \neq 0$, donne $\lambda' = \lambda$ d'où $\pi(\mu_1')(a - \bar{\lambda}a') = 0$. Contradiction. Donc $a = \bar{\lambda}a'$ et de même $b = \lambda^{-1}b'$.

II. FONCTIONS GÉNÉRALISÉES L-SEMIBIINVARIANTES :

2.1. Involutions dans un groupe exponentiel

Voici un résultat tout à fait analogue à la décomposition de Cartan des groupes de Lie semi-simples.

Proposition 2.1 : Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni d'une involution σ, alors

1) l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}$ sur H ;
2) l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur P ;
3) la multiplication m est un difféomorphisme de $H \times P$ sur G.

Démonstration :

1) et 2) :

L'égalité $\sigma \circ \exp = \exp \circ \sigma$ donne immédiatement les inclusions $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$ et $\exp(\mathfrak{p}) \subset P$. Réciproquement, si g est dans H (resp. P), on peut trouver X dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp X = g$ et l'égalité $g^\sigma = g$ (resp. $g^\sigma = g^{-1}$) se réécrit $\exp(X^\sigma) = \exp(X)$ (resp. $\exp(X^\sigma) = \exp(-X)$). Par injectivité de l'application exponentielle, on en déduit $X \in \mathfrak{h}$ (resp. $X \in \mathfrak{p}$). Donc $\exp(\mathfrak{h}) = H$ et $\exp(\mathfrak{p}) = P$. L'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G, donc par restriction, exp est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{p}$) sur H (resp. P).

3) :

L'application $X \to 2X$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{p}$ est bijective ; donc l'application C de P sur P donnée par $C(p) = p^2$ est un difféomorphisme.

Si g dans G s'écrit $g = hp$ avec h dans H et p dans P, on a nécessairement $p^2 = (g^\sigma)^{-1}g$ donc $p = C^{-1}((g^\sigma)^{-1}g)$ et $h = gp^{-1}$. Donc m est injective.

Réciproquement, soit g dans G, il est clair que $(g^\sigma)^{-1}g$ est dans P. Posons alors $p = C^{-1}((g^\sigma)^{-1}g)$ et $h = gp^{-1}$; p est dans P et h est dans H, en effet :

$$h(h^\sigma)^{-1} = gp^{-2}(g^\sigma)^{-1} = g((g^\sigma)^{-1}g)^{-1}(g^\sigma)^{-1} = e.$$

On a $g = hp$. Donc m est surjective.

Les formules donnant m et m^{-1} sont C^∞ donc m est un difféomorphisme.

Remarques : On montrerait de même que la multiplication m est un difféomorphisme de $P \times H$ sur G.

On en déduit que (lorsque G est exponentiel) l'application exp est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur G/H.

2.2. Exemples

La proposition 2.1 peut être mise en défaut si on ne suppose pas que G est exponentiel. Donnons deux exemples :

2.2.1 Soit $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ le revêtement universel du groupe des déplacements du plan. Les éléments du groupe sont donnés par un triplet de réels (θ,a,b) : $\widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$. Le réel θ est "l'angle" de la "rotation" et le couple (a,b) est "l'image du point $(0,0)$" par cette "rotation" ; si $\theta = 0$, on dit que la "rotation" est une "translation". La loi de multiplication est :

$$(\theta,a,b)(\theta',a',b') = (\theta+\theta',\ a+ a'\cos\theta - b'\sin\theta,\ b+ a'\sin\theta + b'\cos\theta).$$

L'algèbre de Lie de ce groupe $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ est de dimension 3, elle a pour base $\{T,X,Y\}$ avec $[T,X] = Y$, $[T,Y] = -X$ et $[X,Y] = 0$. Elle est résoluble mais pas exponentielle.

On peut voir qu'il n'existe dans $\widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ que deux automorphismes d'ordre 2 (à conjugaison près) qui sont :

1) $\sigma_1 : (\theta,a,b) \to (\theta,-a,-b)$, σ_1 est un automorphisme intérieur, conjugaison avec $(\pi,0,0)$ qui est la "rotation d'angle π autour de $(0,0)$". L'automorphisme dérivé est l'application

$$\sigma_1 : tT + xX + yY \to tT - xX - yY.$$

2) $\sigma_2 : (\theta,a,b) \to (-\theta,a,-b)$, σ_2 n'est pas un automorphisme intérieur, c'est la "conjugaison avec la symétrie d'axe Oa". L'auto-

morphisme dérivé est l'application

$$\sigma_2 : tT + xX + yY \to -tT + xX - yY.$$

Les conclusions de la proposition 1.2 sont vérifiées pour σ_1, mais pas pour $\sigma = \sigma_2$.

Si on avait eu l'égalité G = HP, la condition plus faible suivante aurait été vraie : $\forall g \in G \quad (g^\sigma)^{-1} \in HgH$. Cette dernière n'est même pas vérifiée dans notre exemple ; pour $g = (\pi,0,1)$, $(g^\sigma)^{-1}$ n'est pas dans HgH.

2.2.2 Soit G le groupe de Lie simple $SL(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1 ; soit σ_0 l'involution de G définie par $\sigma_0(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$; σ_0 n'est pas un automorphisme intérieur, c'est la conjugaison par l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'élément $(g^{\sigma_0})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans HgH. Donc G n'est pas égal à HP.

2.3. Une propriété des fonctions généralisées L-semibiinvariantes

Définition : Soient G un groupe de Lie, L un sous-groupe de Lie de G, c et c' deux caractères de L. Une fonction généralisée T sur G est dite (L,c,c')-semibiinvariante ((c,c')-semibiinvariante, si la référence au groupe L n'est pas ambigüe) si elle vérifie :

$$\forall (l,l') \in L^2 \quad T \circ \lambda(l^{-1}) \circ \rho(l'^{-1}) = c(l)c'(l')T.$$

Définition : Soient G un groupe de Lie muni d'une involution σ, L un sous-groupe de Lie de G stable par σ . On dit que L vérifie la propriété $\mathcal{P}$, s'il existe une sous-variété Q de G telle que :

i) la multiplication m de $L \times Q$ dans G soit une submersion surjective ;

ii) et iii) pour tout q dans Q on ait $q^{-1} \in Q$ et $q^\sigma q \in L$;

iv) pour tout l dans L on ait $lQl^{-1} = Q$.

On peut maintenant énoncer :

Proposition 2.3 : Soient G un groupe de Lie muni d'une involution σ , L un sous-groupe de Lie de G stable par c vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ pour une sous-variété Q, c et c' deux caractères de L. Alors

1) il existe une fonction f C^∞ sur G, ne s'annulant pas, telle que pour toute fonction généralisée T sur G (c,c')-semibiinvariante, on ait

$$T \circ J = f.(T \circ \sigma).$$

2) Si en outre, on a l'égalité $c' = c \circ \sigma$ et si c vérifie la propriété (p)

$$\forall q \in \ddot{Q} \quad c(q^\sigma q) \in \mathbb{R}^+$$

alors on a l'égalité

$$T \circ J = T \circ \sigma .$$

La démonstration est donnée en 2.5 ; cette proposition est un point clef dans la démonstration des théorème 3.1 et proposition 4.4.1.

Remarque 1 : La propriété (p) est vérifiée dans les trois cas suivants :

(p_1) pour tout q dans Q, $q^\sigma.q = e$;

(p_2) c est à valeur dans $\mathbb{R}^+$;

(p_3) c est la restriction d'un caractère de G, encore noté c, vérifiant $\bar{c} = c \circ \sigma$.

Remarque 2 : Si on affaiblit les hypothèses de la proposition 2.3 en ne supposant pas que la multiplication m de L × Q dans G est surjective, l'ouvert $\mathcal{U} = m(L \times Q)$ est alors stable par les difféomorphismes J, σ, $\lambda(l)$ et $\rho(l)$ $(l \in L)$ et les résultats de la proposition 2.3 restent vrais si on remplace le groupe G par l'ouvert $\mathcal{U}$ (c.f. la démonstration en 2.5).

2.4. Exemples

2.4.1 Soit (G,H) un espace symétrique, avec G exponentiel, alors H vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec Q = P (c.f. 2.1) ; dans ce cas la propriété (p) est toujours vérifiée.

2.4.2 Pour un groupe de Lie G, considérons l'espace symétrique $(G \times G, \Delta)$ où Δ est la diagonale de $G \times G$, ensemble des points fixes de l'involution σ : $\sigma(x,y) = (y,x)$ pour x et y dans G ; alors Δ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec $Q = G \times \{e\}$.

2.4.3 G groupe fini.

Lemme 2.4.3 : Soient G un groupe fini, σ une involution de G et K un sous-groupe de G_σ ; on a l'équivalence :

$$K \text{ vérifie } \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall g \in G \quad (g^\sigma)^{-1} \in K\, gK.$$

Démonstration : Si K vérifie $\mathcal{P}$ pour un sous-ensemble Q, on peut alors écrire, pour g dans G, $g = k.q$, avec k dans K et q dans Q (d'après i)) ; donc

$$(g^\sigma)^{-1} = (q^\sigma)^{-1}(k^\sigma)^{-1} = k^{-1}g((q^\sigma q)^{-1}(k^\sigma)^{-1}) \in KgK \text{ d'après iii).}$$

Réciproquement, supposons que tout g de G vérifie $(g^\sigma)^{-1} \in KgK$; posons $Q = \{q \in G \quad q^\sigma q \in K\}$. Soit g dans G, on peut écrire $g = k_1(g^\sigma)^{-1}k_2$; avec k_1 et k_2 dans k, donc $q = k_1^{-1}g = (g^\sigma)^{-1}k_2$ vérifie $q^\sigma q = (k_1^\sigma)^{-1}k_2 \in K$; on a donc $g = k_1 q$ avec k_1 dans K et q dans Q ; ceci prouve i). Soit q dans Q, on a l'égalité $(q^{-1})^\sigma q^{-1} = (\sigma(q^\sigma q))^{-1} \in K$ donc $q^{-1} \in Q$; ceci prouve ii). Le iii) est évident et le iv) résulte de ce que tout élément de K est invariant par σ . Donc K vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2.4.4 Soit (G,K) un espace symétrique riemannien de type non compact (i.e. G est semi-simple connexe et σ est une involution de Cartan). La décomposition de Cartan prouve que $Q = \exp \mathfrak{p}$ est une sous-variété de G et que la multiplication m de $H \times Q$ sur G est un difféomorphisme. Donc K vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (c.f. [He] Chap. VI Th. 1.1).

2.4.5 Soient (G,K) un espace symétrique et P comme en 1.1. P est une sous-variété de G ; en outre, P vérifie ii), iii) et iv) ; P est donc a priori un bon candidat pour être la sous-variété Q de 2.3 (par exemple, pour $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $\sigma = \sigma_1$ (c.f. 2.2.1), H_1 vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour la sous-variété $Q = P_1$). Cependant, dans le cas général, la multiplication m de $K \times P$ dans G n'est pas surjective (par exemple $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $K = G_{\sigma_2}$ ou $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $K = G_{\sigma_0}$; c.f. 2.2; dans ces deux cas les conclusions de la proposition 2.3 ne sont pas vérifiées : nous le verrons en 3.3).

2.4.6 Si G est compact, la multiplication m de $K \times P$ dans G est bien surjective mais pas nécessairement une submersion, comme on peut s'en convaincre avec l'exemple suivant : $G = SU(2)$, σ est la conjugaison avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = G_\sigma$. Notre démonstration ne s'adapte pas à ce cas bien que les résultats des th. 3.1 et proposition 4.4.1 restent vrais.

2.4.7 Lorsque P ne convient pas, un autre candidat pour Q est l'ensemble $P' = \{p \in P_0$ tels que $(Adp + Id)|_{\mathfrak{h}}$ est injective$\}$. Par exemple :

a) Soient $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$, $\sigma = \sigma_2$ (cf. 2.2.1) et $L = \{(k\pi,a,0) \;/\; k \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{R}\}$ L est stable par σ et vérifie la propriété $\mathfrak{P}$ pour la sous-variété

$$Q = \{(\theta,-r \sin \tfrac{\theta}{2},\ r \cos \tfrac{\theta}{2}) \;/\; r \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R},\ \tfrac{\theta-\pi}{2\pi} \notin \mathbb{Z}\} .$$

b) Soient $G = SL(2,\mathbb{R})$, $\sigma = \sigma_0$ (c.f. 2.2.2), $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = G_{\sigma_0} \cup wG_{\sigma_0}$:

$$L = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \;/\; a \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \;/\; a \in \mathbb{R}^*\} .$$

Alors L est stable par σ et vérifie la propriété $\mathfrak{P}$ pour

$$Q = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \;/\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a \neq 0 \text{ et } a^2 - bc = 1\}.$$

2.5 Démonstration de la proposition 2.3

Principe de la démonstration : on utilise la propriété d'invariance à gauche de la fonction généralisée T pour la restreindre à Q; on compare alors les restrictions de $T \circ \sigma$ et $T \circ J$.

2.5.1 Nous avons besoin d'un résultat général :

Lemme 2.5 : Soient M et N deux variétés et $p : M \to N$ une submersion. Alors :

a) Pour toute densité μ C^∞ à support compact sur M, la mesure image $p_*(\mu)$ est une densité C^∞ à support compact sur N.

b) Soit F une fonction généralisée sur N, on note $\tilde{F} = F \circ p$ la fonction généralisée définie par $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$ $(F \circ p, \mu) = (F, p_*(\mu))$.

c) Si $(\tilde{f}, f)$ est un couple de difféomorphismes de M et N, respectivement, qui vérifie $p \circ \tilde{f} = f \circ p$; alors $\tilde{F} \circ \tilde{f} = \widetilde{F \circ f}$.

d) Soit ϕ dans $C^\infty(N)$ alors $\widetilde{\phi F} = (\phi \circ p)\tilde{F}$.

e) Supposons désormais p surjective, l'application $F \to \tilde{F}$ est alors injective de $\mathcal{F}(N)$ dans $\mathcal{F}(M)$.

f) (p surjective) Soit α dans $C^\infty(M)$, alors il existe β dans $C^\infty(N)$ tel que tous les couples de fonctions généralisées (F,G) de $\mathcal{F}(N)$ qui vérifient $\tilde{F} = \alpha\tilde{G}$ vérifient $F = \beta G$.

La démonstration se fait sans difficulté : le a) est une conséquence du théorème du rang constant. Pour f), on choisit une partition de l'unité γ_U associée à un recouvrement de N par des ouverts U sur lesquels il existe une section différentiable s_U de p et on pose $\beta = \sum_U \gamma_U \; \alpha \circ s_U$.

2.5.2 Soit $m : L \times Q \to G$ la multiplication qui, par hypothèse est une submersion surjective ; on peut donc, grâce au lemme 2.5.1, "relever" toute fonction généralisée T sur G en une fonction généralisée $\tilde{T}$ sur $L \times Q$.

Notons $\tilde{J}$ et $\tilde{\sigma}$ les difféomorphismes de $L \times Q$ donnés par

$$\forall (l,q) \in L \times Q \qquad \tilde{J}(l,q) = (l^{-1}, lq^{-1}l^{-1})$$

$$\text{et} \qquad \tilde{\sigma}(l,q) = (l^{\sigma}(q^{\sigma}q), q^{-1})$$

qui sont bien définis grâce à ii), iii), iv) et à l'invariance de H par σ . Conformément à nos notations (cf. 1.1), pour l dans L, $\lambda(l) \otimes 1$ et $\rho(l) \otimes \gamma(l)$ sont les difféomorphismes de $L \times Q$ donnés par

$$(k,q) \in L \times Q \qquad (\lambda(l) \otimes 1)(k,q) = (lk,q)$$

$$\text{et} \qquad (\rho(l) \otimes \gamma(l))(k,q) = (kl^{-1}, lql^{-1}).$$

Lemme 2.5.2 :

a) L'application $T \to \tilde{T}$ de $\mathcal{F}(G)$ dans $\mathcal{F}(L \times Q)$ est injective.

b) Pour toute fonction généralisée T sur G et l dans L, on a

b1) $\tilde{T} \circ (\lambda(l) \otimes 1) = \widetilde{T \circ \lambda(l)}$
b2) $\tilde{T} \circ (\rho(l) \otimes \gamma(l)) = \widetilde{T \circ \rho(l)}$
b3) $\tilde{T} \circ \tilde{J} = \widetilde{T \circ J}$
b4) $\tilde{T} \circ \tilde{\sigma} = \widetilde{T \circ \sigma}$

c) En particulier, si T est (c,c') - semibiinvariante, on a

c1) $\tilde{T} \circ (\lambda(l^{-1}) \otimes 1) = c(l)\tilde{T}$
c2) $\tilde{T} \circ (\rho(l^{-1}) \otimes \gamma(l^{-1})) = c'(l)\tilde{T}$

Le a) résulte du lemme 2.5.1 e). Par construction, on peut appliquer aux couples $(\lambda(l) \otimes 1, \lambda(l))$, $(\rho(l) \otimes \gamma(l), \rho(l))$, $(\tilde{J}, J)$ et $(\tilde{\sigma}, \sigma)$ les résultats du lemme 2.5.1 c), on obtient alors les égalités du b). Le c) résulte du b) et de la semibiinvariance de T.

2.5.3 Nous voulons utiliser les propriétés d'invariance c1) de la fonction généralisée $\tilde{T}$ pour la restreindre en une fonction généralisée S de Q. Pour cela nous avons besoin des résultats bien connus:

Lemme 2.5.3 :

a) Soit G un groupe de Lie et F une fonction généralisée sur G invariante par translation à gauche (i.e. $\forall g \in G \quad F \circ \lambda(g) = F$). Alors F est une fonction constante.

b) Soient M une variété et F une fonction généralisée sur $G \times M$ qui vérifie $\forall g \in G \quad F \circ (\lambda(g) \otimes 1) = F$, alors il existe une unique fonction généralisée E sur M telle que $F = 1 \otimes E$.

2.5.4 Calculons maintenant, pour l dans L, en utilisant l'égalité 2.5.2 c2) :

$$((c \otimes 1)\tilde{T}) \circ (\lambda(l) \otimes 1) = (c \circ \lambda(l) \otimes 1)(\tilde{T} \circ (\lambda(l) \otimes 1)) = (c \otimes 1)\tilde{T}.$$

Donc (lemme 2.5.3), il existe une unique fonction généralisée S sur Q vérifiant $(c \otimes 1)\tilde{T} = 1 \otimes S$ soit $\tilde{T} = c^{-1} \otimes S$.

Puisque T est (c,c')-semibiinvariante, T o J est (c',c)-semi-biinvariante et T o σ est (c o σ, c' o σ)-semibiinvariante ; en effet, pour l dans L

$$(T \circ J) \circ (\lambda(l)) = (T \circ \rho(l)) \circ J = (c'(l^{-1})T) \circ J = c'(l^{-1})(T \circ J)$$

et

$$(T \circ \sigma) \circ (\lambda(l)) = (T \circ \lambda(l^{\sigma})) \circ \sigma = (c(\sigma(l)^{-1})T) \circ \sigma = (c \circ \sigma(l^{-1}))(T \circ \sigma)$$

de même

$$(T \circ J) \circ \rho(l) = c(l^{-1})(T \circ J) \text{ et } (T \circ \sigma) \circ \rho(l) = (c' \circ \sigma(l^{-1}))(T \circ \sigma)$$

On en déduit qu'il existe des fonctions généralisées S' et S" sur Q telles que

$$\widetilde{T \circ J} = c'^{-1} \otimes S' \qquad \text{et} \qquad \widetilde{T \circ \sigma} = (c^{\sigma})^{-1} \otimes S''$$

<u>Lemme 2.5.4</u> : Notons ϕ l'application de Q dans L donnée par $\phi(q) = q^{\sigma} q$. S, S' et S" sont les fonctions généralisées sur Q définies ci-dessus. On a

a) $\forall l \in L \quad S \circ \gamma(l) = c(l^{-1})c'(l^{-1})S$
b) $S' = S \circ J$ (J désigne ici la restriction de J à Q)
c) $S'' = (c^{-1} \circ \Phi)S \circ J$.

<u>Démonstration</u> : Soient μ dans $\mathcal{M}_c^{\infty}(L)$ et ν dans $\mathcal{M}_c^{\infty}(Q)$.

a) Calculons : $\widetilde{T \circ \rho(l)} = c'(l^{-1})\tilde{T} = c'(l^{-1})(c^{-1} \otimes S)$ (lemme 2.5.2 c2)) ;

d'autre part $\widetilde{T \circ \rho(l)} = \tilde{T} \circ (\rho(l) \otimes \gamma(l)) = (c^{-1} \circ \rho(l)) \otimes (S \circ \gamma(l))$
$= c(l)(c^{-1} \otimes S \circ \gamma(l))$

on en déduit $S \circ \gamma(l) = c(l^{-1})c'(l^{-1})S$.

b) Calculons : $(\tilde{T} \circ \tilde{J}, \mu \otimes \nu) = ((c^{-1} \otimes S) \circ \tilde{J}, \mu \otimes \nu)$ ce qui en utilisant la définition de $\tilde{J}$ et la notation des fonctions généralisées avec une lettre muette s'écrit :

$$(\widetilde{T \circ J}, \mu \bullet \nu) = ((c^{-1} \circ J)(l),(S \circ \gamma(l) \circ J, \nu)\mu(l))$$
$$= (c(l),c(l^{-1})c'(l^{-1})(S \circ J, \nu)\mu(l)) \text{ (d'après a))}$$
$$= (c'(l^{-1}),\mu(l))(S \circ J,\nu) \quad \text{donc}$$
$(c'^{-1} \bullet S',\mu\bullet\nu)= (c'^{-1} \bullet S \circ J,\mu \bullet \nu)$ on en déduit que $S' = S \circ J$.

c) Calculons $(T \circ \sigma, \mu \bullet \nu) = ((c^{-1} \bullet S) \circ \sigma,\mu \bullet \nu)$ ce qui par définition de σ donne

$$(\widetilde{T \circ \sigma}, u \bullet \nu) = (S \circ J(q),(c^{-1} \circ \rho((q^{\sigma}q)^{-1}) \circ \sigma,\mu)\nu(q))$$
$$= (S \circ J(q),(c^{-1} \circ \sigma,\mu)c^{-1}(q^{\sigma}q)\nu(q))$$
$$= (c^{-1} \circ \sigma,\mu)((c^{-1} \circ \phi) SoJ ,\nu) \quad \text{donc}$$
$((c^{-1} \circ \sigma) \bullet S'',\mu \bullet \nu) = ((c^{-1} \circ \sigma)\bullet((c^{-1} \circ \phi) SoJ),\mu \bullet \nu)$ on en déduit que

$$S'' = (c^{-1} \circ \phi) SoJ$$

2.5.5 Le lemme 2.5.4 prouve les égalités

$\widetilde{T \circ J} = c'^{-1} \bullet (S \circ J)$ et $\widetilde{T \circ \sigma} = (c^{-1} \circ \sigma)\bullet((c^{-1} \circ \phi) SoJ)$ on en déduit que $\widetilde{T \circ J} = \alpha\widetilde{T \circ \sigma}$ où α est la fonction C^{∞} sur $L \times Q$ donnée par

$$\alpha(l,q) = c'^{-1}(l)c^{\sigma}(l)c(q^{\sigma}q) ;$$

cette fonction ne dépend que de c et c' ; donc le lemme 2.5.1 f) prouve que l'on peut trouver une fonction f C^{∞} sur G ne dépend que des caractères c et c' telle que toute fonction généralisée $T(c,c')$-semibiinvariante sur G vérifie $T \circ J = f(T \circ \sigma)$. Ceci prouve la première partie de la proposition 2.3.

2.5.6 Supposons maintenant que $c' = c \circ \sigma$, on a alors $\alpha(l,q) = c(q^{\sigma}q)$. La fonction α prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$; on peut donc choisir f à valeurs réelles positives. On a vu que $T' = T\circ\sigma\circ J$ est $(c' \circ \sigma, c \circ \sigma)$-semibiinvariante (2.5.4), donc T' est (c,c')-semibiinvariante. D'après 1), on a simultanément

$T \circ J = f(T \circ \sigma)$ et $T' \circ J = f(T' \circ \sigma)$; cette deuxième égalité s'écrit $T \circ \sigma= f(T \circ J)$ d'où $T \circ \sigma = f^2(T \circ \sigma)$ et $(1-f^2)(To\sigma) = 0$; on peut multiplier cette dernière égalité par la fonction C^{∞} sur G : $(1+f)^{-1}$; on trouve $(1-f)(To\sigma) = 0$ d'où $T \circ \sigma= f(T \circ \sigma)$ et $T \circ J = T \circ \sigma$; ceci achève la démonstration de la proposition 2.3.

III. MULTIPLICITÉ DE $\mathrm{IND}_K^G(1)$:

3.1 Non multiplicité de certaines représentations

Les outils introduits en 1.4 et 2.3 permettent de démontrer :

Théorème 3.1 : Soient G un groupe de Lie, σ une involution de G, L un sous-groupe de Lie de G stable par σ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour une sous-variété Q de G (cf. 2.3) et c un caractère de G vérifiant l'égalité $\bar{c} = c \circ \sigma$ et la propriété (p) : $\forall q \in Q \quad c(q^\sigma q) \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit Π une représentation de G, admettant un vecteur cyclique a tel que $a \in (\mathcal{H}_\Pi^{-\infty})^{L,c}$ (par exemple, soit c' un caractère unitaire de L vérifiant l'égalité $\bar{c}' = c' \circ \sigma$ ainsi que la propriété (p), la représentation $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c')$ a un tel vecteur cyclique), alors Π est sans multiplicité.

Remarque : La représentation $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c')$ vérifie bien les hypothèses de ce théorème : soit $a = \delta$ le vecteur cyclique de cette représentation introduit en 1.2.3 exemple 1 ; on a $\delta \in (\mathcal{H}_\Pi^{-\infty})^{L,c}$ pour $c = c'^{-1}\chi^{1/2}$: en effet, soit v un vecteur C^∞ de cette représentation calculons, pour l dans L

$$\langle\Pi(l)\delta,v\rangle = \langle\delta,\Pi(l^{-1})v\rangle = v(l) = c'(l^{-1})\chi(l)^{1/2}\langle\delta,v\rangle \quad ;$$

ceci prouve que $\Pi(l)\delta = c(l)\delta$. Il est clair que, puisque c' vérifient l'égalité $\bar{c}' = c' \circ \sigma$ et la propriété (p), le caractère c vérifie aussi l'égalité $\bar{c} = c \circ \sigma$ et la propriété (p).

Démonstration : Pour A dans le commutant $\mathcal{C}(\Pi)$, notons T_A la fonction généralisée coefficient du couple (a,Aa) : $T_A = T^\Pi_{a,Aa}$.
Le lemme 1.3.1 donne les égalités, pour l dans L :

$$T_A \circ \lambda(l^{-1}) = T^\Pi_{a,\Pi(l)Aa} = \overline{c(l)}T_{a,Aa} = (c \circ \sigma)(l)T_A$$

$$\text{et} \quad T_A \circ \rho(l^{-1}) = T^\Pi_{\Pi(l)a,Aa} = c(l)T_A$$

On est dans les conditions de la proposition 2.3 avec $T = T_A$: en effet, $c \circ \sigma$ vérifie la propriété (p) car, pour q dans Q, on a $c \circ \sigma(q^\sigma q) = (c((q^{-1})^\sigma q^{-1}))^{-1}$ est dans $\mathbb{R}_+^*$). On a donc l'égalité :

$$T_A \circ J = T_A \circ \check{\sigma}$$

Pour A = Id, le lemme 1.3.1 donne alors l'égalité $T^{\Pi^\sigma}_{a,a} = T^{\bar\Pi}_{a,a}$; (Π^σ,a) et $(\bar\Pi,a)$ sont des représentations cycliques dont les coefficients sont égaux, elles sont donc équivalentes. Donc il existe un opérateur antiunitaire S de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $S_{-\infty}(a) = a$ et tel que, pour g dans G, on ait

$$\Pi(g) \circ S = S \circ \Pi(g^\sigma).$$

Pour A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, notons $A^S = S \circ A \circ S^{-1}$; A^S est dans $\mathcal{C}(\Pi)$ car, pour g dans G :

$$A^S \circ \Pi(g) = S \circ A \circ \Pi(g^\sigma) \circ S^{-1} = S \circ \Pi(g^\sigma) \circ A \circ S^{-1} = \Pi(g) \circ A^S.$$

L'application $A \to A^S$ est un automorphisme antilinéaire de $\mathcal{C}(\Pi)$: en effet, soient A et B dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et λ dans $\mathbb{C}$, on a

$$(\lambda A)^S = S \circ \lambda A \circ S^{-1} = \bar\lambda S \circ A \circ S^{-1} = \bar\lambda A^S \text{ et } (AB)^S = A^S B^S.$$

Pour A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, notons A^* l'adjoint de A ; l'application $A \to A^*$ est un antiautomorphisme antilinéaire de $\mathcal{C}(\Pi)$. Montrons que $T_{A^*} = T_{A^S}$; ceci résulte de l'égalité $T_A \circ J = T_A \circ \sigma$ et du lemme suivant appliqué à b = a.

<u>Lemme</u> : Pour tout b dans $\mathcal{H}_\Pi^{-\infty}$ et A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, on a les égalités

$$T^\Pi_{b,Ab} \circ J = \overline{T^\Pi_{b,A^*b}} \quad \text{et} \quad T^\Pi_{b,Ab} \circ \sigma = \overline{T^\Pi_{Sb,A^S(Sb)}}$$

<u>Démonstration</u> : Comme dans le lemme 1.3.1, il suffit de vérifier ces égalités lorsque b est dans $\mathcal{H}$; elles sont alors claires : pour g dans G, on a

$$(T^\Pi_{b,Ab} \circ J)(g) = \langle \Pi(g^{-1})b, Ab\rangle = \langle A^*b, \Pi(g)b\rangle = \overline{T^\Pi_{b,A^*b}(g)} \text{ et}$$

$$(T^\Pi_{b,Ab} \circ \sigma)(g) = \langle \Pi(g^\sigma)b, Ab\rangle = \overline{\langle S\Pi(g^\sigma)b, SAb\rangle} \text{ (car S est antiunitaire).}$$

$$= \overline{\langle \Pi(g)Sb, A^S Sb\rangle} = \overline{T^\Pi_{Sb,A^S(Sb)}}(g).$$

Pour finir la démonstration du théorème 3.1, il suffit de montrer que l'application de $\mathcal{C}(\Pi)$ dans $\mathcal{F}(G)$ qui à A associe T_A est injective : l'égalité $T_{A^*} = T_{A^S}$ prouvera que $A^* = A^S$; l'automorphisme

$A \to A^S$ et l'antiautomorphisme $A \to A^*$ coïncideront ; $\mathcal{C}(\Pi)$ sera commutatif.

Pour montrer cette injectivité, supposons que A dans $\mathcal{C}(\Pi)$ vérifie $T_A = 0$. Donc $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(g)$ $<\Pi(\mu)a,Aa> = 0$; on en déduit que pour g dans G et ν dans $\mathcal{M}_c^\infty(G)$ on a $<a,\Pi(g)\Pi(\nu)Aa> = 0$; comme a est cyclique, on en déduit $\Pi(\nu)Aa = 0$ puis $Aa = 0$. Soit alors v dans $\mathcal{H}^\infty$, on a pour g dans G, $<a,\Pi(g)A^*v> = <Aa,\Pi(g)v> = 0$. Donc comme a est cyclique, on obtient $A^*v = 0$: A^* est nul sur $\mathcal{H}^\infty$ qui est dense dans $\mathcal{H}$, donc $A^* = 0$ et $A = 0$. Ceci prouve l'injectivité et achève la démonstration du théorème 3.1.

3.2 Applications

Nous pouvons appliquer ce résultat aux diverses situations étudiées en 2.4.

3.2.1 Voici la principale application du théorème 3.1.

Corollaire 3.2.1 : Soit G un groupe de Lie exponentiel et H l'ensemble des points fixes d'une involution de G;alors la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité (1 désigne le caractère trivial de H).

Démonstration : Cette situation décrite en 2.4.1 permet d'appliquer le théorème 3.1 avec L = K.

Pour le cas $(G \times G,\Delta)$, voir en 4.2.

3.2.2 Soient G un groupe fini, σ une involution de G et K un sous-groupe de G_σ ; si, pour tout g dans G, $(g^\sigma)^{-1}$ est dans la double classe KgK (cf. 2.4.3), alors $\mathrm{Ind}_K^G(1)$ est sans multiplicité : on retrouve, à grand frais, un résultat bien connu ; celui-ci est encore vrai si G est seulement supposé compact.

3.2.3 Voici un autre résultat connu que l'on retrouve par cette méthode : Soit (G,K) un espace symétrique riemannien de type non compact (cf. 2.4.4), alors la représentation $\mathrm{Ind}_K^G(1)$ est sans multiplicité.

3.3 Exemples et contre-exemples

Il se peut que certaines hypothèses du théorème 3.1 soient superflues (par exemple, le fait que la multiplication $m : L \times Q \to G$ soit une submersion). Il faut cependant tenir compte des exemples suivants qui justifient, en partie, la lourdeur de ce théorème.

3.3.1 Soient G un groupe fini muni d'une involution σ, $H = G_\sigma$. Il se peut que la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ ait de la multiplicité. Ainsi, si $G = SL(2, \mathbb{F}_5)$ est le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans le corps à 5 éléments $\mathbb{F}_5$ et de déterminant 1, et si σ est l'involution qui, à une matrice, associe l'inverse de la transposée de celle-ci, alors il existe une représentation irréductible de G qui intervient dans $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ avec multiplicité 3.

3.3.2 Voici un contre-exemple au corollaire 3.2.1 si on ne suppose pas que G a une algèbre de Lie exponentielle.

Prenons les notations de 2.2.1, et montrons que si on munit $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ de l'involution σ_2, et si $H = G_{\sigma_2}$, alors $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ a de la multiplicité : on peut, pour le montrer, opérer la désintégration de cette représentation en représentations unitaires irréductibles. Il apparait alors de la multiplicité 2. On peut aussi montrer directement que le commutant de cette représentation n'est pas commutatif.

Si on identifie $H\backslash G$ à P (c.f. 2.1) et P à $\mathbb{R}^2$ (grâce à $(t,0,y) \longleftrightarrow (t,y)$, on obtient une réalisation de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'action de G est donnée par : pour $g = (\theta,a,b)$ et f dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(g.f)(t,y) = f(t + \theta, y + a \sin t + b \cos t)$$

En appliquant une transformation de Fourier $\mathcal{F}_y$ par rapport à la seconde variable y, on obtient une nouvelle réalisation de cette représentation dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ avec, pour F dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(g.F)(t,\eta) = e^{i\eta(a \sin t + b \cos t)} F(t + \theta, \eta).$$

Avec pour convention : si f est dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathcal{F}_y(f))(t,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\eta} f(t,y)\,dy.$$

Considérons alors les deux opérateurs ϕ_1 et ϕ_2 de $L^2(\mathbb{R}^2)$ donnés par $\phi_1(F)(t,\eta) = F(t,\eta)1_{\{\eta > 0\}}(\eta)$ et $\phi_2(F)(t,\eta) = F(t+\pi,-\eta)$. On a $\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1$. ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent au commutant de Π mais ϕ_1 et ϕ_2 ne commutent pas. $\mathcal{C}(\Pi)$ n'est pas commutatif.

3.3.3 Par contre, en prenant encore $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $\sigma = \sigma_2$ mais $L = \{(k\pi,a,0)/a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\}$ et c un caractère de L constant sur la composante neutre H de L, on peut appliquer, grâce à 2.4.7 a), le théorème 3.1 et en déduire que $\mathrm{Ind}_L^G(c)$ est sans multiplicité.

Pour $\sigma = \sigma_1$ et $H = G_{\sigma_1}$, on peut, grâce à 2.4.5, déduire du théorème 3.1 que $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité.

3.3.4 Une étude analogue à la précédente, basée sur les exemples 2.2.2 et 2.4.7 b) prouverait que, pour $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $\sigma = \sigma_0$, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ a de la multiplicité, tandis que, pour $L = H \cup wH$ et c caractère de L égal à 1 sur la représentation H, la représentation $\mathrm{Ind}_L^G(c)$ est sans multiplicité.

3.3.5 Nous avons vu, dans les exemples précédents, le rôle joué par la propriété $\mathcal{P}$ dans le théorème 3.1. Mettons maintenant en évidence l'importance de l'égalité $\bar{c} = c \circ \sigma$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3$ l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 : c'est l'algèbre de Lie nilpotente de base X, Y, Z avec $[X,Z] = [Y,Z] = 0$ et $[X,Y] = Z$. Soit $G = H_3$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé. On peut identifier G à $\mathfrak{g}$ grâce à l'application exponentielle. On a alors :

$$G = \{(x,y,z)\ /\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \quad \text{et}$$

$$\exp(xX + yY + zZ) = (x,y,z).$$

La loi de groupe est donnée par

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x',\ y+y',\ z+z' + 1/2(xy'-yx')).$$

Soit $\sigma = \sigma_3$ l'involution de G donnée par $\sigma_3(x,y,z) = (-x,-y,z)$; l'ensemble des points fixes de σ est le centre de G : $H_3 = \{(0,0,z)\ /\ z \in \mathbb{R}\}$. Soit c_λ le caractère donné par

$c_\lambda((0,0,z)) = e^{i\lambda z}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). On n'a l'égalité $\overline{c_\lambda} = c_\lambda \circ \sigma$ que si $\lambda = 0$. On vérifie que $\mathrm{Ind}_H^G(c_\lambda)$ est de multiplicité infinie lorsque λ est non nul.

IV. DÉSINTÉGRATION DE $\mathrm{IND}_K^G(1)$:

4.1. Désintégration de certaines représentations

4.1.1 Nous nous proposons de donner des précisions sur la désintégration des représentations qui interviennent dans le théorème 3.1 ; pour cela, nous avons besoin d'un résultat de théorie de la mesure :

Lemme 4.1.1 : Soit $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré où $\mathcal{B}$ est une tribu à base dénombrable telle que tous les points de X sont mesurables et μ une mesure positive sur $(x,\mathcal{B})$. Supposons que $f : X \to X$ soit une application mesurable telle que, pour toute fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on ait

$$(\phi \circ f)(x) = \phi(x) \quad \mu\text{-presque partout,}$$

alors on a

$$f(x) = x \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Démonstration : Pour x dans X, notons $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}$ tels que $\{x,f(x)\} \cap B = \emptyset$ ou tels que $\{x,f(x)\} \subset B\}$. $\mathcal{B}_x$ est une tribu. Pour B dans $\mathcal{B}$, notons $X_B = (B \cap f^{-1}(B)) \cup (B^c \cap f^{-1}(B^c))$. En appliquant l'hypothèse à la fonction $\phi = 1_B$ caractéristique de B, on trouve que $1_{f^{-1}(B)}(x) = 1_B(x)$ μ-presque partout. Donc $\mu(X_B^c) = 0$.

Soient $(B_1,\ldots,B_n,\ldots)$ une base dénombrable de $\mathcal{B}$ et $X' = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{B_i}$, d'une part on a $\mu(X'^c) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_{B_i}^c) = 0$, d'autre part, si x est dans X', on a $\mathcal{B}_x \supset \{B_1,\ldots,B_n,\ldots\}$ et comme $\mathcal{B}_x$ est une tribu, on a $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}$. Puisque $\{x\}$ est mesurable, on a $\{x\} \subset \mathcal{B}_x$. On en déduit $\{x,f(x)\} \subset \{x\}$ et $\forall x \in X'$, $x = f(x)$. On obtient bien que $x = f(x)$ μ-presque partout.

4.1.2 Introduisons un ensemble dont la dimension est liée, au moins dans certains cas (c.f. [Ca] 3.4 et [Pe] IV), à la multiplicité de nos représentations induites par un principe de dualité dit de Frobenius.

Définition : Soient G un groupe de Lie, Π une représentation unitaire de G,L un sous-groupe de Lie de G et c un caractère de L ; on note $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\Pi})^{L,c}$ le sous-espace vectoriel des éléments a de $\mathcal{H}^{-\infty}_{\Pi}$ qui vérifient, pour tout l dans L, $\Pi(l)a = c(l)a$. Pour $c = 1$, caractère trivial de L, on note $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\Pi})^{L}$ pour $(\mathcal{H}^{-\infty})^{L,1}_{\Pi}$. Notons $\hat{G}$ le dual unitaire de G ; rappelons qu'une mesure sur $\hat{G}$ est dite standard, si elle est portée par un ensemble standard (i.e. un ensemble dont la structure borélienne est sous-jacente à une structure topologique d'espace polonais ; cf. [Ma 2] p. 138). On peut maintenant énoncer :

Théorème 4.1.2 : Reprenons les hypothèses du théorème 3.1 et supposons G séparable.

a) Il existe une mesure positive bornée m sur $\hat{G}$ portée par un ensemble standard E, un champ mesurable sur E $\zeta \to \rho(\zeta)$ de représentations irréductibles de G ($\rho(\zeta) \in \zeta$) d'espace H_ζ et un isomorphisme ϕ de $\mathcal{H}_\Pi$ sur $\int_E^{\oplus} H_\zeta \, dm(\zeta)$ qui transforme Π en $\int_E^{\oplus} \rho(\zeta) dm(\zeta)$. La classe de cette mesure m ne dépend que de Π. Cet isomorphisme transforme le commutant $\mathcal{C}(\Pi)$ en l'algèbre des opérateurs diagonaux.

b) $\zeta = \overline{\zeta^\sigma}$ m-presque partout.

c) Si on écrit $\phi_{-\infty}(a) = \int_E^{\oplus} a^\zeta \, dm(\zeta)$ (cf.[Pe] th. C et corol. C.1) $a^\zeta \in (H_\zeta^{-\infty})^{L,c}$ m-presque partout.

Démonstration :

Le a) est une conséquence directe de notre théorème 3.1 et du théorème 8.5.2 de [Di 2].

b) L'idée de la démonstration est d'utiliser pleinement l'égalité $A^* = A^S$, pour A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, qui nous a servi à démontrer le théorème de non multiplicité (cf. 3.1).

Soit f la bijection de $\hat{G}$ donnée par $f(\zeta) = \overline{\zeta^\sigma}$; f est un isomorphisme borélien. Quitte à remplacer E par $E \cup f(E)$ qui est standard, on peut supposer que $E = f(E)$. Pour simplifier l'écriture, identifions $\mathcal{H}_\Pi$ et $\int_E^{\oplus} H_\zeta \, dm(\zeta)$. Notons I_ζ l'identité de H_ζ, alors

(d'après a)) tout élément A du commutant $\mathcal{C}(\Pi)$ s'écrit
$A = \int_E^{\oplus} a(\zeta) I_\zeta \, dm(\zeta)$ où a est bien déterminé comme élément de $L^\infty(E,m)$.
Réciproquement, toute fonction a de $L^\infty(E,m)$ définit un élément A de $\mathcal{C}(\Pi)$. Pour un tel élément A, on a

$$A^* = \int_E^{\oplus} \overline{a(\zeta)} I_\zeta dm(\zeta) \quad \text{([Di 1] p. 161 Prop. 3)}$$

Calculons A^S : rappelons que S est un isomorphisme anti-unitaire de $\mathcal{H}_\Pi$ qui vérifie $\forall g \in G$ $\Pi(g^\sigma) \circ S = S \circ \Pi(g)$ (cf. 3.1).
Soit $j_\zeta : H_\zeta \to H_{\overline{\zeta\sigma}}$ un champ mesurable sur E d'antiisomorphisme qui vérifient, pour g dans G, $(\rho(\overline{\zeta^\sigma})(g^\sigma)) \circ j_\zeta = j_\zeta \circ (\rho(\zeta)(g))$. Définissons S' isomorphisme antilinéaire de $\int_E^{\oplus} H_\zeta \, dm(\zeta)$ par

$$S'\left(\int_E^{\oplus} v(\zeta)dm(\zeta)\right) = \int_E^{\oplus} j_{\overline{\zeta^\sigma}}(v(\overline{\zeta^\sigma}))dm(\zeta).$$

S' vérifie alors $\forall g \in G$ $\Pi(g^\sigma) \circ S' = S' \circ \Pi(g)$.

En effet
$$\begin{aligned}(\Pi(g^\sigma) \circ S')\left(\int_E^{\oplus} v(\zeta)dm(\zeta)\right) &= \int_E^{\oplus} (\rho(\zeta)(g^\sigma))(j_{\overline{\zeta^\sigma}}(v(\overline{\zeta^\sigma})))dm(\zeta)\\ &= \int_E^{\oplus} j_{\overline{\zeta^\sigma}}(\rho(\overline{\zeta^\sigma})(g)v(\overline{\zeta^\sigma}))dm(\zeta)\\ &= (S' \circ \Pi(g))\left(\int_E^{\oplus} v(\zeta)dm(\zeta)\right)\end{aligned}$$

Donc l'application $S^{-1} \circ S'$ est linéaire et commute à Π .
Comme le commutant de Π est commutatif, on a

$$A \circ (S^{-1} \circ S') = (S^{-1} \circ S') \circ A ,$$

on en déduit que
$$A^S = S \circ A \circ S^{-1} = S' \circ A \circ S'^{-1} .$$

Remarquons que

$$S'^{-1}\left(\int_E^{\oplus} v(\zeta)dm(\zeta)\right) = \int_E^{\oplus} j_\zeta^{-1}(v(\overline{\zeta^\sigma}))dm(\zeta) ;$$

Donc
$$\begin{aligned}A^S\left(\int_E^{\oplus} v(\zeta)dm(\zeta)\right) &= \int_E^{\oplus} j_{\overline{\zeta^\sigma}}(a(\overline{\zeta^\sigma})(j_{\overline{\zeta^\sigma}})^{-1}(v(\zeta)))dm(\zeta)\\ &= \int_E^{\oplus} \overline{a(\overline{\zeta^\sigma})} v(\zeta)dm(\zeta) \quad (j_{\overline{\zeta^\sigma}} \text{ est antilinéaire}).\end{aligned}$$

ceci prouve que
$$A^S = \int_E^{\oplus} \overline{a(\overline{\zeta^\sigma})} \, I_\zeta \, dm(\zeta).$$

L'égalité $A^* = A^S$ et les formules obtenues pour ces deux opérateurs permettent d'affirmer que, pour a dans $L^\infty(E,m)$, on a $a(\zeta) = a(\overline{\zeta^\sigma})$ m-presque partout. Soit $\mathfrak{B}$ la trace sur E de la tribu de Mackey ; $(E,\mathfrak{B})$ est standard donc à base dénombrable ; tout point de E est mesurable (cf. [Di 2] Prop. 3.8.4.). On peut donc appliquer le lemme 4.1.1 à cette situation. On en déduit que $\zeta = \overline{\zeta^\sigma}$ m-presque partout dans E, et comme $m(E^c) = 0$ on a $\zeta = \overline{\zeta^\sigma}$ m-presque partout.

c) D'après [Pe] Corol. C1, a se désintègre de façon "unique" sous la forme $a = \int_E^\oplus a^\zeta dm(\zeta)$. Soit l dans L, l'égalité $\Pi(l)a = c(l)a$ implique que $(\rho(\zeta))(l)a^\zeta = c(l)a^\zeta$ m-presque partout. Soit alors $l_1,\dots,l_n,\dots$ une suite dense dans L et $N_1,\dots,N_n,\dots$ des ensembles m-négligeables en dehors desquels on a l'égalité $(\rho(\zeta))(l_n)a^\zeta = c(l_n)a^\zeta$; soit $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$, N est m-négligeable et, pour ζ en dehors de N, on a, pour tout entier n $(\rho(\zeta))(l_n)a^\zeta = c(l_n)a^\zeta$; par densité, on en déduit que a^ζ est dans $(H_\zeta^{-\infty})^{L,c}$.

4.2 Applications

Le théorème 4.1.2 s'applique bien sûr à tous les exemples étudiés en 3.2. Nous ne les reprenons pas tous en détail. Voici un résultat bien connu, dû à I.E. Segal et R. Godement (cf. [Di 2] § 18.7.7 et [Du] §2) que notre théorème permet de retrouver :

Soient G un groupe de Lie séparable, Z un sous-groupe fermé du centre de G,c un caractère unitaire de Z et $\mu_{G,Z}$ une mesure G-invariante sur G/Z (i.e. une mesure de Haar sur G/Z). On définit les représentations régulières gauche et droite λ_c et ρ_c de G dans $L^2(G,Z,c)$ de la manière suivante : Pour ϕ dans $L^2(G,Z,c)$ et x et g dans G

$$(\lambda_c(x)\phi)(g) = \phi(x^{-1}g) \quad \text{et} \quad (\rho_c(x)\phi)(g) = \Delta_G(x)^{1/2}\phi(gx).$$

Considérons la représentation $\lambda_c \otimes \rho_c$ du groupe G × G dans $L^2(G,Z,c)$: pour x et y dans G on a $(\lambda_c \otimes \rho_c)(x,y) = \lambda_c(x)\rho_c(y)$. Soit σ l'involution de G × G donnée par $\sigma((x,y)) = (y,x)$.

Corollaire 4.2 :

a) $\lambda_c \circledast \rho_c$ est une représentation de $G \times G$ sans multiplicité.

b) Il existe une mesure positive bornée standard μ sur $\widehat{G \times G}$ telle que $\lambda_c \circledast \rho_c$ soit dans la classe $\int^{\oplus}_{\widehat{G \times G}} \zeta \, d\mu(\zeta)$. La classe de la mesure μ est déterminée de façon unique par cette propriété. On a $\zeta = \overline{\zeta^{\sigma}}$ μ-presque partout.

c) Si G est de type I, il existe une mesure positive bornée (standard) ν sur $\hat{G}$ telle que $\lambda_c \circledast \rho_c$ soit dans la classe $\int^{\oplus}_{\hat{G}} \xi \circledast \overline{\xi} \, d\nu(\xi)$. La classe de la mesure ν est déterminée de façon unique par cette propriété.

Démonstration :

Soient Δ la diagonale de $G \times G$ et c' le caractère de $L = \Delta(Z \times Z)$ donné par $c'((x,y)) = c(xy^{-1})$; on vérifie que les représentations de $G \times G$ $\lambda_c \circledast \rho_c$ et $\mathrm{Ind}_L^{G \times G}(c')$sont équivalentes.Le sous-groupe L vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec la sous-variété $Q = G \times \{e\}$; le caractère c' restreint à L vérifie la propriété (p) du théorème 3.1 car $c'|_{\Delta} \equiv 1$; on est donc dans les conditions d'application des théorèmes 3.1 et 4.1.2. On en déduit les affirmations a) et b).

Si G est de type I, on a un isomorphisme borélien de $\hat{G} \times \hat{G}$ sur $\widehat{G \times G}$ donné par $(\xi,\eta) \to \xi \circledast \eta$ pour ξ et η dans $\hat{G}$. On a $(\xi \circledast \eta)^{\sigma} = \eta \circledast \xi$ et $\overline{\xi \circledast \eta} = \overline{\xi} \circledast \overline{\eta}$. Donc si $\zeta = \xi \circledast \eta$ est dans $\widehat{G \times G}$ et vérifie $\zeta^{\sigma} = \overline{\zeta}$, on a $\zeta = \xi \circledast \overline{\xi}$. Le c) est une conséquence du b) et cette remarque.

4.3 Espaces symétriques exponentiels

Dans ce paragraphe G désigne un groupe de Lie exponentiel (donc connexe et simplement connexe), σ une involution de G. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}$, H, P sont comme en 1.1. Notons 1 le caractère trivial de H.

4.3.1 Rappelons dans ce cas la description du dual unitaire $\hat{G}$ de G : le groupe G agit dans $\mathfrak{g}^*$, dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, par l'action coadjointe. Soit f dans $\mathfrak{g}^*$, on choisit $\mathfrak{b}^*$ polarisation réelle en f vérifiant la condition de Pukanszky. Soient B le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et ρ le caractère de B tel que $d\rho = if|_{\mathfrak{b}}$, alors la représentation unitaire $\mathrm{Ind}_B^G(\rho)$ est irréductible; sa classe dans $\hat{G}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$, elle ne dépend que de l'orbite $\Omega = Gf$ de f dans $\mathfrak{g}^*$. On construit donc ainsi une application $\theta : G\backslash\mathfrak{g}^* \to \hat{G}$. Cette application est une bijection qui respecte les structures boréliennes (cf. [Be] Chap. 6).

Notons ${}^t\sigma$ l'involution de $\mathfrak{g}^*$ transposée de l'involution σ de $\mathfrak{g}$. On vérifie alors aisément que, si Ω est une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, alors $\Omega^\sigma = {}^t\sigma(\Omega)$ et $-\Omega$ sont des G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ et que $\theta(\Omega^\sigma) = (\theta(\Omega))^\sigma$ et $\theta(-\Omega) = \overline{\theta(\Omega)}$. On déduit du théorème 4.1.2 qu'il existe une mesure positive m' sur $G\backslash\mathfrak{g}^*$ telle que $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ soit dans la classe $\int^\oplus_{G\backslash\mathfrak{g}^*} \theta(\Omega)dm'(\Omega)$ et on a m'-presque partout $\Omega = -{}^t\sigma(\Omega)$. Nous nous intéressons donc aux orbites stables par $-{}^t\sigma$. Rappelons que l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$ s'identifie à $\mathfrak{p}^*$ car $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. La restriction de l'action coadjointe à H laisse stable $\mathfrak{h}^\perp$ et s'identifie alors à l'action contragrédiente de l'action de H dans $\mathfrak{p}$.

<u>Lemme 4.3.1</u> : Avec les notations précédentes (en particulier G est exponentiel),

a) si Ω est une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, on a équivalence entre i) $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$ et ii) $\Omega^\sigma = -\Omega$;

b) pour f dans $\mathfrak{h}^\perp$, on a $Gf \cap \mathfrak{h}^\perp = Hf$;

c) par passage au quotient de l'injection de $\mathfrak{h}^\perp$ dans $\mathfrak{g}^*$, on obtient une application $j : H\backslash\mathfrak{h}^\perp \to G\backslash\mathfrak{g}^*$; l'image de j est l'ensemble des orbites de $\mathfrak{g}^*$ vérifiant ii) ;

d) notons $(\hat{G})_\sigma = \{\zeta \in \hat{G} / \overline{\zeta^\sigma} = \zeta\}$ et pour ω dans $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$, notons $\zeta_\omega = \theta(j(\omega))$; l'application $\omega \mapsto \zeta_\omega$ est une bijection de $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ sur $(\hat{G})_\sigma$ qui respecte les structures boréliennes.

<u>Démonstration</u> :

a) Si f est dans $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$ alors on a $f = -{}^t\sigma(f)$ donc Ω et $-\Omega^\sigma$ sont deux orbites qui ont un point commun : elles sont égales.

Réciproquement, si Ω est une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ qui vérifie $\Omega = -\Omega^\sigma$, $(-{}^t\sigma)$ est un difféomorphisme d'ordre deux de Ω. Or Ω est difféomorphe à $\mathbb{R}^p$, pour un certain p([Be] Chap. 1.3.5). On peut alors appliquer le résultat suivant : "Soit s un difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$, alors il existe un point m de $\mathbb{R}^p$ tel que $s(m) = m$ ([Se] p.10)".

Donc il existe f dans Ω tel que $f = -{}^t\sigma(f)$ et on a $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$.

b) Il est clair que, pour f dans $\mathfrak{h}^\perp$, on a $Hf \subset Gf \cap \mathfrak{h}^\perp$. Soit f' dans $Gf \cap \mathfrak{h}^\perp$, on a $f' = g.f$ ($g \in G$), $-{}^t\sigma(f) = f$ et $-{}^t\sigma(f') = f'$. Donc ${}^t\sigma(f') = g.{}^t\sigma(f)$ et on a $f' = g^\sigma.f$. Ecrivons grâce à la proposition 1.2 $g = h \exp X$ avec h dans H et X dans $\mathfrak{p}$, on obtient alors les égalités $f' = h \exp X.f = h \exp(-X).f$ puis $\exp(2X).f = f$. Donc, $\exp(2X)$ est dans le stabilisateur $G(f)$ de f. On en déduit que 2X est dans le stabilisateur $\mathfrak{g}(f)$ de f dans $\mathfrak{g}$, car $G(f) = \exp(\mathfrak{g}(f))$ ([Be] Chap. 1.3.3). Donc X est dans $\mathfrak{g}(f)$ et $\exp(X)$ est dans $G(f)$: $\exp X.f = f$. On en déduit que $f' = h.f \in Hf$.

c) La partie b) de ce lemme exprime l'injectivité de l'application j. La partie a) décrit l'image de j.

d) C'est une conséquence de c) et du début de ce paragraphe.

<u>Corollaire</u> : Soit ρ une représentation unitaire irréductible d'un groupe exponentiel G , alors ρ est équivalente à $\bar{\rho}$ si et seulement si ρ est le caractère trivial de G.

<u>Démonstration</u> : La représentation ρ est l'image par θ d'une orbite Ω qui vérifie $\Omega = -\Omega$; on applique le a) du lemme pour $\sigma = \mathrm{Id}$ et on trouve que 0 est dans Ω. Donc $\Omega = \{0\}$.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse "G exponentiel" n'est pas superflue pour ce lemme :

Pour $G = SU(2)$ et $\sigma = \mathrm{Id}$, toutes les orbites de la représentation co-adjointe (qui en général sont des sphères) vérifient ii), mais seule l'orbite $\{0\}$ vérifie i).

Pour $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $\sigma = \sigma_2$ comme en 2.2.1, le b) n'est pas vrai. En effet, soit T^*, X^*, Y^* la base duale dans $\mathfrak{g}^*$ de la base T, X, Y de $\mathfrak{g}$ (cf. 2.2.1). Un petit calcul donne pour l'action coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ la formule :

$$\forall g = (\theta,a,b) \in G \qquad \forall f = tT^* + xX^* + yY^* \in \mathfrak{g}$$

$$Ad^*(g^{-1})(f) = (t+xb-ya)T^* + (x\cos\theta + y\sin\theta)X^* + (-x\sin\theta + y\cos\theta)Y .$$

Donc les orbites de la représentation coadjointe sont, d'une part les points de la droite $(0,T^*)$, d'autre part les cylindres d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$. L'orthogonal de $\mathfrak{h}$ est le plan engendré par T^* et Y^*. Si l'orbite Ω est un cylindre, son intersection avec $\mathfrak{h}^\perp$ a deux composantes connexes alors que H est connexe. On ne peut avoir b).

4.3.2 Nous pouvons maintenant énoncer

Théorème 4.3.2 : (Avec les notations de 4.3.1 ; G est un groupe exponentiel et σ une involution de G) Il existe une mesure positive ν sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ telle que la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ soit équivalente à $\int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\bullet} \zeta_\omega d\nu(\omega)$. La classe de la mesure ν est bien déterminée par cette propriété.

Démonstration : C'est une conséquence directe de 4.3.1 : ν est l'image réciproque de m' par l'application j.

Remarques : On pourra rapprocher ce résultat de [Gr] et de [Bu] ; ce qui est nouveau est l'absence de multiplicité.

Si G est nilpotent, la classe de la mesure ν est l'image par la projection de $\mathfrak{h}^\perp$ sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ de la classe de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$. En effet, la proposition 2 de [Gr] est valable quand G est nilpotent même si H n'est pas distingué : si ν' est l'image dans $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ d'une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est quasi-équivalente à $\int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\bullet} \zeta_\omega \, d\nu'(\omega)$. Or ces deux représentations sont sans multiplicité (Théorème 3.1). Elles sont donc équivalentes ([Di 2] Prop. 5.4.6).

4.4 L'ESPACE $(\mathcal{H}_\Pi^{-\infty})^{H,c}$

Proposition 4.4.1 : Soient G un groupe de Lie, σ une involution de G, L un sous-groupe de Lie de G stable par σ, vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ pour une sous-variété Q (cf. 2.3) et c un caractère de L vérifiant : $\forall q \in Q \quad c(q^\sigma q) \in \mathbb{R}_+^*$ (p). Soit π une représentation unitaire irréductible de G d'espace $\mathcal{H}_\pi$; alors

a) $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c})\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}) \leq 1$ (avec la convention $0\infty = 0$) et si on a égalité, $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes.

b) Si $\bar{\pi}$ est équivalente à π^σ, alors $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1$.

Démonstration : On peut supposer qu'il existe des éléments non nuls a et b dans $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}$ et $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$, sinon il n'y a rien à démontrer. Soit alors $T^\pi_{a,b}$ le coefficient du couple (a,b) ; le lemme 1.3.1 donne les égalités, pour l dans L,

$$T^\pi_{a,b} \circ \lambda(l^{-1}) = T^\pi_{a,\pi(l)b} = c(l^\sigma)T_{a,b}$$

et

$$T^\pi_{a,b} \circ \rho(l^{-1}) = T^\pi_{\pi(l)a,b} = c(l)T^\pi_{a,b}.$$

On est exactement dans les conditions de la proposition 2.3 avec $T = T^\pi_{a,b}$. Donc

$$T^\pi_{a,b} \circ \sigma = T^\pi_{a,b} \circ J.$$

On applique de nouveau le lemme 1.3.1 qui donne

$$T^{\pi^\sigma}_{a,b} = T^{\bar{\pi}}_{b,a} .$$

Le lemme 1.3.2 prouve alors que $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes. En outre, si A est un opérateur d'entrelacement de $\bar{\pi}$ et π^σ, a est colinéaire à $A_{-\infty}(b)$; ceci prouve que $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1$. De même $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}) \leq 1$.

b) Si $\bar{\pi}$ est équivalente à π^σ, on peut trouver une application antiunitaire A de $\mathcal{H}_\pi$ dans lui-même telle que, pour tout g dans G, on a $\pi(g) \circ A = A \circ \pi(g^\sigma)$. Elle se prolonge en un opérateur $A_{-\infty}$ de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$. Montrons que $A_{-\infty}$ induit une bijection de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}$ sur $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$: en effet, si a est dans $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}$, on a, pour tout l dans L,

$$\pi(l)A_{-\infty}(a) = A_{-\infty}(\pi(l^\sigma)a) = A_{-\infty}(c^\sigma(l)a) = \bar{c}^\sigma(l)A_{-\infty}(a) ;$$

d'où $A_{-\infty}(a) \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$; on a donc
$A_{-\infty}((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \subset (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$; la propriété cherchée s'en déduit, en utilisant l'opérateur $(A_{-\infty})^{-1} = (A^{-1})_{-\infty}$. Donc
$\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) = \dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma})$ et, avec a), on conclut

$$\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1.$$

Corollaire 4.4.2. : Soient G un groupe de Lie exponentiel, σ une involution de G, $H = G_\sigma$ l'ensemble des points fixes de σ et c un caractère de H à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit π une représentation unitaire irréductible de G. Alors

a) $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}) = 0$ ou 1.

b) Si $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}) = 1$, alors $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes.

Démonstration : D'après 2.4.1, le sous-groupe H vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et le caractère c la propriété (p). On peut donc appliquer la proposition 4.4.1 (a)) ; or, $c = \bar{c}^\sigma$, on a donc $(\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}))^2 \leq 1$ on en déduit $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}) \leq 1$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes.

4.5 EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

4.5.1 Si c n'est pas un caractère à valeurs réelles, mais si $\bar{\pi}$ est équivalente à π^σ , on a encore l'inégalité $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1$ (cf. b) de la proposition 4.4.1).

Par contre, si c n'est pas à valeurs réelles et si $\bar{\pi}$ n'est pas équivalente à π^σ, cette inégalité peut être mise en défaut comme le prouve l'exemple suivant :

Reprenons les notations de 3.3.5 : $G = H_3$ est muni de l'involution σ_3. Rappelons la description du dual unitaire $\hat{G}$ de G. D'un point de vue ensembliste, on a :

$\hat{G} = \{\pi_\lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\pi_{\alpha,\beta} \ / \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Chacune des classes est donnée par un représentant :

1) π_λ est la représentation dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ dont l'action est donnée par

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad ((\pi_\lambda(x,y,z))f)(t) = e^{i\lambda(z-yt+ xy/2)}f(t-x)$$

2) $\pi_{\alpha,\beta}$ est la représentation d'espace $\mathbb{C}$:

$$\pi_{\alpha,\beta}(x,y,z) = e^{i\alpha x + i\beta y}.$$

On vérifie que, pour h dans H_3, on a $\pi_\lambda(h) = c_\lambda(h)\mathrm{Id}$; donc, pour tout λ dans $\mathbb{R}^*$,

$$(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\lambda})^{H_3,c_\lambda} = \mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\lambda} \text{ est de dimension infinie.}$$

4.5.2 Si G n'est pas un groupe exponentiel, la conclusion du corollaire peut être fausse. En voici un exemple : reprenons les notations de 2.2.1 ; soit $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ muni de l'involution σ_2 pour laquelle $H = H_2 = \{(0,a,0)/a \in \mathbb{R}\}$. La théorie de Mackey, appliquée au sous-groupe distingué $N = \{(0,a,b)/a,b \in \mathbb{R}\}$ des translations, permet de décrire le dual unitaire $\hat{G}$ de G.

D'un point de vue ensembliste on a

$$\hat{G} = \{\hat{\pi}_\lambda \;/\lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\hat{\pi}_{R,\alpha} \;/\; \alpha \in [0,1[\text{ et } R \in]0,\infty[\;\}.$$

Chacune des classes est donnée par un représentant :

1) π_λ est la représentation d'espace $\mathbb{C}$: $\pi_\lambda((\theta,a,b)) = e^{i\lambda\theta}$.

2) $\pi_{R,\alpha}$ est une représentation d'espace $L^2(T)$, où $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est muni de la mesure $\frac{dt}{2\pi}$. L'action est donnée par, pour ϕ dans $L^2(T)$ et t dans T,

$$(\pi_{R,\alpha}((\theta,a,b))(\phi))(t) = e^{-i(a\cos t + b\sin t)R}\, e^{-i\alpha\theta}\, (t+\dot{\theta}).$$

On a bien $\dim((\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\lambda})^H) = 1$ mais $\dim((\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{R,\alpha}})^H) = 2$.

Par contre, pour $\sigma = \sigma_1$ et $H = H_1$, les conclusions de ce corollaire sont vraies (cf. 2.4.5).

BIBLIOGRAPHIE

[B1] Y. BENOIST - Espaces symétriques exponentiels, Thèse de 3ème cycle Paris VII (1983).

[B2] Y. BENOIST - Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, C.R.A.S. Paris. 296 Série A (1983), p. 489-492.

[Be] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAHAS, M. RAIS, P. RENOUARD, M. VERGNE - Représentations des groupes de Lie résolubles, Mono. Soc. Math. Fr. n° 4, Dunod, Paris (1972).

[Br] F. BRUHAT - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. Fr. 84 (1956), p. 97-205.

[Bu] I.K. BUSYATSKAYA - Représentations of exponential Lie groups, Funct. Anal. & Applic. 7 (1975), p. 151-152.

[Ca] P. CARTIER - Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, Lect. Notes in Math. 514, Springer (1975), p. 20-34.

[Di 1] J. DIXMIER - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[Di 2] J. DIXMIER - Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris (1964).

[Du] M. DUFLO, M. RAIS - Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 9, 4e série, (1976), p. 107-144.

[Gr] G. GRELEAU - Désintégration de représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, C.R.A.S. Paris 277 série A (1973), p. 327-330.

[He] S. HELGASON - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York (1978).

[Ma 1] G. W. MACKEY - Induced representations of locally compact groups II, Ann. Math. 58 (1953), p. 193-221.

[Ma 2] G. W. MACKEY - Borel structure on groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), p. 134-165.

[Lo] O. LOOS - Symmetric spaces I, Benjamin, New York (1969).

[Pe] R. PENNEY - Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, Journ. Funct. Anal. 18 (1975), p. 177-190.

[Po] N.S. POULSEN - On C^∞-vectors and intertwinning bilinear forms for representations of Lie groups, Journ. Funct. Anal. 9 (1972), p. 87-120.

[Sc] L.SCHWARTZ - Sous-espaces hibertiens et noyaux associés ; applications aux représentations des groupes de Lie, 2e coll. sur l'analyse fonctionnelle, Liège (1964), p. 153-163.

[Se] J.P. SERRE - Espaces avec groupe d'opérateurs, Sémin. H. Cartan, 3e année (1950-51), exposé n° 13.