PIERRE DELIGNE

Cycles de Hodge absolus et périodes des intégrales des variétés abéliennes. (Rédigé par J. L. Brylinski)

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 2 (1980), p. 23-33

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_2__23_0>

SOCIETÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
2e série, Mémoire n° 2, 1980, p. 23-33

CYCLES DE HODGE ABSOLUS ET PÉRIODES DES INTÉGRALES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par

Pierre DELIGNE
rédigé par J. L. BRYLINSKI

On montre ici comment une théorie convenable des "motifs" permet de retrouver certains des résultats de Shimura sur les périodes des variétés abéliennes de type C-M [5]. Il a paru instructif de commencer par une description informelle des propriétés des motifs et de leurs réalisations : c'est ce qui est fait au paragraphe 1. Le paragraphe 2 interprète certains résultats de Shimura à l'aide de motifs. Le paragraphe 3 définit les cycles de Hodge absolus, et la théorie des motifs qui leur est subordonnée. Le paragraphe 4 donne une majoration du degré de transcendance du corps engendré par les périodes d'une variété abélienne quelconque.

§ 1. LE LANGAGE DES MOTIFS

Soit k un corps de caractéristique 0. Il existe des "motifs sur k" plusieurs définitions, dont on ignore si elles sont équivalentes, et ayant chacune leurs vertus. Nous préciserons au paragraphe 3 laquelle nous est utile.

Les motifs sur k forment une catégorie additive, munie d'un produit tensoriel. Chaque variété projective et lisse X sur k définit un motif h(X) sur k, la cohomologie motivique de X, et tout motif sur k se déduit d'un motif de cette forme (par découpage en morceaux et twist à la Tate). Enfin, à diverses théories de cohomologie pour les variétés algébriques correspondent des foncteurs "réalisation" pour les motifs.

Chaque variété abélienne A sur k définit un motif T(A) sur k, son H_1 motivique, et le foncteur $A \mapsto T(A)$ est pleinement fidèle. Plonger la catégorie des variétés abéliennes dans celle des motifs a pour intérêt de pouvoir prendre des $\otimes$. Mais les objets obtenus ne sont pas géométriques : il n'y a pas de "fonctions" sur un motif.

Le rang d'un motif est la dimension de l'une quelconque de ses réalisations, que nous allons maintenant décrire.

Si $k = \mathbb{C}$, la réalisation de Betti d'un motif M est un groupe abélien libre de rang fini $H_B(M)$, qui est muni d'une structure de Hodge, c'est-à-dire d'une décomposition :

$$H_B(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \quad (\text{avec } \bar{H}^{p,q} = H^{q,p}) .$$

Illustrons ceci sur le motif T(A), qui est le H_1 d'une variété abélienne A. On définit $H_B(T(A)) = H_1(A,\mathbb{Z})$, homologie de $A = A(\mathbb{C})$ vu comme espace topologique. Soit Lie (A) l'algèbre de Lie du groupe analytique A, et soit $\int : H_1(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Lie}(A)$ l'homomorphisme "intégration sur un 1-cycle". On a une suite exacte de groupes analytiques complexes :

$$0 \longrightarrow H_1(A,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\int} \mathrm{Lie}\ (A) \xrightarrow{\exp} A \longrightarrow 0$$

La structure de Hodge de $H_1(A,\mathbb{C})$ est telle que $H_1(A,\mathbb{C}) = H^{0,-1} \oplus H^{-1,0}$. On obtient $H^{0,-1}$ comme noyau de l'application $H_1(A,\mathbb{C}) \to \mathrm{Lie}\ (A)$, prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de

$\int : H_1(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Lie}(A)$.

Plaçons-nous maintenant sur un corps de caractéristique 0 et donnons-nous une clôture algébrique $\bar{k}$ de k.. Pour tout nombre premier ℓ, la <u>réalisation ℓ-adique</u> d'un motif M est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de type fini $H_\ell(M)$ (muni d'ailleurs d'une action du groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k). Lorsque $k = \mathbb{C}$, on dispose d'un isomorphisme : $H_\ell(M) \cong H_B(M) \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Si A est une variété abélienne sur k, si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, la réalisation ℓ-adique de T(A) est notée $T_\ell(A)$; c'est le $\mathbb{Z}_\ell$-module :

$$T_\ell(A) = \varprojlim_n A_{\ell^n}(\bar{k}) \quad \text{(où } A_{\ell^n}(\bar{k}) \text{ est le groupe des points d'ordre } \ell^n \text{ de } A(\bar{k})\text{)}.$$

Si $k = \mathbb{C}$, l'isomorphisme $T_\ell(A) \cong H_B(T(A)) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est facile à décrire. Pour tout n, la projection de $\gamma \otimes x \in H_B(T(A)) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ sur $A_{\ell^n}(\mathbb{C})$ se calcule ainsi ; si $m \in H_B(T(A))$ est tel que $x - m \in \ell^n(H_B(T(A)) \otimes \mathbb{Z}_\ell)$, l'exponentielle de l'élément $\frac{m}{\ell^n} \in H_1(A,\mathbb{Q})$ est le point d'ordre ℓ^n voulu.

La <u>réalisation de De Rham</u> de M est un espace vectoriel sur k de dimension finie $H_{DR}(M)$, muni d'une filtration décroissante $F^\bullet$(la <u>filtration de Hodge</u>). Lorsque $k = \mathbb{C}$, on a un isomorphisme $H_B(M) \otimes \mathbb{C} \simeq H_{DR}(M)$. Par cet isomorphisme, la filtration de Hodge est telle que $F^p = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q}$. Dans le cas du motif T(A), rappelons [7] l'existence d'une "extension universelle" E de A par un groupe vectoriel, qui s'inscrit dans une suite exacte de groupes algébriques : $0 \to H^1(A,\mathcal{O}_A)^* \to E \to A \to 0$. On a $H_{DR}(T(A) = \mathrm{Lie}(E)$, et la filtration de Hodge est donnée par :

$$0 = F^1 \subset F^0 = H^1(A,\mathcal{O}_A)^* \subset F^{-1} = \mathrm{Lie}(E)$$

Si $k = \mathbb{C}$, on a $H_1(E,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_1(A,\mathbb{Z})$, d'où un morphisme :

$H_1(A,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_1(E,\mathbb{C}) \xrightarrow{\int} \mathrm{Lie}(E) = H_{DR}(T(A))$. C'est l'isomorphisme voulu.

Exemples : 1) Ici, $k = \mathbb{Q}$. On va définir le motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$; c'est le H_1 du groupe algébrique $\mathbb{G}_m$. Pour trouver ses diverses réalisations, on substitue $\mathbb{G}_m$ à A dans la définition de T(A). On obtient :

- $H_B(\mathbb{Z}(1)) = 2\pi i.\mathbb{Z}$, noyau de $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

  $H_B(\mathbb{Z}(1)) \otimes \mathbb{C} = H^{-1,-1}$
- $H_\ell(\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Z}_\ell(1) = T_\ell(\mathbb{G}_m) = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}(\bar{\mathbb{Q}})$
- $H_{DR}(\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Q}$.

L'isomorphisme $H_B(\mathbb{Z}(1)) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\approx} H_{DR}(\mathbb{Z}(1)) \otimes \mathbb{C}$ envoie $(2\pi i) \otimes 1$ sur $2\pi i$. On rappelle les isomorphismes $H_1(\mathbb{G}_m) \cong H_1(\mathbb{P}^1 - \{0,\infty\}) \cong H_2(\mathbb{P}^1)$. De plus , pour toute courbe algébrique propre lisse et connexe sur $\mathbb{Q}$, $H_2(X)$ est isomorphe à $H_2(\mathbb{P}^1)$ (donc à $\mathbb{Z}(1)$) .Pour tout entier d, on définit un motif $\mathbb{Z}(d)$ de sorte que $\mathbb{Z}(d) = \mathbb{Z}(d-1) \otimes \mathbb{Z}(1)$. On a $\mathbb{Z}(m+n) = \mathbb{Z}(m) \otimes \mathbb{Z}(n)$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$.

2) Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. Le motif T(E) est de rang 2. Donc le motif $\Lambda^2 T(E)$ est de rang 1, et on a $\Lambda^2 T(E) = \Lambda^2 H_1(E) = H_2(E) = \mathbb{Z}(1)$. Précisons l'isomorphisme $\Lambda^2 T(E) \cong \mathbb{Z}(1)$ dans les différentes réalisations. Sur $H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{R}) \simeq$ Lie (E), la structure complexe définit une orientation. Si (e_1,e_2) est une $\mathbb{Z}$-base orientée de $H_B(T(E)) = H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, alors $e_1 \wedge e_2$ est une base de $H_B(\Lambda^2 T(E))$; on lui associe $2\pi i \in H_B(\mathbb{Z}(1))$.

L'isomorphisme $\Lambda^2(T_\ell(E)) \cong \mathbb{Z}_\ell(1)$ est donné par la forme alternée de Weil [6] . Enfin, on a : $\Lambda^2 H_{DR}(T(E)) = \mathrm{Hom}(H^2_{DR}(E),\mathbb{Q})$. Soient ω et η les formes différentielles habituelles de première et deuxième espèce. $H^2_{DR}(E)$ est engendré par le cup-produit $\omega \wedge \eta$ de leurs classes de cohomologie. Par l'isomorphisme $H_B(\Lambda^2 T(E)) \otimes \mathbb{C} \to H_{DR}(\Lambda^2 T(E)) \otimes \mathbb{C}$, $e_1 \wedge e_2$ a pour image l'homomorphisme qui envoie $\omega \wedge \eta \in H^2_{DR}(E)$ sur $\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}$. La compatibilité des réalisations de Betti et de De Rham de l'isomorphisme $\Lambda^2(T(E)) \cong \mathbb{Z}(1)$ équivaut à la relation de Legendre

$$\omega_1 \cdot \eta_2 - \omega_2 \cdot \eta_1 = 2\pi i$$

3) Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$. A la classe de cohomologie d'une section hyperplane de A dans un plongement projectif, correspond un morphisme de motifs $\Lambda^2 T(A) \to \mathbb{Z}(1)$. En cohomologie de Betti, ceci correspond à une forme alternée $2\pi i.E$ sur $H_B T(A)$, à valeurs dans $2\pi i.\mathbb{Z}$. En cohomologie de De Rham, on a de même une forme alternée E_{DR} sur $H_{DR}(T(A))$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Il est classique que F^o est un sous-espace totalement isotrope. On en déduit qu'on peut trouver des différentielles de première espèce $\omega_1,\dots,\omega_g$ sur A, des différentielles de deuxième espèce $\eta_1,\dots,\eta_g$ sur A, telles que l'on ait :

$E_{DR}(x,y) = \sum_{i=1}^{g} (\omega_i,x)(\eta_i,y) - (\omega_i,y).(\eta_i,x)$. La compatibilité entre E et E_{DR} se traduit comme suit. Soit $(e_1,\dots,e_{2g})$ une base de $H_B(T(A))$, soit Ω la matrice $n \times 2n$ telle que $\Omega_{ij} = \int_{e_j} \omega_i$, et N la matrice $n \times 2n$ telle que $N_{ij} = \int_{e_j} \eta_i$. On a :

$$ {}^t N.\Omega - {}^t\Omega .N = 2i\pi .E \ . $$

Enfin, pour la réalisation ℓ-adique on trouve une forme alternée sur $T_\ell(A)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell(1)$: c'est la forme alternée de Weil associée au diviseur de la section hyperplane [6].

§ 2. MOTIFS LIÉS AUX VARIÉTÉS ABÉLIENNES DE TYPE C-M

Soit k un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}$ - par exemple $\bar{\mathbb{Q}}$- et soit $\mathcal{A}$ la sous-catégorie de la catégorie des motifs sur k, engendrée par les T(A) des variétés abéliennes (pour les opérations de produit tensoriel, passage au dual et facteurs directs). Le foncteur "réalisation de Betti de motif déduit de M/k par extension des scalaires à $\mathbb{C}$" envoie $\mathcal{A}$ dans la catégorie des structures de Hodge. Il résulte formellement du Théorème 1 du § 3 que ce foncteur est pleinement fidèle.

Soient E un corps CM, S l'ensemble de ces plongements complexes et $- : S \to S$ la conjugaison complexe. A chaque fonction $\varphi : S \to \mathbb{Z}$ vérifiant

$$(*) \quad \varphi(\sigma) + \varphi(\bar{\sigma}) \quad \text{est indépendant de} \quad \sigma \in S,$$

attachons une structure de Hodge H_φ, munie d'une structure de module sur l'anneau $\mathcal{O}_E$ des entiers de E :

$H_\varphi = \mathcal{O}_E$, muni de la structure de module évidente, et dans la décomposition $H_\varphi \otimes \mathbb{C} = E \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^S$, le facteur $\mathbb{C}$ d'indice $\sigma \in S$ est de type de Hodge $(\varphi(\sigma), \varphi(\bar{\sigma}))$.

On vérifie que les H_φ sont dans l'image de $\mathcal{A}$, et même dans l'image de la sous-catégorie engendrée par les variétés abéliennes de type CM. Ceci permet de définir le motif M_φ sur $\bar{\mathbb{Q}}$ comme étant celui de réalisation de Betti H_φ.

La réalisation de De Rham $H_{DR}(M_\varphi)$ est un espace vectoriel sur $\bar{\mathbb{Q}}$, muni d'une action de E. Pour tout $\sigma \in S$, soit $H_{DR}(M_\varphi)_\sigma$ le sous $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel sur lequel $x \in E$ agit comme $\sigma^{-1}(x) \in \bar{\mathbb{Q}}$. Chacun de ces espaces vectoriels est de dimension 1 engendré par un élément ω_σ, et $H_{DR}(M_\varphi)$ en est la somme. Via l'isomorphisme : $H_B(M_\varphi) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\approx} H_{DR}(M_\varphi) \otimes \mathbb{C}$, un élément e de $E = H_B(M_\varphi) \otimes \mathbb{Q}$ correspond à une famille (e_σ) avec $e_\sigma \in H_{DR}(M_\varphi)_\sigma$. On vérifie immédiatement que le nombre complexe $p(\sigma,\varphi)$ tel que $p(\sigma,\varphi).e_\sigma = \omega_\sigma$ ne dépend à multiplication près par $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, ni de e ni du choix de ω_σ. Ceci justifie la notation. Entre les $p(\sigma,\varphi)$ et les <u>invariants de Shimura</u> $p_E(\sigma,\varphi)$ (voir [5]), on a la relation :

$$p_E(\sigma,\varphi) = \frac{p(\sigma,\varphi)}{(2\pi i)^{\varphi(\sigma)}} \quad (\text{modulo } \bar{\mathbb{Q}}^\times)$$

(qui n'est qu'une traduction des définitions).

Les identités entre les périodes de Shimura, correspondent à des propriétés algébriques des motifs M. Avant de les résumer en un tableau, introduisons quelques notations relatives à une extension $F|E$ de corps CM. On note S_F (resp. S_E) l'ensemble des plongements complexes de F (resp. E). Pour $\sigma \in S_F$, on note $\sigma|E \in S_E$ la restriction à E du plongement σ.

Pour $\varphi : S_E \to \mathbb{Z}$ satisfaisant $(*)$, on note $\mathrm{Inf}(\varphi)$ la fonction de S_F vers $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Inf}(\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma|E)$. Cette fonction satisfait $(*)$. Pour $\varphi : S_F \to \mathbb{Z}$ satisfaisant $(*)$, on note $\mathrm{Res}(\varphi)$ la fonction de S_E vers $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Res}(\varphi)(\sigma) = \sum_{\tau|E=\sigma} (\tau)$; elle satisfait $(*)$.

Identités entre périodes	Relations entre motifs
1. $p(\sigma,\varphi'+\varphi'') = p(\sigma,\varphi').p(\sigma,\varphi'')$	1. $M_{\varphi'+\varphi''} = M_{\varphi'} \otimes_E M_{\varphi''}$
2. $F\|E$ extension de corps CM, $\sigma \in S_F$ $\varphi : S_E \to \mathbb{Z}$ satisfaisant $(*)$: $p(\sigma,\mathrm{Inf}(\varphi)) = p(\sigma\|E,\varphi)$	2. $M_{\mathrm{Inf}(\varphi)} = M_\varphi \otimes_E F$
3 $\sigma \in S_E$, $\varphi : S_F \to \mathbb{Z}$ satisfaisant $(*)$: $p(\sigma,\mathrm{Res}\,\varphi) = \prod_{\tau\|E=\sigma} p(\tau,\varphi)$	3. M_φ est un F-motif de rang 1, donc un E-motif de rang $d = [F:E]$ $M_{\mathrm{Res}(\varphi)} = \Lambda^d_E M_\varphi$
4. $p(\sigma,\underline{1}) = 2\pi i$	4. $M_{\underline{1}} = \mathbb{Z}(-1)$ (dual du motif de Tate)

Ces identités entre périodes permettent de retrouver les théorèmes 1 à 4 de l'exposé de Shimura [5]. Notons que dans [5] Shimura relie les périodes $p_K(\sigma,\varphi)$ aux valeurs en un point spécial de formes modulaires de Hilbert, rationnelles sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

§ 3. CYCLES DE HODGE ABSOLUS ET MOTIFS

Soit X une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$. Un <u>cycle de Hodge</u> de codimension d sur X est un élément de $H^{2d}(X,\mathbb{Q})$ de type (d,d), ou, ce qui revient au même, un élement de $H^{2d}(X,\mathbb{Q})(d) \underset{\mathrm{def}}{=} H^{2d}(X,\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Z}(d)$ de type $(0,0)$. Remarquons que pour $x \in H^{2d}(X,\mathbb{Q})(d)$, il est équivalent de dire que x est de type $(0,0)$ ou que x est dans F^0. Une classe de cohomologie d'une sous-variété algébrique de X est un cycle de Hodge. Hodge a conjecturé que tout cycle de Hodge serait combinaison linéaire de classes de cohomologie de sous-variétés. Cette conjecture paraissant inaccessible, on introduit une notion qui "arithmétise" celle de cycle de Hodge. Les cycles qu'on définit auront tous les attributs visibles des cycles algébriques, à savoir des réalisations en cohomologie ℓ-adiques et de De Rham. Un <u>cycle de Hodge absolu</u> de codimension d sur une variété projective lisse X, sur un corps k de caractéristique 0, sera une collection de classes de cohomologie dans les groupes $H^{2d}(X,\mathbb{Q}_\ell)(d)$ (resp. $H^{2d}_{DR}(X)(d)$) satisfaisant les deux conditions

- l'élément de $H^{2d}_{DR}(X)(d)$ est dans F^0 ;
- pour tout plongement $k \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$, les différentes classes de cohomologie correspondent (via les isomorphismes du § 1) à <u>une</u> classe rationnelle de la cohomologie de Betti de $X \otimes_k \mathbb{C}$.

On a les inclusions : (cycles algébriques) $\subset$ (cycles de Hodge absolus) $\subset$ (cycles de Hodge). Utilisons cette définition pour préciser la catégorie des motifs sur laquelle on a travaillé dans les § 1 et 2. Soit d'abord $\mathcal{V}(k)$ la catégorie des variétés projectives et lisses sur k. On construit une catégorie <u>additive</u> $\mathcal{M}(k)$, dans laquelle les groupes Hom(M,N) sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$, qui est munie des données suivantes :

a) un produit tensoriel $\otimes$, associatif, commutatif, distributif par rapport à l'addition des objets

b) un foncteur contravariant H^* de $\mathcal{V}(k)$ dans $\mathcal{M}(k)$, bijectif sur les objets, compatible aux sommes, transformant produits en produits tensoriels.

Dans $\mathcal{M}(k)$, on a, pour X et Y connexes :
$\mathrm{Hom}(H^*(X),H^*(Y)) = Z^{\dim(Y)}_{h.a}(X \times Y)$, où on note $Z^d_{h.a}(Z)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ des cycles de Hodge absolus de codimension d sur Z. La construction de la catégorie de motifs $\mathcal{M}(k)$ se fait alors tout comme dans [2], les cycles algébriques étant remplacés par les cycles de Hodge absolus. Grâce à cette nouvelle définition, les composantes de Künneth de la diagonale de X × X étant de Hodge absolues, on a dans $\mathcal{M}(k)$ une décomposition : $H^*(X) = \bigoplus_i H^i(X)$.

CYCLES DE HODGE ET PÉRIODES

Le résultat qui suit a fait l'objet d'exposés à l'I. H. E. S. en 1979.

Théorème 1 : Tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est de Hodge absolu.

Signalons le

Corollaire (Borovoï) : Soit A une variété abélienne sur un corps k de caractéristique 0, ξ un cycle de Hodge sur A. Les correspondants ℓ-adiques ξ_ℓ de ξ sont fixés par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$.

§ 4. PÉRIODES DES INTÉGRALES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Soit A une variété abélienne complexe, $H_1(A,\mathbb{C}) = H^{0,-1} \oplus H^{-1,0}$ la décomposition de Hodge de $H_B(A)$ (cf. § 1). Considérons $GL(H_1(A))$ comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$. On a un morphisme de groupes algébriques complexes : $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\mu} GL(H_1(A,\mathbb{C}))$ tel que $\mu(z)$ agisse par l'homothétie de rapport z sur $H^{-1,0}$, par l'identité sur $H^{0,-1}$. Le groupe de Hodge G de A est l'adhérence de Zariski du sous-groupe $\mu(\mathbb{G}_m)$ de $GL(H_1(A))$. En d'autres termes, G est un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ de $GL(H_1(A))$. Une fonction régulière sur un ouvert de Zariski de G, et $\mathbb{Q}$-rationnelle, est nulle sur G si et seulement si elle est nulle sur $\mu(\mathbb{G}_m)$. On vérifie aisément que G contient les homothéties de $H_1(A)$. Voici une seconde description de G, très utile : on considère tous les tenseurs rationnels de type $(-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2})$ dans les produits tensoriels $\otimes^N H_1(A)$. Alors G est le sous-groupe de $GL(H_1(A))$ formé des transformations linéaires g pour lesquelles il existe un scalaire μ tel que : $g.t = \mu^m t$, pour tout tenseur t de type (m,m). Enfin, on montre que G est le groupe qui fixe tous les cycles de Hodge absolus de type (0,0) dans les espaces de tenseurs mixtes sur $H_1(A)$ (mixtes = covariants et contravariants).

Supposons maintenant A définie sur un sous-corps k de $\mathbb{C}$. Posons $g = \dim(A)$.

Théorème 2 : Soit $\omega_1,\dots,\omega_g$ des différentielles de première espèce sur A, $\eta_1,\dots,\eta_g$ des différentielles de deuxième espèce sur A, telles que

$(\omega_1,\dots,\omega_g,\ \eta_1,\dots,\eta_g)$ soit une base de $H^1_{DR}(A)$. Soit K le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par k et par les périodes $\int_\gamma \omega_i$, $\int_\gamma \eta_i$ $(1 \leq i \leq g,\ \gamma \in H_1(A,\mathbb{Z}))$; le degré de transcendance de K sur k est majoré par la dimension de G.

Démonstration : K est le corps de rationalité de l'isomorphisme $H_{1,B}(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\approx} H_{1,DR}(A) \otimes_k \mathbb{C}$ donné par " intégration" sur un cycle. Cet isomorphisme préserve les classes de cohomologie des cycles de Hodge absolus. Soit P la variété algébrique formée des isomorphismes qui ont cette propriété. De la définition de G, et du théorème 1 résulte que P est un espace principal homogène sous G, défini sur k, donc $\dim(P) = \dim(G)$. On conclut par le lemme suivant :

Lemme : Soit z un point de $A^N(\mathbb{C})$; le degré de transcendance de $k(z)$ sur k est égal à la dimension de la k-adhérence de Zariski de $\{z\}$;

C'est une tautologie. C.Q.F.D.

Remarque : De l'exemple 3 du § 1, résulte que $2\pi i \in K$. On peut d'ailleurs montrer que le degré de transcendance de K sur $k(2\pi i)$ est majoré par $\dim(G)-1$.

Corollaire : Avec les notations du Theorème 2, supposons de plus A simple de type C-M. Le degré de transcendance de K sur k est majoré par $g+1$.

Preuve : Il suffit de montrer : $\dim(G) \leq g+1$. Or $\mu(\mathbb{G}_m)$ commute à l'action sur $H_1(A,\mathbb{Q})$ du corps E. Il en résulte que G commute aussi à cette action, et que G est un tore algébrique. Par ailleurs G préserve, à un facteur près, la forme alternée associée à une section hyperplane (voir l'exemple 3 du § 1). D'où l'assertion.

Remarquons que, dans ce dernier cas, on dispose de la minoration suivante : $\dim(G) \geq 2 + \log_2(g)$, due à Ribet [3].

RÉFÉRENCES

[1] P. Deligne : Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, in Proceedings of symposia in Pure Mathematics, Volume 33, 1978.

[2] M. Demazure : Exposé au séminaire Bourbaki n° 365, in Springer Lecture Notes, 180 (1971).

[3] K. Ribet : Division fields of abelian varieties with complex multiplications, dans ce volume.

[4] G. Shimura : On the derivatives of modular forms, Duke Math. Journal 44 (1977), 365-387.

[5] G. Shimura : The periods of abelian varieties with complex mutliplication and the special values of certain zeta functions, dans ce volume.

[6] A. Weil : Courbes algébriques et variétés abéliennes, Hermann 1971 (réimpression).

[7] A. Weil : Variétés abéliennes, in "Algèbre et Théorie des Nombres", Colloque international du C.N.R.S., 24, 1950, p.124-127.

P. Deligne
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91440 Bures-sur-Yvette

J.-L. Brylinski
Ecole polytechnique, Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau cedex