MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LIONEL THIBAULT

Calcul sous-différentiel et calcul des variations en dimension infinie

Mémoires de la S. M. F., tome 60 (1979), p. 161-175
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__161_0>

Analyse non convexe [*1977. Pau*]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 60, 1979, p. 161-175.

CALCUL SOUS-DIFFERENTIEL ET CALCUL DES VARIATIONS EN DIMENSION INFINIE

Lionel THIBAULT

0 - INTRODUCTION

Ce travail traite du problème de Bolza. Ce problème a déjà suscité de nombreuses études notamment celles de T. ROCKAFELLAR et de F. CLARKE . Le premier a obtenu en dimension finie toute une série de résultats en remplaçant les conditions classiques de différentiabilité par des conditions de convexité. Le second donne en dimension finie, en utilisant un problème convexe tangent, des conditions nécessaires pour qu'un point résolve le problème dans les cas où le problème est en quelque sorte lipschitzien (CLARKE [3]) ou en quelque sorte calme (CLARKE [5]). Le but recherché ici est de montrer que sous des hypothèses de Lipschitz on peut obtenir en dimension infinie des conditions nécessaires pour le problème de Bolza similaires aux précédentes.

Après avoir fait quelques rappels, on caractérise dans le paragraphe 2 le sous-différentiel d'un certain type de fonctionnelle intégrale intervenant par la suite. Ensuite, dans le paragraphe 3 , on pose le problème de Bolza et on donne des conditions nécessaires pour qu'une certaine fonction réalise un minimum local pour ce problème.

1 - DEFINITIONS - NOTATIONS ET RAPPELS

Nous supposerons ici que E est un espace de Banach réel séparable. Soient T un espace localement compact dénombrable à l'infini, μ une mesure de Radon positive sur T et $p \in [1,+\infty[$.

Nous dirons qu'une application h de T dans $\overline{\mathbb{R}}$ est μ-quasi-intégrable si elle est μ-mesurable et minorée μ-presque partout par une fonction μ-intégrable. Remarquant que $-h^- \leq h$ (où h^- désigne la partie négative de h) , nous pouvons dire qu'une fonction μ-mesurable h est μ-quasi-intégrable si et seulement si sa partie négative h^- est μ-intégrable. Pour une fonction h quasi-intégrable nous pouvons définir la quasi-intégrale de h (ou intégrale de h) que nous noterons $\int h\, d\mu$ ou $\int h.\mu$ en posant :

$$\int h\, d\mu = \int^* h^+ d\mu - \int h^- d\mu$$

où $\int^* h^+ d\mu$ désigne l'intégrale supérieure de h^+ par rapport à μ .

On vérifie facilement que la somme de deux fonctions h et g μ-quasi-intégrables est μ-quasi-intégrable, que $\int(h+g)d\mu = \int h\, d\mu + \int g\, d\mu$ et que si $h \leq g$ alors $\int h\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

Soit f une application de $T \times E$ dans $]-\infty,+\infty]$ telle que :

1/ Pour toute application z de T dans E μ-mesurable, la fonction $t \to f(t,z(t))$ est μ-mesurable.

2/ Pour toute application $z \in L^p_E(T,\mu)$ la fonction $t \to f(t,z(t))$ est μ-quasi intégrable.

Remarquons que $L^p_E(T,\mu)$, espace vectoriel des applications h de T dans E μ-mesurables telles que $|h|^p$ soit μ-intégrable, est un espace de Banach pour sa norme usuelle et que son dual fort est isométriquement isomorphe à $L^q_{E'_s}(T,\mu)$, où q est le conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $L^q_{E'_s}(T,\mu)$ désignant l'espace des applications g de T dans E' scalairement μ-mesurables et telles que $\int^* |g|^q d\mu < +\infty$ si $1 < q < +\infty$ ou bornées en mesure si $q = +\infty$, muni de la norme $\|g\|_q = N_q(|g|)$ ou $\|g\|_\infty = N_\infty(|g|)$ (cf. DINCULEANU [1] , théorême 18.42).

Nous considérerons pour $p \in [1,\infty[$, l'application I_f de l'espace de Banach $L^p_E(T,\mu)$ dans $]-\infty,+\infty]$ définie par :

$$I_f : L^p_E \to]-\infty,\infty]$$
$$x \to I_f(x) = \int_T f(t,x(t))\mu(dt).$$

Avant d'étudier le sous-différentiel de l'application I_f , faisons quelques rappels.

Soit X un espace de Banach réel, Ω un ouvert non vide de X , g une application de X dans $]-\infty,+\infty]$, lipschitzienne sur Ω (donc finie sur Ω). Pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $v \in E$ nous pouvons définir, suivant CLARKE, la dérivée directionnelle généralisée de g au point x_0 dans la direction v par :

$$g^\circ(x_0;v) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ \delta \to 0^+}} \delta^{-1}[g(x+\delta v)-g(x)]$$

avec la convention $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$ pour ne pas alourdir l'écriture. Comme la fonction g est lipschitzienne sur Ω voisinage de x_0 , $g^\circ(x_0;v)$ est finie pour tout $v \in E$.

Le sous-différentiel de g en x_o , noté $\partial g(x_o)$ est l'ensemble (CLARKE [4]) défini par :

$$\partial g(x_o) = \{\zeta \in E' \mid <\zeta,v> \leq g^{\circ}(x_o;v)\}$$

où E' désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$.
Propriétés (CLARKE [4] , THIBAULT [1]) :

1/ $\partial g(x_o) \neq \emptyset$ et $\partial g(x_o)$ est un convexe faiblement compact dans E' .

2/ si g admet un minimum local en x_o , alors $0 \in \partial g(x_o)$.

3/ si g_1 et g_2 désignent deux fonctions de X dans $]-\infty,+\infty]$, lipschitziennes sur Ω , alors $\partial(g_1+g_2)(x_o) \subset \partial g_1(x_o) + \partial g_2(x_o)$.

4/ si A est une application linéaire continue d'un espace de Banach Y dans X et si pour $y_o \in Y$ on a $Ay_o \in \Omega$, alors $\partial(goA)(y_o) \subset A^*(\partial g)(x_o)$ où A^* est la transposée de A , et $x_o = Ay_o$.

Considérons maintenant une partie fermée non vide F de X et x_o un point de F . Désignons par d_F la fonction lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$d_F(x) = d(x,F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x-y\| \quad \text{pour tout } x \in X .$$

Le cône normal de F au point x_o , noté $N_F(x_o)$, sera (cf. CLARKE [4]) , le cône engendré par l'ensemble convexe $\partial d_F(x_o)$.

2 - *SOUS-DIFFERENTIEL DE I_f*

Commençons par étudier la dérivée directionnelle généralisée de I_f en un point où I_f est localement lipschitzienne.

2.1. Proposition : Supposons que $x_o \in L^p_E(T,\mu)$ vérifie les conditions suivantes :

1/ il existe une boule ouverte $B_p(x_o,\beta)$ de centre x_o et de rayon $\beta > 0$ dans L^p_E et une fonction $k_{x_o} \in L^q_{\mathbb{R}}(T,\mu)$ telles que pour tous $x,y \in B_p(x_o,\beta)$:

(1) $|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq k_{x_o}(t) \|x(t)-y(t)\|$ μ-p.p.

2/ la fonction $f(t,x_o(t))$ est μ-intégrable.

3/ pour μ-presque tout $t \in T$, la fonction $f(t,.) = f_t$ est lipschitzienne sur un voisinage de $x_o(t)$ dans E .

Alors :

a) <u>pour tout</u> $x \in B_p(x_o,\beta)$ <u>la fonction</u> $t \mapsto f(t,x(t))$ <u>est</u> μ-<u>intégrable</u> ; <u>la fonction</u> I_f <u>précédemment définie est lipschitzienne sur</u> $B_p(x_o,\beta)$.

b) <u>pour tout</u> $v \in L^p_E(T,\mu)$ <u>on a</u> :

$$I_f^{\cdot}(x_o;v) \leq \int_T f_t^{\cdot}(x_o(t)\ ;\ v(t))\ \mu(dt)$$

<u>Démonstration</u> :

a) est évident. Montrons b). Soit alors $v \in L^p_E$.

1°/ Soit S une suite dense dans $E \times]0,+\infty[$. Pour tout $n \geq 1$ posons $S_n = S \cap (B(0,1/n) \times]0,1/n[)$. Nous avons alors :

$$f_t^{\cdot}(x_o(t);v(t)) = \operatorname*{Inf}_n \sup_{(h,\delta)\in S_n} \delta^{-1}[f_t(x_o(t)+h+\delta v(t))-f_t(x_o(t)+h)]$$

pour μ-presque tout $t \in T$. Ainsi $t \mapsto f_t^{\cdot}(x_o(t)\ ;\ v(t))$ est μ-mesurable et donc d'après (1) μ-quasi-intégrable, car la fonction

$$t \mapsto \limsup_{\delta \to 0^+} \delta^{-1}[f(x_o(t)+\delta v(t)) - f(x_o(t))]$$

est μ-intégrable et pour μ presque tout t

$$\limsup_{\delta \to 0^+} \delta^{-1}[f(x_o(t)+\delta v(t)) - f(x_o(t))] \leq f^{\cdot}(x_o(t)\ ;\ v(t)) \quad .$$

2°/ Comme $I_f(x_o;v) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \delta \to 0^+}} \int_T \delta^{-1}[f_t(x_o(t)+h(t)+\delta v(t)) - f_t(x_o(t)+h(t))]\mu(dt)$,

il existe une suite $(h_n)_n$ tendant vers 0 dans $L^p_E(T,\mu)$ et une suite $(\delta_n)_n$ tendant vers 0 , $\delta_n > 0$, telles que

$$I_f^{\cdot}(x_o;v) = \lim_{n \to \infty} \int_T \delta_n^{-1}\left[f_t(x_o(t)+h_n(t)+\delta_n v(t)) - f_t(x_o(t)+h_n(t)\right]\mu(dt).$$

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $h_n(t) \to 0$ dans E pour μ-presque tout t . Ainsi nous obtenons en appliquant le lemme de Fatou :

$$I_f^{\cdot}(x_o;v) \leq \int_T \limsup_{n \to \infty} \delta_n^{-1}[f_t(x_o(t)+h_n(t) + \delta_n v(t)) - f_t(x_o(t)+h_n(t))]\mu(dt)$$

$$\leq \int_T f_t^{\cdot}(x_o(t)\ ;\ v(t))\ \mu\ (dt)\ \square \quad .$$

Dans la démonstration de la proposition 2.3. nous utiliserons le lemme suivant.

2.2. Lemme : Soit g une fonction de T dans $\overline{\mathbb{R}}$ μ-quasi-intégrable. On suppose que pour toute partie A de T μ-intégrable $\int_A g(x)\,\mu(dx) \geqslant 0$. Alors on a $g \geqslant 0$ μ-p.p.

Démonstration :

Soit g^- la partie négative de g , $[g(x)]^- = \sup(-g(x),0)$ pour tout $x \in T$. Supposons que $A = \{x \in T \mid g(x) < 0\}$ n'est pas de μ-mesure nulle. Pour tout entier $n \geqslant 1$ posons :

$$A_n = \{x \in T \mid g^-(x) > 1/n\} \quad .$$

Alors on a $A = \{x \in T \mid g^-(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n$. Comme g^- est intégrable et que $\mu(A) > 0$, il existe un entier $n_o \geqslant 1$ tel que $0 < \mu(A_{n_o}) < +\infty$.

Ainsi pour ce n_o on a :

$$\frac{1}{n_o}\,\mu(A_{n_o}) \leqslant \int_{A_{n_o}} g^-(x)\,\mu(dx)$$

ou

$$\int_{A_{n_o}} g(x)\,\mu(dx) = \int_{A_{n_o}} - g^-(x)\,\mu(dx) \leq -\frac{1}{n_o}\,\mu(A_{n_o}) < 0 \ .$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse . $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une condition nécessaire pour qu'un point appartiennt à $\partial I_f(x_o)$.

2.3. Proposition

Si les hypothèses de la proposition 2.1. sont vérifiées et si $\zeta \in \partial I_f(x_o)$ alors $\zeta(t) \in \partial f_t(x_o(t))$ μ-p.p.

Démonstration

Soit $(v_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dense dans E , N_o un ensemble négligeable tel que pour tout $t \notin N_o$ f_t est lipschitzienne au voisinage de $x_o(t)$. Soit $n \geqslant 1$.

Pour tout ensemble A μ-intégrable, nous avons $v_n\,\chi_A \in L^p_E(T,\mu)$. Ainsi pour $\zeta \in \partial I_f(x_o)$, nous avons d'après la proposition précédente et les définitions :

$$\begin{aligned} \int_A \langle \zeta(t)\ , v_n \rangle\,\mu(dt) &= \langle \zeta\ , v_n\,\chi_A \rangle \\ &\leq I_f^{\cdot}(x_o\ ; v_n\chi_A) \leq \int_T f^{\cdot}_t(x_o(t)\ ; v_n\chi_A(t))\ \mu(dt) \\ &= \int_A f^{\cdot}_t(x_o(t)\ ; v_n)\ \mu(dt)\ . \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ensemble A μ-intégrable, il existe d'après le lemme précédent une partie N_n de T μ-négligeable telle que pour tout $t \notin N_n$

$$< \zeta(t) , v_n > \leq f^{\cdot}_t(x_o(t) ; v_n) .$$

Si nous posons $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$, nous avons alors pour tout $t \notin N$:

$$< \zeta(t), v > \leq f^{\cdot}_t(x_o(t) ; v) \text{ pour tout } v \in E .$$

Donc nous concluons que : $\zeta(t) \in \partial f_t(x_o(t))$ pour tout $t \notin N$, ensemble de μ-mesure nulle. $\square$

Nous allons donner un cas où la condition nécessaire de la proposition précédente est aussi une condition suffisante .

2.4. Proposition

Supposons que les conditions précédentes soient vérifiées et que pour μ-presque tout $t \in T$, $f'_t(x_o(t) ; .)$ existe et $f'_t(x_o(t) ; .) = f^{\cdot}_t(x_o(t) ; .)$.

Alors 1/ $I'_f(x_o;v) = I^{\cdot}_f(x_o;v) = \int_T f^{\cdot}_t(x_o(t) ; v(t)) \mu(dt)$ pour tout $v \in L^p_E(T,\mu)$.

2/ $\zeta \in \partial I_f(x_o)$ si et seulement si $\zeta(t) \in \partial I_f(x_o(t))$ μ-p.p.

Démonstration :

1/ Soit $v \in L^p_E(T,\mu)$. Montrons que $I'_f(x_o;v)$ existe. Pour tout $\delta > 0$ assez petit nous avons :

$$\left| \delta^{-1}[f_t(x_o(t)+\delta v(t)) - f_t(x_o(t))] \right| \leq k_{x_o}(t) \|v(t)\| \ \mu\text{-p.p.}$$

et

$$t \mapsto \delta^{-1}[f_t(x_o(t) + \delta v(t)) - f_t(x_o(t))] \ \mu\text{-mesurable.}$$

Nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_T \delta^{-1}[f_t(x_o(t) + \delta v(t)) - f_t(x_o(t))] \mu(dt)$$

$$= \int_T f'_t(x_o(t) ; v(t)) \mu(dt)$$

ou

$$I'_f(x_o;v) = \int_T f'_t(x_o(t);v(t)) \mu(dt) .$$

Mais, comme d'après la proposition 2.1., $I^{\cdot}_f(x_o;v) \leq \int_T f^{\cdot}_t(x_o(t);v(t)) \mu(dt)$,

nous avons . $I'_f(x_o;v) \leq I^{\cdot}_f(x_o;v) \leq \int_T f^{\cdot}_t(x_o(t);v(t)) \mu(dt)$

$$= \int_T f'_t(x_o(t) ; v(t)) \mu(dt) = I'_f(x_o;v) .$$

Donc nous avons :

$$I'_f(x_o;v) = I^{\cdot}_f(x_o;v) = \int_T f^{\cdot}_t(x_o(t)\ ;\ v(t))\ \mu(dt)\ .$$

2/ D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que si $\zeta \in L^q_{E'_p}(T,\mu)$ est tel que $\zeta(t) \in \partial f_t(x_o(t))$ μ.p.p. alors $\zeta \in \partial I_f(x_o)$.

Pour μ-presque tout $t \in T$ nous avons $< \zeta(t), v(t) > \leq f^{\cdot}_t(x_o(t)\ ;\ v(t))$ et par suite $< \zeta, v > \leq \int_T f^{\cdot}_t(x_o(t)\ ;\ v(t))\ \mu(dt) = I^{\cdot}_f(x_o;v)$. Donc nous avons bien $\zeta \in \partial I_f(x_o)$. $\square$

3 - PROBLEME DE BOLZA

E désignera encore un espace de Banach séparable. Nous noterons $A^p_E([0,T])$ l'ensemble des applications x de $[0,T]$ dans E primitive sur $[0,T]$ d'une fonction $\dot{x} \in L^p_E([0,T])$. Alors, pour $x \in A^p_E([0,T])$, nous avons pour tout $t \in [0,T]$: $x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(\theta)d\theta$.

De même, $A^q_{E'_s}([0,T])$ sera l'ensemble des applications x de $[0,T]$ dans E' primitive faible d'une application $\dot{x} \in L^q_{E'_s}([0,T])$. Alors pour tout $x \in A^q_{E'_s}$, nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(\theta)d\theta \quad \text{, intégrale faible.}$$

Par la suite nous écrirons L^p_E , A^p_E au lieu de $L^p_E([0,T],dt)$ et $A^p_E([0,T])$, dt étant la mesure de Lebesgue sur $[0,T]$.

L'espace vectoriel A^p_E sera muni de la norme $\|x\|_{p,A} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_p$ où $\|\dot{x}\|_p = [\int_0^T |\dot{x}(t)|^p dt]^{1/p}$. Ainsi le dual de A^p_E est isomorphe à $A^q_{E'_s}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit L une application de $[0,T] \times E \times E$ dans $]-\infty,+\infty]$ et soit x_o un point de A^p_E tels que :

i) Pour tous u,v, applications Lebesgue-mesurables de T dans E , la fonction

$t \mapsto L(t,u(t),v(t))$ est Lebesgue-mesurable et pour tous $x,y \in L^p_E(T,\mu)$

$t \mapsto L(t,x(t),y(t))$ est Lebesgue-quasi-intégrable.

ii) il existe un voisinage ouvert de $(x_o,\dot{x}_o)$ dans $L^p_E \times L^p_E \simeq L^p_{E \times E}$ (isomorphisme) et une fonction $k_{x_o} \in L^q_{\mathbb{R}}([0,T])$ tels que pour tous (x,y) et (u,v) dans ce voisinage :

$|\, L(t,x(t),y(t)) - L(t,u(t),v(t))\,| \leqslant k_{x_o}(t)\ [\, \|x(t)-u(t)\| + \|y(t)-v(t)\|\,]$ p.p.

iii) la fonction $t \mapsto L(t,x_o(t),\dot{x}_o(t))$ est Lebesgue-intégrable.

iv) pour presque tout t , la fonction $L(t,.,.)$ est lipschitzienne sur un voisinage de $(x_o(t),\dot{x}_o(t))$ dans $E \times E$.

Nous désignerons par ℓ soit une fonction localement lipschitzienne de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ soit la fonction indicatrice d'un fermé de $E \times E$.

Nous exprimerons une conditions nécessaire pour que ce point $x_o \in A^p_E$ donne un minimum local pour le problème de Bolza suivant :

$$P[\ell,L] \ : \text{minimiser} \ \{\ell(x(0),x(T)) + \int_0^T L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \mid x \in A^p_E\} \ ,$$

c'est-à-dire pour que x_o résolve le problème $P[\ell,L]$ sur une boule

$$B_{p,A}(x_o,\varepsilon) = \{x \in A^p_E([0,T]) \mid \|x-x_o\|_{p,A} < \varepsilon\} \ .$$

Considérons les applications linéaires α de $E \times L^p_E \simeq A^p_E$ dans $E \times E$ et β de $E \times L^p_E \simeq A^p_E$ dans $L^p_E \times L^p_E$ définies par :

$$\alpha : (x(0),\dot{x}) \mapsto (x(0),x(T))$$

$$\beta : (x(0),\dot{x}) \mapsto (x,\dot{x}) \ .$$

Le problème $P[\ell,L]$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$\text{Minimiser} \ \{\ell o \alpha(x) + I_L o \beta(x) \mid x \in A^p_E\}$$

où I_1 est l'application de $L^p_E \times L^p_E \simeq L^p_{E \times E}$ dans $]-\infty,+\infty]$ définie par

$$I_L(x,y) = \int_0^T L(t,x(t),y(t))dt \ .$$

Commençons par calculer les applications transposées de α et de β .

3.1. <u>Lemme</u> : <u>L'application</u> α <u>est linéaire et continue et sa transposée de</u> $E' \times E'$ <u>dans</u> $E' \times L^q_{E'_s}$ <u>est donnée par</u> :

$$\alpha^* : (\zeta,\xi) \mapsto (\zeta + \xi \ , \ \tilde{\xi})$$

<u>où</u> $\tilde{\xi}$ <u>est la fonction constante</u> $t \mapsto \xi$.

<u>Démonstration</u> :

α est évidemment une application linéaire continue. Soient ζ et $\xi \in E'$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}<(\zeta,\xi) \; ; \; \alpha(x(0),\dot{x})> &= <(\zeta,\xi) \; ; \; (x(0),x(0)+\int_0^T \dot{x}(t)dt)> \\ &= <\zeta \, , \, x(0)> + <\xi \, , \, x(0)+\int_0^T \dot{x}(t)dt> \\ &= <\zeta+\xi \, , \, x(0)> + \int_0^T <\xi \, , \, \dot{x}(t)> dt \\ &= <\zeta+\xi, \, x(0)> + <\tilde{\xi} \, , \, \dot{x}> \\ &= <(\zeta+\xi \, , \tilde{\xi}) \; ; \; (x(0) \, , \, \dot{x})>\end{aligned}$$

où $\tilde{\xi}$ désigne l'application constante $t \mapsto \xi$ de $[0,T]$ dans E'. Ainsi

$$\alpha^*(\zeta,\xi) = (\zeta+\xi,\tilde{\xi}) \; . \; \square$$

Le lemme suivant donne une formule d'intégration par parties qui sera utilisée pour le calcul de l'application transposée de β .

3.2. Lemme :

Soient $x \in A^p_E$ et $u \in A^q_{E'_s}$. Pour tout $t \in [0,T]$ nous avons

$$< u(t),x(t) > - < u(0) \, , \, x(0) > = \int_0^t \left[< \dot{u}(s),x(s) > + < u(s), \dot{x}(s) > \right] ds \; .$$

Démonstration :

1/ Montrons que l'application φ de $[0,T] \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(t,s) \to < \dot{u}(t) \, , \, \dot{x}(s) > \text{ est Lebesgue-mesurable.}$$

Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $[0,T]$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \mathrm{Min}(\varepsilon,\varepsilon/_{2T})$. Comme $\dot{u}$ est scalairement λ-mesurable et que E est un espace de Banach séparable, $\dot{u}$ est une application λ-mesurable de $[0,T]$ dans E' muni de sa topologie faible. Ainsi il existe un compact $K \subset [0,T]$ tel que $\lambda([0,T] \setminus K) \leq \eta$ et que la restriction de $\dot{u}$ (resp. $\dot{x}$) à K soit une application continue de K dans E' muni de sa topologie faible (resp. dans E muni de sa topologie forte). Par suite $\dot{u}(K)$ est faiblement compact donc équicontinue dans E' . Nous en déduisons que la restriction à $\dot{u}(K) \times E$ de la forme bilinéaire canonique sur $E' \times E$ est continue pour $\dot{u}(K)$ muni de la topologie induite par la topologie faible de E' et E de sa topologie d'espace normé (cf. BOURBAKI |1|). Alors la restriction à $K \times K$ de l'application $(t.s) \to < \dot{u}(t),\dot{x}(s) >$ est continue. Mais, si nous posons $\mu = \lambda \otimes \lambda$ nous avons :

$$\mu([0,T] \times [0,T] \setminus K \times K) \leqslant \mu(([0,T] \setminus K) \times [0,T]) + \mu([0,T] \times ([0,T] \setminus K)) .$$

$$\leqslant \varepsilon \quad .$$

Ainsi l'application $(t,s) \mapsto < \dot{u}(t) , \dot{x}(s) >$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,T] \times [0,T]$.

2/ Comme φ est Lebesgue-mesurable et que :

$$| < \dot{u}(t) , \dot{x}(s) > | \leqslant |\dot{u}(t)| . |\dot{x}(s)|$$

nous pouvons affirmer que φ est Lebesgue-intégrable sur $[0,T] \times [0,T]$. De même applications $s \to < \dot{u}(s) , x(s) >$ et $s \to < u(s) , \dot{x}(s)>$ sont Lebesgue-intégrables sur $[0,T]$. Ainsi nous avons :

$$\int_0^t < u(s) , \dot{x}(s) > ds = \int_0^t < u(0) + \int_0^s \dot{u}(\theta)d\theta , \dot{x}(s) > ds$$

$$(1) \qquad = \int_0^t \left[\int_0^s < \dot{u}(\theta),\dot{x}(s) > d\theta\right]ds + < u(0),x(t) - x(0) > .$$

De même :

$$\int_0^t < \dot{u}(s),x(s) > ds = \int_0^t < \dot{u}(s),x(0) + \int_0^s \dot{x}(\theta)d\theta > ds$$

$$= \int_0^t \left[\int_0^s < \dot{u}(s),\dot{x}(\theta)> d\theta\right]ds + < u(t) - u(0),x(0) >$$

$$(2) \qquad = \int_0^t \left[\int_\theta^t < \dot{u}(s),\dot{x}(\theta) > ds\right]d\theta + < u(t) - u(0) , x(0) >$$

la dernière égalité résultant de Fubini.

Toujours d'après Fubini, en regroupant (1) et (2) nous avons :

$$\int_0^t \left[< u(s) , \dot{x}(s) > + < \dot{u}(s) , x(s) > \right]ds$$

$$= \int_0^t \int_0^t < \dot{u}(\theta) , \dot{x}(s) > d\theta \ ds + < u(0) , x(t) - x(0) >$$

$$+ < u(t) - u(0) , x(0) > .$$

Or :

$$\int_0^t \int_0^t < \dot{u}(\theta),\dot{x}(s) > d\theta \ ds$$

$$= \int_0^t < \dot{u}(\theta) ; x(t) - x(0) > d\theta = < u(t) - u(0),x(t) - x(0) > .$$

Donc nous avons finalement :

$$\int_0^t \left[< u(s),\dot{x}(s) + \dot{u}(s),x(s)>\right]ds = <u(t),x(t)> - <u(0),x(0)> .$$

Ceci termine la preuve du lemme. $\square$

3.3. Lemme

L'application β est linéaire et continue et sa transposée de $L^q_{E'} \times L^q_{E'}$ dans $E' \times L^q_{E'}$ est donnée par :

$$\beta^* : (u,v) \mapsto \left(\int_0^T u(\theta)d\theta \ , \ v - U\right)$$

où, pour tout $t \in [0,T]$

$$U(t) = -\int_t^T u(\theta)d\theta \ .$$

Démonstration :

β est évidemment une application linéaire continue. Soient u et v dans $L^q_{E'_s}$. Si nous posons :

$$U(t) = -\int_t^T u(\theta)d\,\theta \ ,$$

nous avons :

$$< (u,v) \ ; \ \beta(x(0),\dot{x}) > \ = \ <(u,v) \ ; \ (x,\dot{x}) >$$

$$= \int_0^T < \dot{U}(t), x(t) > dt + \int_0^T < v(t) \ , \ \dot{x}(t) > dt$$

$$= \ < U(T),x(T) > - < U(0),x(0) > - \int_0^T < U(t),\dot{x}(t)> dt + \int_0^T < v(t),\dot{x}(t) > dt$$

(d'après le lemme précédent).

$$= <\int_0^T u(\theta)d\theta \ ,x(0) > + \int_0^T < v(t) - U(t), \dot{x}(t) > dt$$

$$= < \int_0^T u(\theta)d\theta \ , \ x(0) > + < v - U \ , \ \dot{x} >$$

$$= < \left(\int_0^T u(\theta)d\theta \ , \ v - U\right) \ ; \ (x(0) \ , \ \dot{x}) >$$

Donc nous concluons que :

$$\beta^*(u,v) = \left(\int_0^T u(\theta)d\theta \ , \ v - U \right) . \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une condition nécessaire pour le problème $P[\ell,L]$ dans le cas où ℓ est localement lipschitzienne.

3.4. Proposition

Si L vérifie les hypothèses i), ii), iii) et iv) , si ℓ est une fonction localement lipschitzienne sur $E \times E$ et si x_0 donne un minimum local pour le problème

$P[\ell,L]$, alors il existe $\zeta \in A^q_{E',s}$ telle que :

$$(\dot{\zeta}(t),\zeta(t)) \in \partial L_t(x_o(t),\dot{x}_o(t)) \quad \text{p.p.}$$

et

$$(\zeta(0), -\zeta(T)) \in \partial\ell(x_o(0),x_o(T)).$$

Démonstration :

D'après ii) et iii), I_L est lipschitzienne sur un voisinage de $(x_o,\dot{x}_o)$ dans $L^p_E \times L^p_E \simeq L^p_{E\times E}$. Donc, la fonction $\ell o\alpha + I_L o\beta$ est lipschitzienne sur un voisinage de x_o dans A^p_E . Alors, d'après les rappels 1) nous avons :

$$0 \in \partial[\ell o\alpha + I_L o\beta](x_o) \subset \alpha^*(\partial\ell(\alpha x_o)) + \beta^*(\partial I_L(\beta x_o)) .$$

Donc, il existe, d'après les deux lemmes précédents,

$$(u,v) \in \partial I_L(x_o,\dot{x}_o) \quad \text{et} \quad (a,b) \in \partial\ell(x_o(0),x_o(T))$$

tels que :

$$(a+b,\tilde{b}) = -\left(\int_0^T u(\theta)d\theta \quad , v - U\right)$$

ou :

$$\begin{cases} a + b = -\int_0^T u(\theta)d\theta & (1) \\ b = -v(t) - \int_t^T u(\theta)d\theta \end{cases}$$

Donc nous avons :

$$v(t) = -b - \int_t^T u(\theta)d\,\theta.$$

Par suite $v \in A^p_{E'}$, et :

$$\dot{v}(t) = u(t) \quad \text{p.p.}$$

De plus, pour $t = T$ dans (2) , nous avons :

$$b = -v(T) \quad .$$

Ainsi nous déduisons de (1) que :

$$a = v(0) \quad .$$

Posons maintenant $\zeta = v$. Alors $(\dot{\zeta} , \zeta) \in \partial I_L(x_o,\dot{x}_o)$ et

$$(\zeta(0), -\zeta(T)) \in \partial\ell(x_o(0),x_o(T)).$$

Il nous suffit donc d'appliquer la proposition 2.3. pour conclure que :

$$(\xi(t),\zeta(t)) \in \partial L_t(x_o(t)\ ,\ \dot{x}_o(t)) \qquad \text{p.p.} \qquad \square$$

En adaptant la démarche de CLARKE ([3] , lemme 3.2.) nous pouvons démontrer le lemme suivant qui nous permettra de traiter le cas où ℓ est une fonction indicatrice.

3.5. Lemme

Supposons que ℓ est la fonction indicatrice d'un ensemble fermé F dans $E \times E$ et que x_o résoud localement le problème $P[\ell,L]$, alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que x_o donne un minimum local pour le problème $P[nd_F,L]$ où d_F désigne la fonction distance à l'ensemble F .

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$ tel que x_o donne un minimum pour le problème $P[\ell,L]$ sur la boule $B_{p,A}(x_o,\varepsilon)$ de A_E^p et tel que la fonction L vérifie la condition ii) sur $B_p(x_o,\varepsilon) \times B_p(\dot{x}_o,\varepsilon)$. Montrons que x_o résoud le problème :

Minimiser $\{nd_F(x(0),x(T)) + \int_0^T L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \mid x \in B_{p,A}(x_o,\varepsilon/2)\}$ pour un $n \geq 1$

Si nous supposons le contraire, alors pour tout $n \geq 1$ il existe :

$$y_n \in B_{p,A}(x_o,\varepsilon/2) \qquad \text{tel que} \quad :$$

(a) $\quad nd_F(y_n(0),y_n(T)) + \int_0^T L(t,y_n(t),\dot{y}_n(t))dt < \int_0^T L(t,x_o(t),\dot{x}_o(t))dt$.

Mais d'après ii) :

$$\int_0^T L(t,y_n,\dot{y}_n)dt \geq \int_0^T L(t,x_o,\dot{x}_o)dt - \int_0^T k_{x_o}(t)[\ \|x_o(t)-y_n(t)\| + \|\dot{x}_o(t)-\dot{y}_n(y)\|]\,dt$$

$$\geq \int_0^T L(t,x_o,\dot{x}_o)dt - \|k_{x_o}\|_q\ (1+T)\ \varepsilon \quad .$$

Donc :

$$\delta_n = d_F(y_n(0),\ y_n(T)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad .$$

Soit alors $\gamma > 1$. Pour tout $n \geq 1$ choisissons , $(a_n,b_n) \in F$ tel que :

$$\|(y_n(0) - a_n, y_n(T)-b_n)\| \leq \gamma\ \delta_n \quad .$$

Posons :

$$z_n(t) = y_n(t) + (1-tT^{-1})(a_n-y_n(0)) + tT^{-1}(b_n-y_n(T)) \quad .$$

Alors :

$$\dot{z}_n(t) = \dot{y}_n(t) - T^{-1}(a_n - y_n(0)) + T^{-1}(b_n - y_n(T))$$

Donc pour n assez grand nous avons :

(1) $z_n \in B_p(x_o,\varepsilon)$ et $\dot{z}_n \in B_p(\dot{x}_o,\varepsilon)$

(2) $z_n \in B_{p,A}(x_o,\varepsilon)$

(3) $(z_n(0),\ z_n(T)) = (a_n,b_n) \in F$.

Par suite, nous avons pour n assez grand :

$$\begin{aligned}
\int_0^T L(t,x_o,\dot{x}_o)dt &\leq \int_0^T L(t,z_n,\dot{z}_n)dt \quad (\text{car } x_o \text{ résoud } P[\ell,L] \text{ sur } B_{p,A}(x_o,\varepsilon)) \\
&\leq \int_0^T L(t,y_n,\dot{y}_n)dt + \int_0^T k_{x_o}(t)\,\| z_n(y)-y_n(t),\dot{z}_n(t)-\dot{y}_n(t)\|\ dt \\
&\qquad (\text{d'après ii) et iii)}) \\
&\leq \int_0^T L(t,y_n,\dot{y}_n)dt + 2\,\gamma\,\delta_n(1+T^{-1}) \int_0^T k_{x_o}(t)dt \\
&\leq \int_0^T L(t,y_n,\dot{y}_n)dt + nd_F(y_n(0),y_n(T)) \\
&< \int_0^T L(t,x_o,\dot{x}_o)dt \qquad (\text{d'après (a)})
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. □

Nous pouvons maintenant donner une condition nécessaire dans le cas où ℓ est la fonction indicatrice d'un fermé de $E \times E$.

3.6. Proposition

Si L vérifie les hypothèses i), ii), iii) et iv), si ℓ est la fonction indicatrice d'un ensemble fermé F dans $E \times E$ et si x_o donne un minimum local pour le problème $P[\ell,L]$, alors il existe $\zeta \in A^q_{E',s}$ telle que :

$$(\dot{\zeta}(t),\zeta(t)) \in \partial L_t(x_o(t),\dot{x}_o(t)) \quad \text{p.p.}$$

et

$$(\zeta(0),\ -\zeta(T)) \in N_F(x_o(0),x_o(T))$$

Démonstration :

D'après le lemme précédent, il existe $n \geq 1$ tel que x_o donne un mimimum local pour le problème $P[nd_F,L]$. Nous pouvons alors appliquer la proposition 3.4. Ainsi il existe $\zeta \in A^q_{E'}$ telle que :

$$(\dot{\zeta}(t),\zeta(t)) \in \partial L_t(x_o(t),\ \dot{x}_o(t)) \quad \text{p.p.}$$

et

$$(\zeta(0),-\zeta(T)) \in \partial(nd_F)(x_o(0),x_o(T)) \quad .$$

Mais d'après les rappels 1) nous avons :

$$\partial d_F(x_o(0)\ ,\ x_o(T)) \subset N_F(x_o(0),x_o(T)) \quad . \quad \square$$

Les résultats précédents peuvent bien sûr s'appliquer à certains problèmes d'optimisation portant sur une équation différentielle multivoque

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t,x(t))$$

où Γ est une multi-application de $[0,T] \times E$ dans les parties non vides de E, avec E espace de Banach séparable, en faisant quelques hypothèses sur Γ . Pour ceci, nous renvoyons le lecteur à THIBAULT [3] .

BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI N. [1] Espaces vectoriels topologiques, ch.3,4,5, première éd., Hermann, Paris.

[2] Intégration. ch. 6, première éd., Hermann, Paris.

CLARKE F. [1] Generalized gradients and applications. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 205 (1975), pp.247-262.

[2] La condition hamiltonienne d'optimalité. C.R. Acad. Sc. Paris, 280 (1975), pp.1205-1207.

[3] The Euler-Lagrange différential inclusion, J. of Diff. Eq. 19 (1975), pp.80-90.

[4] A new approach to Lagrange multipliers. Mathematics of operations research. vol.1 , N° 2 (1976) pp.165-174.

[5] The generalized problem of Bolza, SIAM J. Control Optimization, 14, (1976), 682-699.

DINCULEANU N. [1] Integration on locally compact spaces. Noordhoff International Publishing (1974).

ROCKAFELLAR T. [1] Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. J. Math. An. Appl. 32 (1970) pp.174-222.

[2] Existence and duality theorems for convex problems of Bolza. Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971) pp.1-39.

THIBAULT L; [1] Quelques propriétés des sous-différentiels de fonctions réelles localement lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable. Séminaire d'Analyse Convexe de Montpellier (1975), exposé n°16 et C.R. Acad. Sc. Paris, 282 (1976) pp.507-510.

[2] Problème de Bolza dans un espace de Banach séparable. C.R. Acad. Sc. Paris, 282 (1976) pp. 1303-1306.

[3] Propriétés des sous-différentiels de fonctions localement lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable. Applications. Thèse de spécialité, Montpellier (1976).