M. KOSKAS

Structures algébriques multivoques. Applications

Mémoires de la S. M. F., tome 23 (1970)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1970__23__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 23, 1970, 84 p.

STRUCTURES ALGEBRIQUES MULTIVOQUES. APPLICATIONS.

PAR MAURICE KOSKAS

Pages

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Ce travail a, entre autres, pour objet de montrer l'intérêt qu'il peut y avoir à considérer des applications multivoques dans certaines questions d'algèbre où elles n'apparaissent pas de façon évidente.

Nous avons déjà utilisé un pareil point de vue dans un travail préliminaire, [20] en montrant que l'on peut introduire dans l'étude des groupoïdes la notion de demi-hypergroupe.

Un demi-hypergroupe est un ensemble H muni d'une loi de composition qui associe à tous $x,y \in H$, un complexe (c'est-à-dire une partie non vide) de H, noté $x * y$, et telle que

$$\forall x, y, z \in H, \qquad (x * y) * z = x * (y * z).$$

Une telle structure généralise celle de demi-groupe.

Dans ce qui suit, H (resp. D) est un demi-hypergroupe (resp. un demi-groupe) fixé.

Notons que H est dit un hypergroupe si

$$\forall x,y \in H, \quad \exists\, z,z' \in H \text{ tels que } x \in (y * z) \cap (z' * y).$$

Cette structure a été étudiée par plusieurs auteurs (par exemple, [8],[24])

Dans notre travail préliminaire, [20] nous avons généralisé aux demi-hypergroupes et aux groupoïdes des résultats de la théorie des demi-groupes.

L'examen des méthodes utilisées dans ce travail et dans certains mémoires traitant des demi-groupes [5],[9],[16] montre le rôle essentiel joué par les ensembles de translations. (Par exemple, une translation à droite de H est une application de H dans $\mathcal{P}(H)$ de la forme $y \longmapsto y * x$, x étant un élément fixé de H).

Ceci suggère les définitions suivantes :

On appelle <u>hypertas</u> (resp. <u>tas</u>) la donnée d'un ensemble E et d'un demi-groupe $\mathcal{D}$ d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$ (resp. de E dans E). Une telle donnée est notée $(E, \mathcal{D})$.

On appelle <u>bi-hypertas</u> (resp. bi-tas) la donnée d'un ensemble E, et de deux demi-groupes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$ (resp. de E dans E) tels que

$$\forall\, \theta_1 \in \mathcal{D}_1,\ \theta_2 \in \mathcal{D}_2, \qquad \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1.$$

<u>Exemples</u>

Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{L}$) le demi-groupe engendré par les translations à droite (resp. à gauche) de D ou de H, $(D, \mathcal{R})$ est un tas, $(H, \mathcal{R})$ est un hypertas, $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ est un bi-tas, $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ est un bi-hypertas.

Dans ce qui suit, $(E, \mathcal{D})$ est un hypertas fixé, $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est un bi-hypertas fixé.

Nous étudierons dans ce travail un certain nombre de propriétés des hypertas et bi-hypertas, puis nous appliquerons les résultats obtenus à l'étude des demi-groupes et des demi-hypergroupes.

Le point de vue consistant à étudier un demi-groupe à l'aide d'ensembles de translations semble avoir été considéré pour la première fois par notre camarade P.Grillet [16]. Nous avons défini indépendamment de lui (mais postérieurement) la notion de tas et d'autres notions annexes. Toutefois un exposé qu'il fit au séminaire Dubreil-Pisot en 1962 [16] joue un rôle particulièrement important dans l'élaboration de nos idées. Signalons pour terminer que nous avons en général utilisé les notations de P.Grillet [17] ; certaines différences peu importantes apparaissent parfois : ainsi ce que nous désignons par tas est appelé tas stable par P.Grillet.

Dans le chapitre 1, après avoir donné des exemples d'hypertas et bi-hypertas, nous définissons la notion d'hypertas inverse. Etant donnée $\theta \in \mathcal{D}$, nous définissons une application ${}_\theta\Gamma$ de E dans $\mathcal{P}(E)$, en posant

$$\forall x \in E, \qquad y \in {}_\theta\Gamma(x) \iff x \in \theta(y).$$

L'ensemble des applications de la forme ${}_\theta\Gamma$ est un demi-groupe noté $\mathcal{D}'$. L'hypertas $(E, \mathcal{D}')$ est appelé <u>hypertas inverse</u> de $(E, \mathcal{D})$.

Cette construction permet de définir de nouveaux hypertas et bi-hypertas $(H, \mathcal{R}')$, $(H, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$ etc.

A l'origine du chapitre II sont les études des équivalences régulières ou simplifiables de D [14], [16], [26], [32]

Une équivalence ρ définie sur E est dite

$\mathcal{D}$ - compatible, si $x\,\rho\, y,\ u \in \theta(x) \Longrightarrow \exists\, v \in \theta(y)$ tel que $u\,\rho\, v$

<u>quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatible</u>, si $x\,\rho\, y,\ u \in \theta(x),\ v \in \theta(y) \Longrightarrow u\,\rho\, v$

$\mathcal{D}$ - simplifiable, si $u \rho v$, $u \in \theta(x)$, $v \in \theta(y) \Longrightarrow x \rho y$.

Lorsque $(E, \mathcal{D})$ est l'un des hypertas $(H, \mathcal{R})$, $(D, \mathcal{R})$..., ces définitions fournissent les notions classiques d'équivalence régulière ou simplifiable.

On établit que si ρ est une équivalence $\mathcal{D}$- compatible, on peut définir un hypertas quotient noté

$(E, \mathcal{D})_{|\rho}$.

On montre en oütre les points suivants :

Une équivalence est $\mathcal{D}$- simplifiable si et seulement si elle est quasi-fortement $\mathcal{D}'$ - compatible.

La condition pour une équivalence de laisser indivisibles des complexes de E s'interprète en termes de quasi-forte compatibilité.

Nous donnons en outre une construction de la plus fine équivalence quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatible, et nous caractérisons les classes modulo une équivalence quasi-fortement $\mathcal{D}$- compatible.

Tous les résultats obtenus sont appliqués à l'étude des équivalences de D ou de H.

Le chapitre III est consacré à l'étude de parties remarquables de E. Une partie A de E est dite

$\mathcal{D}$ - nette, si $\forall x \in E$, $\mathcal{D} x \cap A \neq \Phi$

$\mathcal{D}$ - fortement nette, si $\forall x, y \in E$, $\exists\, \theta, \theta' \in \mathcal{D}$ tels que

$$\theta(x) \cap A \neq \Phi, \theta \circ \theta'(y) \cap A \neq \Phi$$

$\mathcal{D}$ - génératrice si $E = \mathcal{D} A$

$\mathcal{D}$ - forte, si $\theta(x) \cap A \neq \Phi$, $\theta'(x) \cap A \neq \Phi$, $\theta(y) \cap A \neq \Phi \Longrightarrow \theta'(y) \cap A \neq \Phi$

un $\mathcal{D}$ - idéal, si $\mathcal{D} A \subseteq A$

$\mathcal{D}$ - consistante, si $\mathcal{D} x \cap A \neq \Phi \Longrightarrow x \in A$

On définit tout de suite les $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux ou maximaux, les complexes $\mathcal{D}$ - nets minimaux, etc.

Une partie est $\mathcal{D}$ - nette (resp. est un $\mathcal{D}$ - idéal) si et seulement si elle est $\mathcal{D}'$ - génératrice (resp. si elle est $\mathcal{D}'$ - consistante).

Un complexe distinct de E est un $\mathcal{D}$ - idéal minimal si et seulement si son complémentaire est un $\mathcal{D}'$ - idéal maximal.

Toutes ces définitions s'appliquent à D ou à H. Par exemple, une partie A de H, $\mathcal{L}$ - génératrice est une partie qui est telle que $H = H * A$. Une telle partie est dite génératrice à gauche.

L'étude faite par P. Dubreil [9] des groupes homomorphes à D est à l'origine du chapitre IV.

La notion de groupe est ici remplacée par les suivantes :

$(E, \mathcal{D})$ est dit :

<u>injectif</u>, si $\theta(x) \cap \theta(y) \neq \Phi \Longrightarrow x = y$

<u>stationnaire</u>, si $\theta(x) \cap \theta'(x) \neq \Phi \Longrightarrow \theta = \theta'$

<u>transitif</u>, si $\forall x, y \in E, \quad y \in \mathcal{D} x$.

A étant une partie de E, nous définissons une équivalence $\mathcal{R}_A$ (dite <u>principale</u>) en posant :

$\forall x, y \in E, \quad (x \mathcal{R}_A y) \Longleftrightarrow (\forall \theta \in \mathcal{D}, \quad \theta(x) \cap A \neq \Phi \Longleftrightarrow \theta(y) \cap A \neq \Phi)$.

Nous montrons entre autres la

<u>Proposition</u>

<u>Si A est un complexe de E $\mathcal{D}$ - fort et $\mathcal{D}$ - fortement net, $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$ - compatible, et $(E, \mathcal{D})_{|\mathcal{R}_A}$ est un hypertas transitif et injectif.</u>

Dans le chapitre V, nous caractérisons certains hypertas au moyen de propriétés de leurs équivalences. Ainsi nous montrons la

<u>Proposition</u>

<u>Supposons que $(E, \mathcal{D})$ soit injectif, stationnaire, et vérifie :</u>

$$\forall x \in E, \theta \in \mathcal{D}, \quad \theta(x) \neq \Phi$$

<u>Alors pour que $\mathcal{D}$ soit un groupe de bijections de E, il faut et il suffit que toute équivalence $\mathcal{D}$ - simplifiable soit quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatible.</u>

On déduit de la des résultats relatifs à D.

<u>Proposition</u> (G. Thierrin)[35]

<u>Un demi-groupe simplifiable est un groupe si et seulement si toute équivalence simplifiable à gauche est régulière à gauche.</u>

<u>Proposition</u>

<u>Un demi-groupe simplifiable à gauche et stationnaire à gauche(1) est simple à droite si et seulement si toute équivalence régulière à gauche est simplifiable à gauche.</u>

Dans le chapitre VI nous étudions les complexes $\mathcal{D}$ - nets minimaux et $\mathcal{D}$ - générateurs minimaux de E.

Nous utilisons des techniques de la théorie générale de l'indépendance [1], [38]

Ainsi nous donnons la

<u>Définition</u>

Un complexe A de E est dit <u>$\mathcal{D}$ - libre</u> si

$\forall a, b \in A, \quad a \in \mathcal{D} b \Longrightarrow a = b$.

(1) D est dit <u>stationnaire à gauche</u> s'il vérifie :

$ax = bx \Longrightarrow \forall y \in D, \quad ay = by$

Nous introduisons également dans notre étude l'axiome suivant, dit d'échange :

$\forall x, y \in E, \qquad x \in \mathcal{D}y \implies y \in \mathcal{D}x \cup \{x\}$

Nous montrons alors le

Théorème

Supposons que pour tout $x \in E$, $\mathcal{D}x$ soit non vide. Soit alors Σ la réunion des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Σ est un complexe $\mathcal{D}$ - net de E.

2) Il existe un complexe de E, $\mathcal{D}$ - net minimal.

3) Tout $\mathcal{D}$ - idéal propre de E contient un $\mathcal{D}$ - idéal minimal.

Lorsqu'elles sont réalisées, les complexes de E, $\mathcal{D}$ - nets minimaux sont les complexes de Σ, $\mathcal{D}$ - libres, maximaux. Chacun de ces complexes est équipotent à l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E.

Les résultats de ce chapitre découlent directement ou indirectement de ce théorème. Citons en quelques uns.

a) En faisant $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{R})$, on retrouve les résultats de P. Lefèbvre [26] sur les complexes nets à droite minimaux de D, en particulier, l'équipotence entre un tel complexe, et l'ensemble des idéaux à droite minimaux.

On généralise ces résultats au cas de H, en faisant $(E, \mathcal{D}) = (H, \mathcal{R})$.

Notons cependant une différence importante entre les deux cas, due au fait que la réunion des idéaux à droite minimaux de D, si elle n'est pas vide, est un complexe net à droite (car c'est un idéal bilatère), mais qu'il n'en est pas ainsi dans le cas de H, en général.

b) En appliquant le théorème à l'hypertas $(E, \mathcal{D}')$, on montre, entre autre, l'équipotence entre l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux de E, et tout complexe $\mathcal{D}$ - générateur minimal. Plus précisément, lorsque $(E, \mathcal{D}) = (H, \mathcal{R}')$, on établit la

Proposition

Si $H * H = H$, pour qu'il existe un complexe générateur à droite minimal, il faut et il suffit que tout idéal à droite propre de H soit contenu dans un idéal à droite maximal. Un tel complexe est équipotent à l'ensemble des idéaux à droite maximaux de H.

c) Pour que le tas $(D, \mathcal{R})$ vérifie l'axiome d'échange, il faut et il suffit que D soit simple et possède un idéal à droite minimal. (Il en est ainsi lorsque l'intersection des idéaux à droite maximaux de D est vide). Un tel demi-groupe possède un complexe qui est simultanément net à droite minimal et générateur à droite minimal.

d) Soit W un $\mathcal{D}$ - idéal de E, distinct de E.

On dit qu'un complexe A de E admet W pour $\mathcal{D}$ - résidu si on a

$W = \{x \in E : \mathcal{D}x \subseteq E - A\}$

On peut étudier les complexes de E - W qui admettent W pour $\mathcal{D}$ - résidu et qui sont minimaux pour cette condition(1) de la façon suivante : on associe à tout élément θ de $\mathcal{D}$, une application θ_W de E - W dans $\mathcal{P}(E - W)$ de la façon suivante :

$$\forall x \in E - W, \qquad \theta_W(x) = \theta(x) \cap (E - W).$$

L'ensemble des applications de la forme θ_W est un demi-groupe noté $\mathcal{D}_W$. Les complexes de E - W, $\mathcal{D}_W$ - nets, sont ceux qui admettent W pour $\mathcal{D}$ - résidu.

e) Supposons que E possède un complexe $\mathcal{D}$ - net minimal K, et un complexe $\mathcal{D}$ - générateur minimal G. On peut, dans certains cas, comparer card(K) et card(G), soit, les cardinaux de l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux et de l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux.

Par exemple, on a card(K) ≤ card(G), si la condition suivante est vérifiée :

$$x \in \mathcal{D}u,\ y \in \mathcal{D}u \Longrightarrow \mathcal{D}x \cap \mathcal{D}y \neq \Phi$$

Dans ce cas, il y a dans E, moins de $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux que de $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux.

On déduit de là, entre autres, la

Proposition

Si D possède un complexe net à droite minimal et un complexe générateur à droite minimal(2), et vérifie la condition

$x \in uD,\ y \in uD \Longrightarrow xD \cap yD \neq \Phi$ (Rd)

il y a moins d'idéaux à droite minimaux que d'idéaux à droite maximaux.

Remarque

Soit N la réunion des idéaux à droite minimaux de D (Si N est non vide, c'est le noyau de D c'est-à-dire un idéal bilatère minimum de D).

Supposons qu'il existe un homomorphisme de D sur N, dont la restriction à N est l'identité.

(On dit dans ce cas que N est un rétract algébrique de D). Dans ce cas le demi-groupe vérifie la condition (R_d).

A l'origine du chapitre VII sont les études de A.H. Clifford et D.D. Miller du noyau et des éléments zéroïds d'un demi-groupe [2], [3], [4]. Nous entreprenons ici une étude similaire, en nous plaçant dans le cadre plus général des bi-hypertas. Nous donnons les

(1) Dans le cas où $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{R})$, ces complexes sont les complexes W - minimaux à droite de P. Lefèbvre. [26]

(2) Ceci est par exemple vérifié si D est fini (ou compact) et si $D^2 = D$

Définitions

On appelle idéal-bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, une partie de E qui est simultanément un $\mathcal{D}_1$ - idéal et un $\mathcal{D}_2$ - idéal.

L'intersection des idéaux bilatères propres de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est appelée noyau de ce bi-hypertas.

$(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est dit régulier, si un $\mathcal{D}_1$ - idéal propre et un $\mathcal{D}_2$ - idéal propre ont toujours une intersection non vide.

D'autre part, nous introduisons certaines conditions susceptibles d'être vérifiées par $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, notamment

$x \in \mathcal{D}_2\ u,\ y \in \mathcal{D}_2\ u \Longrightarrow x \in \mathcal{D}_1\ y \cup \{y\}$ (S_{21})

Ces notions d'appliquent à H ou D. Ainsi le bi-hypertas $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie la condition S_{21}, si et seulement si H possède la propriété suivante :

$x \in a_1 * \ldots * a_n,\ y \in a_1 * \ldots * a_n \Longrightarrow x \in (y * H) \cup \{y\}$ (D_2)

On définit de même une condition D_1

On a le

Théorème

Supposons que $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ vérifie la condition S_{21}, et que la famille $\mathcal{F}_1$ des $\mathcal{D}_1$ - idéaux minimaux de E soit non vide. Alors $\bigcup_{L \in \mathcal{F}_1} L$ est un idéal bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$; c'en est même le noyau si le bi-hypertas est régulier.

Citons quelques applications de ce théorème

1. La proposition suivante généralise des résultats de A.H. Clifford et D.D. Miller [2]. [4]

Proposition

Supposons que H vérifie les conditions D_1 et D_2

a) Si H possède des idéaux à droite minimaux et des idéaux à gauche minimaux, la réunion des premiers coïncide avec la réunion des seconds et avec le noyau de H.

b) Si H possède des éléments nets à droite et des éléments nets à gauche, l'ensemble des premiers coïncide avec l'ensemble des seconds et avec le noyau de H.

2. Soit I_1(resp I_2) l'ensemble des $x \in H$ tels que $H = x * H$ (resp $H = H * x$). On a le

Théorème

Si H est simplifiable d'un côté et si I_1 et I_2 sont non vides, on a $I_1 = I_2$; I_1 est un complexe consistant de H, c'est également un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition définie par

$\forall x, y \in I_1, \qquad x \otimes y = (x * y) \cap I_1$

Pour montrer ce théorème, on utilise entre autres le résultat suivant : [22]
Tout hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe.

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur P.DUBREIL, dont les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués dès le début de ma recherche m'ont été infiniment précieux.
Je suis également très heureux de remercier Messieurs les Professeurs C.PISOT et L.LESIEUR pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu me porter, Messieurs les Professeurs M.KRASNER et J.NEVEU qui ont accepté de faire partie de mon Jury, mes collègues de Brest enfin, et notamment Monsieur le Professeur J. QUERRE, pour l'appui qu'ils n'ont cessé de me prodiguer.
Je remercie enfin Mademoiselle THIBAULT de la Faculté des Sciences d'Amiens qui a dactylographié mon manuscrit, ainsi que Monsieur le Professeur GENIN de la faculté des Sciences de Brest, Directeur de l'école Nationale d'ingénieurs de Brest, pour l'aide matérielle qu'il a bien voulu me fournir.

Notations

Dans cet exposé, nous utiliserons systématiquement les notations suivantes :
D est un demi-groupe, H est un demi-hypergroupe(1), G est un groupoïde.
$(E, \mathcal{D})$ est un hypertas(1), $(E, \mathcal{D}')$(resp. $(E,\mathcal{D}'')$ est son hypertas inverse(1) (resp. stable(1). $(E,\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ est un bi-hypertas(1). $(E,\mathcal{D}'_1,\mathcal{D}'_2)$ (resp. $(E,\mathcal{D}''_1, \mathcal{D}''_2)$ est son bi-hypertas inverse(1) (resp. stable(1)

(1) Le sens de ces expressions sera défini au chapitre I

Chapitre I

Généralités.

On appelle hypertas la donnée d'un ensemble E, et d'un demi-groupe $\mathfrak{D}$ (1) d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Une telle donnée est notée $(E,\mathfrak{D})$.

Un hypertas $(E,\mathfrak{D})$ est appelée pseudo-tas (resp. tas) si, quelque soient $\theta \in \mathfrak{D}$, $x \in E$, $\theta(x)$ a au plus un élément (resp. exactement un élément).

On appelle bi-hypertas la donnée d'un ensemble E et de deux demi-groupes $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$ tels que

$\forall\, \theta_1 \in \mathfrak{D}_1,\ \theta_2 \in \mathfrak{D}_2, \qquad \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$

Une telle donnée est notée $(E,\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2)$.

On définit immédiatement la notion de bi-tas.

Exemples

a) Soit F un ensemble dont ρ est une relation d'ordre ou d'équivalence. Soit θ_ρ la fermeture associée à ρ. Elle est définie par :

$\forall y \in F, \qquad \theta_\rho(y) = \{x \in F \text{ tels que } x \,\rho\, y\}.$

L'ensemble $\{\theta_\rho\}$ est un demi-groupe, et donc $(F, \{\theta_\rho\})$ est un hypertas.

b) Rappelons la définition d'un demi-hypergroupe[20] et d'un hypergroupe.[8]

Définitions

On appelle demi-hypergroupe un ensemble H muni d'une loi de composition qui associe à tout couple d'éléments de H, x et y, un complexe (c'est-à-dire une partie non vide) de H, noté $x * y$, et telle que l'on ait

$\forall x, y, z \in H, \qquad x *(y * z) = (x * y)* z.$

H est appelé hypergroupe si

$\forall x,y \in H, \qquad \exists\, z,z' \in H$ tels que $x \in (y * z) \cap (z' * y)$

En général, nous noterons à l'aide de l'étoile $*$ la loi de composition de H. Mais il nous arrivera de faire exception à cette règle, par exemple dans ce qui suit : Soit S un demi-groupe, ou un demi-hypergroupe, ou un groupoïde. (la loi de composition étant notée dans tous les cas multiplicativement).

(1) Etant données deux applications θ_1, θ_2 de E dans $\mathcal{P}(E)$, leur composée $\theta_1 \circ \theta_2$ (notée aussi $\theta_1\theta_2$) est l'application définie par

$\forall y \in E, \qquad \theta_1 \circ \theta_2(y) = \bigcup_{x \in \theta_2(y)} \theta_1(x)$

On appelle <u>translation à gauche</u> de S toute application ζ de S dans $\mathcal{P}(S)$ définie par

$\forall y \in S, \quad \zeta(y) = xy$ (x élément fixé de S).

On définit de même les translations à droite de S.

On désigne par $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) le demi-groupe engendré par les translations à gauche (resp. à droite) de S, par $\mathcal{M}$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$.

$(D, \mathcal{R})$, $(D, \mathcal{L})$, $(D, \mathcal{M})$, $(G, \mathcal{R})$, $(G, \mathcal{L})$, $(G, \mathcal{M})$ sont des tas, $(H, \mathcal{R})$, $(H, \mathcal{L})$, $(H, \mathcal{M})$ sontdes hypertas, $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ est un bi-tas, $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ est un bi-hypertas.

Nous supposons maintenant que S est un demi-groupe, ou un demi-hypergroupe.

Nous désignons par $\mathcal{M}_1$ le demi-groupe engendré par les applications ζ de S dans $\mathcal{P}(S)$ du type suivant :

$\forall y \in S, \quad \zeta(y) = x\,y\,z$ (x, z éléments fixés de S).

Soit d'autre part M un complexe multiplicativement fermé de S. (Cela signifie que m n est contenu dans M dès que m et n sont deux éléments de M).

Nous notons $\mathcal{L}_M$ le demi-groupe engendré par les translations à gauche de S, définies par des éléments de M, c'est-à-dire par les translations à gauche ζ de S définies par

$\forall y \in S, \quad \zeta(y) = m\,y$ (m élément fixé de M).

On définit de même $\mathcal{R}_M$, $\mathcal{M}_M$, $\mathcal{M}_{1M}$.

Notons que si N est un autre complexe de S multiplicativement fermé, $(S, \mathcal{R}_M, \mathcal{L}_N)$ est un bi-hypertas.

On peut également associer à M et N un autre hypertas, en considérant le demi-groupe engendré par les applications ζ de S dans $\mathcal{P}(S)$ définies par

$\forall y \in S, \quad \zeta(y) = m\,y\,n$ (m élément fixé de M, n élément fixé de N)

c) Nous désignons par $\mathcal{P}$ le demi-groupe constitué par les applications ζ de D dans D, définies par

$\forall y \in D, \quad \zeta(y) = y^n$ (n entier positif fixé)

$(D, \mathcal{P})$ est un tas.

d) Nous désignons par $\mathcal{N}$ le demi-groupe engendré par les applications ζ de D dans $\mathcal{P}(D)$ définies par

$\forall y \in D, \quad \zeta(y) = \{uy, y\,v\}$ (u, v éléments fixés de D).

$(D, \mathcal{N})$ est un hypertas.

e) Soit G' un quasi-groupe.

<u>Notation</u>

Etant donnés des éléments $x_1, \dots x_n$ de G', et un groupement g des indices 1, ... n, respectant leur ordre, le produit des x_i groupés suivant g est noté

$$\prod_{\substack{i=1\\(g)}}^{n} x_i$$

Une partie A de G' est dite associative si quelque soient les éléments $x_1,\dots,x_n$ de G', et les groupements g et g' des indices 1,... n, respectant leur ordre, on a :

$$\prod_{\substack{i=1\\(g)}}^{n} x_i \in A \Longrightarrow \prod_{\substack{i=1\\(g')}}^{n} x_i \in A$$

(En particulier, on a :

$$a(bc) \in A \Longrightarrow (ab)c \in A).$$

On montre [20] que l'ensemble des parties associatives de G' est une famille de Moore. Si θ est la fermeture associée, on établit que l'on a :

$\forall a, b \in G'$, $\quad \theta(ab) = a\,\theta(b) = \theta(a)b.$

Donc $(G', \mathcal{R}, \{\theta\})$ et $(G', \mathcal{L}, \{\theta\})$ sont des bi-hypertas.

f) Supposons D ordonné (L'ordre est noté $\leq$).

Etant donnés $A \subseteq D$, $x \in D$, on appelle quasi-résiduel à droite de A par x, la partie $< A \,.\!\cdot\, x >$ de D définie par :

$< A \,.\!\cdot\, x > \; = \{u \in D$ tel que $\exists\, a \in A$, vérifiant $x\,u \leq a\}$.

On définit de même le symbole $< A \,\cdot\!.\, x >$.

Nous désignons par $\mathcal{N}_d$ l'ensemble des applications de D dans $\mathcal{P}(D)$ de la forme :

$y \longmapsto \; < y \,.\!\cdot\, x >$ (x élément fixé de D).

On définit de même $\mathcal{N}_g$. On montre [13] que $\mathcal{N}_d$ et $\mathcal{N}_g$ sont des demi-groupes, et que $(D, \mathcal{N}_d, \mathcal{N}_g)$ est un bi-hypertas.

Toutes les notations qui viennent d'être introduites ici seront systématiquement employées dans la suite de cet exposé. Par exemple, on parlera sans précisions supplémentaires du tas $(D, \mathcal{R})$ etc.

<u>Hypertas et bi-hypertas inverse</u>

Nous allons associer à $(E, \mathcal{D})$ (resp. à $E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$) un hypertas (resp. un bi-hypertas).

Soit $\theta \in \mathcal{D}$. Nous définissons une application, notée ${}_\theta\Gamma$, de E dans $\mathcal{P}(E)$, en posant :

$\forall x, y \in E, \qquad y \in {}_\theta\Gamma(x) \Longleftrightarrow x \in \theta(y).$

Si θ' est un autre élément de $\mathcal{D}$, on a

$$(\theta' \circ \theta)^\Gamma = \theta^\Gamma \circ \theta'^\Gamma$$

Nous notons $\mathcal{D}'$ l'ensemble des applications de E dans $\mathcal{P}(E)$ de la forme θ^Γ. On vérifie tout de suite que $\mathcal{D}'$ est un demi-groupe anti-isomorphe à $\mathcal{D}$.

L'hypertas $(E, \mathcal{D}')$ s'appelle hypertas inverse de $(E, \mathcal{D})$.
Notons que l'hypertas inverse de $(E, \mathcal{D}')$ est $(E, \mathcal{D})$.
Designons maintenant par $\mathcal{D}''$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$. L'hypertas $(E, \mathcal{D}'')$ est appelé hypertas stable de $(E, \mathcal{D})$.
Considérons enfin $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$. On peut définir, d'après ce qui précède, les hypertas inverses $(E, \mathcal{D}'_1)$ et $(E, \mathcal{D}'_2)$ (resp. les hypertas stables $(E, \mathcal{D}''_1)$ et $(E, \mathcal{D}''_2)$).
On vérifie tout de suite que $(E, \mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ (resp. $(E, \mathcal{D}''_1, \mathcal{D}''_2)$) est un bi-hypertas. On l'appelle bi-hypertas inverse de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ (resp. bi-hypertas stable de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$).
En appliquant ces opérations aux exemples donnés plus haut, on obtient de nouveaux hypertas et bi-hypertas, qui nous seront utiles par la suite, notamment $(D, \mathcal{R}')$, $(D, \mathcal{L}')$, $(D, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$, $(H, \mathcal{R}')$, $(H, \mathcal{L}')$, $(H, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$ etc.

Morphismes des hypertas

On peut définir sur la classe des hypertas(1) une structure de catégorie.

Définition

On appelle morphisme de l'hypertas $(E, \mathcal{D})$ dans l'hypertas $(E_1, \mathcal{D}_1)$, tout couple (f, φ) où f est une application de E dans E_1, φ un homomorphisme du demi-groupe $\mathcal{D}$ dans le demi-groupe $\mathcal{D}_1$, tel que l'on ait
$\forall\ \theta \in \mathcal{D},\ x \in E \qquad f(\theta(x)) = \varphi(\theta)\,(f(x))$.
On montre sans peine que la composée de deux morphismes peut être définie (c'est un morphisme !). On définit tout de suite les isomorphismes.

Opérations de résiduation dans $(E, \mathcal{D})$

Nous notons J l'application canonique de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$.
Soient $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, $\Delta \subseteq \mathcal{D}$. Nous posons :

$$\Delta(A) = \bigcup_{\substack{x \in A \\ \theta \in \Delta}} \theta(x) \qquad \text{(Cette partie sera parfois notée } \Delta A\text{).}$$

$$A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\because}} B = \{\theta \in \mathcal{D} \text{ tel que } \theta(B) \cap A \neq \Phi\}.$$

$$A \underset{\mathcal{D}}{\overset{\bullet}{\because}} B = \{\theta \in \mathcal{D} \text{ tel que } \theta(B) \subseteq A\}.$$

$$A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\therefore}} \Delta = \{x \in E \text{ tel que } \theta(x) \cap A \neq \Phi \text{, quelque soit } \theta \in \Delta\}.$$

$$A \underset{\mathcal{D}}{\overset{\bullet}{\therefore}} \Delta = \{x \in E \text{ tel que } \Delta x \subseteq A\}.$$

(1) Et aussi Sur celle des bi-hypertas. Pour ne pas alourdir l'exposé, ce cas n'est pas considéré ici.

Nous ne donnons pas les propriétés -très simples à établir- de ces parties. Plus importante est la transformation par hypertas inverse. On a :

$$J\,(A \underset{\mathcal{D}}{\therefore} B) = B \underset{\mathcal{D}}{\therefore} A$$

$$A \underset{\mathcal{D}}{\therefore} \Delta = \bigcap_{\Gamma \in J(\Delta)} \Gamma\,(A)$$

$$J(A \underset{\mathcal{D}}{\because} B) = (E - B) \underset{\mathcal{D}'}{\because} (E - A)$$

$$A \underset{\mathcal{D}}{\because} \Delta = E - \Big((J(\Delta))\ (E - A) \Big).$$

Chapitre II.

Equivalences compatibles ou simplifiables

Notations et conventions

a) Nous notons $\tilde{\mathscr{D}}$ le demi-groupe $\mathscr{D}$ auquel on adjoint l'application identique de E.

b) Nous appellerons complexe de (E, $\mathscr{D}$) un complexe de E. De même, nous dirons qu'une relation binaire (par exemple une équivalence) est définie sur (E, $\mathscr{D}$) si elle est définie sur E. Nous parlerons alors d'une relation binaire de (E, $\mathscr{D}$) ou de E.

c) Les opérations de réunion et d'intersection du treillis des relations d'équivalence sont respectivement notées $\vee$ et $\wedge$. La relation d'ordre naturellement définie sur ce treillis est notée $\subseteq$. (deux équivalences R et R' vérifient $R \subseteq R'$ si R implique R').

d) Soit F un ensemble sur lequel est défini une relation binaire ρ. Nous étendons ρ à $\mathscr{P}(F)$ de deux façons, en posant pour toutes parties A, B de F :

$A \bar{\rho} B$ si $\forall a \in A, \exists\, b \in B$ tel que $a \rho b$, et $\forall b \in B, \exists a \in A$ tel que $a \rho b$.

$A \bar{\bar{\rho}} B$ si $\forall a \in A, b \in B, \quad a \rho b$.

On a $A \bar{\bar{\rho}} \emptyset$, quelque soit $A \subseteq F$.

1) - Equivalences $\mathscr{D}$ - compatibles (1)

Définition

Une équivalence R de E est dite $\mathscr{D}$ - compatible si

$\forall \theta \in \mathscr{D}, \qquad x R y \Longrightarrow \theta(x) \bar{R} \theta(y)$.

Nous notons $\mathscr{F}_r$ l'ensemble des équivalences $\mathscr{D}$ - compatibles.

Exemples

a) Soit F un ensemble dont R et ρ sont des équivalences. Soit θ_ρ la fermeture associée à ρ. Posons $\mathscr{D}' = \{\theta_\rho\}$. R est $\mathscr{D}'$- compatible si et seulement si R permute avec ρ.

b) Les équivalences $\mathscr{R}$ - compatibles de D sont celles qui sont régulières à droite. On interprète de même les équivalences $\mathscr{L}$ - compatibles. Si M est sous demi-groupe de D, on interprète très facilement les équivalences $\mathscr{R}_M$- compatibles de D.

(1) Dans de précédents exposés nous avons employé le mot "régulier" au lieu du mot "compatible".

c) Nous dirons qu'une équivalence R définie sur H est <u>régulière à droite</u> si

$\forall a \in H, \qquad x\,R\,y \Longrightarrow (x * a)\ \overline{R}\ (y * a).$

Les équivalences $\mathcal{R}$ - compatibles de H sont celles qui sont régulières à droite. On interprète de même les équivalences $\mathcal{L}$ - compatibles de H ainsi que les équivalences $\mathcal{M}$ - compatibles.

d) Supposons un moment que $\mathcal{D}$ soit un demi-groupe engendré par un ensemble Δ d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Une équivalence R de E est $\mathcal{D}$ - compatible si et seulement si :

$\forall \theta \in \Delta, \qquad x\,R\,y \Longrightarrow \theta(x)\ \overline{R}\ \theta(y).$

e) Soit ρ une relation binaire réflexive et symétrique, définie sur E, vérifiant :

$\forall \theta \in \mathcal{D}, \qquad x\,R\,y \Longrightarrow \theta(x)\ \overline{\rho}\ \theta(y).$

La fermeture transitive de ρ est alors une équivalence $\mathcal{D}$ - compatible.

<u>Remarque</u>

Nous définissons sur E une équivalence O en posant

$x\,O\,y$ si $\theta(x)$ et $\theta(y)$ sont simultanément vides, quelque soit $\theta \in \mathcal{D}$.

Si R est une équivalence $\mathcal{D}$ - compatible de E, on a $R \subseteq O$.

<u>Premier théorème d'isomorphisme</u>

Les notions de morphisme d'un hypertas et d'équivalence $\mathcal{D}$ - compatible sont liées par la

<u>Proposition 1</u> -

a) <u>Si R est une équivalence $\mathcal{D}$ - compatible de E, on peut définir canoniquement un demi-groupe $\overline{\mathcal{D}}$ d'applications de $E/_R$ dans $\mathcal{P}(E/_R)$ de telle sorte qu'il existe un morphisme de $(E, \mathcal{D})$ dans $(E/_R, \overline{\mathcal{D}})$.</u>

<u>$(E/_R, \overline{\mathcal{D}})$ est noté $(E, \mathcal{D})/_R$.</u>

b) <u>Si (f,φ) est un morphisme de $(E, \mathcal{D})$ dans $(E^\bullet, \mathcal{D}^\bullet)$ tel que f et φ soient surjectives, l'équivalence R associée à f est $\mathcal{D}$ - compatible, et les hypertas $(E, \mathcal{D})/_R$ et $(E^\bullet, \mathcal{D}^\bullet)$ sont isomorphes.</u>

<u>Démonstration</u>

Nous nous bornons à quelques indications, la démonstration étant triviale.

a) Soit f l'application de E sur $E/_R$. Soit $\theta \in \mathcal{D}$. On définit une application $\overline{\theta}$ de $E/_R$ dans $\mathcal{P}(E/_R)$ en posant

$\forall f(x) \in E/_R, \quad \overline{\theta}(f(x)) = f(\theta(x)).$

($\overline{\theta}(f(x))$ est indépendant du choix du représentant x de la classe $f(x)$. Nous désignons par $\overline{\mathcal{D}}$ l'ensemble des $\overline{\theta}$, par φ l'application de $\mathcal{D}$ dans $\overline{\mathcal{D}}$, $\theta \longmapsto \overline{\theta}$. $\overline{\mathcal{D}}$ est un demi-groupe, (f,φ) est un morphisme d'hypertas.

b) Montrons simplement que R est $\mathfrak{D}$ - compatible. Soient x, y des éléments de E équivalents modulo R (c'est-à-dire vérifiant $f(x) = f(y)$). Soient $\theta \in \mathfrak{D}$, $u \in \theta(x)$.

On a $f(\theta(x)) = \varphi(\theta)(f(x)) = \varphi(\theta) f(y) = f(\theta(y))$.

Il existe donc $u' \in \theta(y)$ tel que $f(u) = f(u')$. etc.

<u>Proposition 2.</u>

<u>$\mathcal{F}'_n$ est un ensemble $\vee$ - stable, donc un treillis complet. Son plus fin élément est l'égalité. Son plus grossier élément est l'équivalence universelle si $(E, \mathfrak{D})$ vérifie la condition</u> (1)

<u>$\forall \theta \in \mathfrak{D}$, $x \in E$, $\theta(x) \neq \Phi$.</u>

La démonstration, très simple, découle de la forme de la borne supérieure d'une famille d'équivalences de E, et de l'exemple e) de la page 19.

<u>Remarque</u>

Soit R une équivalence de E. Il n'existe pas, en général, de construction explicite de la plus grossière des équivalences de E plus fines que R (équivalence notée $\bar{R}$).

Toutefois, si $\theta(x)$ est un ensemble fini (peut-être vide) quelque soit $\theta \in \mathfrak{D}$, $x \in E$, on a

$$\bar{R} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} R_n$$

les R_n étant des relations binaires définies sur E par récurrence, de la façon suivante :

$R_1 = R$;

$x \, R_{n+1} \, y \iff \forall \theta \in \tilde{\mathfrak{D}}, \quad \theta(x) \, \bar{R}_n \, \theta(y)$.

(On a

$R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots R_n \supseteq R_{n+1} \supseteq \dots$)

2) - <u>Equivalences $\mathfrak{D}$ - simplifiables</u>.

<u>Définition</u>

Une équivalence R de E est dite $\mathfrak{D}$ - simplifiable si

$$u \, R \, v, \; u \in \theta(x), \; v \in \theta(y) \implies x \, R \, y$$

Nous notons $\mathcal{F}'_s$ l'ensemble des équivalences $\mathfrak{D}$- simplifiables (On voit tout de suite que $\mathcal{F}'_s$ est $\wedge$ - stable).

On peut interpréter ainsi les équivalences $\mathfrak{D}$ - simplifiables.

(1) Un hypertas vérifiant cette condition est dit <u>plein</u>.

Définition

$(E, \mathcal{D})$ est dit injectif si

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $x, y \in E$, $\theta(x) \cap \theta(y) \neq \Phi \Longrightarrow x = y$.

On vérifie tout de suite que pour qu'une équivalence R, $\mathcal{D}$ - compatible, soit $\mathcal{D}$ - simplifiable, il faut et il suffit que $(E, \mathcal{D})/_R$ soit un hypertas injectif.

Exemples d'équivalences $\mathcal{D}$ - simplifiables

Une équivalence R de H est dite simplifiable à droite si

$u \in (x * a)$, $v \in (y * a)$, $u \; R \; v \Longrightarrow x \; R \; y$.

Les équivalences $\mathcal{R}$ - simplifiables de H sont celles qui sont simplifiables à droite.

On interprète de même les équivalences $\mathcal{L}$ - simplifiables de H, et on particularise ces remarques au cas de D

3) - Equivalence $\mathcal{D}$ - fortement compatibles.

Définitions

Une équivalence R de E est dite

quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatible si

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $x \; R \; y \Longrightarrow \theta(x) \; \overline{\overline{R}} \; \theta(y)$.

fortement $\mathcal{D}$ - compatible si

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $x \; R \; y \Longrightarrow \theta(x) \overline{\overline{R}} \theta(y)$ et $\theta(x) \; \overline{R} \; \theta(y)$.

Nous désignons par $\mathcal{F}'_r$ (resp. $\mathcal{F}''_r$) l'ensemble des équivalences quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatibles (resp. fortement $\mathcal{D}$ - compatibles). On a $\mathcal{F}''_r = \mathcal{F}_r \cap \mathcal{F}'_r$.

Remarquons que si $(E, \mathcal{D})$ est plein, $\mathcal{F}'_r = \mathcal{F}''_r$.

Les équivalences appartenant à $\mathcal{F}'_r$ jouent un rôle important, comme nous allons le voir.

Exemples

a) Soit F un ensemble dont ρ et R sont des équivalences. Soit θ_ρ la fermeture associée à ρ. Posons $\mathcal{D} = \{\theta_\rho\}$. Pour que R soit fortement $\mathcal{D}$ - compatible, il faut et il suffit que l'on ait $\rho \subseteq R$.

b) Supposons $\mathcal{D}$ engendré par un ensemble Δ d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$. Pour qu'une équivalence de E, R soit quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatible, il faut et il suffit que l'on ait

$\forall \theta \in \Delta$, $x \; R \; y \Longrightarrow \theta(x) \; \overline{\overline{R}} \; \theta(y)$.

c) Soit F un ensemble dont $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes. Pour tout $i \in I$, nous définissons une application θ_i de F dans $\mathcal{P}(F)$ en posant :

$$\theta_i(x) = \begin{cases} \{x \text{ si } x \in E - A_i\} \\ \{A_i \text{ si } x \in A_i\} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{D}'$ le demi-groupe engendré par les θ_i. Pour qu'une équivalence R de E soit fortement $\mathcal{D}'$ - compatible, il faut et il suffit qu'elle laisse les complexes A_i indivisibles.

d) Une équivalence R définie sur H est dite <u>fortement régulière à droite</u> si

$x \, R \, y \implies (x * a) \, \bar{\bar{R}} \, (y * a)$.

Les équivalences fortement $\mathcal{R}$ - compatibles de H sont celles qui sont fortement régulières à droite.

e) Soit θ la fermeture associative [20] associée à G. Posons $\mathcal{D}^{\bullet} = \{\theta\}$. Une équivalence R de G est fortement $\mathcal{D}'$ - compatible si et seulement si, quelque soient les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de G et les groupements g et g' des indices $1, \ldots, n$, respectant leur ordre, les produits des x_i suivant les groupements g et g' sont équivalents modulo R.

(On a, en particulier : (ab)c R a(bc), quelque soient a,b, c $\in$, G).

De telles équivalences sont dites <u>associatives.</u> [20]

f) Si $(E, \mathcal{D})$ est un tas, $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}'_r = \mathcal{F}''_r$.

g) Si $R \in \mathcal{F}''_r$, $(E, \mathcal{D})/_R$ est un pseudo-tas. Inversement si (f,φ) est un morphisme de $(E, \mathcal{D})$ dans un pseudo-tas $(E^{\bullet}, \mathcal{D}^{\bullet})$, l'équivalence associée à f est fortement $\mathcal{D}$ - compatible.

h) Cet exemple est important car il permet de ramener l'étude des équivalences simplifiables à celles des équivalences quasi-fortement compatibles. Plus précisément, on a les résultats suivants :

<u>Les équivalences $\mathcal{D}'$ - simplifiables sont celles qui sont quasi fortement $\mathcal{D}$ - compatibles.</u>

<u>Les équivalences $\mathcal{D}$ - simplifiables et quasi-fortement $\mathcal{D}$ - compatibles sont celles qui sont quasi-fortement $\mathcal{D}''$ - compatibles.</u>

i) Les propriétés de régularité et de simplifiabilité des équivalences du demi-groupe D sont donc des propriétés de quasi-forte compatibilité. Nous donnons un tableau qui fournit le demi-groupe d'application que l'on doit considérer lorsque l'on veut ramener une propriété d'équivalence de D à une propriété de quasi-forte compatibilité. Ce tableau est évidemment incomplet, on pourrait aussi considérer le cas de H.

<u>Propriété</u>	<u>Demi-groupe d'applications à considérer</u>
Régularité à droite	$\mathcal{R}$
Simplifiabilité à droite	$\mathcal{R}'$
Régularité à droite et Simplifiabilité à droite	$\mathcal{R}''$
Régularité	$\mathcal{M}$
Simplifiabilité	$\mathcal{M}'$
etc.	

j) Soit ρ une relation binaire réflexive, symétrique de E, vérifiant $\forall\theta\in \mathcal{D}$, $x\rho y \Longrightarrow \theta(x) \overline{\overline{\rho}}\ \theta(y)$.

On ne peut en général affirmer que la fermeture transitive appartienne à $\mathcal{F}_r''$. Il en est cependant ainsi si $(E,\mathcal{D})$ est plein. On peut se demander si, moyennant certaines hypothèses simples, $(E,\mathcal{D})$ n'est pas plein lorsque la fermeture transitive de ρ appartient à $\mathcal{F}_r''$. A cette interrogation sont liées la proposition et la conjecture suivantes :

Proposition 3

Si D est abélien et simplifiable, et si la fermeture transitive de toute relation binaire réflexive, symétrique et simplifiable, est une équivalence simplifiable, alors D est un groupe.

Démonstration

Supposons que D ne soit pas un groupe. Alors il existe $a, u \in$ D tels que $u \notin (aD) \cup \{a\}$. On a alors $a^2 \neq a$.

Soit ρ_1 la relation symétrique et réflexive définie sur D par l'égalité et $a^2\ \rho_1\ u$, $a^3\ \rho_1\ u$.

Soit ρ la relation définie par

$(x\ \rho\ y) \Longleftrightarrow (x\ \rho_1\ y$, ou il existe $\alpha \in$ D tel que $\alpha\ x\ \rho_1\ \alpha\ y)$.

ρ_1 est réflexive, symétrique, simplifiable. Sa fermeture transitive R n'est pas simplifiable, car on a a^2 R a^3, mais pas a R a^2 cq fd.

Conjecture

Si D est simplifiable, et si la fermeture transitive de toute relation binaire réflexive symétrique, simplifiable à gauche, est une équivalence simplifiable à gauche, alors D est simple à droite (1)

Etude des ensembles $\mathcal{F}_r'$ et $\mathcal{F}_r''$.

Nous ne donnerons aucune démonstration des propositions suivantes, celles-ci étant évidentes.

Proposition 4

$\mathcal{F}_r'$ est Λ - stable, et contient l'équivalence universelle. C'est donc un treillis complet.

Nous allons maintenant donner la construction du plus fin élément de $\mathcal{F}_r'$. Bien entendu, cette construction permet d'obtenir la plus fine équivalence simplifiable ou régulière de D (ou de H), laissant éventuellement indivisibles certains complexes. [26],[32].

Proposition 5

Le plus fin élément de $\mathcal{F}_r'$ est $\rho = \bigvee_{n=1}^{\infty} \rho_n$, où ρ_n est une relation binaire appartenant à la suite $\rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \dots \rho_n \subseteq \dots$, définie par récurrence ainsi :

(1) c'est-à-dire ne possède pas d'idéal propre à droite.

ρ_1 est l'égalité

$(x \, \rho_{2n} \, y) \iff (\exists u, v \in E, \theta \in \tilde{\mathcal{D}}$ tels que $x \in \theta(u), y \in \theta(v), u \, \rho_{2n-1} v)$

ρ_{2n+1} est la fermeture transitive de ρ_{2n}.

Si $(E, \mathcal{D})$ est plein, ρ est la fermeture transitive de ρ_2.

Proposition 6

Si $\mathcal{F}''_r$ n'est pas vide, c'est un ensemble $\vee$ - stable et $\wedge$ - stable.

La proposition suivante permet de caractériser les éléments de $\mathcal{F}''_r$; elle montre, en outre, le comportement de $\mathcal{F}''_r$ par rapport à $\mathcal{F}_r$ et $\mathcal{F}'_r$.

Proposition 7 (1)

a) Pour qu'une équivalence R appartienne à $\mathcal{F}''_r$, il faut et il suffit que l'on ait : $R \subseteq O$, $R \in \mathcal{F}'_r$.

b) $\forall R \in \mathcal{F}''_r$, $R_1 \in \mathcal{F}'_r$, $\quad R_1 \subseteq R \implies R_1 \in \mathcal{F}''_r$.

$\forall R \in \mathcal{F}_r$, $R_1 \in \mathcal{F}'_r$, $\quad R_1 \subseteq R \implies R \in \mathcal{F}''_r$.

c) Pour que $\mathcal{F}''_r$ soit non vide, il faut et il suffit que le plus fin élément de $\mathcal{F}'_r$, ρ, vérifie $\rho \subseteq O$.

d) $\forall R \in \mathcal{F}_r$, $R_1 \in \mathcal{F}'_r$, $\quad R \cap R_1 \in \mathcal{F}'_r$.

Proposition 8

Une condition nécessaire pour que $\mathcal{F}''_r$ soit non vide est que

$$\forall \theta \in \mathcal{D}, u \in E, \qquad x \in \theta(u), \ y \in \theta(u) \implies x \, O \, y.$$

Cette condition est suffisante lorsque $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{L}')$.

Indiquons comment on montre la suffisance de la condition.

Notation

Si $a, b \in D$, nous posons $a \backslash b$ si $b \in aD$.

On peut interpréter facilement l'équivalence O ; On a :

$(x \, O \, y) \iff (\forall u \in D, \quad u \backslash x \iff u \backslash y)$.

(Dans le cas où D possède une unité à droite, O coïncide avec l'équivalence de Green à droite).

La condition $x, y \in \theta(u) \implies x \, O \, y$, s'écrit :

$$ax = ay, \ u \backslash x \implies u \backslash y$$

Pour montrer que $\mathcal{F}''_r$ est non vide, lorsque cette condition est réalisée, il suffit-en vertu de la proposition 7.c)- de montrer que la plus fine équivalence simplifiable à gauche est plus fine que O.

(1) Cette proposition appliquée au cas où $(E, \mathcal{D})$ est l'hypertas associé à une relation d'équivalence de E redonne certains résultats de [12]

Cette équivalence s'écrit sous la forme $\bigvee_{n=1}^{\infty} \rho_n$, où ρ_1 est l'égalité,

ρ_{2n+1} est la fermeture transitive de ρ_{2n}, et ρ_{2n} est définie par :

$(x\ \rho_{2n} y) \Longleftrightarrow (x\ \rho_{2n-1} y$, ou il existe $a \in D$ tel que $a\ x\ \rho_{2n-1} ay)$

On montre par récurrence sur n que chacune des équivalences ρ_n est plus fine que O.

c.q.f.d.

4)-Classes modulo une équivalence appartenant à $\mathcal{F}_r \cup \mathcal{F}'_r \cup \mathcal{F}''_r$

Soit A un complexe D de F. Quelles sont les conditions qu'il doit vérifier pour qu'il soit une classe modulo une équivalence appartenant selon le cas à $\mathcal{F}_r, \mathcal{F}'_r, \mathcal{F}''_r$. Nous allons indiquer sommairement comment on peut résoudre ce problème qui a été étudié par plusieurs auteurs.[14],[17],[26],[32]

1 - Cas des équivalences quasi-fortement $\mathcal{D}$- compatibles

Ce cas est le plus important car les résultats qui lui sont relatifs peuvent être appliqués aux équivalences régulières ou simplifiables de D (ou de H) laissant éventuellement indivisibles certains complexes. (Nous ne donnerons cependant aucune application de ce genre, car il n'y a aucune difficulté à le faire).

Proposition 9

Si $(E, \mathcal{D})$ est plein, pour que A soit une classe modulo une équivalence de $\mathcal{F}'_r$, il faut et il suffit que l'on ait :

$\forall \theta \in \mathcal{D}, x \in E, \quad \theta(x) \cap A \neq \Phi \Longrightarrow \theta(x) \subseteq A.$

$\forall \theta \in \mathcal{D}, \quad \theta(A) \cap A \neq \Phi \Longrightarrow \theta(A) \subseteq A.$

Démonstration

Dans un sens c'est évident. Supposons les conditions de la proposition vérifiées. Nous définissons sur E une équivalence $\tilde{\mathcal{R}}_A$ en posant

$(x\ \tilde{\mathcal{R}}_A\ y) \Longleftrightarrow (A \underset{\mathcal{D}}{\therefore} x = A \underset{\mathcal{D}}{\therefore} y).$

On vérifie sans peine que $A \in \mathcal{F}'_r$, et que A est une classe modulo $\tilde{\mathcal{R}}_A$.

c.q.f.d.

Nous allons maintenant examiner le cas général (où$(E, \mathcal{D})$ n'est pas forcément plein). Il est en effet bien connu que les conditions de la proposition précédente ne sont pas suffisantes pour que A soit classe modulo un élément de $\mathcal{F}'_r$.(Elles ne le sont pas, par exemple, dans le cas où $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{R}'))$.[14]

Notations

Nous désignerons par ρ_A le plus fin élément de $\mathcal{F}'_r$ qui laisse indivisible A. (ρ_A peut être construit par le procédé de la proposition 5). On a la

Proposition 10

Pour que A soit une classe modulo un élément de $\mathcal{F}'_r$, il faut et il suffit que ρ_A sature A.

On peut par exemple appliquer cette proposition pour déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe de H ou de D soit classe modulo une équivalence simplifiable d'un côté (laissant éventuellement certains complexes indivisibles).

2 - Cas des équivalences fortement $\mathcal{D}$ - compatibles

Proposition 11

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est une classe modulo un élément de $\mathcal{F}''_r$.

b) A est une classe modulo un élément de $\mathcal{F}'_r$. Il existe un élément de $\mathcal{F}''_r$ qui laisse A indivisible.

c) $\rho_A \in \mathcal{F}''_r$, ρ_A sature A.

Proposition 12

Pour que A soit classe modulo un élément de $\mathcal{F}''_r$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $x \in E$, $\quad \theta(x) \cap A \neq \Phi \implies \theta(x) \subseteq A$.

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $\quad \theta(A) \cap A \neq \Phi \implies \theta(A) \subseteq A$.

$\forall a, b \in A$, $\theta \in \mathcal{D}$, $\quad s \in \theta(a)$, $t \in \theta(b) \implies s \; O \; t$.

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $x \in E$, $\quad s \in \theta(x)$, $t \in \theta(x) \implies s \; O \; t$.

Les conditions écrites étant trivialement nécessaires, indiquons comment on peut montrer qu'elles sont suffisantes.

Nous définissons une équivalence $\mathcal{R}'_A$, en posant $x \mathcal{R}'_A y$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $\quad \theta(x) \subseteq A \iff \theta(y) \subseteq A$.

$\forall \theta \in \mathcal{D}$, $\quad s \in \theta(x)$, $t \in \theta(y) \implies s \; O \; t$.

Il est immédiat que A est classe modulo $\mathcal{R}'_A$.

On a $\mathcal{R}'_A \subseteq O$. Pour montrer que $\mathcal{R}'_A \in \mathcal{F}''_r$, il suffit d'établir que $\mathcal{R}'_A \in \mathcal{F}'_r$.

Ceci est immédiat.

c.q.f.d.

Remarque

Si A est classe modulo un élément de $\mathcal{F}''_r$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}''_r$ qui admet A comme classe est l'intervalle fermé $[\rho_A, \mathcal{R}'_A]$. (On retrouve ici un résultat classique en théorie des demi-groupes [14]).

3 - <u>Cas des équivalences $\mathcal{D}$- compatibles</u>

Le résultat suivant est immédiat.

Pour que A soit une classe modulo un élément de $\mathcal{F}_r$ il faut que l'on ait :

$\forall\theta \in \mathcal{D}$, $a,b \in A$, $\qquad \theta(a) \cap A \neq \Phi \implies \theta(b) \cap A \neq \Phi$.

$\forall\theta \in \mathcal{D}$, $a \in A$, $\qquad \theta(a) \subseteq A \implies \theta(A) \subseteq A$.

Ces conditions ne sont pas suffisantes dans le cas général. Elles le sont toutefois lorsque $(E, \mathcal{D})$ est l'hypertas $(F, \{\theta_\rho\})$ associé à une équivalence ρ définie sur un ensemble F.(voir exemple a) p. 13 :

Nous avons déjà vu que les équivalences $\{\theta_\rho\}$ - compatibles sont celles qui commutent avec ρ.

Le fait que les conditions précédentes soient nécessaires et suffisantes se traduit par le résultat suivant :

<u>Pour qu'un complexe B de F soit classe modulo une équivalence qui commute avec ρ, il faut et il suffit que B soit saturé modulo ρ, ou ne contienne aucune classe modulo ρ.</u>

Revenons au cas général. On a la

<u>Proposition 13</u>

<u>A est une classe modulo un élément de $\mathcal{F}_r$ si et seulement si A est indivisible modulo le plus grossier élément de $\mathcal{F}_r$, plus fin que l'équivalence définie par la partition A, E - A.</u>

Chapitre III.

Parties remarquables de E

Dans ce chapitre, A désigne une partie fixée de E.

1 - Idéaux et parties consistantes

Définitions

A est dit

un $\mathcal{D}$ - idéal, si $\mathcal{D}A \subseteq A$

$\mathcal{D}$ - consistant, si $\mathcal{D}(x) \cap A \neq \Phi \Longrightarrow x \in A$

On a immédiatement les résultats suivants :

A est un $\mathcal{D}$ - idéal si et seulement si E - A est $\mathcal{D}$ - consistant

A est un $\mathcal{D}$ - idéal si et seulement si A est $\mathcal{D}'$ - consistant

L'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux de E est un sous-treillis complet de $\mathcal{P}(E)$.

Exemples

Soit S un demi-groupe, ou un demi-hypergroupe, (la loi de composition est notée multiplicativement).

Soient M une partie multiplicativement fermée de S, et B une partie de S.

B est dit un M-idéal à droite si $B\,M \subseteq B$.

Les M-idéaux à droite de S sont les $\mathcal{R}_M$ - idéaux.

On interprète de la même manière les $\mathcal{L}_M$ - idéaux, les $\mathcal{M}_M$ - idéaux, les $\mathcal{M}_{1M}$ - idéaux.

D'autre part, B est dit M - consistant à gauche si $x\,M \cap B \neq \Phi \Longrightarrow x \in B$.

Les parties M - consistantes à gauche sont celles qui sont $\mathcal{R}_M$ - consistantes.

On interprète de même les parties $\mathcal{L}_M$ - consistantes, etc.

Dans le cas particulier où M = S, ces définitions se simplifient :

Les $\mathcal{R}_M$ - idéaux (resp. $\mathcal{L}_M$ - idéaux) sont appelés idéaux à droite (resp. à gauche) de S.

Un idéal à gauche et à droite de S est appelé idéal bilatère de S. (Les idéaux bilatères de S sont les $\mathcal{M}$ - idéaux).

D'autre part, les $\mathcal{M}_1$ - idéaux de S sont les parties B de S, telles que $S\,B\,S \subseteq B$. De telles parties sont appelées idéaux médians de S. (terminologie de P. Grillet). [17]

Les parties $\mathcal{R}_M$ - consistantes (resp. $\mathcal{L}_M$ - consistantes) sont dites consistantes à gauche (resp. à droite).

Une partie consistante à gauche et à droite est dite consistante.

2 - Parties nettes et génératrices

Définitions

On appelle $\mathscr{D}$- résidu de A la partie

$$W_A = \{x \in E \text{ tels que } A \underset{\mathscr{D}}{\cdot\cdot} x = \Phi\}.$$

W_A est un $\mathscr{D}$- idéal.

Cette notion s'interprète aisément lorsque $(E, \mathscr{D})$ est l'un des hypertas $(D, \mathscr{R})$, $(H, \mathscr{R})$, etc. Ainsi, le $\mathscr{R}$- résidu d'une partie B de D est l'ensemble

$$W_B = \{x \in D \text{ tels que } x\,D \subseteq D - B\}.$$

W_B est appelé le résidu à droite de B.[9]

Revenons au cas général

A est dit :

$\mathscr{D}$- net si $W_A = \Phi$, autrement dit si

$\forall x \in E, \quad \cdot\, \mathscr{D}x \cap A \neq \Phi$

$\mathscr{D}$ - net de première espèce si

$\forall x \in E, \quad \exists \theta \in \mathscr{D}$ tel que $\theta(x) \subseteq A$.

$\mathscr{D}$ - fortement net si

$\forall x,y \in E, \quad \exists \theta, \theta' \in \mathscr{D}$ tels que $\theta(x) \cap A \neq \Phi$, $\theta \circ \theta'(y) \cap A \neq \Phi$.

Enfin A est dit $\mathscr{D}$- générateur de E ($\mathscr{D}$-générateur, s'il n'y a pas de risque d'ambiguité) si $E = \mathscr{D}A$.

Exemples

a) Soit S un demi-groupe, ou un demi-hypergroupe dont M est une partie multiplicativement fermée. Une partie B de S est dite :

M-nette à droite si $\forall x \in S, \quad xM \cap B \neq \Phi$.

M-génératrice a droite si $S = BM$.

Les parties M-nettes à droite(resp. M-génératrices à droite) sont celles qui sont $\mathscr{R}_M$ - nettes. (resp. $\mathscr{R}_M$- génératrices).

On interprète de même les parties $\mathscr{L}_M$- nettes, $\mathscr{L}_M$-génératrices, etc. Dans le cas particulier où $M = S$, ces définitions se simplifient :

Les parties $\mathscr{R}_M$- nettes (resp. $\mathscr{L}_M$- nettes) sont dites nettes à droite[9] (resp. à gauche). Une partie nette à droite et à gauche est dite nette.

D'autre part, les parties $\mathfrak{M}_1$ - nettes de S, sont les parties B de S qui sont telles que :

$\forall x \in S \quad \exists u, v \in S$ tels que $u\,x\,v \in B$.

De telles parties sont dites médianement nettes. (Nous suivons la terminologie de P. Grillet [17], et non celle de R.Croisot [5] qui parle dans ce cas de partie bilatèrement nette).

Toujours dans le cas $M = S$, les parties $\mathcal{R}_M$ - génératrices (resp. $\mathcal{L}_M$ - génératrices) sont dites <u>génératrices à droite</u> (<u>resp. à gauche</u>). Une partie génératrice à droite et à gauche est dite <u>génératrice.</u>

Enfin les parties B de S, $\mathcal{M}_1$ - génératrices vérifient $S = S\ B\ S$.

De telles parties sont dites <u>médianement génératrices</u>.

b) Les parties B de D qui sont $\mathcal{R}$ - fortement nettes sont celles qui sont fortement nettes à droite (1).

c'est-à-dire qui vérifient :

$\forall x, y \in D, \quad \exists a, b \in D$ tels que $x\, a \in B$, $y\, b\, a \in B$.

c) Si $B \subseteq D$, nous posons

rad $B = \{x \in D$ tels qu'il existe m entier positif vérifiant $x^m \in B\}$

$B^{(n)} = \{x \in D$ tels qu'il existe $y \in B$ vérifiant $x = y^n\}$.

(n entier positif fixé).

B est $\mathcal{P}$ - nette (resp. $\mathcal{P}$ - génératrice) si et seulement si

$D =$ rad B. (resp. $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)}$).

d) Supposons D ordonné (par $\leq$).

Une partie B de D est dite :

pseudo-nette à droite si $\forall x \in D$, $\exists y \in D$, $a \in B$ tels que $xy \leq a$.

pseudo-génératrice à droite si $\forall x \in D$, $\exists y \in D$, $a \in B$ tels que $a\, y \leq x$.

Les parties $\mathcal{K}_g$ - nettes (resp. $\mathcal{K}_g$ - Génératrices) sont celles qui sont pseudo-génératrices à droite (resp. pseudo-nettes à droite).

e) On vérifie enfin que les parties nettes de D sont celles qui sont $\mathcal{N}$ - nettes de première espece.

3 - <u>Parties fortes ou présentes</u>

<u>Définitions</u>

A est dit :

<u>$\mathcal{D}$ - fort</u> si $A \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} x \cap A \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} y \neq \Phi \Longrightarrow A \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} x = A \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} y$.

<u>$\mathcal{D}$ - présent</u> si $x \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} A \cap y \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} A \neq \Phi \Longrightarrow x \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} A = y \overset{\cdot}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} A$.

Les parties $\mathcal{D}$ - fortes sont celles qui sont $\mathcal{D}'$ - présentes.

<u>Exemples</u>

a) Une partie B de D est dite :

<u>forte</u>[9] si $x\, u \in B$, $y\, u \in B$, $x\, v \in B \Longrightarrow y\, v \in B$

médianement forte [17] si $uxw \in B$, $uyv \in B$, $u'\, xv' \in B \Longrightarrow u'yv' \in B$

<u>présente à droite</u> si $u\, B \cap v\, B \neq \Phi \Longrightarrow u\, B = v\, B$.

(1) Cette notion a été introduite par R.Desq.[6]

Les parties $\mathcal{L}$ - fortes (resp. $\mathcal{L}$- présentes) sont celles qui sont fortes. (resp. présentes à droite).

Les parties $\mathcal{M}_1$ - fortes sont celles qui sont médianement fortes.

b) Une partie B de H est dite :

forte à droite si

$(x_1*\ldots*x_n*u)\cap B\neq\Phi$, $(x_1*\ldots*x_n*v)\cap B\neq\Phi$, $(y_1*\ldots*y_m*u)\cap B\neq\Phi \Rightarrow (y_1*\ldots*y_m*v)\cap B \neq \Phi$

(Contrairement à ce qui se passe dans le cas des demi-groupes, il y a ici deux notions distinctes, celle de force à droite et celle de force à gauche).

présente à droite si

$(u_1*\ldots*u_n * B) \cap (v_1 *\ldots* v_m * B) \neq \Phi \Rightarrow u_1*\ldots*u_n * B = v_1 *\ldots*v_m * B.$

Les parties $\mathcal{L}$- fortes (resp. $\mathcal{L}$- présentes) sont celles qui sont fortes à droite (resp. présentes à droite).

4 - Parties complètes

Définitions

A est dit $\mathcal{D}$-complet si

$\forall\theta \in \mathcal{D}$, $x \in E$, $\qquad \theta(x) \cap A \neq \Phi \Rightarrow \theta(x) \subseteq A.$

Nous désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties $\mathcal{D}$ - complètes.

Exemples

a) Si θ est la fermeture associative [20] associée à G, les parties $\{\theta\}$ - complètes sont celles qui sont associatives.

b) Les parties $\mathcal{R}$ - complètes de H (qui sont aussi les parties $\mathcal{L}$ - complètes) sont les parties B qui vérifient :

$x_1*\ldots* x_n \cap B \neq \Phi \Rightarrow x_1 *\ldots* x_n \subseteq B.$

De telles parties sont dites complètes dans H.[20]

c) A est $\mathcal{D}'$ - complet si et seulement si on a

$\forall\theta\in \mathcal{D}$,$x \in E$, $\qquad \theta(x) \cap \theta(A) \neq \Phi \Rightarrow x \in A.$

d) Toute classe modulo une équivalence quasi-fortement $\mathcal{D}$- compatible, est une partie $\mathcal{D}$ - complète.

Remarque

Lorsque $(E,\mathcal{D})$ est plein, la notion de partie $\mathcal{D}$ - complète permet de construire le plus fin élément de $\mathcal{F}'_r$. Plus précisément, soit ρ l'équivalence définie sur E par

$(x \rho y) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{C}, \qquad x \in A \Leftrightarrow y \in A).$

ρ est la plus fine équivalence fortement $\mathcal{D}$ - compatible.

5 - Parties parfaites

A est dit $\mathcal{D}$- parfait si

$\forall a, b \in A, \qquad A \underset{\mathcal{D}}{\therefore} a \cap A \underset{\mathcal{D}}{\therefore} b \neq \Phi.$

<u>Exemples</u>

Soit B une partie de D

B est $\mathcal{R}$ - parfaite si et seulement si on a :

$\forall a,b \in B, \qquad B \cdot\!\cdot\, a \cap B \cdot\!\cdot\, b \neq \Phi$.

(B est alors dite parfaite à droite [9]).

B est $\mathcal{L}'$ - parfaite si et seulement si on a :

$\forall a, b \in B, \qquad \exists u \in D$ tel que $a \in u\,B, b \in u\,B$

(B est alors dite <u>bien à droite</u>).

Chapitre IV

Equivalences principales

Nous désignerons, dans ce chapitre, par A un complexe de E.

<u>Définition</u>

On appelle <u>équivalence $\mathcal{D}$- principale associée à A</u>(1), l'équivalence $\mathcal{R}_A$ définie sur E par :

$$x \,\mathcal{R}_A\, y \iff A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\bullet}} x = A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\bullet}} y.$$

(Remarquons que si l'on désigne par $\mathcal{R}'_A$ l'équivalence $\mathcal{D}'$ - principale associée à A, on a :

$$x \,\mathcal{R}'_A\, y \iff x \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\bullet}} A = y \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\bullet}} A.$$

<u>Exemples</u>

Soit B une partie de D. On peut associer à B un certain nombre d'équivalences. Nous posons :

$$x \,\mathcal{R}_B\, y \iff B \,{}_{\bullet}{}^{\bullet}\, x = B \,{}_{\bullet}{}^{\bullet}\, y$$

$$x \,{}_B\mathcal{R}\, y \iff B \,{}^{\bullet}{}_{\bullet}\, x = B \,{}^{\bullet}{}_{\bullet}\, y$$

$$(x \,\mathfrak{R}_B\, y) \iff (\forall u, v \in D, \quad u x v \in B \iff u y v \in B).$$

$$(x \,\Sigma_B\, y) \iff (\forall u \in D, \quad x \in uB \iff y \in uB).$$

$$(x \,{}_B\Sigma\, y \iff (\forall u \in D, \quad x \in Bu \iff y \in Bu\ ).$$

On interprète tout de suite ces équivalences en termes d'hypertas. Par exemple $\mathcal{R}_B$ est l'équivalence $\mathcal{R}$ - principale associée à B,[9] Σ_B est l'équivalence $\mathcal{L}'$ - principale associée à B.

On généralise évidemment toutes ces considérations au cas de H.

Dans ce qui suit, nous allons généraliser aux hypertas les résultats concernant les équivalences principales de D et de H, établis par P.Dubreil [9], R.Croisot [5] et nous même. [20]

<u>Proposition 14</u>

<u>Supposons $A\,\mathcal{D}$- fort. Alors :</u>

(1) Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguité, nous parlons simplement d'équivalence principale.

Si W_A est non vide, c'est une classe modulo $\mathcal{R}_A$, et $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$- simplifiable sur $E - W_A$.

$\forall\theta \in \mathcal{D}$, $x \mathcal{R}_A y \Rightarrow \{\theta(x) \cap (E - W_A)\} \overline{\mathcal{R}}_A \{\theta(y) \cap (E - W_A)\}$.

En particulier si A est $\mathcal{D}$- net, $\mathcal{R}_A \in \mathcal{F}'_r$.

Démonstration

Soient x, y $\in$ E, $\theta \in \mathcal{D}$, $u \in \theta(x) \cap (E - W_A)$, $v \in \theta(y) \cap (E - W_A)$.
il existe $\theta' \in \mathcal{D}$, tel que $\theta'(u) \cap A \neq \Phi$.
Supposons u et v équivalents modulo $\mathcal{R}_A$. Alors $\theta'(v) \cap A \neq \Phi$, et donc on a

$\theta' \circ \theta \in A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} x \cap A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} y$. On a donc $A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} x = A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} y$, x et y sont équivalents modulo $\mathcal{R}_A$.

On déduit de là que $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$- simplifiable sur $E - W_A$(En particulier, si A est $\mathcal{D}$- net, $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$ - simplifiable).

Les autres assertions de la proposition sont triviales ou aussi faciles à montrer.

c.q.f.d.

Nous ne ferons que citer la proposition suivante, très facile à établir.

Proposition 15

A étant supposé $\mathcal{D}$- fort, soit X une classe (différente de W_A) modulo $\mathcal{R}_A$.
X est $\mathcal{D}$ - fort, et on a : $\mathcal{R}_A \subseteq \mathcal{R}_X$, $W_A \subseteq W_X$.
De plus $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_X$ coïncident sur $E - W_X$.
Enfin, si $A \subseteq X$, on a $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_X$.

Proposition 16

Si A est une classe modulo une équivalence $R \in \mathcal{F}'_r$, on a $R \subseteq \mathcal{R}_A$.
Si de plus R est $\mathcal{D}$- simplifiable, A est $\mathcal{D}$ - fort et R coïncide avec $\mathcal{R}_A$ sur $E - W_A$.

La $\mathcal{D}$ - compatibilité de R entraîne l'inégalité $R \subseteq \mathcal{R}_A$.
Supposons R $\mathcal{D}$- simplifiable.
Soient x,y $\in$ E, $\theta \in A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} x \cap A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} y$. x et y sont équivalents modulo R, donc aussi modulo $\mathcal{R}_A$, et donc $A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} x = A \overset{\bullet}{\underset{\mathcal{D}}{\cdot\cdot}} y$.
A est $\mathcal{D}$ - fort.
La dernière assertion est très facile à établir.
c.q.f.d.

Définitions

$x \in E$ est $\mathcal{D}$- net si le complexe $\{x\}$ l'est :
$(E,\mathcal{D})$ est dit
injectif si $\theta(x) \cap \theta(y) \neq \Phi \Rightarrow x = y$
transitif si $\forall x, y \in E$, $\exists\, \theta \in \mathcal{D}$: $y \in \theta\, x$.

Proposition 17

a) Si A est $\mathcal{D}$- net, $\mathcal{D}$- fort, $\mathcal{D}$- parfait, $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$- compatible, et l'hypertas $(E,\mathcal{D})/\mathcal{R}_A = (E^\bullet, \mathcal{D}^\bullet)$ est injectif et possède un élément $\mathcal{D}^\bullet$ - net.

b) Soit $(E^\bullet,\mathcal{D}^\bullet)$ un hypertas injectif, possèdant un élément net, et soit (f,φ) un morphisme de $(E,\mathcal{D})$ dans $(E^\bullet,\mathcal{D}^\bullet)$ tel que f et φ soient surjectives. Il existe alors un complexe de E, $\mathcal{D}$- fort, $\mathcal{D}$- net, $\mathcal{D}$- parfait, A', tel que l'équivalence R associée à f soit égale à $\mathcal{R}_{A'}$

Démonstration

Montrons d'abord a).

Il résulte de ce qui précède que $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$- compatible et $\mathcal{D}$- simplifiable. Donc $(E,\mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est injectif. De plus A étant $\mathcal{D}$- parfait est indivisible modulo $\mathcal{R}_A$. Soit $a^\bullet \in E^\bullet$ la classe qui contient A. On vérifie tout de suite que $a^\bullet$ est $\mathcal{D}^\bullet$ - net.

Montrons b)

Il est clair que R est $\mathcal{D}$- compatible et $\mathcal{D}$- simplifiable.

Soit $a^\bullet \in E^\bullet$, $\mathcal{D}^\bullet$ - net. Soit $A' = f^{-1}(a^\bullet)$. A' est une classe modulo R.

On vérifie tout de suite que A' est $\mathcal{D}$- net.

La proposition 16 entraîne que $R = \mathcal{R}_{A'}$.

Enfin on établit immédiatement que A' est $\mathcal{D}$- parfait. c.q.f.d.

Proposition 18

a) Si A est $\mathcal{D}$- fort et $\mathcal{D}$- fortement net, $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$- compatible et $(E,\mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est un hypertas transitif et injectif.

b) Soit $(E^\bullet, \mathcal{D}^\bullet)$ un hypertas transitif et injectif, et soit (f,φ) un morphisme de $(E,\mathcal{D})$ dans $(E^\bullet,\mathcal{D}^\bullet)$, f et φ étant surjectives. R étant alors l'équivalence associée à f, toute classe A' modulo R, est $\mathcal{D}$- forte et $\mathcal{D}$- fortement nette, et on a $R = \mathcal{R}_{A'}$.

Démontrons d'abord a).

La proposition précédente entraîne que $\mathcal{R}_A$ est $\mathcal{D}$- compatible et $\mathcal{D}$ - simplifiable, donc que $(E,\mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est injectif.

Soient d'autre part $x, y \in E$. Il existe $\theta,\theta' \in \mathcal{D}$ tels que $\theta(x)\cap A \neq \Phi$, $\theta \circ \theta'(y)\cap A \neq \Phi$

On en déduit immédiatement que $(E,\mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est transitif.

Montrons maintenant b)

Soient A' une classe modulo R. La transitivité de $(E^\bullet,\mathcal{D}^\bullet)$ entraîne que A' est $\mathcal{D}$- net. La proposition 16 entraîne que A' est $\mathcal{D}$ - fort et que $R = \mathcal{R}_{A'}$. Soient $x, y \in E$. Il existe $\theta' \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) \in \varphi(\theta')(f(y)) = f(\theta'(y))$. Donc il existe $u \in \theta'(y)$ équivalent à x

modulo $\mathcal{R}_{A'}$.

Soit $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $\theta(x) \cap A' \neq \Phi$.

On a aussi $\theta(u) \cap A' \neq \Phi$, c'est à dire $\theta\ (\theta' y) \cap A' \neq \Phi$.

A' est $\mathcal{D}$- fortement net.

c.q.f.d.

Proposition 19

(E, $\mathcal{D}$) étant supposé plein et A, $\mathcal{D}$ - complet, $\mathcal{R}_A$ est fortement $\mathcal{D}$ - compatible et $(E, \mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est un tas.

Soient x et y équivalents modulo $\mathcal{R}_A$, $\theta \in \mathcal{D}$, $u \in \theta(x)$, $v \in \theta(y)$.
Soit $\theta' \in \mathcal{D}$, tel que $\theta'(u) \cap A \neq \Phi$. Alors, on a $\theta' \circ \theta(x) \cap A \neq \Phi$, donc $\theta' \circ \theta(y) \cap A \neq \Phi$, ce qui entraîne $\theta' \circ \theta(y) \subseteq A$. On a donc aussi $\theta'(v) \cap A \neq \Phi$. u et v sont par suite équivalents modulo $\mathcal{R}_A$. c.q.f.d.

Des propositions 18 et 19, découle la

Proposition 20

Supposons (E, $\mathcal{D}$) plein :

a) Si A est $\mathcal{D}$ - fort, $\mathcal{D}$ - fortement net, $\mathcal{D}$- complet, $(E; \mathcal{D})/\mathcal{R}_A$ est un tas transitif et injectif.

b) Soit $(E^{\bullet}, \mathcal{D}^{\bullet})$ un tas transitif et injectif, et soit (f, φ) un morphisme de (E, $\mathcal{D}$) dans $(E^{\bullet}, \mathcal{D}^{\bullet})$, f et φ étant surjectives. R étant l'équivalence associée à f, toute classe A' modulo R est $\mathcal{D}$ - forte, $\mathcal{D}$ - fortement nette et $\mathcal{D}$ - complète, et on a $\mathcal{R}_{A'} = R$.

On peut donner différentes applications des propositions précédentes. Citons en quelques unes.

a) Groupes homomorphes à D (Résultats de P.Dubreil [9]) (1).

b) Equivalences principales bilatères de D (Résultats de R.Croisot [5]).

c) Groupes homomorphes à H [20]

d) On peut appliquer les propositions 14 à 17 à l'hypertas $(D, \mathcal{L}')$. Dans ce qui suit B est un complexe de D. On montre aisément les résultats suivants. :

- Si B est présent à droite et si D - DB est non vide, c'est une classe modulo Σ_B, et de plus Σ_B est régulière à gauche sur DB.

Ce résultat découle de la proposition 14.

- B étant supposé présent à droite, soit X une classe modulo Σ_B, distincte de D - DB. X est présent à droite, et on a $\Sigma_B \subseteq \Sigma_X$, $DX \subseteq DB$. En outre Σ_B et Σ_X coïncident sur DX. Si de plus B est contenu dans X, on a $\Sigma_B = \Sigma_X$ et $DB = DX$.

(Ceci découle de la proposition 15).

(1) La question des groupes homomorphes à D a été étudiée par d'autres auteurs. [26], [28], [31].

- Soit R une relation d'équivalence définie sur D, vérifiant :
$us \, R \, y \implies \exists \, t \in D$ tel que sRt, $y = ut$.
Si B est une classe modulo R, on a $R \subseteq \Sigma_B$.
Si de plus, R est régulière à gauche, B est présent à droite, et R et Σ_B coïncident sur DB. (Ce résultat découle de la proposition 16).

- <u>Si B est présent à droite, bien à droite, et vérifie</u>

$$\underline{\Sigma_B = {}_B\Sigma, \quad D = DB = BD}$$

<u>Alors Σ_B est régulière et D/Σ_B possède un élément net.</u>
(Ce résultat découle de la proposition 17).
On pourrait citer d'autres applications des propositions de la théorie générale à l'hypertas $(D, \mathcal{L}')$.
Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

Chapitre V

Caractérisation de certains hypertas au moyen de leurs équivalences.

Convention

Lorsque nous dirons que $\mathcal{D}$ est un groupe, cela voudra dire que $\mathcal{D}$ est un groupe de bijections.

G. Thierrin [35] a montré le résultat suivant :

Si D est simplifiable, les conditions suivantes sont équivalentes :

D est un groupe

Toute équivalence de D simplifiable à gauche est régulière à gauche

Toute équivalence de D régulière à gauche est simplifiable à gauche.

D'autre part, P. Lefèbvre [26] a établi que,

Pour qu'un demi-groupe stationnaire (1) soit inversé (1), il faut et il suffit que toute équivalence simplifiable à gauche soit régulière à gauche.

Nous généralisons dans ce chapitre ces résultats aux hypertas.

Définitions

$(E, \mathcal{D})$ est dit stationnaire si $\theta(x) \cap \theta'(x) \neq \Phi \Longrightarrow \theta = \theta'$

D est dit stationnaire à droite [26] si $xa = xb \Longrightarrow \forall y \in D,\ ya = yb$.

(On définit de même la stationnarité à gauche : un demi-groupe stationnaire à gauche et à droite est dit stationnaire).

D est dit médianement stationnaire [17] si

$$u\,x\,v = u'\,x\,v' \Longrightarrow \forall y \in D,\ u\,y\,v = u'\,y\,v'$$

$(D, \mathcal{A})$ est un tas stationnaire si et seulement si D est stationnaire à droite.

Evidemment, on peut interpréter aussi en termes d'hypertas la notion de stationnarité médiane.

1 - Théorie générale

Lorsque $\mathcal{D}$ est un groupe, on a $\mathcal{F}'_r = \mathcal{F}_r = \mathcal{F}'_s$, et de plus il y a identité entre les $\mathcal{D}$ - idéaux de E et les parties $\mathcal{D}$ - consistantes. Nous allons établir différentes réciproques de ces résultats.

(1) Ces notions sont définies plus loin.

Proposition 21

Si (E, $\mathcal{D}$) est plein, injectif, stationnaire, pour que $\mathcal{D}$ soit un groupe, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

Tout $\mathcal{D}$ - idéal est $\mathcal{D}$ - consistant.

Toute partie $\mathcal{D}$ - consistante est un $\mathcal{D}$ - idéal.

Dans ce cas, (E, $\mathcal{D}$) est un tas.

Démonstration

Puisque le complémentaire d'un $\mathcal{D}$ - idéal est $\mathcal{D}$ - consistant, les conditions écrites sont équivalentes.

Supposons les réalisées.

E est alors $\mathcal{D}$ - consistant, donc $E = \mathcal{D}E$.

Soit alors $x_o \in E$. Il existe $\theta_1 \in \mathcal{D}$, $y \in E$, tel que $x_o \in \theta_1(y)$.

Soit W_{xo} le $\mathcal{D}$ - résidu de $\{x_o\}$. C'est un $\mathcal{D}$ - idéal de E, donc une partie $\mathcal{D}$ - consistante. On a $x_o \notin W_{xo}$ car si x_o appartient à W_{xo}, il en est de même de y, ce qui est absurde.

Donc il existe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $x_o \in \theta(x_o)$. On peut écrire $\theta \circ \theta(x_o) \supseteq \theta(x_o)$.

L'hypothèse de stationnarité entraîne que $\theta \circ \theta = \theta$. Soit alors $a \in E$.

On a $\theta \circ \theta(a) = \theta a$.

L'hypothèse d'injectivité entraîne que $\theta(a) = a$. $\theta = 1_E$. D'autre part on a :

$x \in W_y \Rightarrow y \in Wx$.

En effet si $y \notin W_x$, il existe $\theta' \in \mathcal{D}$ tel que $x \in \theta'(y)$.

Donc $\theta'(y) \cap Wy \neq \Phi$ et $y \in Wy$. Cette dernière conséquence est impossible d'après ce qui précède.

Soient alors $\theta_2 \in \mathcal{D}$, $u \in \theta(x_o)$. On a $x_o \notin W_u$, donc $u \notin W_{x_o}$. Par suite, il existe $\theta_2' \in \mathcal{D}$ tel que $x_o \in \theta_2'(u) \subseteq \theta_2' \circ \theta_2(x_o)$.

L'hypothèse de stationnarité entraîne que $\theta_2' \circ \theta_2 = 1_E$.

De même il existe $\theta_3 \in \mathcal{D}$ tel que $\theta_3 \circ \theta'_2 = 1_E$. On a $\theta_2 = \theta_3 \circ \theta_2' \circ \theta_2 = \theta_3$.

On a donc $1_E = \theta_2' \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_2'$

$\mathcal{D}$ est donc un groupe de bijections de E.

c.q.f.d.

On peut appliquer cette proposition à (E, $\mathcal{D}'$). On vérifie tout de suite que (E, $\mathcal{D}$) et (E, $\mathcal{D}'$) sont simultanément stationnaires.

(E, $\mathcal{D}'$) est injectif si et seulement si (E, $\mathcal{D}$) est un pseudo-tas.

(E, $\mathcal{D}'$) est plein si et seulement si, pour tout $\theta \in \mathcal{D}$, on a $\theta(E) = E$.

((E, $\mathcal{D}$) est alors dit surjectif).

On a alors immédiatement la

Proposition 22

Si $(E, \mathcal{D})$ est un pseudo-tas stationnaire et surjectif, $\mathcal{D}$ est un groupe si et seulement si tout $\mathcal{D}$ - idéal est $\mathcal{D}$ - consistant (ou toute partie $\mathcal{D}$ - consistante est un $\mathcal{D}$ - idéal).

Proposition 23

Si $(E, \mathcal{D})$ est plein, injectif et stationnaire, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{D}$ est un groupe

b) $\mathcal{F}'_r \subseteq \mathcal{F}'_s$

c) $\mathcal{F}'_s \subseteq \mathcal{F}'_r$.

Démonstration

b) $\Longrightarrow$ a).

Soit A un $\mathcal{D}$ - idéal. Nous définissons sur E une équivalence R, en posant :

$$x R y \iff x, y \in A \text{ ou } x = y.$$

R est $\mathcal{D}$ - compatible donc aussi $\mathcal{D}$ - simplifiable.

Ceci dit supposons que l'on ait $\theta(x) \cap A \neq \Phi$. Soient $a \in \theta(x) \cap A$, $a' \in \theta(a)$. On a $a R a'$, donc aussi (puisque $R \in \mathcal{F}'_s$) $x R a$. Par suite $x \in A$.

A est $\mathcal{D}$ - consistant. La proposition 21 permet alors de conclure.

c) $\Longrightarrow$ a).

Nous supposons que $\mathcal{D}$ n'est pas réduit à $\{1_E\}$ (autrement il n'y a rien à démontrer).

Montrons tout d'abord que $E = \bigcup\limits_{\substack{\theta \in \mathcal{D} \\ \theta \neq 1_E}} \theta(E)$, et pour cela raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $u \in E$, $u \notin \bigcup\limits_{\substack{\theta \in \mathcal{D} \\ \theta \neq 1_E}} \theta(E)$. Soient alors $\theta \in \mathcal{D}$, $\theta \neq 1_E$, $v \in \theta(u)$. (On a $v \neq u$).

Nous définissons sur E une équivalence R de la manière suivante :

R est l'égalité sur $E - \{u,v\}$, et on a $u R v$.

R est $\mathcal{D}$ - simplifiable, donc $R \in \mathcal{F}'_r$. Par suite, on a $\theta(u) \overline{\overline{R}} \theta(v)$. On en déduit aisément $u \in \theta(E)$, ce qui est absurde. Donc, on a $E = \bigcup\limits_{\substack{\theta \in \mathcal{D} \\ \theta \neq 1_E}} \theta(E)$

Soit alors un complexe A, $\mathcal{D}$- consistant. Soit $x_o \in A$. Il existe $\theta \in \mathcal{D}$, $\theta \neq 1_E$, et $y_o \in E$ tel que $x_o \in \theta(y_o)$.
(On a $x_o \neq y_o$, car l'égalité $x_o = y_o$ entraîne $\theta = 1_E$.)
Evidemment y_o appartient à A.
Ceci dit, nous définissons une équivalence R sur E, en posant :

$$x \, R \, y \Longleftrightarrow x = y \text{ ou } x,y \in A.$$

R est $\mathcal{D}$- simplifiable, donc $\underline{R} \in \mathcal{F}'_r$. On a d'autre part, $x_o \, R \, y_o$; Donc si $\theta' \in \mathcal{D}$, on a aussi $\theta'(x_o) \, \overline{R} \, \theta'(y_o)$.
Comme $\theta'(x_o)$ ne peut rencontrer $\theta'(y_o)$ (car $x_o \neq y_o$), on a $\theta'(x_o) \subseteq A$.
A est un $\mathcal{D}$ - idéal

c.q.f.d.

En appliquant la partie c) de la proposition précédente, on obtient la

Proposition 24

Si $(E, \mathcal{D})$ est un pseudo-tas stationnaire et surjectif, $\mathcal{D}$ est un groupe si et seulement si on a $\mathcal{F}'_r \subseteq \mathcal{F}_s$.

2 - Applications aux demi-groupes

A) Définitions et résultats préliminaires

Définitions

D est dit :

un groupe droit [2] s'il est simplifiable à gauche et simple à droite

inversé si $\forall x \in D$, $\exists x' \in D$ tel que xx' et $x'x$ sont idempotents.

rectangulaire [33],[34] (resp. médianement rectangulaire) si tout complexe réduit à un point est fort. (resp. médianement fort).

rectangulaire au sens de Kimura [19] si $\forall a, b \in D$, $aba = a$.

un anti-semi groupe à droite [2] si $\forall a, b \in D$, $ab = b$.

On peut énoncer un certain nombre de résultats classiques ou évidents.

a) Tout demi-groupe stationnaire (resp. médiannement stationnaire) est rectangulaire (resp. médianement rectangulaire).

b) Si D est rectangulaire, il vérifie :

$$\forall x,y \in D, \ \forall e \in D, \text{idempotent}, \quad xey = xy.$$

Tout demi-groupe inversé vérifiant cette condition est stationnaire.

c) Pour un demi-groupe idempotent les notions de rectangularité et de rectangularité au sens de Kimura coïncident. [19]

Les demi-groupes idempotents rectangulaires sont ceux qui sont produit direct d'un anti-semi-groupe à droite et d'un anti-semi-groupe à gauche. [19]

d) Les demi-groupes inversés,rectangulaires, globalement idempotents sont ceux qui sont produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe idempotent rectangulaire. [34], [36]

e) Les groupes droits sont les demi-groupes qui sont produit direct d'un groupe, et d'un anti-semi-groupe à droite. [3]

f) Si D est médianement rectangulaire, il vérifie :

$\forall x, y, y' \in D, \forall e \in D$, idempotent, $\quad xeyy' = xyy'$.

En effet, on a : $xeyy' = (xe)y(y') = (xe)(ey)(y') = x(ey)y'$.

g) Les résultats f), b), d) entraînent que tout demi-groupe inversé globalement idempotent, médianement stationnaire, est stationnaire, donc est produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe idempotent rectangulaire. On voit aisément d'autre part qu'un groupe médianement stationnaire est abélien.

On a donc le résultat :

Les demi-groupes inversés, globalement idempotents, médianement stationnaires sont ceux qui sont produit direct d'un groupe abélien et d'un demi-groupe idempotent rectangulaire.

B) Etude des demi-groupes stationnaires

Nous définissons sur D une relation binaire σ_2 en posant

$$\forall x,y \in D, \qquad x \,\sigma_2\, y \Longleftrightarrow \exists a \in D \text{ tel que } ax = ay.$$

Le résultat suivant, du à P. Lefèbvre [26], est évident :

Si D est stationnaire, σ_2 est la plus fine équivalence simplifiable à gauche de D, et de plus est régulière, et D/σ_2 est simplifiable à gauche et stationnaire à gauche.

Nous désignons par φ_2 l'homomorphisme canonique de D sur D/σ_2. On peut lui appliquer le premier théorème d'isomorphisme de P.Dubreil. [10]

Il vient :

Si D est stationnaire, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des équivalences simplifiables à gauche de D, et l'ensemble des équivalences simplifiables à gauche de D/σ_2.

Pour que toute équivalence simplifiable à gauche de D soit régulière à gauche, il faut et il suffit que toute équivalence simplifiable à gauche de D/σ_2 soit régulière à gauche.

L'introduction de la relation σ_2 est justifiée par la

Proposition 25

Si D est stationnaire, c'est un demi-groupe inversé si et seulement si D/σ_2 est un groupe droit.

Démonstration

Soit $a \in D$, tel que $\varphi_2(a)$ soit idempotent, Montrons que a^2 l'est aussi. On a $a^2 \,\sigma_2\, a$, donc il existe $u \in D$, tel que $u a^2 = u a$, on a donc $a^3 = a^2$, et aussi $a^4 = a^2$.

Ceci dit supposons que D/σ_2 soit un groupe droit. Soit $x \in D$. Il existe $x' \in D$, tel que $\varphi_2(xx')$ soit idempotent. Alors $xx'\,xx'$ l'est aussi. D est inversé.

Réciproquement supposons D inversé. Soit $x, y \in D$. Il existe $x' \in D$, tel que $x'xx'x = x'x$

On a aussi $x'xx'y = x'y$.

Par suite, on a $\varphi_2(y) = \varphi_2(x)\,\varphi_2(x'y)$. D/σ_2 est donc simple à droite, et est un groupe droit.

c.q.f.d.

C) <u>Etude des demi-groupes médianement stationnaires</u>

Nous définissons sur D une relation binaire σ_3 en posant :

$$x\,\sigma_3\,y \iff \exists a,b \in D^2 \text{ tels que } axb = ayb.$$

Si D est médianement stationnaire, il est clair que l'on a $x\,\sigma_3\,y$ si et seulement si on a $u\,x\,v = u\,y\,v$, quelque soient $u, v \in D^2$. Donc dans ce cas, σ_3 est une équivalence.

On vérifie sans peine que c'est même la plus fine équivalence. simplifiable et régulière de D.

Nous notons φ_3 l'homomorphisme canonique de D sur D/σ_3. Il découle immédiatement du premier théorème d'isomomorphisme de P.Dubreil [10] le résultat :

<u>Si D est médianement stationnaire, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des équivalences simplifiables de D, et l'ensemble des équivalences simplifiables de D/σ_3.</u>

<u>Pour que toute équivalence simplifiable de D soit régulière, il faut et il suffit que toute équivalence simplifiable de D/σ_3 soit régulière.</u>

<u>Si enfin, toute équivalence simplifiable à gauche de D est régulière à gauche, alors toute équivalence simplifiable à gauche de D/σ_3 est régulière à gauche.</u>

L'introduction de l'équivalence σ_3 est justifiée par la

<u>Proposition 26</u>

<u>Si D est médianement stationnaire, c'est un demi-groupe inversé si et seulement si D/σ_3 est un groupe.</u>

On montre aisément que si a est un élément de D, a^5 est idempotent dès que $\varphi_3(a)$ l'est. On en déduit tout de suite que D est inversé lorsque D/σ_3 est un groupe.

Pour montrer la réciproque considérons un idempotent e de D.

Si $x \in D$, on a : $e\,x\,e = e(ex)e = e(xe)e$. On a donc $x\,\sigma_3\,e\,x$, $x\,\sigma_3 x\,e$. $\varphi_3(e)$

est un élément neutre de $D/_{\sigma_3}$.

On conclut tout de suite.

c.q.f.d.

D) Utilisation des propositions 21 à 24.

Proposition 27

Si D est stationnaire à gauche et simplifiable à gauche, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Tout idéal à gauche est consistant à droite.

b) Toute partie consistante à droite est un idéal à gauche.

c) Toute équivalence régulière à gauche est simplifiable à gauche.

d) Toute équivalence simplifiable à gauche est régulière à gauche.

e) D est un groupe droit.

$(D, \mathcal{L})$ est un tas stationnaire et injectif. Les propositions 21 et 23 entraînent que les conditions a), b), c), d) sont vérifiées si et seulement si $\mathcal{L}$ est un groupe de bijections. On établit aisément que ceci est réalisé si et seulement si e) l'est.

Proposition 28

Si D est stationnaire à gauche et simple à droite, les conditions a), b), c) et e) de la proposition précédente sont équivalentes.

$(D, \mathcal{L})$ est un tas stationnaire et surjectif ; il suffit de lui appliquer les propositions 22 et 24.

Proposition 29

Si D est simplifiable, c'est un groupe si et seulement si une des conditions a), b), c), d) de la proposition 27 est vérifiée.

Cette proposition, qui est une conséquence immédiate de la proposition 27, contient en particulier les résultats de G.Thierrin [35] cités au début du chapitre. Venons en maintenant au résultat mentionné de P. Lefèbvre : [26]

Proposition 30

Si D est stationnaire, c'est un demi-groupe inversé si et seulement si toute équivalence simplifiable à gauche de D est régulière à gauche.

D étant inversé si et seulement si $D/_{\sigma_2}$ est un groupe droit, et $D/_{\sigma_2}$ étant stationnaire à gauche et simplifiable à gauche, cette proposition est une conséquence d'un résultat de la partie B) et de la proposition 27.

c.q.f.d.

Proposition 31

Si D est médianement stationnaire, alors

a) Si toute équivalence simplifiable à gauche de D, est régulière à gauche,

<u>D est inversé.</u>

b) <u>Si D est inversé, toute équivalence simplifiable de D est régulière.</u>

La démonstration est immédiate, compte tenu des propositions 26 et 29, et des résultats de la partie C).

Nous allons, pour terminer ce chapitre, donner quelques compléments à la proposition 30.

Il est clair que si D est stationnaire, et si chacun de ses idéaux à gauche est consistant à droite, D est alors inversé (car D/σ_2 vérifie une condition analogue, donc est un groupe droit). Par contre, tout demi-groupe stationnaire et inversé ne possède pas cette propriété. Cherchons à caractériser les demi-groupes inversés et stationnaires dont tout idéal à gauche est consistant à droite.

<u>Lemme</u>

a) <u>Si tout idéal à gauche de D est consistant à droite, D est globalement idempotent, et vérifie la condition</u>

$$ua = ub \Longrightarrow b \in \mathcal{D}a \cup \{a\} \quad (C_2) \quad (1)$$

b) <u>Si D est stationnaire, inversé, et vérifie (C_2), chacun de ses idéaux à gauche est consistant à droite.</u>

a) est évident, montrons b).

Soit I un idéal à gauche de D. D/σ_2 étant un groupe droit, $\varphi_2(I)$ est consistant à droite. Il en est de même de $\varphi_2^{-1}\ \varphi_2(I)$.

Mais la condition (C_2) entraîne $I = \varphi_2^{-1}\ \varphi_2(I)$.

<u>Proposition 32</u>

<u>Si D est stationnaire et inversé, les conditions suivantes sont équivalentes :</u>

a) <u>Tout idéal à gauche est consistant à droite</u>

b) <u>(C_2)</u>

c) <u>$D^2 = D$</u>

d) <u>Tout idéal à droite est consistant à gauche</u>

e) <u>(C_1)</u>.

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée, D est complétement simple(2)

(1) Nous notons C_1 la condition :

$$au = bu \Longrightarrow b \in a\mathcal{D} \cup \{a\}$$

Ces conditions ont été introduites par P.Lefèbvre [26].

(2) La notion de demi-groupe complètement simple a été définie et étudiée par D.Rees. [30].

Démonstration

Le lemme précédent montre que a) est équivalent à b) et entraîne c). D'autre part si $D^2 = D$, D est produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe idempotent rectangulaire (cf. p. 30). On montre aisément que D vérifie alors (C_2) et est complètement simple (2)

On conclut alors aisément. c.q.f.d.

Autre application de la théorie générale : Le groupe de Schützenberger d'une $\mathcal{H}$- classe.

J.A. Green a défini [15] sur D une relation d'équivalence qu'il note $\mathcal{H}$, de la façon suivante : deux éléments de D sont équivalents modulo $\mathcal{H}$ s'ils engendrent les mêmes idéaux à gauche et à droite.

Soit alors A une $\mathcal{H}$- classe (c'est-à-dire une classe d'équivalence modulo $\mathcal{H}$.

Soit $T(A) = \{t \in \tilde{D} : A\,t \subseteq A\}$. ($\tilde{D}$ est le demi-groupe D auquel on adjoint éventuellement un élément neutre.)

Pour tout $t \in T(A)$, soit ρ_t la restriction à A de la translation à droite définie par t. Désignons par $\Gamma(A)$, l'ensemble des ρ_t $(t \in T(A))$.

On voit sans peine (en utilisant par exemple le lemme de Green [15]) que $(A, \Gamma(A))$ est un tas stationnaire, injectif et que toute équivalence $\Gamma(A)$-compatible de A est $\Gamma(A)$ - simplifiable.

Donc, en vertu de la proposition 23, $\Gamma(A)$ est un groupe.

Ce résultat a été établi directement par M.P. Schützenberger.(voir par exemple [3]).

Chapitre VI

Complexes $\mathcal{D}$- nets minimaux. Applications

L'étude des complexes nets minimaux d'un demi-groupe inaugurée par P.Dubreil [11], a été poursuivie par P.Lefèbvre. [26]

Dans ce chapitre nous généralisons cette étude aux hypertas (cette structure paraît être le cadre le plus naturel).

L'intérêt d'une pareille généralisation est multiple. D'une part elle permet de retrouver les résultats de P.Lefèbvre, d'autre part elle permet l'obtention de résultats nouveaux, ceci soit directement (par exemples, résultats concernant les demi-hypergroupes), soit indirectement en utilisant l'hypertas inverse.

Définitions

Un complexe $\mathcal{D}$- net (resp. $\mathcal{D}$- générateur) de E est dit $\mathcal{D}$- net minimal (resp. $\mathcal{D}$- générateur de E minimal, ou $\mathcal{D}$- générateur minimal s'il n'y a pas d'ambiguité) si c'est un élément minimal de la famille des complexes $\mathcal{D}$- nets (resp. $\mathcal{D}$- générateurs) de E.

Un $\mathcal{D}$- idéal propre de E est dit minimal (resp. maximal) si c'est un élément minimal (resp. maximal) de l'ensemble des $\mathcal{D}$- idéaux propres de E.

Nous convenons en outre que lorsqu'il n'existe pas de $\mathcal{D}$- idéaux propres, E est à la fois un $\mathcal{D}$- idéal minimal et maximal.

On voit sans peine qu'un complexe de E est un $\mathcal{D}$- idéal minimal si et seulement si son complémentaire est un $\mathcal{D}'$- idéal maximal.

Les définitions données ici s'appliquent tout de suite aux cas des demi-groupes et des demi-hypergroupes et fournissent entre autres les notions de complexes nets d'un côté minimaux, de complexes médianement nets minimaux, etc. Nous n'insistons pas.

1) - Complexes $\mathcal{D}$ - nets minimaux et $\mathcal{D}$ - générateurs minimaux

La proposition suivante généralise un résultat de P. Dubreil [11]

Proposition 33

Pour qu'un complexe K de E, $\mathcal{D}$ - net (resp. $\mathcal{D}$ - générateur de E) soit $\mathcal{D}$ - net minimal (resp. $\mathcal{D}$ - générateur minimal), il faut et il suffit que l'on ait :

$$\forall k, k' \in K, \qquad k \in \mathcal{D} k' \Longrightarrow k = k'.$$

On peut manifestement se borner au cas où K est $\mathcal{D}$ - net.

Si K vérifie la condition écrite, pour tout $k \in K$, $K - \{k\}$ n'est pas $\mathcal{D}$ - net, donc K est $\mathcal{D}$ - net minimal.

Réciproquement supposons K $\mathcal{D}$ - net minimal et soient k et $k' \in K$ tels que $k \in \mathcal{D} k'$. $K - \{k'\}$ n'étant pas $\mathcal{D}$ - net, il existe $u \in E$ tel que $\mathcal{D} u$ ne rencontre pas $K - \{k'\}$. K étant $\mathcal{D}$ - net, k' appartient donc à $\mathcal{D} u$, et il en est de même de k. On a nécessairement $k = k'$.

c.q.f.d.

Corollaire 33 - a

a) Si K est $\mathcal{D}$ - net minimal et si $k \in K$, on a :
$y \in \mathcal{D} k \Longrightarrow k \in \mathcal{D} y$.

b) Si L est $\mathcal{D}$ - générateur minimal et si $k \in L$, on a :
$k \in \mathcal{D} y \Longrightarrow y \in \mathcal{D} k$.

b) est une conséquence de a), moyennant un passage à l'hypertas inverse.

Montrons a) :

Soit $y \in \mathcal{D} k$. Soit $k' \in \mathcal{D} y \cap K$. On a $k' \in \mathcal{D} k$, donc $k = k'$.

Proposition 34

a) S'il existe un complexe $\mathcal{D}$ - net minimal, tout complexe $\mathcal{D}$ - net contient un complexe $\mathcal{D}$ - net minimal.

b) S'il existe un complexe $\mathcal{D}$ - générateur minimal, tout complexe $\mathcal{D}$ - générateur contient un complexe $\mathcal{D}$ - générateur minimal.

b) est une conséquence de a). Montrons a).

Soient K un complexe $\mathcal{D}$ - net minimal, A un complexe $\mathcal{D}$ - net. A tout $k \in K$, nous associons un élément l_k de $A \cap \mathcal{D} k$.

On définit ainsi une application h de K dans A, en posant pour tout $k \in K$, $h(k) = l_k$. h(k) est manifestement $\mathcal{D}$ - net. Soient $l_k, l_{k'} \in h(A)$. $(k,k' \in K)$ tels que $l_{k'} \in \mathcal{D} l_k$. On a $l_{k'} \in \mathcal{D} k' \cap \mathcal{D} k$.

Soit alors $k'' \in \mathcal{D} l_{k'} \cap K$. On a $k = k'' = k'$, et donc $l_k = l_{k'} = h(k) = h(k')$.

H(A) est donc $\mathcal{D}$ - net minimal

c.q.f.d.

Pour faire l'étude des complexes $\mathcal{D}$ - nets minimaux, nous donnons les définitions suivantes (suggérées par la proposition 33 et le corollaire 33 - a).

Un complexe A de E est dit <u>$\mathcal{D}$ - libre</u> (1) si

$\forall a, b \in A, \qquad a \in \mathcal{D}b \implies a = b.$

Les complexes $\mathcal{D}$ - nets minimaux ou $\mathcal{D}$ - générateurs minimaux sont $\mathcal{D}$ - libres.

Il est naturel d'étudier les complexes $\mathcal{D}$ - libres maximaux.

Pour cela nous donnons la

<u>Définition</u>

L'hypertas (E, $\mathcal{D}$) est dit vérifier <u>l'axiome d'échange</u> si

$$x \in \mathcal{D}y \implies y \in \mathcal{D}x \cup \{x\}.$$

(Il est clair que (E, $\mathcal{D}$) vérifie l'axiome d'échange si et seulement si (E, $\mathcal{D}$ ') le vérifie.)

<u>Proposition 35</u>

<u>Pour que (E, $\mathcal{D}$) vérifie l'axiome d'échange, il faut et il suffit que E soit réunion de ses $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux.</u>

La démonstration est évidente. On montre sans peine que si E vérifie l'axiome d'échange, le $\mathcal{D}$ - idéal $\mathcal{D}x \cup \{x\}$ est minimal.

<u>Proposition 36</u>

<u>Supposons que (E, $\mathcal{D}$) vérifie l'axiome d'échange.</u>

a) <u>Tout complexe de E, $\mathcal{D}$ - libre est contenu dans un complexe $\mathcal{D}$ - libre maximal ; celui-ci a même cardinal que l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E.</u>

b) <u>Supposons en outre que pour tout $x \in E$, $\mathcal{D}x$ soit non vide, et soit A un complexe de E. Les conditions suivantes sont équivalentes. :</u>

<u>A est $\mathcal{D}$ - libre maximal.</u>

<u>A est $\mathcal{D}$ - net minimal</u>

<u>A est $\mathcal{D}$ - générateur minimal.</u>

<u>Démonstration</u>

Montrons a).

Nous définissons sur E une relation d'équivalence en posant :

$$x \sim y \iff y \in \mathcal{D}x \cup \{x\}.$$

Il est immédiat que les classes d'équivalences sont les $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E.

On voit d'autre part qu'un complexe est $\mathcal{D}$ - libre (resp. $\mathcal{D}$ - libre maximal) si et seulement s'il rencontre chaque classe d'équivalence en au

(1) Cette notion est invariante par passage à l'hypertas inverse. A est $\mathcal{D}$ - libre si et seulement si c'est un complexe $\mathcal{D}$ '-libre.

plus un point (resp. exactement un point). On conclut tout de suite.
La partie b) de la proposition s'établit sans difficulté.
c.q.f.d.

Nous passons maintenant au cas général.

Nous désignons par Σ la réunion des $\mathcal{D}$- idéaux minimaux de E. On voit sans peine que l'on a :

$$\Sigma = \left\{ x \in E : y \in \mathcal{D}x \Longrightarrow x \in \mathcal{D}y \cup \{y\} \right\} .$$

Le corollaire 33 - a entraîne donc que tout complexe $\mathcal{D}$- net minimal est contenu dans Σ.

Σ est un $\mathcal{D}$- idéal (éventuellement vide), par suite on peut parler de l'hypertas (Σ, $\mathcal{D}$) ; il vérifie, bien sûr, l'axiome d'échange, et donc on peut appliquer la proposition 36. Par suite, tout complexe de Σ, $\mathcal{D}$- libre, est contenu dans un complexe $\mathcal{D}$- libre maximal (1) ; le cardinal de ce dernier complexe est égal à celui de l'ensemble des $\mathcal{D}$- idéaux minimaux de E.

Théorème 37

Supposons que pour tout $x \in E$, $\mathcal{D}x$ soit non vide.
Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Σ est un complexe de E, $\mathcal{D}$ - net.

b) Il existe un complexe de E, $\mathcal{D}$ - net minimal.

c) Tout $\mathcal{D}$ - idéal de E, propre contient un $\mathcal{D}$ - idéal minimal.

Dans ce cas les complexes $\mathcal{D}$ - nets minimaux de E sont les complexes de Σ, $\mathcal{D}$ - libres maximaux.

Démonstration

b) $\Longrightarrow$ a).

Soit K un complexe de E, $\mathcal{D}$- net minimal. K est contenu dans Σ. Σ est donc $\mathcal{D}$- net.

a) $\Longrightarrow$ b).

Soit K un complexe de Σ, $\mathcal{D}$- libre maximal. Montrons que K est un complexe $\mathcal{D}$- net minimal de E.

Soit $x \in E$. Soit $y \in \mathcal{D}x \cap \Sigma$. Si $y \notin K$, $K \cup \{y\}$ est un complexe de Σ contenant strictement K donc non $\mathcal{D}$- libre. Par suite $\mathcal{D}y \cap K \neq \Phi$, et de même $\mathcal{D}x \cap K \neq \Phi$.

(1) Un complexe de Σ, $\mathcal{D}$- libre, maximal est un élément maximal de l'ensemble des complexes de Σ, $\mathcal{D}$- libres.

Supposons maintenant $y \in K$. Alors $\mathcal{D}x \cap K$ contient y, donc est non vide. K est donc $\mathcal{D}$- net, et étant $\mathcal{D}$- libre, est $\mathcal{D}$- net minimal.

a) $\Longrightarrow$ c)

Soit L un $\mathcal{D}$- idéal propre. Σ étant $\mathcal{D}$- net, rencontre L, et par suite, il existe un $\mathcal{D}$- idéal minimal M rencontrant L. Bien sûr, on a $M \subseteq L$.

c) $\Longrightarrow$ a)

Soit $x \in E$. $\mathcal{D}x$ contient un $\mathcal{D}$- idéal minimal M, donc rencontre Σ.

Nous avons donc démontré que a), b), c) sont équivalentes, et nous avons établi en cours de démonstration que tout complexe de Σ, $\mathcal{D}$- libre maximal est $\mathcal{D}$- net minimal dans E. La réciproque s'établit immédiatement.

(On voit même qu'un complexe $\mathcal{D}$ - net minimal de E est un complexe de Σ, $\mathcal{D}$- libre, qui n'est contenu strictement dans aucun complexe de E, $\mathcal{D}$ - libre, (2).

c.q.f.d.

Corollaire 37 -- a

Tout complexe $\mathcal{D}$ - net minimal de E a même cardinal que l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E.

Corollaire 37 - b

S'il existe des complexes $\mathcal{D}$- nets minimaux de E, les complexes de E qui peuvent être plongés dans un complexe $\mathcal{D}$- net minimal sont les complexes de Σ, $\mathcal{D}$- libres.

Corollaire 37 - c

Soit R la réunion supposée non vide des complexes $\mathcal{D}$- nets minimaux de E. On a $R = \Sigma$.

Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus à l'hypertas inverse $(E, \mathcal{D}')$.

Nous désignons par Σ' la réunion des $\mathcal{D}'$ - idéaux minimaux de E, par W l'intersection des $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux de E.

S'il existe des $\mathcal{D}$- idéaux propres de E, on a $\Sigma' = E - W$.

On voit d'autre part tout de suite que l'on a :

$$\Sigma' = \left\{x \in E : x \in \mathcal{D}y \Longrightarrow y \in \mathcal{D}x \cup \{x\}\right\}.$$

Le corollaire 33 - a entraîne donc que tout complexe $\mathcal{D}$- générateur minimal de E est contenu dans Σ'.

(2) Donc est un complexe $\mathcal{D}$- libre maximal de E.

Le théorème 37 entraîne immédiatement le

Théorème 38

Supposons que l'on ait $E = \mathcal{D}E$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $E = \mathcal{D}\Sigma'$.

b) Il existe un complexe $\mathcal{D}$- générateur de E minimal.

c) Tout $\mathcal{D}$- idéal propre de E est contenu dans un $\mathcal{D}$- idéal maximal.

Dans ce cas les complexes $\mathcal{D}$- générateurs minimaux de E sont les complexes de Σ', $\mathcal{D}$- libres maximaux.

Corollaire 38 - a

Tout complexe $\mathcal{D}$- générateur minimal de E a même cardinal que l'ensemble des $\mathcal{D}$- idéaux maximaux de E.

Corollaire 38 - b

S'il existe des complexes $\mathcal{D}$- générateurs minimaux de E, les complexes de E qui peuvent être plongés dans un complexe $\mathcal{D}$- générateur minimal de E sont les complexes de Σ', $\mathcal{D}$- libres.

Corollaire 38 - c

Soit R' la réunion supposée non vide des complexes $\mathcal{D}$- générateurs minimaux de E.

On a $R' = \Sigma'$.

Applications des résultats précédents

1) $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{R})$.

Σ est dans ce cas la réunion des idéaux à droite minimaux. Il est bien connu que si Σ est non vide, c'est un idéal bilatère de D, donc un complexe $\mathcal{R}$ - net (c'est-à-dire net à droite).

Par suite pour qu'il existe des complexes nets à droite minimaux, il faut et il suffit que D contienne des idéaux à droite minimaux. De tels complexes sont équipotents à l'ensemble des idéaux à droite minimaux de D.

La théorie fournit des résultats de P.Lefèbvre[26] concernant les complexes nets d'un côté minimaux de D.

Notons que lorsque D est compact ou artinien à droite, il existe des complexes nets à droite minimaux. (Pour le cas compact, nous renvoyons par exemple à l'exposé de P.Grillet et A.Gérente [18]).

2) $(E, \mathcal{D}) = (H, \mathcal{R})$.

L'existence d'idéaux à droite minimaux n'entraîne pas, en général, celle de complexes nets à droite minimaux. En effet, la réunion des idéaux à droite minimaux de H n'est pas nécessairement un idéal bilatère de H. (Il en est pourtant ainsi, comme nous le verrons au prochain chapitre, lorsque quelque soit l'idéal à droite de H, l, on a

$$x_1 * \dots * x_n \cap l \neq \Phi \implies x_1 * \dots * x_n \subseteq l).$$

<u>Pour qu'il existe des complexes nets à droite minimaux de H, il faut et il suffit que tout idéal à droite propre de H contienne un idéal à droite minimal. Le cardinal de tels complexes est égal à celui de l'ensemble des idéaux à droite minimaux de H.</u>

3) $(E, \mathcal{D}) = (H, \mathcal{M}_1)$.

Ici la théorie permet de généraliser au cas de H des résultats de P.Lefèbvre concernant les complexes médianement nets minimaux de D.

Plus précisément, on voit que H possède un complexe bilatèrement net minimal K, si et seulement si tout idéal médian non vide de H contient un idéal médian minimal ; et K est équipotent à l'ensemble des idéaux médians minimaux de H. Or cet ensemble possède au plus un élément. (Car deux idéaux médians non vides contiennent leur produit qui est un idéal médian non vide).

On en déduit aisément le résultat suivant :

<u>Pour que H possède un complexe médianement net minimal K, il faut et il suffit qu'il contienne un idéal bilatère minimum. Dans ce cas, K est réduit à un élément.</u>

Dans le cas particulier où H est abélien (1), et possède un complexe net minimal, ce dernier résultat entraîne l'existence d'un élément net ; On voit sans peine que H possède alors un idéal qui est un hypergroupe. On a donc établi que :

<u>Tout demi-hypergroupe abélien qui possède un complexe net minimal contient un idéal qui est un hypergroupe.</u>

Ce résultat a été établi par P.Lefèbvre dans le cas particulier où H est un demi-groupe. [26]

Un demi-groupe qui possède un idéal qui est un groupe est dit un <u>homogroupe</u>. [35]

On sait depuis G.Thierrin qu'un demi-groupe abélien fini est un homogroupe. [35]

4) $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{P})$.

Citons un des résultats que la théorie permet d'obtenir dans ce cas.

<u>Deux complexes de D admettant D pour radical, et minimaux pour cette condition sont équipotents.</u>

5) $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{R}_M)$ ou $(E, \mathcal{D}) = (D, \mathcal{A}_d)$.

Nous laissons au lecteur le soin d'obtenir les résultats relatifs à ces cas.

(1) c'est-à-dire vérifie $x * y = y * x$, pour tous $x, y \in H$.

6) $(E, \mathcal{B}) = (H, \mathcal{R}')$.

La théorie générale fournit le résultat suivant :

Pour que H possède un complexe générateur à droite minimal, il faut et il suffit que l'on ait $H * H = H$, et que tout idéal à droite propre de H soit contenu dans un idéal à droite maximal. Dans ce cas, tout complexe générateur à droite minimal de H est équipotent à l'ensemble des idéaux à droite maximaux de H.

On particularise tout de suite ce résultat à D.

Notons qu'il existe des complexes générateurs à droite minimaux lorsque D est compact [18] ou noethérien à droite et que $D^2 = D$. Il en existe aussi lorsque D est réunion de ses idéaux à droite minimaux.

(Nous consacrons un paragraphe spécial à ce cas).

Donnons quelques résultats supplémentaires lorsque H est remplacé par D.

L'application du théorème 38 au tas $(D, \mathcal{R})$ entraîne que

Si $D = D^2$, pour qu'il existe des complexes générateurs à droite minimaux, il faut et il suffit que pour tout $x \in D$, il existe $a \in D$, tel que $x \in aD$ et que l'on ait :

$$a \in yD \implies y \in aD$$

On peut appliquer ce résultat à un cas particulier.

Soit D' un demi-groupe réunion de groupes, dont les idempotents commutent.

On définit classiquement [3] une relation d'ordre sur l'ensemble des idempotents de D', en posant si e et f sont deux idempotents

$$e \leq f \iff ef = e.$$

On déduit alors aisément du précédent résultat que

D' contient un complexe générateur d'un côté minimal si et seulement si chacun de ses idempotents est inférieur à un idempotent maximal. (L'ordre étant celui défini plus haut).

Dans ce cas, l'ensemble des idempotents maximaux de D' est un complexe générateur à gauche et à droite minimal.

Remarque

On voit facilement que si D' possède un idéal d'un côté minimal, il n'en possède qu'un.

7) Supposons que D soit simple et possède des idéaux à droite minimaux.

On sait [2] qu'alors tout idéal à droite de D (donc D lui-même) est réunion d'idéaux à droite minimaux. Par suite, le tas $(D, \mathcal{R})$ vérifie l'axiome d'échange, et en vertu de la proposition 36. D possède un complexe qui est simultanément net à droite minimal et générateur à droite minimal. Par suite, il y a dans D, autant d'idéaux à droite minimaux que d'idéaux à droite maximaux.

En outre, il résulte de la forme des idéaux à droite de D, que le treillis qu'ils forment est booléen.

Enfin notons que si D n'est pas simple à droite, les idéaux à droite maximaux sont ceux qui sont réunion de tous les idéaux à droite minimaux de D, sauf de l'un d'entre eux. Par suite, dans ce cas, l'intersection des idéaux à droite maximaux de D est vide.

On peut donner quelques réciproques de ces résultats.

Si le treillis des idéaux à droite de D est booléen, D est simple.

En effet, dans ce cas, le complémentaire d'un idéal à droite est un idéal à droite, par suite le tas (D, $\mathcal{R}$) vérifie l'axiome d'échange qui s'écrit :

$$x \in y\,D \Longrightarrow y \in x\,D \cup \{x\}.$$

D est donc réunion de ses idéaux à droite minimaux. On conclut tout de suite

Si l'intersection des idéaux à droite maximaux de D est vide, D est simple.

Dans ce cas, D est réunion de ses $\mathcal{R}'$ - idéaux minimaux. Le tas (D, $\mathcal{R}'$), donc aussi le tas (D, $\mathcal{R}$), vérifie l'axiome d'échange, etc.

2) - Complexes [W] - nets minimaux et [$\mathcal{A}$] - générateurs minimaux.

P.Lefèbvre [26] a généralisé la notion de complexe de D, net d'un côté, minimal, en considérant les complexes de D qui admettent un résidu d'un côté, fixé,W, qui sont disjoints de W, et qui sont minimaux pour ces conditions.

L'auteur montre que les résultats relatifs aux complexes nets d'un côté minimaux peuvent être généralisés à de tels complexes.

Nous expliquerons en particulier dans ce paragraphe la possibilité d'une telle généralisation en appliquant la théorie des hypertas. Disons tout d'abord quelques mots sur les complexes de E qui admettent un $\mathcal{D}$ - résidu fixé W, et qui sont disjoints de W.

La proposition suivante est évidente :

Proposition 39

Pour qu'un $\mathcal{D}$ - idéal W distinct de E soit le $\mathcal{D}$ - résidu d'un complexe de E, disjoint de lui, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition

$$\mathcal{D}x \subseteq W \Longrightarrow x \in W.$$

Dans ce cas, W est dit $\mathcal{D}$ - fortement large.

Exemples

a) Supposons que l'on ait E = $\mathcal{D}$E. Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{D}$ - idéal distinct de E, maximal; $\mathcal{A}$ est $\mathcal{D}$ - fortement large.

En effet $\mathcal{A}$ est contenu dans le $\mathcal{D}$ - idéal A défini par

$$A = \{x \in E : \mathcal{D}x \subseteq \mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{A}$ étant supposé distinct de E, coïncide avec A.

Plus généralement, une intersection de $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux distincts de E est un $\mathcal{D}$ - idéal $\mathcal{D}$ - fortement large.

b) Les $\mathcal{R}$ - idéaux $\mathcal{R}$ - fortement larges de D sont les idéaux à droite de D distincts de D, qui sont résidu à droite d'un complexe disjoint d'eux. De tels idéaux sont dits <u>fortement larges à droite</u>. [9]

Un idéal fortement large à droite et à gauche est dit <u>fortement large</u>.

Tout ceci est généralisable au cas où D est remplacé par H.

c) Donnons tout d'abord la notion de résidu médian d'une partie B de D. (Notion due à R. Croisot [5]). On nomme ainsi l'idéal médian W_B défini par :

$$W_B = \{x \in D : DxD \subseteq D - B\} .$$

Les idéaux médians de D, distincts de D, qui sont résidu médian d'un complexe de D disjoint d'eux sont dit <u>médianement fortement larges</u>.

On interprète tout de suite cette notion grâce au tas $(D, \mathcal{M}_1)$.

On généralise évidemment ces considérations au cas où H remplace D.

d) Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter les $\mathcal{P}$ - idéaux $\mathcal{P}$ - fortement larges de D.

e) On peut appliquer la proposition 39 à l'hypertas $(E, \mathcal{D}')$.

Soit W' un $\mathcal{D}'$ - idéal distinct de E. Soit $\mathcal{L} = E - W'$. $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{D}$ - idéal non vide.

On vérifie tout de suite qu'un complexe A de E admet W' pour $\mathcal{D}'$ - résidu, et est disjoint de W' si et seulement si on a $\mathcal{L} = \mathcal{D}A$, $A \subseteq \mathcal{L}$.

La proposition 39 entraîne alors que

<u>Pour qu'il existe un complexe A contenu dans $\mathcal{L}$ et vérifiant $\mathcal{L} = \mathcal{D}A$, il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{L} = \mathcal{D}\mathcal{L}$</u> . (résultat évident !).

Un $\mathcal{D}$ - idéal $\mathcal{L}$ non vide vérifiant cette condition est dit <u>$\mathcal{D}$ - surjectif</u>.

Si $\mathcal{D}x$ est non vide quelque soit $x \in E$, toute réunion de $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux est un idéal $\mathcal{D}$ - surjectif.

Cette notion permet de nouvelles définitions dans le cadre des demi-groupes et des demi-hypergroupes.

Par exemple un idéal à droite L de H non vide est dit <u>surjectif à droite</u> si $L = L * H$. Un idéal surjectif à gauche et à droite est dit <u>surjectif</u>.

Un idéal médian J de H non vide, est dit <u>médianement surjectif</u> si $J = H * J * H$.

Dans tout ce paragraphe, W désignera un $\mathcal{D}$ - idéal, $\mathcal{D}$ - fortement large de E($W \neq E$, W peut être vide), et $\mathcal{A}$ désignera un $\mathcal{D}$ - idéal, $\mathcal{D}$ - surjectif. ($\mathcal{A} \neq \Phi$, $\mathcal{A}$ peut être égal à E).

Définitions

Un complexe de E est dit $\mathcal{D}$ - $[W]$ - net (ou $[W]$ - net s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'il est disjoint de W, et admet W pour $\mathcal{D}$ - résidu.

Un complexe de E, A, est dit $\mathcal{D}$ - $[\mathcal{A}]$ - générateur (ou $[\mathcal{A}]$ - générateur s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'il est contenu dans $\mathcal{A}$, et vérifie $\mathcal{A} = \mathcal{D}A$.

Evidemment lorsque $W = \Phi$ ou $\mathcal{A} = E$, ces définitions redonnent des notions déjà connues (celles de $\mathcal{D}$ - netteté et de $\mathcal{D}$ - générateur).

Notons le résultat évident suivant :

Les complexes $\mathcal{D}$ - $[\mathcal{A}]$ - générateurs sont ceux qui sont $\mathcal{D}'$ - $[E - \mathcal{A}]$ - nets.

(Il est clair que $E - \mathcal{A}$ est un $\mathcal{D}'$ - idéal, $\mathcal{D}'$ - fortement large).

Ainsi tout résultat sur les complexes $[W]$ - nets fournit par passage à l'hypertas inverse, un résultat sur les complexes $[\mathcal{A}]$ - générateurs.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'étudier les complexes $[W]$ - nets minimaux, puis par passage à l'hypertas inverse, les complexes $[\mathcal{A}]$ - générateurs minimaux. Enfin nous donnerons des applications aux demi-groupes et demi-hypergroupes. (Nous retrouverons en particulier des résultats de P.Lefèbvre[26]).

Nous allons tout d'abord interpréter la notion de $[W]$ - netteté en définissant une notion essentielle.

Soit L un $\mathcal{D}$ - idéal de E.

A toute application $\theta \in \mathcal{D}$, nous associons une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, notée θ_L, définie de la façon suivante :

$$\forall x \in E, \quad \theta_L(x) = \theta(x) \cap (E - L).$$

Si $\theta, \theta' \in \mathcal{D}$, on a $\theta_L \circ \theta'_L = (\theta \circ \theta')_L$.

Il résulte de là que l'ensemble - noté $\mathcal{D}_L$ - des applications de E dans $\mathcal{P}(E)$, de la forme θ_L ($\theta \in \mathcal{D}$) est un demi-groupe. On voit en outre que $E - L$ est un $\mathcal{D}_L$ - idéal.

L'hypertas $(E - L, \mathcal{D}_L)$ est noté $(E, \mathcal{D})_L$.

Proposition 40

Les complexes de E, $[W]$ - nets (resp. $[W]$ - nets minimaux) sont les complexes de $E - W$, $\mathcal{D}_W$ - nets (resp. $\mathcal{D}_W$ - nets minimaux).

Démonstration

Soit A un complexe de E, $[W]$ - net. A est contenu dans E-W. Soit $x \in E - W$.

il existe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $\theta(x) \cap A \neq \Phi$. On a aussi $\theta_W(x) \cap A \neq \Phi$.
A est donc $\mathcal{D}_W$ - net.
La réciproque se montre sans aucune difficulté.
c.q.f.d.
On peut donc appliquer les résultats du paragraphe précédent.
Il découle tout de suite de la proposition 33 la

Proposition 41

Soit A un complexe $[W]$ - net. A est $[W]$ - net minimal si et seulement c'est un complexe $\mathcal{D}$ - libre.

Nous laissons au soin du lecteur de traduire la proposition 34.

Remarque

Supposons que W soit intersection de $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux distincts de E, et que $E = \mathcal{D}E$.
Nous avons déjà vu que W est $\mathcal{D}$ - fortement large. $E - W$ est une réunion de $\mathcal{D}'$ - idéaux minimaux. Par suite l'hypertas $(E, \mathcal{D})_W$ vérifie l'axiome d'échange. La proposition 36 entraîne alors qu'il existe des complexes $[W]$ - minimaux.

Revenons à la situation générale. Nous désignons par Σ_W la réunion des $\mathcal{D}_W$ - idéaux minimaux de $E - W$. Le théoreme 37 et le corollaire 37 - c entraîne que

Les conditions suivantes sont équivalentes :
a) Σ_W est un complexe $\mathcal{D}_W$ - net de $E - W$.
b) Il existe un complexe $[W]$ - net minimal de E.
c) Tout $\mathcal{D}_W$ - idéal propre de $E - W$ contient un $\mathcal{D}_W$ - idéal minimal de $E - W$.
Alors les complexes $[W]$ - nets minimaux de E sont les complexes de Σ_W, $\mathcal{D}$ - libres maximaux.
Si R_W est leur réunion, et si $R_W \neq \Phi$, on a : $\Sigma_W = R_W$.

Afin de pouvoir appliquer à cette étude le théoreme 37, nous donnons la

Définition

Etant donné un $\mathcal{D}$- idéal $W_1 \neq E$, un $\mathcal{D}$- idéal I non contenu dans W_1, est dit $\mathcal{D}$ - $[W_1]$ - minimal (ou $[W_1]$ - minimal s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté) si :

$\forall A$, $\mathcal{D}$ - idéal de E, $\quad I \cap W_1 \subseteq A \subseteq I \Longrightarrow A = I \cap W_1$ ou $A = I$.

Il est clair que les $\mathcal{D}$ - idéaux $[\Phi]$ - minimaux sont les $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux.

Proposition 42

a) Si I est un $\mathcal{D}$ - idéal $[W_1]$ - minimal, $I \cap (E - W_1)$ est un $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéal minimal.

b) Si J est un $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéal minimal de $E - W_1$, et si A est un $\mathcal{D}$-idéal contenant J, $J \cup (A \cap W_1)$ est un $\mathcal{D}$ - idéal $[W_1]$ - minimal.

c) Si I est un $\mathcal{D}$ - idéal-$[W_1]$ - minimal, il en est de même de $I \cup W_1$.

Démonstration

a)

$I \cap (E - W_1)$ est un $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéal non vide. Soit I' un $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéal non vide, contenu dans $I \cap (E - W_1)$.

$I \cap (E - W_1)$. L'ensemble $A = I' \cup (I \cap W_1)$ est un $\mathcal{D}$ - idéal, et on a : $I \cap W_1 \subseteq A \subseteq I$.

I' étant non vide, A est différent de $I \cap W_1$, donc $A = I$, et par suite $I' = I \cap (E - W_1)$. $I \cap (E - W_1)$ est donc un $\mathcal{D}_W$ - idéal minimal.

b)

Nous posons $I_1 = J \cup (A \cap W_1)$. I_1 est un $\mathcal{D}$ - idéal non contenu dans W_1. Soit B un $\mathcal{D}$ - idéal tel que $I_1 \cap W_1 \not\subseteq B \subseteq I_1$. On a $I_1 \cap W_1 = A \cap W_1$, donc aussi $A \cap W_1 \not\subseteq B \subseteq J \cup (A \cap W_1)$. $J \cap B$ est donc non vide, et comme un $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéal, on a $J = J \cap B$, donc $J \subseteq B$.

Par suite, on a $J \cup (A \cap W_1) = B$.

$J \cup (A \cap W_1)$ est donc $[W_1]$ - minimal.

c)

Il découle de a) que $I \cap (E - W_1)$ est un $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéal minimal.

Il suffit d'appliquer c) pour conclure.

c.q.f.d.

Corollaire 42 - a

Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des $\mathcal{D}_{W_1}$ - idéaux minimaux de $E - W_1$ et l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux $[W_1]$ - minimaux de E, qui contiennent W_1.

Nous pouvons à présent établir la

Proposition 43

Pour qu'il existe un complexe $[W]$ - net minimal, il faut et il suffit que tout $\mathcal{D}$ - idéal de E, non contenu dans W, contienne un $\mathcal{D}$ - idéal $[W]$ - minimal.

Alors tout complexe $[W]$ - net minimal a même cardinal que l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux $[W]$ - minimaux qui contiennent W.

Démonstration

W étant fortement large, pour tout $x \in E - W$, il existe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $\theta(x) \neq \Phi$.

Nous pouvons donc appliquer (compte tenu de la proposition 40) le théoreme 37 à l'hypertas $(E, \mathcal{D})_W$.

Supposons tout d'abord qu'il existe un complexe $[W]$ - net minimal.

Si A est un $\mathcal{D}$- idéal non contenu dans W, $A \cap (E - W)$ est un $\mathcal{D}_W$ - idéal non vide, il contient donc un $\mathcal{D}_W$ - idéal minimal J. On a $A \supseteq J \cup (A \cap W)$.
La proposition 42 entraîne que $J \cup (A \cap W)$ est un $\mathcal{D}$- idéal $[W]$ - minimal.

Inversement, supposons que tout $\mathcal{D}$- idéal de E non contenu dans W contienne un $\mathcal{D}$ - idéal $[W]$ - minimal.

Soit B un $\mathcal{D}_W$ - idéal non vide. $B \cup W$ est un $\mathcal{D}$- idéal non contenu dans W ; il contient donc un $\mathcal{D}$- idéal $[W]$ - minimal I. On a $I \cap (E - W) \subseteq B$.
La proposition 42 entraîne que $I \cap (E - W)$ est un $\mathcal{D}_W$ - idéal minimal. Le théorème 37 permet de conclure tout de suite.

La seconde assertion de la proposition est une conséquence immédiate du corollaire 37 - a et du corollaire 42 - a.

c.q.f.d.

<u>Remarque</u>

Supposons que E possède des complexes $\mathcal{D}$- générateurs minimaux. Soit W' le $\mathcal{D}$- idéal de E défini de la façon suivante :

S'il existe des $\mathcal{D}$- idéaux propres de E, W' est l'intersection des $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux de E, autrement $W' = \Phi$.

On a la

<u>Proposition 44</u>

<u>Pour qu'un complexe L de E soit $\mathcal{D}$- générateur de E minimal, il faut et il suffit que ce soit un complexe $[W']$ - net minimal.</u>

<u>Démonstration</u>

Supposons L $\mathcal{D}$ - générateur de E minimal. Alors L est contenu dans E - W'. Donc si $a \in W'$, $\mathcal{D}a \cap L$ est vide.

Soit $a \notin W'$. Il existe $I \in L$ tel que $a \in \mathcal{D}I$. L'axiome d'échange étant vérifié dans E - W', I appartient à $\mathcal{D}a$, donc $\mathcal{D}a \cap L$ est non vide.
L admet W' pour résidu, donc est $[W']$ - net. Etant $\mathcal{D}$- libre, L est $[W']$ - net minimal.

La réciproque s'établit aussi simplement.

c.q.f.d.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur les complexes $[\mathcal{A}]$ - générateurs minimaux.

<u>Définition</u>

Soit $\mathcal{A}_1$ un $\mathcal{D}$ - idéal non vide de E. Un $\mathcal{D}$ - idéal A de E est *dit* <u>$\mathcal{D}$ - $[\mathcal{A}_1]$ - maximal</u> (ou $[\mathcal{A}_1]$ - maximal s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté), s'il est non vide, ne contient pas $\mathcal{H}_1$, et vérifie la condition :

$\forall B$, $\mathcal{D}$- idéal de E, $A \subseteq B \subseteq A \cup \mathcal{H}_1 \Longrightarrow A = B$ ou $B = A \cup \mathcal{H}_1$.

Nous convenons également que lorsque $\mathcal{H}_1$ est un $\mathcal{D}$- idéal minimal, c'est aussi un $\mathcal{D}$- idéal $[\mathcal{H}_1]$ maximal. (Notons que dans ce cas, tout $\mathcal{D}$ - idéal non vide ne contenant pas $\mathcal{H}_1$, est $[\mathcal{H}_1]$ - maximal).

On voit immédiatement que les $\mathcal{D}$ - idéaux $[E]$ - maximaux sont les $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux.

En outre, on a le résultat suivant :

Supposons que $\mathcal{H}_1$ ne soit pas un $\mathcal{D}$ - idéal minimal. Posons $W_1' = E - \mathcal{H}_1$; W_1' est un $\mathcal{D}'$ - idéal de E. Soit A un complexe de E.

Pour que A soit un $\mathcal{D}$ - idéal $\mathcal{D}$ - $[\mathcal{H}_1]$ - maximal, il faut et il suffit que E-A soit un $\mathcal{D}'$ - idéal $\mathcal{D}'$ - $[W_1']$ - minimal.

Ceci dit, on a la

<u>Proposition 45</u>

<u>Pour qu'il existe un complexe $[\mathcal{H}]$ - générateur minimal, il faut et il suffit que tout $\mathcal{D}$- idéal ne contenant pas $\mathcal{H}$ soit contenu dans un $\mathcal{D}$ - idéal $[\mathcal{H}]$ - maximal. Alors le cardinal de tout complexe $[\mathcal{H}]$ - générateur minimal est égal à celui de l'ensemble des $\mathcal{D}$- idéaux $[\mathcal{H}]$ - maximaux contenus dans $\mathcal{H}$.</u>

<u>Démonstration</u>

Dans le cas où $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{D}$ - idéal minimal, il existe des complexes $[\mathcal{H}]$-générateurs minimaux, ce sont les complexes de la forme $\{a\}$. $(a \in \mathcal{H})$.

En outre tout $\mathcal{D}$ - idéal non vide ne contenant pas $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{D}$- idéal $[\mathcal{H}]$ - maximal. On conclut tout de suite.

Dans le cas où $\mathcal{H}$ n'est pas un $\mathcal{D}$ - idéal minimal, la proposition 43 appliquée à l'hypertas $(E, \mathcal{D}')$ et au $\mathcal{D}'$ - idéal $E - \mathcal{H}$ permet de conclure immédiatement.

c.q.f.d.

Nous allons maintenant appliquer les résultats du paragraphe 2 au demi-hypergroupe L et au demi-groupe D. (Dans ce dernier cas, nous retrouverons bien entendu entre autres des résultats de P.Lefèbvre [26]).

Dans ce qui suit, W_1 est un idéal à droite, fortement large à droite, $\mathcal{H}_1$ est un idéal à droite, surjectif à droite. (On pourrait traiter de la même manière les cas à gauche et médians).

<u>Définitions</u>

Un complexe A de H est dit :

<u>$[W_1]$ - net à droite</u> s'il est disjoint de W_1 et admet W_1 pour résidu à droite.

$[\mathcal{A}_1]$ - générateur à droite, s'il est contenu dans $\mathcal{A}_1$ et si $\mathcal{A}_1 =$ $A * H$.

Les complexes $[W_1]$ - nets à droite (resp. $[\mathcal{A}_1]$ - générateurs à droite) sont ceux qui sont $\mathcal{R}$-$[W_1]$-nets. (resp. $\mathcal{R}$ - $[\mathcal{A}_1]$ - générateurs).

Notons que lorsque H est un demi-groupe, P.Lefèbvre [26] dit "W_1 - minimal à droite" au lieu de "$[W_1]$ - net à droite minimal".

D'autre part, un idéal à droite I est dit :

$[W_1]$ - minimal à droite s'il n'est pas contenu dans W_1 et vérifie

$\forall A$, idéal à droite de H, $I \cap W_1 \subseteq A \subseteq I \Longrightarrow A = I \cap W_1$ ou $A = I$.

$[\mathcal{A}_1]$ - maximal à droite s'il n'est pas vide, ne contient pas $\mathcal{A}_1$, et vérifie

$\forall A$, idéal à droite de H, $I \subseteq A \subseteq I \cup \mathcal{A}_1 \Longrightarrow A = I$ ou $A = I \cup \mathcal{A}_1$.

Nous convenons en outre que lorsque $\mathcal{A}_1$ est un idéal à droite minimal, c'est aussi un idéal à droite, $[\mathcal{A}_1]$ - maximal à droite.

Les idéaux à droite $[W_1]$ - minimaux à droite (resp. $[\mathcal{A}_1]$ - maximaux à droite) sont les $\mathcal{R}$ - idéaux $\mathcal{R}$ - $[W_1]$ - minimaux (resp. $\mathcal{R}$ - $[\mathcal{A}_1]$ - maximaux).

Il résulte des propositions 43 et 45 les résultats suivants (dont le premier est dû à P.Lefèbvre [26]).

Pour qu'il existe un complexe $[W_1]$ - net à droite minimal, il faut et il suffit que tout idéal à droite non contenu dans W_1, contienne un idéal à droite $[W_1]$ - minimal à droite. Alors un tel complexe est équipotent à l'ensemble des idéaux à droite $[W_1]$ - minimaux qui contienne W_1.

Pour qu'il existe un complexe $[\mathcal{A}_1]$ - générateur à droite minimal, il faut et il suffit que tout idéal à droite ne contenant pas $\mathcal{A}_1$, soit contenu dans un idéal à droite $[\mathcal{A}_1]$ - maximal à droite. Alors un tel complexe est équipotent à l'ensemble des idéaux à droite $[\mathcal{A}_1]$ - maximaux à droite qui sont contenus dans $\mathcal{A}_1$.

Nous allons, pour terminer ce paragraphe, donner quelques compléments relatifs au cas des demi-groupes.

Nous donnons tout d'abord les

Définitions

Un idéal I de D est dit :

premier si $ab \in I \Longrightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

premier au sens de Lesieur - Croisot [27] si $a D b \subseteq I \Longrightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

Evidemment, un idéal premier l'est au sens de Lesieur - Croisot ; en outre, un idéal à droite distinct de D, premier au sens de Lesieur - Croisot, est fortement large à droite.

Ceci dit, nous avons le résultat suivant :

Si W_2 est un idéal bilatère distinct de D, premier au sens de Lesieur - Croisot, et s'il existe des idéaux à droite de D, $[W_2]$ - minimaux à droite, alors D possède des complexes $[W_2]$ - nets à droite minimaux.

Démonstration

Il résulte de la proposition 42 que la réunion Σ_{W_2} des $\mathcal{R}_{W_2}$ - idéaux minimaux de $D - W_2$ est non vide. Nous verrons au prochain chapitre, et pour l'instant l'admettons que $\Sigma_{W_2} \cup W_2$ est un idéal bilatère de D. Soient $x \in D - W_2$, $a \in \Sigma W_2$.

$x D a$ est contenu dans $\Sigma_{W_2} \cup W_2$, mais pas dans W_2. $x D a$ rencontre donc Σ_{W_2} qui est donc un complexe $\mathcal{R}_{W_2}$ - net de $D - W_2$. On conclut tout de suite.

c.q.f.d.

Nous appliquons maintenant la proposition 44 à $(D, \mathcal{R}')$.

Supposons que D possède des complexes générateurs à droite minimaux ; soit Σ' leur réunion. $D - \Sigma' = W'$ est, soit la partie vide, soit l'intersection des idéaux à droite maximaux de D.

En outre, les complexes générateurs à droite minimaux de D sont les complexes $[W']$ - nets à droite minimaux.

Dans le cas où W' est réflectif (c'est-à-dire vérifie $ab \in W' \Longrightarrow ba \in W'$), on peut préciser la structure de Σ', en appliquant le théorème suivant du à P. Lefèbvre : [26]

Théorème

Soit W_2 un idéal bilatère, réflectif, fortement large de D. Si R_{W_2} est la réunion supposée non vide des complexes $[W_2]$ - nets à droite minimaux de D, on a la partition

$$R_{W_2} = Z \cup \bigcup_{i \in I} C_i .$$

avec : $Z R_{W_2} \subseteq W_2$; $R_{W_2} Z \subseteq W_2$; $i, j \in I$, $i \neq j \Longrightarrow Ci\, Cj \subseteq W_2$

Chaque Ci est un sous-demi-groupe simple de D, réunion de ses idéaux à droite minimaux.

3) Comparaison du cardinal de l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E, et de l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux de E.

Supposons que E possède un complexe $\mathcal{D}$ - net minimal K, et un complexe $\mathcal{D}$ - générateur minimal L. Comparer les cardinaux de K et de L revient en vertu des corollaires 37 - a et 38 - a à comparer les cardinaux de l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux de E et de l'ensemble des $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux de E. C'est cette comparaison que nous nous proposons de faire.

Pour cela remarquons que K et L sont des complexes $\mathcal{D}''$ - nets. (Rappelons que $(E, \mathcal{D}'')$ est l'hypertas stable associé à $(E, \mathcal{D})$).

Supposons un moment que l'on ait montré moyennant certaines hypothèses que K est un complexe $\mathcal{D}''$ - net minimal de E. Il résulte alors de la proposition 34 que L contient un complexe $\mathcal{D}''$ - net minimal de E, lequel est équipotent à K, donc que l'on a card K $\leq$ card L. Nous dirons qu'il y a moins de $\mathcal{D}$ - idéaux minimaux dans E que de $\mathcal{D}$ - idéaux maximaux.

Bien sûr, si l'on avait supposé L $\mathcal{D}''$ - net minimal, on aurait eu l'inégalité inverse card L $\leq$ card K.

Théorème 46

Si $(E, \mathcal{D})$ vérifie la condition notée (R)

$$x \in \mathcal{D}u,\ y \in \mathcal{D}u \Longrightarrow \mathcal{D}x \cap \mathcal{D}y \neq \Phi.$$

Tout complexe K $\mathcal{D}$ - net minimal est $\mathcal{D}''$ - net minimal.

Démonstration

On utilise la proposition 33. Il faut montrer que K est $\mathcal{D}''$ - libre

Soient $k, k' \in K$, $\varphi \in \mathcal{D}''$ tels que $k \in \varphi(k')$. On doit montrer que $k = k'$.

φ est composée de n applications appartenant à $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$. On va faire une récurrence sur n.

$n = 1$

On a $k \in \theta(k')$ ou $k' \in \theta(k)$, avec $\theta \in \mathcal{D}$.

K étant $\mathcal{D}$ - libre, on a $k = k'$.

$n = 2$

Aucune difficulté car la relation $\mathcal{D}k \cap \mathcal{D}k' \neq \Phi$ entraîne $k = k'$.

On suppose le résultat vrai pour n, on va le montrer pour n + 1.

Compte tenu de la relation ${}_{\theta}\Gamma \circ {}_{\theta}'\Gamma = {}_{\theta'\circ\theta}\Gamma$ $(\theta, \theta' \in \mathcal{D})$, deux cas peuvent se présenter :

$$\varphi = {}_{\theta_1}\Gamma \circ \theta_2 \circ {}_{\theta_3}\Gamma \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1} \qquad (\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathcal{D},\ \varphi_4, \dots, \varphi_{n+1} \in \mathcal{D}'')$$

ou bien

$$\varphi = \theta_1 \circ {}_{\theta_2}\Gamma \circ \theta_3 \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1} \qquad (\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathcal{D},\ \varphi_4, \dots, \varphi_{n+1} \in \mathcal{D}'')$$

Ces deux cas se traitent de la même façon. Supposons par exemple le premier réalisé.

Il existe alors x, y, z $\in$ E tels que :

$x \in \theta_1(k) \cap \theta_2(y)$, $z \in \theta_3(y) \cap (\varphi_4 \circ \ldots \circ \varphi_{n+1}(k'))$.

La condition (R) appliquée à x et z entraîne que l'on a $\mathcal{D} x \cap \mathcal{D} z \neq \Phi$.

Donc il existe $\theta, \theta' \in \mathcal{D}$ tels que $\theta(x) \cap \theta'(z) \neq \Phi$.

On peut écrire :

$x \in {}_{\theta}\Gamma \circ \theta'(z)$; $k \in {}_{\theta_1}\Gamma(x) \subseteq {}_{\theta_1}\Gamma \circ {}_{\theta}\Gamma \circ \theta'(z) = {}_{\theta \circ \theta_1}\Gamma \circ \theta'(z)$.

$k \in {}_{\theta \circ \theta_1}\Gamma \circ \theta' \circ \varphi_4 \circ \ldots \circ \varphi_{n+1}(k')$.

L'hypothèse de récurrence entraîne $k = k'$.

c.q.f.d.

Remarques

On voit tout de suite que (E, $\mathcal{D}$) vérifie la condition (R) dans les deux cas suivants :

(E, $\mathcal{D}$) est un tas, $\mathcal{D}$ est un demi-groupe abélien.

E est réunion de ses $\mathcal{D}$- idéaux minimaux, et pour tout $x \in E$, $\mathcal{D}x \neq \Phi$.

Notons d'autre part que (E, $\mathcal{D}'$) vérifie la condition (R) si et seulement si (E, $\mathcal{D}$) vérifie la condition notée (R') :

$\mathcal{D}x \cap \mathcal{D}y \neq \Phi \Longrightarrow \exists u \in E$ tel que $x \in \mathcal{D}u$, $y \in \mathcal{D}u$.

Il découle donc du théorème précédent, par passage à l'hypertas inverse la

Proposition 47

Si (E, $\mathcal{D}$) vérifie la condition (R'), tout complexe $\mathcal{D}$ - générateur de E minimal est $\mathcal{D}''$ - net minimal.

(E, $\mathcal{D}$) vérifie la condition (R') dans les deux cas suivants :

(E, $\mathcal{D}$) est surjectif et injectif, $\mathcal{D}$ est un demi-groupe abélien.

E est réunion de ses $\mathcal{D}$- idéaux minimaux, et $E = \mathcal{D}E$.

Nous allons maintenant appliquer ces résultats au cas de H et de D.

Le tas (D, $\mathcal{J}$) vérifie la condition (R). Il en résulte tout de suite que

Si A est un complexe de D tel que rad A = D, A étant minimal pour cette condition, et si B est un complexe de D tel que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)}$, B étant minimal pour cette condition, on a card A $\leq$ card B.

D'autre part, on remarque que l'hypertas (H, $\mathcal{R}$) vérifie la condition (R) si et seulement si

$x \in u * H,\ y \in u * H \Longrightarrow (x * H) \cap (y * H) \neq \Phi.$ (R_d).

On voit aussi que (H, $\mathcal{R}$) vérifie la condition (R') si et seulement si

$(x * H) \cap (y * H) \neq \Phi \Longrightarrow \exists u \in H$ tel que $x \in u * H,\ y \in u * H$. (R_d')

Il découle alors du théorème 46, de la proposition 47, et des remarques faites au début du paragraphe, le

Théorème 48

Supposons que H possède un complexe net à droite minimal et un complexe générateur à droite minimal. (1)

a) Si H vérifie la condition (R_d), il y a moins d'idéaux à droite minimaux que d'idéaux à droite maximaux.

b) Si H vérifie la condition (R'_d), il y a moins d'idéaux à droite maximaux que d'idéaux à droite minimaux.

Nous allons donner quelques compléments relatifs au cas où H est remplacé par D.

Evidemment un demi-groupe abélien vérifie la condition (R_d), un demi-groupe simple réunion de ses idéaux à droite minimaux vérifie les conditions (R_d) et (R'_d). Mais le théorème 48 n'apporte rien d'intéressant dans ces cas, car un demi-groupe abélien possède au plus un idéal minimum, et un demi-groupe simple réunion de ses idéaux à droite minimaux possède autant d'idéaux à droite minimaux que d'idéaux à droite maximaux ! (voir p.54).

Pour mieux analyser la condition (R_d), rappelons la définition suivante, due à P.Dubreil [9] :

D est dit réversible à droite si

$\forall x, y \in D, \; xD \cap yD \neq \Phi$.

(Evidemment, si D est réversible à droite, il vérifie la condition (R_d). Mais l'application du théorème 48 n'offre ici aucun intérêt, car il est évident que dans un tel demi-groupe, il existe au plus un idéal à droite minimal).

Le résultat suivant est évident :

Pour qu'un demi-groupe vérifie la condition (R_d), il faut et il suffit qu'il soit réunion d'idéaux à droite dont chacun est un demi-groupe réversible à droite.

Nous allons maintenant caractériser les demi-groupes à noyau qui vérifient la condition (R_d).

Proposition 49

Supposons que D possède des idéaux à droite minimaux ; Soit N leur réunion (2).

Pour que D vérifie la condition (R_d), il faut et il suffit que

$$\forall u \in D, \qquad \exists n \in N \text{ tel que } uN = nN.$$

(1) Ceci est réalisé par exemple lorsque H est noethérien et artinien à droite (en particulier fini) et $H * H = H$, ou bien lorsque H est un demi-groupe compact et $H * H = H$.

(2) N est le noyau de D ; c'est le plus petit idéal bilatère non vide de D.

Démonstration

Supposons que D vérifie La condition (R_d).

Soient $u \in D$, $x, y \in u N$. x et y appartiennent à N, et on a $x D \cap y D \neq \Phi$. Par suite, x et y appartiennent à un même idéal à droite minimal de D, Lequel s'écrit n N. ($n \in N$).

On a $u N = n N$.

Inversement, supposons réalisée La condition de La proposition. Soient $x, y \in u D$. Soit $n \in N$ tel que $u N = n N$.

xn et yn appartiennent à u N, donc à n N, donc à un même idéal à droite minimal de D.

Par suite $xn D \cap yn D$ est non vide, et il en est de même de $x D \cap y D$.

c.q.f.d.

Conservons Les notations de La proposition 49. Supposons qu'il existe un homomorphisme φ de D sur N, dont La restriction à N est L'homomorphisme identique : (N est dit alors un rétract algébrique de D).

Dans ce cas, La condition de La proposition 49 est vérifiée car si u est un élément de D, on a :

$$u N = \varphi(u N) = \varphi(u)\,\varphi(N) = \varphi(u)\,N = n N \text{ (en posant } \varphi(u) = n).$$

Il découle alors des remarques qui précèdent et des propositions 48 et 49 La

Proposition 50

Si D possède des idéaux à droite minimaux, donc un noyau N, s'il existe des complexes générateurs à droite minimaux, et si La condition suivante est vérifiée : $\forall\, u \in D, \exists\, n \in N : u N = n N$. (Elle L'est Lorsque N est un rétract algébrique de D), alors il y a dans D moins d'idéaux à droite minimaux que d'idéaux à droite maximaux.

Remarques

a) Si D est un demi-groupe compact, et si $D^2 = D$, il existe des idéaux à droite minimaux, (1) donc un noyau N, il existe des complexes générateurs à droite minimaux, et de plus il existe une application continue de D sur N est L'identité. (2). (N est dit un rétract topologique de D).

Mais cette application n'est pas en général un homomorphisme (il serait intéressant de caractériser Les demi-groupes compacts pour Lesquels c'en est un), et donc La conclusion de La proposition précédente n'est pas valable.

(1) Voir par exemple [18]

(2) Ce dernier résultat est dû à A.D. Wallace. [37]

b) G.Lallement [25] a caractérisé les demi-groupes dont le noyau est un rétract algébrique ; en montrant que ce sont les demi-groupes qui sont bandes rectangulaires d'homogroupes.

(Une bande rectangulaire est un demi-groupe B avec zéro, qui possède les propriétés suivantes :

$\forall a, b \in B,$ $\quad a\,b\,a = 0$ ou $a\,b\,a = a.$

$\forall a, b \in B, \neq 0,$ $\quad \exists x \in B$ tel que $axb \neq 0.$

Chapitre VII

Noyau des bi-hypertas

Nous allons dans ce chapitre définir et étudier le noyau d'un bi-hypertas, puis nous appliquerons les résultats obtenus à l'étude de D et de H.

1 - Régularité . Condition S.

Définition

Le bi-hypertas $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est dit régulier si :

$\forall a_i$, $\mathcal{D}_i$-idéal non vide de E, non vide $(i = 1,2)$, $a_1 \cap a_2$ est non vide.

Exemples de bi-hypertas réguliers

a) Les bi-hypertas $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ et $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ sont réguliers

b) Soit M un sous-demi-hypergroupe de H, rencontrant tout idéal à gauche non vide de H. $(H, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$ est régulier.

c) Soit W un idéal bilatère de D, distinct de D

Nous savons associer à W, deux hypertas $(D, \mathcal{R})_W = (D - W, \mathcal{R}_W)$, et $(D, \mathcal{L})_W = (D - W, \mathcal{L}_W)$.

On vérifie tout de suite que $(D - W, \mathcal{R}_W, \mathcal{L}_W)$ est un bi-hypertas. On le note $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})_W$.

On montre sans difficulté que si W est premier, ou premier au sens de Lesieur - croisot, $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})_W$ est régulier.

Les conditions S.

Nous définissons sur E deux relations d'équivalence ρ_1 et ρ_2, en posant pour $i = 1$ ou 2 :

$\forall x, y \in E, \qquad x\, \rho_i\, y \iff x \in \mathcal{D}_i\, y \cup \{y\}$ et $y \in \mathcal{D}_i\, x \cup \{x\}$.

(Lorsque $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est le bi-hypertas $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$, ρ_1 et ρ_2 sont les équivalences de Green [15] à gauche et à droite).

Nous allons maintenant définir sur E un certain nombre de conditions, appelées conditions S, éventuellement vérifiées par $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

$x \in \theta_1(u),\ y \in \theta_1(u) \implies x\, \rho_2\, y \quad (S_{12})$. $(\theta_1 \in \mathcal{D}_1)$.

$x \in \theta_2(u),\ y \in \theta_2(u) \implies x\, \rho_1\, y \quad (S_{21})$. $(\theta_2 \in \mathcal{D}_2)$.

$\theta_1(x) \cap \theta_1(y) \neq \Phi \implies x\, \rho_2\, y \quad (S'_{12})$. $(\theta_1 \in \mathcal{D}_1)$.

$(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ vérifie la condition S_{12} (resp. S_{21}) si et seulement si

$(E, \mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ vérifie la condition S'_{12} resp. (S'_{21}).

Si $(E, \mathcal{D}_1)$ est un pseudo-tas, $(E, \mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_2)$ vérifie la condition S_{12}

Si $(E, \mathcal{D}_1)$ est un hypertas injectif, $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ vérifie la condition S'_{12}

Exemples

a) $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie toujours les conditions S_{12} et S_{21}. Ce bi-hypertas vérifie la condition S'_{12} si et seulement si D vérifie la condition:

$xa = ya \Longrightarrow Dx \cup \{x\} = Dy \cup \{y\}$. (C'_1).

On définit et interprète de même la condition

$ax = ay \Longrightarrow xD \cup \{x\} = yD \cup \{y\}$. (C'_2).

Ces conditions généralisent respectivement les conditions de simplifiabilité à droite et à gauche.

b) Le bi-hypertas $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie la condition S_{12} si et seulement si

$x \in a_1 * \ldots * a_n,\ y \in a_1 * \ldots * a_n \Longrightarrow (H * x) \cup \{x\} = (H * y) \cup \{y\}$ (D_1)

On voit sans peine que la condition D_1 est équivalente au fait que les idéaux à gauche de H sont complets).

On définit et interprète de même la condition

$x \in a_1 * \ldots * a_n,\ y \in a_1 * \ldots * a_n \Longrightarrow (x * H) \cup \{x\} = (y * H) \cup \{y\}$ (D_2)

Remarquons d'autre part que $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie la condition S'_{12} si et seulement si

$(x * a_1 * \ldots * a_n) \cap (y * a_1 * \ldots * a_n) \neq \Phi \Longrightarrow (H * x) \cup \{x\} = (H * y) \cup \{y\}$ (C'_1)

On définit et interprète de même la condition C'_2.

Ces conditions C'_1 et C'_2 généralisent respectivement les conditions de simplifiabilité à droite et à gauche.

2 - Noyau

Définitions

On appelle idéal bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ toute partie de E qui est un $\mathcal{D}_1$ - idéal et un $\mathcal{D}_2$ - idéal.

On appelle noyau de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ l'intersection de tous les idéaux bilatères propres de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$. (ce peut être la partie vide !).

On dit que $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est simple si E coïncide avec le noyau, autrement dit, s'il n'existe pas d'idéaux bilatères propres.

On peut particulariser ces définitions au cas où $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = (H, \mathcal{X}, \mathcal{L})$

On obtient en particulier la notion de noyau de H (et de D).

Le théorème qui suit est fondamental dans ce chapitre.

Théorème 51

Supposons que $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ vérifie la condition S_{21}, et que la famille $\mathcal{F}_1$ des $\mathcal{D}_1$-idéaux minimaux de E soit non vide. Alors,

a) $\bigcup_{L \in \mathcal{F}_1} L$ est un $\mathcal{D}_2$ - idéal de E, donc un idéal bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

B) Si de plus, $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est simple ou régulier $\bigcup_{L \in \mathcal{F}_1} L$ est le noyau de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, et en outre tout $\mathcal{D}_1$ - idéal propre de E contient un élément de $\mathcal{F}_1$

Démonstration

Pour montrer que $\bigcup_{L \in \mathcal{F}_1} L$ est un $\mathcal{D}_2$-idéal, nous allons établir que si $\theta_2 \in \mathcal{D}_2$, $L \in \mathcal{F}_1$, et si $\theta_2(L)$ est non vide, alors c'est un $\mathcal{D}_1$ - idéal minimal de E. $\theta_2(L)$ est manifestement un $\mathcal{D}_1$ - idéal de E.

Soit A_1 un $\mathcal{D}_1$ - idéal de E contenu dans $\theta_2(L)$, non vide.

Soit $B_1 = \{ b \in L : \theta_2(b) \subseteq A_1 \}$.

On a manifestement

$\theta_2(B_1) \subseteq A_1 \subseteq \theta_2(L)$; $B_1 \subseteq L$.

B_1 n'est pas vide car si a est un élément de A_1, il existe $I \in L$ tel que $a \in \theta_2(I)$. La condition S_{21} entraîne que $\theta_2(I)$ est contenu dans A_1, donc que $I \in B_1$.

On voit aisément que B_1 est un $\mathcal{D}_1$ - idéal de E. Donc B_1 est égal à L, et A_1 est égal à θ_2 (L).

Supposons maintenant $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ régulier (le cas où $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est simple est trivial).

Soit A un idéal bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ non vide. Soit L un $\mathcal{D}_1$-idéal minimal de E. Puisque $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est régulier, $A \cap L$ est non vide, donc A contient L, et par suite A contient $\bigcup_{L \in \mathcal{F}_1} L$. $\bigcup_{L \in \mathcal{F}'_1} L$ est donc le noyau de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

Soit alors A_1 un $\mathcal{D}_1$-idéal de E, non vide. Puisque $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est régulier, $A_1 \cap \left(\bigcup_{L \in \mathcal{F}'_1} L \right)$ est non vide, donc il existe $L \in \mathcal{F}'_1$ tel que $A_1 \cap L$ est non vide. Bien sûr, A_1 contient L.

c.q.f.d.

Nous désignons maintenant par Z_i $(i = 1,2)$ l'ensemble des éléments $\mathcal{D}_i$-nets de E. (Z_i est peut être vide).

<u>Théorème 52</u>

<u>Si $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ vérifie la condition S_{21}, et si Z_1 est non vide, Z_1 est le noyau de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ et il contient Z_2.</u>

<u>Démonstration</u>

Il est clair que Z_1 est le seul $\mathcal{D}_1$- idéal minimal de E, c'est même l'élément minimum de la famille des $\mathcal{D}_1$ - idéaux non vides de E. Le théorème précédent entraîne que Z_1 est un idéal bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$. Donc Z_1 contient Z_2. De plus tout idéal bilatère de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ contient Z_1 qui est, par suite, le noyau de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

c.q.f.d.

<u>Corollaire 52 - a</u>

<u>Si $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ vérifie les conditions S_{12} et S_{21}, et si Z_1 et Z_2 ne sont pas vides, on a :</u>

<u>$Z_1 = Z_2 =$ noyau de $(E, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.</u>

<u>3 - Applications du théorème 51</u>

Le théorème 51 entraîne immédiatement la

<u>Proposition 53</u>

a) <u>Si D possède un idéal à droite minimal, son noyau est réunion de ses idéaux à droite minimaux, et de plus tout idéal à droite non vide contient un idéal à droite minimal.</u> (1)

(A) Ce résultat est dû à A.H. Clifford. [2]

b) *Si H vérifie la condition D_2 et possède un idéal à droite minimal, son noyau est réunion de ses idéaux à droite minimaux, et de plus tout idéal à droite non vide contient un idéal à droite minimal.*

Remarque

Soit M un sous-demi-hypergroupe de H, rencontrant tout idéal à droite non vide de H, et vérifiant : $\forall x \in H$, $m \in M$, $m * x$ est réduit à un seul élément. Alors, le bi-hypertas $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L}_M)$ est régulier et vérifie la condition S_{21}.

On pourrait donc lui appliquer le théorème 51. (Nous ne le ferons pas !).

Proposition 54

a) *Si W est un idéal bilatère de D, distinct de D, la réunion Σ'_W des idéaux à droite, [W] - minimaux à droite de D est un idéal bilatère de D.*

b) *Si W est un idéal bilatère de D, distinct de D, premier ou premier au sens de Lesieur-Croisot, et si Σ'_W et ${}_W\Sigma'$ sont non vides, on a $\Sigma'_W = {}_W\Sigma'$.*

Démonstration

a) Si Σ'_W est vide, il n'y a rien à montrer. Supposons $\Sigma'_W \neq \Phi$. Soit Σ_W la réunion des $\mathcal{R}_W$ - idéaux minimaux de D - W. La proposition 42 entraîne que l'on a $\Sigma'_W = \Sigma_W \cup W$. De plus le bi-hypertas $(D - W, \mathcal{R}_W, \mathcal{L}_W)$ vérifie la condition S_{21}, donc en vertu du théorème 51, Σ_W est un idéal bilatère de ce bi-hypertas. On conclut tout de suite.

b) Le bi-hypertas $(D - W, \mathcal{R}_W, \mathcal{L}_W)$ est régulier, la seconde partie du théorème 51 entraîne l'égalité entre Σ_W et ${}_W\Sigma$. etc.

c.q.f.d.

Proposition 55

Soit $\mathcal{A}$ un idéal bilatère non videde H. Si H vérifie la condition C'_2, l'intersection $P_{\mathcal{A}}$ des idéaux à droite de H, $[\mathcal{A}]$ - maximaux à droite est un idéal bilatère de H.

Démonstration

Eliminons les cas triviaux où $\mathcal{A}$ est un idéal à droite minimal ($P_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$) ou bien où il n'existe pas d'idéaux à droite $[\mathcal{A}]$ - maximaux à droite. ($P_{\mathcal{A}} = H$).

Soit $W' = H - \mathcal{A}$. Les idéaux à droite $[\mathcal{A}]$ - maximaux à droite de H sont les complémentaires de $\mathcal{R}'$ - idéaux $[W']$ - minimaux. Si nous désignons

par $\Sigma'_{W'}$, la réunion de ces derniers, on a donc $P_{\mathcal{A}} = H - \Sigma'_{W'}$.
Désignons d'autre part par $\Sigma_{W'}$ la réunion des $\mathcal{R}'_{W'}$ - idéaux minimaux de
. On a $\Sigma'_{W'} = W' \cup \Sigma_{W'}$.
(proposition 42).
On a donc $P_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap (H - \Sigma_{W'})$. Mais le bi-hypertas $(\mathcal{A}, \mathcal{R}'_{W'}, \mathcal{L}'_{W'})$ vérifie la condition S_{21}, donc $\Sigma_{W'}$ en est un idéal bilatère, on conclut alors aisément.

c.q.f.d.

Remarque

Nous ne savons pas dans quels cas on a $_{\mathcal{A}}P = P_{\mathcal{A}}$.

Corollaire 55 - a

Si H vérifie la condition C'_2, l'intersection de ses idéaux à droite maximaux est un idéal bilatère.

Proposition 56

Si H vérifie la condition C'_2 et possède au moins un idéal à droite maximal, pour qu'il soit simple, il faut et il suffit qu'il soit simple à droite.

Démonstration

Si H est simple à droite, il est simple. Pour montrer la réciproque, nous faisons un raisonnement par l'absurde, en supposant H simple, mais non simple à droite. Alors l'intersection de ses idéaux à droite maximaux est vide, donc l'hypertas $(H, \mathcal{R}')$ vérifie l'axiome d'échange. Comme $H = H * H$, il existe un complexe générateur à droite de H minimal A.
Soit $a \in A$. Il existe $h \in H$ tel que $a \in a * h$.
Soit $x \in H$. On a $a * x \subseteq a * h * x$. Il existe donc $u \in h * x$, tel que $a * x \cap a * u \neq \emptyset$.
La condition C'_2 entraîne que x appartient à $u * H$, donc $h * H$.
Donc $H = h * H$. $\{h\}$ est générateur à droite de H minimal, donc il n'y a dans H qu'un seul idéal à droite maximal, ce qui contredit le fait que l'intersection des idéaux à droite maximaux de H est vide.

c.q.f.d.

Remarque

On peut, bien sûr, particulariser cette proposition au cas où D remplace H.

Corollaire 56 - a

Tout demi-hypergroupe simple à gauche, vérifiant la condition C'_2 et possédant au moins un idéal à droite maximal est un hypergroupe.

Corollaire 56 - b

Tout demi-hypergroupe simple à gauche, simplifiable à gauche et possédant au moins un idéal à droite maximal est un groupe.

En effet, nous avons établi qu'un hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe [22].

4 - Applications du théorème 52

Il résulte immédiatement du corollaire 52 - a le résultat suivant :

Si D possede des éléments nets a droite et des éléments nets à gauche, l'ensemble des premiers coïncide avec l'ensemble des seconds, et est le noyau de D. (1)

Nous allons indiquer sommairement comment on peut généraliser ce théorème. Plusieurs généralisations sont du reste possibles :

a) Eléments M - nets de D

Notation

Si M est un sous demi-groupe de D, nous désignons par $Z_1(M)$ (resp. $Z_2(M)$) l'ensemble des éléments M - nets à droite (resp. à gauche) de D.

Nous posons de plus $Z_i(D) = Z_i (i = 1,2)$.

Proposition 57

Si M et N sont deux sous demi-groupes de D tels que $Z_1(M)$ et $Z_2(N)$ sont non vides, on a $Z_1(M) = Z_2(N) = Z_1 = Z_2$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le corollaire 52 - a aux bi-tas $(D, \mathcal{R}_M, \mathcal{L}_N)$, $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L}_N)$, $(D, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$.

b) Cas du demi-hypergroupe H

On peut, si M est un sous demi-hypergroupe de H, étudier les éléments M - nets à gauche et à droite de H.

Nous nous bornons au cas M = H.

Proposition 58

Si H vérifie les conditions D_1 et D_2, et possède des éléments nets à gauche et des éléments nets à droite, l'ensemble des premiers coïncide avec l'ensemble des seconds, et est le noyau **N** de H. N est un sous-hypergroupe de H.

(1) Ce résultat est dû à A.H. Clifford et D.D. Miller [4]. Ces auteurs utilisent le mot "zéroïd" au lieu du mot "net".

Démonstration

Le bi-hypertas $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie les conditions S_{12} et S_{21}. Le corollaire 52 - a entraîne la première partie de la proposition. N est en outre un hypergroupe car pour tout $n \in N$, on a $N = N * n = n * N$.

c.q.f.d.

Remarque

La proposition 58 fournit une généralisation naturelle aux demi-hypergroupes de la notion d'homogroupe.

(Un homogroupe est un demi-groupe qui possède un groupe comme idéal. Cette notion est due à G.Thierrin[35]).

Nous allons maintenant appliquer le théorème 52 au bi-hypertas $(H, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$.

Définitions

Un élément a de H est dit inversible à droite au sens de Ljapin (1) si on a : $H = a * H$. (Cela équivaut à dire que le complexe $\{a\}$ est générateur à droite de H)

On définit de même les éléments de H inversibles à gauche au sens de Ljapin. Un élément inversible au sens de Ljapin des deux côtés est dit inversible au sens de Ljapin.

Nous désignons par I_1 (resp. I_2) l'ensemble des éléments de H, inversibles à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin.

Enfin, nous posons : $I = I_1 \cap I_2$

Lemme 59 - a

$\forall x, y \in I_i \quad (i = 1,2), \quad (x * y) \cap I_i \neq \Phi.$

Si x et y appartiennent par exemple à I_1, on a $H = x * H = x * y * H$. Il existe $u \in x * y$ tel que $H = u * H$. u appartient donc à I_1 etc.

Lemme 59 - b

I_2 (resp. I_1) est consistant à droite (resp. à gauche).

Lemme 59 - c

Si H vérifie la condition C_2' (en particulier si H est simplifiable à gauche), et si I_1 est non vide, I_1 est consistant et contient I_2.

En effet, le bi-hypertas $(H, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$ vérifie la condition S_{21}, le théorème 52 entraîne alors tout de suite ce lemme.

(1) Ljapin a défini ces notions dans le cas où H est un demi-groupe. [29]

Lemme 59 - d

Si H est simplifiable à gauche et si I_1 est non vide, I_1 peut être muni d'une structure de demi-hypergroupe simplifiable à gauche et simple à droite, en posant :

$\forall x, y \in I_1, \qquad x \circledast y = (x * y) \cap I_1.$

En outre, tout élément de I_2 est inversible à gauche au sens de Ljapin dans I_1.

Démonstration

Remarquons d'abord que si x et y appartiennent à I_1, $x \circledast y$ est non vide. (lemme 59 - a).

Soient alors $x, y, z \in I_1$. Montrons que l'on a $(x \circledast y) \circledast z = (x*y*z) \cap I_1$)

(On montre de la même façon que l'on a $x \circledast (y \circledast z) = (x*y*z) \cap I_1$).

Il est évident que $(x \circledast y) \circledast z$ est contenu dans $(x * y * z) \cap I_1$.

Soit $u \in (x * y * z) \cap I_1$. Il existe $v \in x * y$ tel que u appartient à $(v * z) \cap I_1$.

I_1 étant consistant (lemme 59 - c), v appartient à I_1 donc à $x \circledast y$, et d'autre part u appartient à $v \circledast z$ donc à $(x \circledast y) \circledast z$. etc.

Ainsi I_1 muni de la loi x est un demi-hypergroupe.

Celui-ci est manifestement simplifiable à gauche. Soient $x, y \in I_1$. Il existe $z \in H$ tel que x appartient à $y * z$. I_1 étant consistant, z appartient à I_1, donc x appartient à $y \circledast z$, soit à $y \circledast I_1$. I_1 est simple à droite.

I_2 est d'autre part contenu dans I_1 (lemme 59 - c).

Montrons que tout élément z de I_2 est inversible à gauche au sens de Ljapin dans I_1. Soit $x \in I_1$. Il existe $y \in H$ tel que x appartient à $y * z$. I_1 étant consistant, y appartient à I_1, donc x appartient à $y \circledast z$.

Ainsi nous avons $I_1 = I_1 \circledast z$.

c.q.f.d.

Lemme 59 - e

Tout demi-hypergroupe K simplifiable à gauche, simple à droite, contenant des éléments inversibles à gauche au sens de Ljapin est un groupe.

Démonstration

Nous avons déjà remarqué qu'un hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe. Il faut donc établir que K est un hypergroupe.

Montrons d'abord que K possède une unité.

Soit $x_0 \in K$. Il existe $e \in K$ tel que x_0 appartient à $x_0 * e$.

Soit $y \in H$. On a $x_0 * y \subseteq x_0 * e * y$, donc y appartient à $e * y$ (en vertu de la simplifiabilité à gauche).

Soit alors a un élément inversible à gauche au sens de Ljapin. Il existe $b \in K$ tel que x_0 appartient à $b * a$. On a :

$x_0 \in x_0 * e$; $x_0 * e \subseteq b * a * e$; $(b * a) \cap (b * a * e) \neq \Phi$.

Par suite a appartient à $a * e$.

Soit alors $y \in K$. Il existe $f \in K$ tel que y appartient à $y * f$. On montre par le même raisonnement que a appartient à $a * f$; donc $(a * e) \cap (a * f) \neq \Phi$, et par suite $e = f$.

Donc pour tout $y \in K$, on a $y \in (e * y) \cap (y * e)$.

e est unité de K.

Ceci dit soit $x \in K$. Il existe $x' \in K$ unique tel que e appartient à $x * x'$.

Nous posons $x' = x^{-1}$.

On a $x \in e * x$; $e * x \subseteq x * x^{-1} * x$.

Donc il existe $u \in x^{-1} * x$, tel que x appartient à $x * u$. Il est clair que $u = e$.

Par suite, pour tout $x \in K$, e appartient à $(x * x^{-1}) \cap (x^{-1} * x)$.

Soient alors $x, y \in K$, On a $e \in y^{-1} * y$; $x \in x * e$;

$x * e \subseteq x * y^{-1} * y$. Donc x appartient à $K * y$. On a $K * y = K$

K est simple à gauche.

c.q.f.d.

<u>Théorème 59</u>

a) Si H <u>est simplifiable d'un côté, et si I_1 et I_2 sont non vides, on a $I_1 = I_2 = I$. Muni de la loi $\otimes$, I est un groupe dont l'élément neutre est unité d'un côté de H, et est un complexe consistant de H.</u>

b) <u>Supposons que H possède un complexe consistant H' qui possède les propriétés suivantes :</u>

<u>$H = H * H' = H' * H$.</u>

<u>$\forall x', y' \in H'$, $\exists z, z' \in H$ tels que $x' \in (y' * z) \cap (z' * y')$.</u>

<u>Dans ce cas, on a $H' = I_1 = I_2$. Muni de la loi $\otimes$, H' est un hypergroupe.</u>

<u>Démonstration</u>

La partie b) est évidente. Montrons la partie a), et supposons par exemple H simplifiable à gauche. Les lemmes 59-c, 59-d ; 59 - e entraînent que I_1 est consistant, contient I_2, et est un groupe par rapport à la loi $\otimes$ Montrons que $I_1 = I_2$. Soient $\chi \in I_1$, $a \in I_2$. Il existe $y \in I_1$ tel que $a = y \otimes \chi$; I_2 étant consistant à droite, contient χ , etc.

Soit e l'élément neutre du groupe I_1. On a $e \otimes e = e$.

Si $\chi \in H$, on a : $(e * e * \chi) \supseteq (e * \chi)$, donc χ appartient à $e * \chi$; e est unité à gauche de H.

c.q.f.d.

Nous examinons maintenant le cas où D remplace H.

<u>Théorème 60</u>

a) <u>Si D vérifie une des conditions C_1' ou C_2', et si I_1 et I_2 sont non vides, on a</u>

<u>$I_1 = I_2 = I$. I est un sous-groupe consistant dont l'élément neutre est élément neutre de D.</u>

b) <u>Si D possède un sous-groupe consistant g, et un élément neutre, on a $I_1 = I_2 = g$.</u>

<u>Démonstration</u>

La partie b) est évidente, montrons la partie a). Nous supposons, par exemple, la condition C_2' vérifiée.

Le lemme 59 - c entraîne que I_1 est consistant et contient I_2. On a donc $I = I_1 \cap I_2 = I_2$.

Mais il est bien connu(1) que lorsque I est non vide c'est un groupe dont l'élément neutre, e, est élément neutre de D.

Soit alors $x \in I_1$. Il existe $x' \in D$ tel que $e = xx'$.

I_1 étant consistant, contient x'. Donc il existe $x'' \in D$ tel que $e = x'\,x''$.
On a $x = xe = xx'x'' = ex'' = x''$.
Donc $e = x'\,x \in I_2$. I_2 est consistant à droite, contient x.

On a donc $I_1 = I_2$.

c.q.f.d.

<u>Remarque</u>

Si D est un demi-groupe compact et si I_1 et I_2 sont non vides, on montre que l'on a $I_1 = I_2$.

(1) Voir par exemple R. Desq. [7]

Nous terminons ce chapitre par quelques notions et résultats concernant les éléments grossissants.

Définitions

Un élément x de D est dit grossissant à gauche (1) s'il existe un complexe M de D, distinct de D, tel que $D = xM$.

Un élément x de D est dit fortement grossissant à gauche s'il existe un sous-demi-groupe M de D, distinct de D, tel que $D = xM$.

On montre que (2)

Tout élément grossissant à gauche de D est inversible à droite au sens de Ljapin, mais pas à gauche.

On a alors le résultat suivant :

Si D vérifie C'_1 et possède des éléments inversibles à gauche au sens de Ljapin, il ne contient pas d'éléments fortement grossissants à gauche.

Nous faisons un raisonnement par l'absurde.

Soit a un élément fortement grossissant à gauche de D.

Il existe un sous demi-groupe propre M, tel que $D = a M$.

Le bi-hypertas $(D, \mathcal{R}'_M, \mathcal{L}')$ vérifie la condition S_{12}. Le théorème 52 entraîne que a est inversible à gauche au sens de Ljapin, ce qui contredit le précédent résultat.

c.q.f.d.

(1) Cette notion est due à E.S. Ljapin [29]

(2) Voir R. Desq. [7]

BIBLIOGRAPHIE

(1) M.N. Bleicher et G.B. Preston
Abstract linear dependence relations.
Publicaciones Mathematicae. Debrecen. t. 8. fase. 1-2 (1961) p.55 - 63

(2) A.H. Clifford
Semigroups containing minimal ideals.
Amer .J. Math. t. 70 (1948) p. 521 - 526

(3) A.H. Clifford et G.B. Preston
The algebraic theory of semigroups . vol. |.
Providence, Math. Amer. Soc. 1961.

(4) A.H. Clifford et D.D. Miller
Semigroups having zeroïd elements.
Amer. J. Math. t.70 (1948) p. 117 - 125

(5) R. Croisot
Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe.
J. de Math. pures et appliquées. t. 36 (1957) p. 373 - 417

(6) R. Desq
Etude de quelques relations d'équivalence dans un demi-groupe D.
Séminaire Dubreil-Pisot. Algèbre et théorie des nombres . t. 15 (1961 - 62) n° 11

(7) R. Desq
Eléments inversibles dans un demi-groupe D.
Séminaire Dubreil-Pisot. Algèbre et théorie des nombres . t. 16 (1962 - 63) n° 4

(8) M. Dresher et O.Ore
Theory of multigroups.
Amer. J. Math. t. 60 (1938) p. 705 - 733

(9) P.Dubreil
Contribution à la théorie des demi-groupes.
Paris . Gauthier - Villars (1941).
Mém. Acad. Sc. Inst. France t.63 . p. 1 - 52

(10) P. Dubreil
Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme.
C.R. Acad. Sc. Paris .t. 215 (1942) p.239 - 241

(11) P.Dubreil
Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes.
Colloque d'Algèbre supérieure. Bruxelles(1956). Louvain.Centérick (1957).

Centre Belge de Recherches Math. p. 29 - 44

(12) P.Dubreil et M.L. Dubreil - Jacotin
Théorie algébrique des relations d'équivalence.
J. de Math. pures et appliquées. t. 18 (1939) 9e série p. 63 - 95

(13) M.L. Dubreil - Jacotin
Images homomorphes d'un demi-groupe ordonné.
Bull. Soc. Math. France t. 92 (1964)

(14) M.L. Dubreil - Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot
Théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.
Paris . Gauthier - Villars (1953)

(15) U.A. Green
On the structure of semigroups.
Annals of Math. série 2 . t. 54 (1951) p. 163 - 172

(16) P.Grillet
Equivalences compatibles, équivalences pré-permises.
Séminaire Dubreil - Pisot. Algèbre et théorie des Nombres t. 15 (1961 - 62) n° 2

(17) P.Grillet
Homomorphismes principaux de tas et de groupoïdes.
Bull. Soc. Math. France. Mémoire 3 (1965). Thèse Soc. Math. Paris . 1965

(18) P.Grillet et A. Gerente
Demi-groupes compacts.
Séminaire Dubreil-Pisot. Algèbre et théorie des Nombres. t. 18(1964-65) n°29

(19) N. Kimura
The Structure of idempotent semigroups (1).
Pacific J. Math. vol. 8 n°2 (1958) p. 257 - 275

(20) M. Koskas
Contribution à l'étude des groupoïdes. Demi-hypergroupes.
Séminaire Dubreil - Pisot. Algèbre et Théorie des Nombres. t. 16 (1962 - 63) n° 9

(21) M. Koskas
Les hypertas.
Séminaire Dubreil - Pisot. Algèbre et Théorie des NOmbres. t. 16 (1962 - 63) n°10

(22)M. Koskas
Application de la théorie des hypertas aux demi-groupes.
Séminaire Dubreil - Pisot . Algèbre et Théorie des Nombres. t. 17 (1963 - 64) n° 3

(23)M. Koskas
Application de la théorie des hypertas (II).
Séminaire Dubreil - Pisot. Algèbre et Théorie des NOmbres . t. 18 (1964 - 65) n° 5

(24)M. Krasner
La loi de Jordan - Hölder dans les hypergroupes et les suites génératrices des corps de nombres p - adiques.
Duke Math. J. t. 6 (1940) p. 120 - 140

(25)G. Lallement
Homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complétement 0 - simple.
Séminaire Dubreil - Pisot. Algèbre et théorie des Nombres . t. 17 (1963-64) n° 14

(26)P. Lefèbvre
Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes.
Annali di Mat. 4e série . t. 59 (1962) p. 77 - 163
Thèse Soc. Math. Paris (1962).

(27)L.Lesieur et R. Croisot
Algèbre noethérienne non commutative.
Mémorial Sc. Math. fasc. 154 (1963).

(28)F. W. Levi
On semigroups
Bull.Calcutta Math. Soc. t. 36 (1944) p. 141 - 146 et t. 38 . (1946) p. 123 - 124

(29)E. S. Ljapin
Polugrupp'.
Moscou. 1960

(30)D. Rees
On semigroups.
Proc. Cambridge Phil. Soc. t. 36 (1940) p. 387 - 400 et t. 37 (1941) p. 434 - 435

(31)R.R. Stoll
Homomorphism of a semigroup onto a group.
Amer. J. Math. t. 73 (1951) p. 475 - 481

(32) M. Teissier

Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes.

C.R. Acad. Sc. Paris. t. 232 (1951) p. 1987 - 1988

(33) C. Theodossis

Etude dans un demi-groupe des complexes formés par un seul élément.

Thèse d'Université . Paris (1953)

(34) G. Thierrin

Demi-groupes inversés et rectangulaires.

Bull. Acad. Royale de Belgique. Cl. Sc. 5e série. t. 41 (1955) p. 83 - 92

(35) G. Thierrin

Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes.

Bull. Soc. Math. France . t. 83 . 1955 p. 103 - 159

Thèse Soc. Math. Paris. (1954)

(36) G. Thierrin

Sur la structure des demi-groupes.

Alger Math. t. 3 . n°2 (1956)

(37) A.D. Wallace

Retractions in semigroups.

Pacific J. Math. t. 7 (1957) p. 1513 - 1517

(38) O. Zariski et P.Samuel

Commutative Algebra. vol. I .

Princeton. Toronto. Londo. Van Nostrand (1958)

Le présent travail a été résumé dans les notes suivantes :

Théorie des hypertas. Applications à la théorie des demi-groupes.

Acc. Naz. Dei Lincei. Rome . Série VIII, vol XL. fasc. 1 (1966).

C.R. Acad. Sci. Paris. t. 263 (1966) p. 153 et p. 197

(Texte reçu le 9 juillet 1970)

Maurice KOSKAS
Faculté des Sciences d'Amiens
33 rue Saint-Leu
80 - AMIENS

Joseph FLOCH, Maitre-Imprimeur à Mayenne - 27-11-1970 - n°3889