MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE REVOY

Trivecteurs de rang 6

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 141-155

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__141_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRIVECTEURS DE RANG 6

par

Philippe REVOY

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif quelconque K . La classification des p -vecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $Gl(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^p E$. Si $p = 2$, il s'agit des bivecteurs et l'action de $Gl(E)$ sur $\Lambda^2 E$ est bien connue. La dualité entre $\Lambda^p E$ et $\Lambda^{n-p} E$ ramène le problème général au cas où $2 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Dès que $p > 2$, les résultats sont rares et le lecteur pourra se reporter à [2]. Pour $p = 3$, une classification complète est connue pour $n \leq 8$ et K algébriquement clos et pour $n \leq 6$ si $K = \mathbb{R}$ ([1], [3]). Notons que pour $p = 3$ et $n > 8$, ou $p \geq 4$ et $n \geq 8$, les orbites ne sont pas en général en nombre fini.

Dans cet article, nous donnons une classification complète pour le cas $p = 3$, $n = 6$ sur un corps quelconque. La partie 1 est consacrée à des rappels et à l'introduction de la notion de p -vecteurs scindables. Dans 2, nous donnons la classification annoncée par plusieurs méthodes. Dans la partie 3, nous donnons en complément la classification des sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 F$ pour F de dimension 4 et d'autres résultats semblables en vue de la classification des trivecteurs de rang 7 que l'auteur espère publier prochainement.

Je profite de cette introduction pour remercier C. Contou-Carrère pour les nombreuses conversations qui m'ont permis d'approfondir ces questions.

1. Preliminaires

1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps quelconque K et f un endomorphisme de E . L'application linéaire $\Lambda^p f : \Lambda^p E \rightarrow \Lambda^p E$ définie par $\Lambda^p f(x_1, \dots, x_p) = f(x_1), \dots, f(x_p)$ est un endomorphisme de $\Lambda^p E$. L'action de $Gl(E)$ est alors ainsi définie : $f \cdot \omega = \Lambda^p f(\omega)$ pour $f \in Gl(E)$ et $\omega \in \Lambda^p E$. Si L est une extension du corps K , on sait qu'il y a un isomorphisme naturel entre $\Lambda_L^p(E \otimes_K L)$ et $\Lambda_K^p E \otimes_K L$ et on notera ω_L l'image du p -vecteur ω de $\Lambda^p E$ dans $\Lambda_L^p E \otimes_K L$.

1.2. Définitions et propriétés

1.2.1 Soit $\omega \in \Lambda^p E$; on appelle support de ω et on note S_ω le plus petit espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^p F$. La dimension de S_ω s'appelle le rang de ω qu'on note $d_0(\omega)$. C'est un invariant par l'action de $Gl(E)$ et par extension des scalaires. On définit de même le support et le rang d'un sous-espace vectoriel de $\Lambda^p E$ (ce dernier est encore invariant par l'action de $Gl(E)$ sur la grassmannienne de dimension convenable de $\Lambda^p E$).

1.2.2 Le groupe des automorphismes de ω , $Aut(\omega)$, est le sous-groupe d'isotropie de ω dans l'action de $Gl(E)$: $Aut(\omega) = \{f \mid f \in Gl(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}$. L'orbite de ω par $Gl(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à droite $Gl(E)/Aut(\omega)$.

1.2.3 Un p -vecteur non nul ω est décomposable s'il existe $x_1, \dots, x_p$ dans E tel que $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$. Le support de ω est le sous-espace de dimension p engendré par $x_1, \dots, x_p$ qu'on notera $\{x_1, \dots, x_p\}$.

1.2.4 On appelle orientation de E le choix d'un générateur de l'espace vectoriel $\Lambda^n E$. Cela revient à se donner une classe de bases de E ; on obtient alors à l'aide du produit dans ΛE un isomorphisme entre $\Lambda^p E$ et $\Lambda^{n-p} E^*$, E^* dual de E .

1.2.5 On associe à un p -vecteur d'autres invariants numériques que son rang. Soit $G_r(E)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension r de E ($G_1(E)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$) et considérons la projection $p_\alpha : \Lambda^p E \rightarrow \Lambda^p(E/\alpha)$ pour $\alpha \in G_r(E)$. On appelle $\bar{\omega}(\alpha)$ l'image de ω par p_α et on pose $d_r(\omega) = \inf(\text{rang } \bar{\omega}(\alpha))$, α décrivant $G_r(E)$. Les entiers $d_r(\omega)$ forment une suite strictement décroissante $d_0(\omega) = \text{rang}(\omega) > d_1(\omega) > \dots > d_k(\omega) = 0$ dès que k est assez grand. La suite $d_1(\omega)$ est invariante par l'action de $Gl(E)$ mais n'est pas invariante par extension des scalaires, comme on le verra en dimension 6. Notons que $d_1(\omega) = 0$ signifie que ω est divisible par un vecteur.

Enfin, remarquons que pour classifier les p -vecteurs de E , il est loisible de se borner aux éléments de rang maximal, égal à la dimension de E (sauf si $p = n-1$!) ce que nous ferons désormais.

1.3. Polyvecteurs scindables

1.3.1 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E ; $\Lambda^p E$ s'identifie canoniquement à $\bigoplus_{k=0}^{k=p} (\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{p-k} E_2)$. Par exemple si $x \in E - \{0\}$, posons

$E_1 = Kx$ et soit E_2 un supplémentaire de Kx : $\Lambda^p E \simeq \Lambda^p E_2 \oplus \Lambda^{p-1} E_2 \otimes Kx$, si bien que tout élément ω de $\Lambda^p E$ s'écrit de façon unique $\omega = xu + \omega'$ où $u \in \Lambda^{p-1} E_2$

et $\omega' \in \Lambda^p E_2$. On a alors $\bar{\omega}(Kx) = \omega'$ et $d_1(\omega) \leq \text{rg } \omega'$ et il existe x_0 dans $E - \{0\}$ tel que $\bar{\omega}(Kx_0) = \omega'_0$ est de rang $d_1(\omega)$. On voit clairement aussi que la relation $x\omega = 0$ équivaut à $\omega' = 0$, c'est à dire ω est divisible par x dans ΛE .

1.3.2 Définition : On dira que $\omega \in \Lambda^p E$ est scindable s'il existe E_1 et E_2 supplémentaires dans E et un entier $k, 1 \leq k \leq p-k$ tel que $\omega \in \Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{p-k} E_2$.

Si $p = \dim E$, tout p -vecteur ω est scindable. De façon plus générale si ω est divisible par un vecteur x, ω est scindable car dans $E_1 \otimes \Lambda^{p-1} E_2$ avec $E_1 = Kx$. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité.

Si $p = 2$, tout élément ω de $\Lambda^2 E$ est scindable. En effet dans une base convenable, ω s'écrit $\sum_{i=1}^p e_{2i-1} e_{2i}$ et il suffit de prendre $E_1 = \{e_1, e_3, \dots, e_{2p-1}\}$ et E_2 un supplémentaire contenant $\{e_2, e_4, \dots, e_{2p}\}$.

1.3.3 Nous supposons maintenant $p = 3$; $\omega \in \Lambda^3 E$ est scindable s'il existe E_1 et E_2 supplémentaires dans E tels que $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$. Il s'écrit donc $\sum_{i=1}^r x_i u_i, x_i \in E_1, u_i \in \Lambda^2 E_2$. Comme nous imposons à ω d'être de rang maximal, la dimension de E , il faut que r soit au moins égal à la dimension de E_1 . Soit alors $e_j, 1 \leq j \leq h$ une base de E_1 ; en exprimant les x_i dans la base e_j , on obtient $\omega = \sum_{j=1}^h e_j v_j$. Les v_j sont linéairement indépendants dans $\Lambda^2 E_2$ car si par exemple $v_h = \sum_{j=1}^{h-1} a_j v_j, w = \sum_{j=1}^{h-1} (e_j + a_j e_h) v_j$ et ω n'est pas de rang maximal. La classification des éléments scindables revient donc à l'étude des sous-espaces vectoriels de dimension h de $\Lambda^2 F$ où $\dim F + h = \dim E$ (on a nécessairement $h \leq \binom{2}{n-h}$). De plus, si $\omega = \sum_{j=1}^h e_j v_j$, les v_j sont déterminés de façon unique par la base $e_1, \dots, e_h$ de E_1 : il suffit de calculer $e_1 \dots e_{j-1} \cdot e_{j+1} \dots e_h \omega$ ou d'utiliser l'isomorphisme $E_1 \otimes \Lambda^2 E_2 \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(E_1^*, \Lambda^2 E_2)$.

On dira que $\omega \in \Lambda^3 E$ est h -scindable, s'il est scindable et si la dimension de E_1 est h . Un p -vecteur divisible est scindable ; un même p -vecteur peut être h_1 et h_2 -scindable, $h_1 \neq h_2$, et les sous-espaces E_1 et E_2 ne sont pas déterminés de manière unique.

1.4. Trivecteurs de rang inférieur à 6

Le premier trivecteur non nul se rencontre en dimension 3 ; si $\dim E = 3$ et $\omega \in \Lambda^3 E - \{0\}$, il existe une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$. $\text{Aut}(\omega)$ est le groupe spécial linéaire $\text{SL}_3(K)$. Il n'existe pas de 3-vecteur de rang 4 (de façon générale, il n'y a pas de p -vecteurs de rang $p+1$) car il y a un isomorphisme entre $\Lambda^p K^{p+1}$ et $\Lambda^1 K^{p+1}$.

En dimension 5, le choix d'une orientation de E donne un isomorphisme entre $\Lambda^3 E$ et $\Lambda^2 E^*$; cela montre que tout élément ω de $\Lambda^3 E$ est divisible par un vecteur. Il existe donc une base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de E telle que $\omega = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$. Le groupe $\text{Aut}(\omega)$ est formé de matrices de rang 5

$$M = \begin{bmatrix} \lambda^2 & & & & \\ & \vdots & & & \\ & & x & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda^{-1} u \end{bmatrix} \quad \text{où } u \in \text{Sp}_2(K), \text{ groupe}$$

symplectique de K^4 , $\lambda \in K^*$ et $x \in K^4$. La droite Ke_1 est déterminé de manière unique comme $\{\alpha \mid \alpha \in E \text{ et } \alpha\omega = 0\}$ et $\text{Gl}(E)$ opère transitivement sur l'ensemble des 3-vecteurs de rang 5.

1.5. Soient K un corps et L une extension galoisienne finie de K de groupe de Galois G . Si ω_L est un tenseur défini sur L de groupe d'automorphismes A_L , le groupe G opère sur A_L : alors l'ensemble de cohomologie $H^1(G, A_L)$ est en bijection avec l'ensemble $E(L/K)$ des classes de K -isomorphismes de tenseurs ω_K définis sur K , de même espèce que ω_L et tels que $(\omega_L)_L \simeq \omega_L$ ([5] Ch.X). Si on suppose maintenant que L est une extension galoisienne infinie, le même raisonnement peut encore s'appliquer par passage à la limite suivant les sous-extensions finies car deux tenseurs ω_K et ω'_K qui sont L -isomorphes sont déjà isomorphes sur une sous-extension finie K' de K contenue dans L (il faut alors considérer G comme un groupe topologique et les cochaînes sont des cochaînes continues, A_L étant un G -module topologique).

1.6. Puissances divisées dans $\Lambda^* M$

Si M est un module sur l'anneau commutatif A , on construit ([4]) le système des puissances divisées sur $\Lambda^* M = \bigotimes_{n \geq 0} \Lambda^{2n}(M)$. Si M est projectif de type

fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré m) $\Gamma_m : \Lambda^{2m*} \rightarrow \Lambda^{2m} M^*$ qui est le pfaffien: si $u \in \Lambda^{2m*}$, u est non dégénérée si et seulement si $\Gamma_m(u)$ engendre le A -module $\Lambda^{2m} M^*$.

Supposons M libre de rang 4; l'application $\Gamma_2 : \Lambda^4 M \rightarrow \Lambda^4 M$ est une application quadratique, qui se réduit à une forme quadratique si on choisit une orientation de M . Cette forme est neutre (ou hyperbolique): si $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, les sous-espaces $P_1 = \{e_1 e_2, e_1 e_3, e_1 e_4\}$, $P_2 = \{e_3 e_4, -e_2 e_4, e_2 e_3\}$ de $\Lambda^2 M$ sont totalement isotropes et mis en dualité par Γ_2 . Notons encore que $\Gamma_2(u) = 0$ si et seulement si u est décomposable.

2. Trivecteurs de rang 6

Nous utiliserons deux méthodes pour obtenir une classification complète des trivecteurs de rang 6 sur un corps quelconque ; la première s'inspire de [1] et la seconde utilise la notion de p-vecteurs scindables. Dans tout ce paragraphe, $\dim E = 6$ et $\omega \in \Lambda^3 E$ est de rang maximal. Remarquons que $d_1(\omega) \neq 0$ et donc est soit 3, soit 5 car $d_1(\omega) = 0$ implique que le rang de ω est impair.

2.1 Lemme 1 : Si $d_1(\omega) = 3$, il existe une base $e_i, 1 \leq i \leq 6$, de E dans laquelle ω a l'une des deux formes non équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \omega_1 = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6 \\ \omega_2 = e_1 e_2 e_4 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6 \end{cases}$$

En effet ω s'écrit $xu + \omega'$ où $x \in E, u$ est un bivecteur de rang 2 ou 4 et ω' est un trivecteur de rang 3 et donc décomposable. Si le rang de u est 2, les supports de xu et de ω' sont deux sous-espaces de dimension 3, linéairement disjoints car ω est de rang 6, de sorte de ω est du type ω_1 . Si le rang de u est 4, les supports de u et de ω' ont une intersection G de dimension 2 et soit (e_2, e_3) une base de G . Si $e_2 e_3 u = 0, u$ s'écrit $e_2 e_4 + e_3 e_6$ et $\omega' = e_2 e_3 e_5$; posant $x = e_1$, on voit que ω est du type ω_2 . Si $e_2 e_3 u \neq 0$, il est clair que dans le faisceau des formes $\lambda_1 u + \lambda_2 e_2 e_3$, il y a une forme, avec $\lambda_1 \neq 0$, qui est décomposable ; c'est à dire qu'en changeant e_2 et e_3 , on peut trouver y et z tel que $u = e_2 e_3 + yz$ et $\omega' = e_2 e_3 t$. On a alors $\omega = x(e_2 e_3 + yz) + e_2 e_3 t$ et donc $\omega = (x+t) e_2 e_3 + xyz$ qui est du type ω_1 . Pour achever notons que ω_1 et ω_2 ne sont pas équivalents car les ensembles $R_i = \{x | x \in E \text{ et } \bar{\omega}(x) \text{ est de rang } 3\}$ différent.

Lemme 2 : Tout trivecteur de rang 6 est scindable.

C'est clair si $d_1(\omega) = 3$, à l'aide du lemme 1. Pour ω_2 remarquons qu'il l'est de deux façons essentiellement différentes : ω_2 est dans $E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ et dans $F_1 \otimes \Lambda^2 F_2$ où l'on a posé $E_1 = \{e_1, e_5\}, E_2 = \{e_2, e_3, e_4, e_6\}$ et $F_1 = \{e_4, e_5, e_6\}, F_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Supposons maintenant que $d_1(\omega) = 5$; d'après 1.3.1, ω s'écrit $x_1 u_1 + \omega'$ où u_1 et ω' sont dans $\Lambda E', E'$ un supplémentaire de Kx_1 dans E . Le trivecteur ω' est de rang 5 car $d_1(\omega) = 5$: il s'écrit $x_2 u_2$ où S_{u_2} est de rang 4 ; de plus x_2 n'est pas dans le support de u_1 car alors $\bar{\omega}(x_2)$ serait de rang 3 contrairement à l'hypothèse $d_1(\omega) = 5$. Comme S_{u_1} et S_{u_2} sont deux supplémentaires dans E' de Kx_2 , on peut choisir u_2 de sorte que $S_{u_2} = S_{u_1} = E_2$. Posant $E_1 = Kx_1 \oplus Kx_2$, on a exactement $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$.

Lemme 3 : Si $d_1(\omega) = 5$, il existe un corps K' extension quadratique de K telle $d_1(\omega_{K'}) = 3$.

En effet le lemme 2 montre que ω s'écrit $x_1 u_1 + x_2 u_2$ où x_1 et x_2 sont des vecteurs de E et u_1, u_2 deux bivecteurs de même support F et de rang 4. Comme $\Lambda^4 F \simeq K$, $\Gamma^2(u_2 - \lambda u_1) = (\lambda^2 + b\lambda + c) \Gamma^2(u_1)$; les éléments $u_2 - \lambda u_1$ de rang 2 correspondent aux racines du polynôme $\lambda^2 + b\lambda + c$. Si ce polynôme avait une racine μ dans K , $u_2 - \mu u_1$ s'écrit yz et $\omega = x_1 u_1 + x_2(\mu u_1 + yz) = (x_1 + \mu x_2) u_1 + x_2 yz$ vérifierait $d_1(\omega) = 3$. Il est donc irréductible, et il existe un corps K' , extension quadratique de K , dans lequel ce polynôme a une racine. Mais alors $d_1(\omega_{K'}) = 3$, d'où le lemme.

On déduit des lemmes précédents, la

Proposition : Sur un corps quadratiquement clos, tout trivecteur de rang 6 est d'un des deux types ω_1 et ω_2 du lemme 1.

2.2 Classification en dimension 6

Les éléments ω de $\Lambda^3 E$ tels que $d_1(\omega) = 5$ peuvent se classifier à l'aide du lemme 3. Nous distinguons deux cas suivant la nature de l'extension quadratique K' et nous reprenons les notations du lemme 3.

2.2.1 K est de caractéristique différente de 2 ou bien $2 = 0$ dans K' et K' inséparable.

Dans ces conditions, $K' = K[x]$ avec $x^2 = d$, où d n'est pas un carré dans K ; μ s'écrit $bx+c$ avec b et c dans K , $b \neq 0$. Le bivecteur $u_2 - \mu u_1$ est un produit $(p+xq)(r+xs)$ où p, q, r et s sont dans F support de u_1 et de u_2 . En développant, on trouve

$$\begin{cases} u_2 - \mu u_1 = pr + dqs. \\ -bu_1 = ps + qr \end{cases}$$

Comme u_1 est de rang 4, $F = \{p, q, r, s\}$ et on a

$$\omega = x_1 [-b^{-1}(ps+qr)] + x_2 [(pr+dqs) - cb^{-1}(ps+qr)]$$

sont en posant $e_1 = b^{-1}x_1 - cb^{-1}x_2$, $e_2 = x_2$, $e_3 = p$, $e_4 = s$, $e_5 = q$ et $e_6 = r$, $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ et $\omega = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 + de_4e_5)$, élément qu'on notera ω_d .

2.2.2 K est de caractéristique 2 et K' est séparable.

Dans ce cas, $K' = K[x]$ avec $x^2 + x + a = 0$ où a est déterminé à l'addition d'un élément $y+y^2$ près, $y \in K$; l'élément μ s'écrit encore $bx+c$, $b \neq 0$ et $u_2 - \mu u_1 = (p+xq)(r+xs)$, ce qui donne

$$\begin{cases} u_2 - cu_1 = pr + aqs \\ -bu_1 = ps + qr + qs \end{cases}$$

où, comme en 2.2.1, $F = \{p, q, r, s\}$. Prenant une nouvelle base convenable de E , on trouve :

$$\omega = e_1(e_3e_4 + ae_5e_6) + e_2(e_3e_6 + e_4e_5 + e_5e_6)$$

type qu'on notera ω_a .

2.2.3 Supposons que K' est une extension séparable de K et notons σ l'unique K -automorphisme différent de l'identité de K' . Alors $u_2 - \mu u_1$ et $u_2 - \sigma(\mu)u_1$ forment une base (γ_1, γ_2) sur K' du sous-espace de $\Lambda^2 F \otimes K'$ engendré par u_1 et u_2 , de sorte que ω peut s'écrire sur K' $f_1 \gamma_1 + \sigma(f_1)\sigma(\gamma_1)$ ($\sigma(\gamma_1) = \gamma_2$) et que $\omega_{K'}$ est du type ω_1 .

Par contre, on voit que si K' est une extension inséparable de K , alors $\omega_{K'}$ est du type ω_2 . On voit donc apparaître les faits suivants : si K est quadratiquement clos, il existe deux types de trivecteurs de rang 6 ω_1 et ω_2 caractérisés par : pour ω_1 , $\{\bar{\omega}_1(x) \text{ est de rang } 3\} = V_1 \cup V_2$ où V_1 et V_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de dimension 3 ; pour ω_2 , $\{x \mid \bar{\omega}_2(x) \text{ est de rang } 3\}$ est un sous-espace de dimension 3. Dans le cas général, on a le

Théorème 1. Les trivecteurs ω de rang 6 sur un corps K de clôture quadratique $\bar{K}$ se répartissent en deux classes C_1 et C_2 selon que $\omega_{\bar{K}}$ est du type ω_1 ou ω_2 . L'ensemble C_1 est formée de classes d'isomorphismes en bijection avec l'ensemble des extensions quadratiques séparables de K . L'ensemble C_2 est réduit à l'élément ω_2 si $2 \neq 0$ dans K ou si K est parfait. En caractéristique 2, C_2 est en bijection avec K^*/K^{*2} (extensions quadratiques inséparables).

En effet, on note que ω_d et $\omega_{d'}$ (cf. 2.2.1) ne sont isomorphes que si $K[\sqrt{d}] \simeq K[\sqrt{d'}]$ car $(\omega_d)_{K[\sqrt{d}]}$ n'est pas ω_1 si d n'est pas un carré dans $K[\sqrt{d}]$.

2.3 Groupes d'automorphismes et cohomologie galoisienne

2.3.1 Supposons K quadratiquement clos et soient ω_1 et ω_2 les deux types de trivecteurs vues en 2.1. Leurs groupes d'automorphismes se déterminent aisément. Pour ω_1 , soit $V_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $V_2 = \{e_4, e_5, e_6\}$; d'après 2.2.3, un élément de $\text{Aut}(\omega_1)$ laisse stable $V_1 \cup V_2$ et donc permute V_1 et V_2 ou laisse chacun d'eux globalement invariant. Dans le second cas, les automorphismes ont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et $\beta \in \text{SL}_3(K)$ et dans l'autre cas de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où α et β sont encore de déterminant 1. On a donc la suite exacte de groupes

$$(I) \quad 1 \rightarrow \text{SL}_3(K) \times \text{SL}_3(K) \rightarrow \text{Aut}(\omega_1) \rightarrow \mathbb{Z}/(2) \rightarrow 1$$

Pour ω_2 , soit $V = \{e_1, e_2, e_3\}$: ce sous-espace est invariant par chaque automorphisme de ω_2 et on a un homomorphisme de $\text{Aut}(\omega_2)$ sur le groupe $\text{GL}_3(K)$ en envoyant $f \in \text{Aut}(\omega_2)$ sur sa restriction à V dont la surjectivité est immédiate à démontrer. Le noyau de cet homomorphisme est un sous-groupe de $\text{GL}_6(K)$ formée des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 3 & & & & \\ & & U & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ où $U = (u_{ij}) \in M_3(K)$ vérifie

la condition $u_{11} - u_{22} + u_{33} = 0$. C'est donc le groupe additif K^8 et on a la suite exacte de groupes :

$$(II) \quad 1 \rightarrow K^8 \rightarrow \text{Aut}(\omega_2) \rightarrow \text{GL}_3(K) \rightarrow 1$$

On vérifie que $\text{Aut}(\omega_1)$ est de dimension 16 et que $\text{Aut}(\omega_2)$ est de dimension 17 ; ainsi l'orbite de ω_2 est de codimension 1 dans $\Lambda^3 E$ ($16 = \dim \text{GL}_6(K) - \dim \Lambda^3(K^6)$).

2.3.2 Supposons maintenant que K est un corps quelconque de caractéristique différente de 2 ou un corps parfait de caractéristique 2. Soit K_s sa clôture séparable et G le groupe de Galois de K_s sur K . Comme K_s est quadratiquement clos, d'après 2.1 tout trivecteur de rang 6 sur K_s est de l'un des deux types ω_1 ou ω_2 . Alors l'ensemble C des trivecteurs ω de rang 6 sur K se divise en deux classes C_1 et C_2 selon que ω_K est du type ω_1 ou ω_2 et chacune de ces classes C_i est en bijection avec l'ensemble de cohomologie $H^1(G, \text{Aut}(\omega_i))$. La suite exacte de cohomologie appliqué à (II) montre immédiatement que $H^1(G, \text{Aut}(\omega_2))$ est réduit à un seul élément, l'élément distingué.

2.3.3 Pour (I), la suite exacte de cohomologie ne donne pas beaucoup de résultats: elle dit seulement que la fibre au dessus de l'élément distingué de $H^1(G, \mathbb{Z}/(2))$ est réduite à un point. Il faut donc travailler directement avec les cocycles. Nous allons en fait montrer que $H^1(G, \text{Aut}(\omega_1))$ s'identifie à $H^1(G, \mathbb{Z}/(2)) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}/(2))$ le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{Z}$ modulo 2.

Ce sera la conséquence d'un fait plus général : soit G un groupe et A un G -module ; on considère le produit semi-direct B de $A \times A$ par le groupe $\mathbb{Z}/(2)$ opérant sur $A \times A$ par permutation des facteurs. C'est un G -module de façon naturelle de sorte que la suite exacte de groupes

$$\Lambda \rightarrow A \times A \rightarrow B \xrightarrow{\mathbb{Z}/(2)} 1$$

est une suite exacte de G -modules. Alors si $H^1(G, A) = \{1\}$ et si $H^1(G', A) = \{1\}$ pour tout sous-groupe d'indice 2 de G , $H^1(G, B)$ s'identifie à $H^1(G, \mathbb{Z}/(2))$. Cette hypothèse sera automatiquement vérifiée dans notre cas.

Il existe un homomorphisme $r : \mathbb{Z}/(2) \rightarrow B$ qui est une rétraction obtenue en envoyant l'élément non nul de $\mathbb{Z}/(2)$ sur la "matrice" $\begin{pmatrix} 0 & 1 & A \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ (les éléments de B

ont une représentation "matricielle" naturelle : ceux de AxA sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}; \text{ ceux de } p^{-1}(1) \text{ sous la forme } \begin{pmatrix} 0 & a'_2 \\ a'_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

), ce qui montre que l'application $H^1(G,B) \rightarrow H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$ est surjective. Il s'agit de montrer que la fibre dans $H^1(G,B)$ au dessus de chaque point est réduite à un élément. Au dessus de l'élément distingué de $H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$, c'est clair à cause de la suite exacte de cohomologie. Soit maintenant $s \mapsto \epsilon_s$ un 1-cocycle de G à valeurs dans $\mathbb{Z}/(2)$ et soit $s \mapsto a_s$ et $s \mapsto a'_s$ deux 1-cocycles de $Z^1(G,B)$ qui ont pour image ϵ dans $H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$. Soit H le noyau de ϵ , sous-groupe d'indice 2 de G ; $s \mapsto a_s$ et $s \mapsto a'_s$ restreints à H sont deux cocycles de $Z^1(H, AxA)$ et par conséquent sont des cobords, donc en modifiant le 1-cocycle a_s , on peut se ramener au cas où $a_s = a'_s$ pour $s \in H$. Il suffit de regarder ce qui se passe en dehors de H ; soit alors $s \in H$ et $t \notin H$: on a $a_{ts} = a_t t(a_s)$ et $a'_{ts} = a'_t t(a'_s)$ et, comme $a_s = a'_s$, on en déduit que $a_t^{-1} a'_{ts} = a_t^{-1} a_{ts}$ et donc $a'_{ts} = c a_{ts}$ où c est un élément de AxA indépendant de l'élément $ts \notin H$ choisi. Soit alors t_1 et t_2 deux éléments n'appartenant pas à H : $t_1 t_2 \in H$ et on a

$$a_{t_1 t_2} = a_{t_1} t_1(a_{t_2}) = a'_{t_1 t_2} = a'_{t_1} t_1(a'_{t_2}) = c a_{t_1} t_1(c) t_1(a_{t_2})$$

soit après simplification par $t_1(a_{t_2})$,

$$a_{t_1} = c a_{t_1} t_1(c) \quad \text{ou encore}$$

$$a'_t = c a_t = a_t t(c^{-1}) \quad (1)$$

Ecrivons

$$a_t = \begin{pmatrix} 0 & a_{t,1} \\ a_{t,2} & 0 \end{pmatrix}, a'_t = \begin{pmatrix} 0 & a'_{t,1} \\ a'_{t,2} & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix};$$

l'équation (1) donne le système (2):

$$a'_{t,1} = c_2 a_{t,1} = a_{t,1} t(c_1^{-1})$$

$$a'_{t,2} = c_1 a_{t,2} = a_{t,2} t(c_2^{-1})$$

En utilisant la relation $a'_t = a_t t(c^{-1})$ pour t et ts , $s \in H$, on trouve que pour $s \in H$ (3) $c a_s s(c^{-1}) = a_s$; posons alors $b = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: on voit immédiatement à l'aide de (2) et de (3) que $a'_s = b a_s s(b^{-1})$ quel que soit s dans G et donc que les cocycles a_s et a'_s sont cohomologues. On a donc la

2.3.4 Proposition : L'ensemble de cohomologie $H^1(G, \text{Aut}(w_1))$ est en bijection naturelle avec le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{Z}/(2)$.

Ceci montre que, sauf si K est un corps non parfait de caractéristique 2, on peut retrouver par cette voie cohomologique les résultats de 2.2.

2.4 Une deuxième approche :

Comme on l'a noté en 2.1, lemme 2, tout trivecteur de rang 6 est 2-scin-dable. Cela montre que la classification de ces trivecteurs équivaut à celle des sous-espaces de dimension 2 et de rang maximal de $\Lambda^2 F$, $\dim F = 4$, que nous allons entreprendre ici. La considération de l'application $\Gamma_2 : \Lambda^2 F \rightarrow \Lambda^4 F$ montre qu'il s'agit d'abord de chercher les sous-modules quadratiques M de dimension 2 d'un espace hyperbolique de rang 6.

2.4.1 Si $2 \neq 0$ dans K , trois cas sont à considérer suivant que le rang de $\Gamma_2|_M$ est 0, 1 ou 2. Dans le premier cas $M = \{u_1, u_2\}$ avec $\Gamma_2(u_1) = \Gamma_2(u_2) = u_1 \cdot u_2 = 0$, ce qui montre que Su_1 et Su_2 sont deux plans d'intersection non réduite à $\{0\}$ de sorte que le support de M est de dimension 3 et M n'est pas de rang maximal.

Si le rang de Γ_2 est 1, il existe dans M une base $\{u_1, u_2\}$ telle que $\Gamma_2(u_1) \neq 0$ et $u_1 \cdot u_2 = \Gamma_2(u_2) = 0$. On a donc $u_2 = xy$ et $u_1 = xz + yt$ avec $F = \{x, y, z, t\}$, ce qui donne le trivecteur ω_2 .

Si le rang de Γ_2 est 2, il existe dans M une base orthogonale et un scalaire d , déterminé à un carré près tel que $\Gamma_2(u_2) + d \Gamma_2(u_1) = 0$ et $u_1 \cdot u_2 = 0$. Dans $\Lambda^2 F$, on peut trouver u'_1, u'_2 orthogonaux aux u_1 et entre eux tels que $\Gamma_2(u'_1) = -\Gamma_2(u_1)$, de sorte que $\{u_1, u'_1\}$ et $\{u_2, u'_2\}$ sont deux plans hyperboliques orthogonaux de $\Lambda^2 F$. Ainsi $\{u_1 + u'_1, u_2 + u'_2\}$ et $\{u_1 - u'_1, u_2 - u'_2\}$ sont deux sous-espaces totalement isotropes mis en dualité par Γ_2 . Comme les sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\Lambda^2 F$ sont bien connus (géométrie des droites de $P(K^4)$!), on voit qu'il existe une base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de F telle que

$$\begin{aligned} u_1 + u'_1 &= 2f_1 f_2 & u_2 + u'_2 &= 2f_1 f_3 \\ u_1 - u'_1 &= 2f_3 f_4 & u_2 - u'_2 &= 2d f_2 f_4 \end{aligned}$$

$$\text{soit } \begin{cases} u_1 = f_1 f_2 + f_3 f_4 \\ u_2 = f_1 f_3 + d f_2 f_4 \end{cases}$$

ce qui donne les éléments ω_d vus en 2.2.1.

2.4.2 Supposons que $2=0$ dans K . Le rang de la restriction de Γ_2 à M est 0 ou 2. Dans le premier cas, le défaut (rang de la partie quasilinéaire) est 1 ou 2. Si le défaut est 1, on obtient le même résultat que pour le rang 1 en caractéristique différente de 2. Si le défaut est 2, il existe une base (u_1, u_2) de M avec $\Gamma_2(u_2) = d \Gamma_2(u_1)$ et $u_1 \cdot u_2 = 0$; le calcul est encore le même qu'en 2.4.1 : on

obtient les éléments ω_a de 2.2.1 (mais ils sont dans C_2).

Si le rang de la restriction de Γ_2 à M est 2, il existe une base (u_1, u_2) de M avec $\Gamma_2(u_2) = a \Gamma_2(u_1) = a u_2 \cdot u_1 \neq 0$ (a est déterminé à l'addition d'un élément $x+x^2$, $x \in K$, près). Mais alors l'espace hyperbolique $(\Lambda^2 F, \Gamma_2)$ de rang 6 est la somme orthogonale de deux exemplaires de (M, Γ_2) et d'un plan hyperbolique. Il existe donc u'_1 et u'_2 dans $\Lambda^2 F$, orthogonaux à M et vérifiant $\Gamma_2(u'_1) = \Gamma_2(u_1)$, $u'_1 \cdot u'_2 = u_1 \cdot u_2$, et il existe u''_1 et u''_2 isotropes et orthogonaux à $\{u_1, u_2, u'_1, u'_2\}$. On vérifie alors que $\{u_1+u'_1, u_2+u'_2, u''_1\}$ et $\{a(u_1+u'_1) + u''_2, u_2+u'_2 + u_1, u''_2\}$ sont deux sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\Lambda^2 F$ mis en dualité par Γ_2 . Cela montre qu'il existe une base $e_i, 1 \leq i \leq 4$, de F telle que

$$\begin{cases} u_1 + u'_1 = e_1 e_2 & u_2 + u'_2 = e_1 e_3 \\ a(u_1+u'_1)+u''_2 = e_3 e_4 & u_2 + u'_2 + u_1 = e_2 e_4 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4 & u'_1 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_4 \\ u_2 = e_1 e_3 + e_3 e_4 + a e_1 e_2 & u'_2 = e_3 e_4 + a e_1 e_2 \end{cases}$$

2.5 Exemples 1) Si $K = \mathbb{R}$, il y a trois types de trivecteurs de rang 6 : $\text{card } C_1 = 2$ et $\text{card } C_2 = 1$. Dans C_1 , on trouve $\omega'_1 = e_1 e_3 e_4 + e_1 e_5 e_6 + e_2 e_3 e_5 - e_2 e_4 e_6$ en plus de ω_1 .

2) Si K est un corps fini, on a encore trois types de trivecteurs. Si K est un corps local, on a un nombre fini de trivecteurs de rang 6.

3) Si K est un corps de nombres, l'ensemble C_1 est infini, en bijection avec K^*/K^{*2} .

3. Sous-espaces de $\Lambda^2 F$

Nous avons vu en 1.3 que la classification des trivecteurs scindables revient à l'étude des sous-espaces vectoriels de dimension convenable et de rang maximal d'un espace $\Lambda^2 F$.

Cela a été utilisé en 2.4 pour les trivecteurs de rang 6. Nous allons étudier ici les sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 F$ pour $\dim F = 4$ et donner des indications sur certains résultats en dimension supérieure. K est ici un corps quelconque.

3.1 H désigne un sous-espace de rang maximal de $\Lambda^2 K^4$ et q la restriction de la forme quadratique Γ_2 à H , une fois qu'on a choisi un générateur de $\Lambda^4 K^4$. Si $\dim H = 1$, le problème est trivial et $H = Ku$ où u est un bivecteur de rang maximal : $u = e_1 e_2 + e_3 e_4$. Le cas où $\dim H = 2$ a été étudié complètement en 2.4. Notons aussi que si H' est l'orthogonal de H par rapport à Γ_2 , $\dim H + \dim H' = 6$; ainsi on déduit des résultats précédents ceux pour les sous-espaces H de dimension 4 et 5. Ainsi

Proposition 1 : Si $\dim H = 5$, il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 4$, de F telle que H possède une base $\{u_1, u_2, \dots, u_5\}$ de l'un des deux types suivants :

$$\begin{array}{ll} u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 & u_1 = e_1 e_2 \\ u_2 = e_1 e_3 & u_2 = e_1 e_3 \\ u_3 = e_2 e_4 & u_3 = e_2 e_4 \\ u_4 = e_1 e_4 & u_4 = e_1 e_4 \\ u_5 = e_2 e_3 & u_5 = e_2 e_3 \end{array}$$

En dimension 4, on a

Proposition 2 : Si $\dim H = 4$, il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 4$, de F telle que H a une base de l'un des types suivants :

(a) si $2 \neq 0$,

$$\begin{array}{ll} H_1 & u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3, u_3 = e_1 e_4, u_4 = e_3 e_4 \\ H_2 & u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_3 e_4, u_3 = e_1 e_3, u_4 = e_1 e_4 + e_2 e_3 \\ H_{3,d} & u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4, u_2 = e_1 e_3 - d e_2 e_4 \\ & u_3 = e_1 e_4, u_4 = e_2 e_3 \text{ où } d \text{ est déterminé à un carré près.} \end{array}$$

(b) si $2 = 0$, on trouve les trois types précédents et

$$\begin{array}{ll} H_{4,a} & u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4, u_2 = e_1 e_3 + e_3 e_4 + a e_1 e_2 \\ & u_3 = e_1 e_4, u_4 = e_2 e_3 \end{array}$$

3.2 Le cas le plus intéressant est celui de la dimension 3 : on raisonne suivant le rang de q et la caractéristique de K .

Si ce rang est 0, H est totalement isotrope et H est de l'un des deux types suivants : $u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3, u_3 = e_1 e_4$ ou bien $u_1 = e_2 e_3, u_2 = e_3 e_4, u_3 = e_2 e_4$ (ce dernier cas étant à exclure si on veut H de rang maximal). Supposons maintenant $2 \neq 0$ dans K . Si le rang de q vaut 1, il existe une base (u_1, u_2, u_3) de H tel que $\Gamma_2(u_3) \neq 0$ et $\Gamma_2(u_1) = \Gamma_2(u_2) = 0$ ainsi que tous les produits $u_i \cdot u_j$. Alors $u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3$ et $u_3 = e_1 x + e_2 y$ avec $F = \{e_1, e_2, x, y\}$. De plus $u_2 \cdot u_3 = 0$ soit $e_1 e_2 e_3 y = 0$ c'est à dire $y = a e_1 + b e_2 + c e_3$ et l'on trouve $u_3 = e_1(x - a e_2) + c e_2 e_3$. Quitte à multiplier u_3 par c^{-1} , on peut supposer que $c = 1$ et on pose $e_4 = x - a e_2$ d'où la base

$$u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3, u_3 = e_1 e_4 + e_2 e_3.$$

Si maintenant le rang de q est 2, il existe une base (u_1, u_2, u_3) de H telle que u_3 engendre le radical de H et q est non dégénérée sur $\{u_1, u_2\}$. Si $\{u_1, u_2\}$ a une base formée de bivecteurs décomposables (ou encore $q|_{\{u_1, u_2\}}$ est

hyperbolique) il existe une base de F $e_i, 1 \leq i \leq 4$, et une base v_1, v_2, v_3 de H de la forme $v_1 = e_1 e_2, v_2 = e_3 e_4, v_3 = e_1 e_3$. Si q n'est pas hyperbolique, on fait une extension quadratique K' de $K, K' = K[x]$, comme en 2.2. Dans K' , il existe $\mu = bx+c, b \neq 0$ tel que

$$\begin{aligned} u_2 - \mu u_1 &= (e_1 + x e_2)(e_3 + x e_4) \\ u_2 - \sigma(\mu) u_1 &= (e_1 - x e_2)(e_3 - x e_4) \end{aligned}$$

avec $\sigma(\mu) = -bx+c$, conjugué de μ dans K' . Alors u_3 est décomposable et orthogonal à u_1 et u_2 donc à $u_2 - \mu u_1$; il est donc divisible par une combinaison linéaire de $e_1 + x e_2$ et de $e_3 + x e_4$, qu'on peut supposer être égale à $e_1 + x e_2$. Mais alors, comme u_3 est défini sur K , il est aussi divisible par le conjugué de $e_1 + x e_2, e_1 - x e_2$ et donc

$$u_3 = k(e_1 + x e_2)(e_1 - x e_2) = \lambda e_1 e_2 \quad \text{et,}$$

en faisant une homothétie, on peut prendre $u_3 = e_1 e_2$. Pour u_1 et u_2 , on procède comme dans 2.4 et on a donc une base (v_1, v_2, v_3) de H de la forme

$$\begin{cases} v_1 = e_1 e_3 - d e_2 e_4 \\ v_2 = e_1 e_4 + e_2 e_3 \\ v_3 = e_1 e_2 \end{cases}$$

Supposons enfin que le rang de q est 3. Il existe dans H une base orthogonale u_1, u_2, u_3 ; l'orthogonal H' de H est un supplémentaire de H dans $\Lambda^2 F$ et comme Γ_2 est hyperbolique $\Gamma_2|_{H'} \approx -\Gamma_2|_H$. Ainsi il existe une base orthogonale (u'_1, u'_2, u'_3) de H' telle que $\Gamma_2(u'_i) = -\Gamma_2(u_i)$: alors les $\{u_i, u'_i\}$ sont des plans hyperboliques orthogonaux, si bien que la base (u_1, u_2, u_3) de H peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 e_2 + d_1 e_3 e_4 \\ u_2 &= e_1 e_3 - d_2 e_2 e_4 \\ u_3 &= e_1 e_4 + d_3 e_2 e_3 \end{aligned}$$

et comme q est définie à un facteur près, on peut supposer $d_3 = 1$.

3.3 En caractéristique 2, le rang peut être 0 ou 2; s'il vaut 0, le défaut peut varier de 0 à 3 et on obtient des expressions formellement analogues à celles obtenues en caractéristique différente de 2. Si le rang de q est 2, le défaut peut être 0 ou 1 et on obtient :

Proposition 3 : Si la caractéristique est 2, il existe une base (e_i) de F et une base (u_j) de H qui s'écrit

dans le cas de défaut 0 :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4 \\ u_2 = e_1 e_3 + e_3 e_4 + a e_1 e_2 \\ u_3 = e_2 e_3 \end{cases}$$

dans le cas de défaut 1 : u_1 et u_2 sont inchangés et $u_3 = e_1 e_4 + b e_2 e_3$.

3.4 Sous-espaces de dimension 2 de $\Lambda^2 F$ pour $\dim F = 5$ ou 6.

Les sous-espaces H de $\Lambda^2 K^5$ de dimension 2 et de rang maximal sont de deux types : $u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3 + e_4 e_5$ si H contient un bivecteur décomposable et $u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4, u_2 = e_1 e_3 + e_2 e_5$ dans le cas contraire. Dans le premier cas, c'est clair ; dans le second cas, on regarde $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ qui est nécessairement de dimension 3, ce qui permet d'arriver aux formules annoncées.

Si F est de dimension 6, nous supposons d'abord K algébriquement clos et on utilisera l'application polynôme $\Gamma_2 : \Lambda^2 F \rightarrow \Lambda^6 F$; en rang 2, cette forme polynôme est de l'une des 4 formes suivantes : $0, (x,y) \rightarrow x^3, (x,y) \rightarrow x^2 y, (x,y) \rightarrow xy(x+y)$. On obtient alors six classes d'isomorphisme de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal de $\Lambda^2 K^6$ données par une base (u_1, u_2)

$$\begin{array}{lll}
 H_1 & u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4 & u_2 = e_1 e_5 + e_2 e_6 & \Gamma_3 = 0 \\
 H_2 & u_1 = e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6 & u_2 = e_1 e_2 & \Gamma_3 = x^3 \\
 H_3 & u_1 = e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6 & u_2 = e_1 e_2 + e_3 e_4 & \Gamma_3 = x^3 \\
 H_4 & u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 & u_2 = e_1 e_3 + e_5 e_6 & \Gamma_3 = x^2 y \\
 H_5 & u_1 = e_1 e_2 & u_2 = e_3 e_4 + e_5 e_6 & \Gamma_3 = x^2 y \\
 H_6 & u_1 = e_1 e_2 + e_5 e_6 & u_2 = e_1 e_2 + e_3 e_4 & \Gamma_3 = xy(x+y).
 \end{array}$$

On voit apparaître ici le fait qu'à une même fonction Γ_3 peuvent correspondre plusieurs types de sous-espaces. Sur un corps non algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3, seul le type H_6 présente des formes variées. En caractéristique 3, il en est de même pour H_4 & H_5 et en caractéristique 3, pour H_2 et H_3 . On voit en fait ici que la classification des sous-espaces de dimension r de $\Lambda^2 F$ est l'étude de l'action de $GL(F)$ sur la grassmannienne $G_r(\Lambda^2 F)$. On a, si F est de dimension paire $2n$, une application naturelle $\tilde{\Gamma}_n : G_r(\Lambda^2 F) \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma^n(K^r)^*)$; il est clair que $\tilde{\Gamma}_n$ est constante sur chaque orbite du groupe $GL(F)$. Si la dimension de F est 4, on voit que en fait l'invariant $\tilde{\Gamma}_n$ suffit à classer les orbites i.e. que si deux sous-espaces H_1 et H_2 de $G_r(\Lambda^2 F)$ ont même $\tilde{\Gamma}_n$, ils sont dans la même orbite. Ce que montre le cas de dimension 6, c'est que ce n'est plus vrai en dimension supérieure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. CAPDEVILLE, Classification des formes trilinéaires alternées en dimension 6. L'enseignement mathématiques II^o Série, 18, (1972) 225-243.
 [2] G.B. GUREVITCH, Theory of algebraic invariants, P. Noordhoff. L.T.D. Groningen, the Netherlands.

- [3] G. PAPY et F. TOURNAY, Classification des formes cubiques alternées à six indéterminées par rapport au groupe canonique de degré 3. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, p. 513-523, 1946.
- [4] Ph. REVOY, Formes alternées et puissances divisées, Séminaire Dubreuil, 26^e année, n° 8, 1972-1973.
- [5] J.P. SERRE, Corps locaux, Hermann, Paris. 1968.

Philippe REVOY
Institut de Mathématiques
Université des Sciences et
Techniques du Languedoc
34060 MONTPELLIER CEDEX
FRANCE