MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE REVOY

Une note sur les formes quadratiques en caractéristique 2

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 137-140
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__137_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p. 137-140

UNE NOTE SUR LES FORMES QUADRATIQUES EN CARACTERISTIQUE 2

par

Philippe REVOY

Depuis l'étude par C. Arf des formes quadratiques sur un corps de caractéristique 2 (cf. [1]), les travaux sur cette question ont été peu nombreux ; citons [4] et [2] appendice 1. Dans [3], nous avons donné une présentation par générateurs et relations des groupes de Witt d'un corps de caractéristique 2. Ici, nous utilisons cette présentation pour retrouver de façon simple les résultats sur les invariants classiques, par exemple le théorème 2 de [4], en nous plaçant au départ dans un cadre abstrait.

1. Rappelons que si K est un corps de caractéristique 2, le groupe de Witt de K est, (cf. [3]), le groupe universel pour les applications biadditives symétriques f de $K \times K$ dans les groupes abéliens G vérifiant $f(a\alpha^2, b\alpha^{-2}) = f(a,b)$ et $f(a,b) = f(a,ab^2)$ quels que soient a et b dans K et α dans $K^* = K - \{0\}$.

Soient maintenant K un corps commutatif quelconque et σ un endomorphisme de K. On considère, par analogie, les applications $f : K \times K \to G$, groupe abélien, biadditives, symétriques (antisymétriques en caractéristique 2) telles que

(i) $f(a\,\sigma(x),\ b\,\sigma(x^{-1})) = f(a,b)$

(ii) $f(a,b) = f(a,\ a^{-1}\,\sigma(ab))$

quels que soient a et b dans K et x dans K^*.

<u>Définition 1</u> : On appelle <u>groupe de Witt de</u> (K,σ) <u>et on note</u> $W(K;\sigma)$ le groupe universel défini par les conditions ci-dessus ; on note $w(a,b)$ l'image du couple (a,b) dans $W(K;\sigma)$.

2. <u>Remarques</u> :

Si $2 = 0$ et si σ est l'endomorphisme $x \mapsto x^2$ de K, $W(K;\sigma)$ est le groupe de Witt ordinaire. Si $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$, (i) donne $f(a,b) = f(1, ab)$ car il existe y dans K tel que $a^{-1} = \sigma(y)$. Alors (ii) montre que $W(K;\sigma)$ est isomorphe au groupe $K/\rho(K)$ où ρ est l'endomorphisme de groupes abéliens $x \mapsto x - \sigma(x)$. Dans le cas général, (ii) équivaut à la condition

(iii) $\forall(a,b) \in K \times K \quad f[a, a^{-1}(b-\sigma(b))] = 0$.

3. Dans les hypothèses de la définition 1, soit $\delta : K \times K \to K/\rho(K)$ l'application définie par $\delta(a,b) = \overline{ab}$. Il est clair que δ est biadditive, symétrique et vérifie (i) et (ii) (sous la forme (iii), c'est évident) et donc δ induit un homomorphisme $\Delta : W(K;\sigma) \to K/\rho(K) = \mathrm{Dis}\,(K;\sigma)$ qu'on appelera <u>l'invariant d'Arf</u>. L'homomorphisme Δ est surjectif car $\Delta(w(1,x)) = \bar{x}$ et possède un inverse à droite Δ' défini par $\Delta'(\bar{x}) = w(1,x)$ (Δ' est bien défini à cause de (iii)). On note $W_o(K;\sigma)$ le noyau de Δ, dont un système de générateurs est formé des éléments $w(a,b) - w(1,ab)$ où (a,b) parcourt $K \times K$.

Notons qu'on a l'équivalence suivante :

$\Delta(w(a,b)) = 0$ si et seulement si $w(a,b) = 0$, car $\Delta(w(a,b) = 0$ si $ab \in (K)$ donc cela découle de (iii).

4. <u>Le groupe</u> $B(K;\sigma)$

Considérons les applications biadditives g de $K \times K^*$ dans les groupes abéliens G qui vérifient les trois conditions suivantes :

(1) $g(x, \sigma(y)) = 0$

(2) $g(x-\sigma(x),y) = 0$

(3) $g(x,x) = 0$ quels que soient x dans K et y dans K^*. On note $B(K;\sigma)$ le groupe universel pour ces applications et $[x,y)$ est l'image du couple (x,y) de $K \times K^*$ dans $B(K;\sigma)$. Si σ est un automorphisme de K, $B(K;\sigma)$ est 0.

Soit alors $h : K \times K \to B(K;\sigma)$ l'application définie par $h(a,b) = [ab,b)$ si $b \neq 0$, 0 sinon. Alors $h(a\sigma(x), b\sigma(x^{-1})) = [ab, b\sigma(x^{-1})) = [ab,b) = h(a,b)$ et $h(a, a^{-1}\sigma(ab)) = [\sigma(ab), a^{-1}\sigma(ab)) = [\sigma(ab), a^{-1}) = [ab, a^{-1}) = [ab, a^{-1}) + [ab,ab) = [ab,b) = h(a,b)$. De plus h est additive en a et $h(a,b) + h(b,a) = [ab,b) + [ab,a) = [ab,ab) = 0$, si bien que h est antisymétrique. En conséquence, <u>si</u> $2 = 0$ <u>dans</u> K, <u>ce que nous supposons dans toute la suite</u>, h est symétrique, biadditive et vérifie (i) et (ii) de 1. L'application h induit donc un homomorphisme de groupes abéliens noté $C : W(K;\sigma) \to B(K;\sigma)$ qui est surjectif car $C(w(xy^{-1},y)) = [x,y)$. De plus C est nul sur le sous-groupe de $W(K;\sigma)$, isomorphe à $\mathrm{Dis}(K;\sigma)$, supplémentaire de $W_o(K;\sigma)$ formé par les $w(1,x)$ car $C(w(1,x)) = [x,x) = 0$.

5. <u>Action de</u> K^* <u>sur</u> $W(K;\sigma)$.

Le groupe K^* opère naturellement sur l'ensemble des classes de formes quadratiques. Pour le faire opérer sur $W(K;\sigma)$ nous sommes obligés de supposer que σ est l'endomorphisme $x \mapsto x^2$ (K de caractéristique 2). L'action de K^* est alors définie par $x.w(a,b) = w(ax,bx^{-1})$. Le sous-groupe $\sigma(K^*)$ opère trivialement d'après (i) si bien que $W(K;\sigma)$ a une structure naturelle de $A = \mathbb{Z}[K^*/\sigma(K^*)]$-module. La suite exacte de groupes abéliens de 3.

$$0 \to W_0(K;\sigma) \to W(K;\sigma) \overset{\Delta}{\to} \mathrm{Dis}(K;\sigma) \to 0$$

est une suite exacte de A-modules, $\mathrm{Dis}(K;\sigma)$ étant un $K^*/\sigma(K^*)$-module trivial car $\Delta(x.w(a,b)) = \Delta(w(a,b))$. Soit alors I l'idéal d'augmentation de A, i.e. l'idéal engendré par les éléments $\bar{x} - \bar{1}$, $x \in K^*$. Le groupe $W(K;\sigma)$ est alors filtré par la suite décroissante de sous-groupes :

$$W(K;\sigma) \supset IW(K;\sigma) \supset \dots \supset I^nW(K;\sigma) \supset \dots$$

<u>Proposition</u> 5.1. $W_0(K;\sigma) = IW(K;\sigma)$

Démonstration : Ker Δ contient $IW(K;\sigma)$ car $x.w(a,b)$ et $w(a,b)$ ont même invariant d'Arf. Inversement soit $\eta = \sum_{i=n}^{n} w(a_i,b_i)$ un élément de Ker Δ : $\Sigma\, a_ib_i \in (K)$ et $\sum_{i=1}^{n} w(1,a_ib_i) = 0$ d'où $\eta = \sum_{i=1}^{n}[w(a_i,b_i) - w(1,a_ib_i)]$ et comme $w(a_i,b_i) = a_iw(1,a_ib_i)$, η est dans $IW(K;\sigma)$, ce qui démontre la proposition.

6. Vis à vis de l'action de K^* sur $W(K;\sigma)$ et de l'homomorphisme C, on a la formule

$C(x.\eta) = C(\eta) + [\Delta(\eta), x)$ qui se vérifie pour $\eta = w(a,b)$, puis par additivité pour η quelconque dans $W(K;\sigma)$ et x dans K^*. On en déduit que C est nul sur $I^2W(K;\sigma)$: ce dernier groupe est engendré par les éléments $(yz)\eta - y.\eta - z.\eta + \eta$ où $\eta \in W(K;\sigma)$ et y et z sont dans K^*. On a alors $C((yz)\eta - y.\eta - z.\eta + \eta) = [\Delta(\eta),yz) - [\Delta(\eta),y) - [\Delta(\eta),z) = 0$. Ainsi C induit un <u>homomorphisme surjectif</u> $\bar{c}$ de $IW(K;\sigma)/I^2W(K;\sigma)$ dans $B(K;\sigma)$.

<u>Proposition</u> 6.1. <u>L'homomorphisme</u> $\bar{c}$ <u>est un isomorphisme de groupes abéliens</u>.

Démonstration : Nous allons construire son inverse. Soit pour cela $R : K\times K^* \to IW(K;\sigma)/I^2W(K;\sigma)$ l'application définie par

$$R(x,y) = w(xy^{-1},y) - w(x,1) \bmod I^2W(K;\sigma).$$

Les propriétés suivantes sont immédiates : R est additive en x, $R(x,x) = R(x,\sigma(y)) = 0$, $R(x,y) - R(\sigma(x),y) = R(x-\sigma(x),y) = 0$. De plus R est multiplicative en y car $[w(x(yz)^{-1}, yz) - w(x,1)] - [w(xy^{-1},y) - w(x,1)] - [w(xz^{-1},z) - w(x,1)] = (yz)^{-1} w(x,1) - y^{-1} w(x,1) - z^{-1} w(x,1) + w(x,1) \in I^2W(K;\sigma)$. Il s'ensuit que R induit un homomorphisme de groupes abéliens de $B(K;\sigma)$ dans $IW(K;\sigma)/I^2W(K;\sigma)$; il est immédiat de vérifier que c'est l'inverse de l'homomorphisme $\bar{c}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARF C., Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Characteristic 2. J. Reine Angew. Math. 183, (1941), 148-167.

[2] MILNOR J. et HUSEMOLLER D., Symmetric bilinear forms. Springer-Verlag 1973.

[3] REVOY Ph., Groupes de Witt d'un corps de caractéristique 2. J. Reine Angew. Math. 296 (1977), 33-36.

[4] SAH C.H., Symmetric bilinear forms and quadratic forms. J. of Algebra. 20 (1972), 144-160.

Philippe REVOY

Institut de Mathématiques
Université des Sciences et
Techniques du Languedoc

34060 MONTPELLIER CEDEX
FRANCE