MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE REVOY

Fibré tangent à la sphère algébrique

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 131-135
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__131_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p. 131-135

FIBRE TANGENT A LA SPHERE ALGEBRIQUE

par

Philippe REVOY

On sait que c'est seulement pour $n = 1, 3$ et 7 que le fibré tangent à la sphère S^n est trivial ; c'est lié à l'existence sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^8$ de structures d'algèbres : $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$ (octonions ou octaves de Cayley). Il serait intéressant de voir ce qui, dans ces résultats, est de nature algébrique ou de nature topologique. Pour cela, il faut dire ce qu'on entend par trivialité du fibré tangent à la sphère algébrique.

1. Soit A un anneaucommutatif avec unité dans lequel 2 est inversible et soit (P,Q) un A-module quadratique : P est projectif de type fini et Q est non dégénérée. A la forme Q correspond un élément q de la seconde puissance symétrique du dual P^* de P, à savoir la forme bilinéaire associée à Q : $(x,y) \mapsto$ $\mapsto \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$. On définit alors $\mathcal{S}(P,Q) = V_1(P,Q) = S_A(P^*)/(q-1)$, quotient de l'algèbre symétrique de P^* par l'idéal principal engendré par $q-1$. On a alors, pour toute A-algèbre commutative B, une bijection naturelle entre $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}[V_1(P,Q),B]$ et $S(P \otimes_A B, Q \otimes_A B) = \{x \in P \otimes_A B \mid Q_B(x) = 1\}$. A l'identité de $V_1(P,Q)$ correspond en particulier l'élément générique de (P,Q) de longueur 1, à savoir un élément x_1 de $P \otimes V_1(P,Q)$ tel que $Q \otimes V_1(P,Q)(x_1) = 1_{V_1(P,Q)}$ qui vérifie la condition suivante : si $f : V_1(P,Q) \to B$ est un homomorphisme d'algèbres, $(1_p \otimes f)(x_1)$ est l'élément de $S(P \otimes_A B, Q \otimes_A B)$ de longueur 1 qui correspond à l'homomorphisme f.

L'équivalent $\tau(P,Q)$ du fibré tangent à la sphère est le $V_1(P,Q)$-module des A-dérivations de $V_1(P,Q)$. Il s'identifie canoniquement à l'orthogonal dans $P \otimes V_1(P,Q)$ du sous-espace $V_1(P,Q)\,x_1$. On a donc $\tau(P,Q) \oplus V_1(P,Q)\,x_1 \cong P \otimes V_1(P,Q)$; c'est donc un $V_1(P,Q)$-module projectif de type fini de rang : rang de P moins 1. Sa classe dans $K_0(V_1(P,Q))$ est dans l'image canonique de $K_0(A)$. Le fibré tangent sera dit <u>trivial</u> s'il existe un A-module projectif de type fini P' tel que $P' \otimes V_1(P,Q) \cong \tau(P,Q)$.

2. <u>Résultats</u>

Je ne sais donner que des résultats du type positif.

1- <u>Si</u> A <u>est un corps et si</u> Q <u>a un zéro non trivial, le fibré tangent est trivial : c'est un</u> $V_1(P,Q)$-<u>module libre de rang</u> $n-1$. <u>Si</u> Q <u>ne représente pas</u>

0, on a au moins : $\tau \oplus \tau$ est libre (de rang $2(n-1)$).

2- Si A est un anneau quelconque et si (P,Q) possède en plus une structure de A-algèbre unitaire non nécessairement associative, avec une norme multiplicative égale à Q (i.e. $Q(xy) = Q(x)\,Q(y)$), alors τ est isomorphe à $P_+ \otimes V_1(P,Q)$ où P_+ est l'orthogonal dans P de l'élément unité de P.

3- Si P est de rang 2, $\tau \cong \Lambda^2 P \otimes V_1(P,Q)$.

3. Démonstrations

. Le point 3, est trivial car $P \otimes V_1(P,Q) \cong \tau \oplus V_1(P,Q)x_1$ et il suffit de prendre les puissances extérieures des deux membres.

. Le résultat 2 découle du lemme suivant :

Lemme : Dans les hypothèses du point 2, soit $x \in P$ un élément inversible. Alors l'application $y \mapsto xy$ induit un isomorphisme de l'orthogonal de l'élément unité de P sur celui de x.

En effet comme $Q(ab) = Q(a)\,Q(b)$, on a $\varphi(xy, xz) = \varphi(y,z)\,Q(x)$. quels que soient y et z dans P. Donc dire que y est orthogonal à l'élément unité revient à dire que xy est orthogonal à x.

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme à l'élément x_1 de $P \otimes V_1(P,Q)$ qui est inversible car de longueur 1. Pour pouvoir appliquer le point 2, il faut chercher les A-algèbres unitaires P munies d'une norme multiplicative non dégénérée. On a alors la

Proposition : Dans les hypothèses du point 2 (2 inversible n'est pas nécessaire!) P est une A-algèbre alternative cayleyenne. Si P est de rang constant sur A, le rang de P est 1,2,4 ou 8.

Pour la démonstration, on pourra consulter [1] ou [2]. Pour ce qui nous intéresse, seuls les rangs 4 et 8 sont concernés. Supposons par exemple que A soit un anneau local et que 2 est inversible. Alors en rang 4, P est une A-algèbre de quaternions dont Q est la norme réduite. En rang 8, P est une algèbre d'octonions. La forme quadratique Q est de la forme $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ en rang 4 et $\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ en rang 8 où a,b et c sont des éléments inversibles ($\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$ est le produit tensoriel des n formes bilinéaires symétriques $\langle 1,a_i\rangle$ où $\langle 1,a_i\rangle(x,y) = x^2 + a_i y^2$). On retrouve ainsi les résultats classiques sur $\mathbb{R}$.

Pour le point 1, on va d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme : Soit dans R^n un élément unimodulaire $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$; pour que Rx ait un supplémentaire libre dans R^n, il suffit que l'un des n vecteurs $x - a_i e_i$ soit aussi unimodulaire.

La condition du lemme signifie que l'idéal engendré par $n-1$ des a_i est R tout entier. Supposons donc que l'on a la relation $1 = a_1 b_1 + \sum_{i=3}^{n} a_i b_i$ et définissons l'application linéaire $f : R^n \to R^n$ sur la base e_i par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (r+1)e_1 + re_2 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 \\ f(e_j) &= kb_j e_1 + e_j \quad \text{pour } j \geq 3 \ ; \end{aligned}$$

k et r sont des scalaires que l'on choisira par la suite ; f est un automorphisme de R^n car son déterminant est 1. La première composante de $f(x)$ est $c_1 = a_1(r+1) + a_2 + k\,(\sum_{j=3}^{n} a_j b_j)$ soit $a_1(r+1 - kb_1) + a_2 + k$. On choisit alors $k = 1 - a_2$ et $r = (1-a_2)b_1 - 1$ si bien que $f(x) = e_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j e_j$, ce qui montre que $f^{-1}(e_2),\dots,f^{-1}(e_n)$ est la base d'un supplémentaire de Rx.

Ce lemme entraine le résultat annoncé. En effet si Q représente 0, on peut en changeant de base dans A^n si nécessaire, mettre Q sous la forme $Y_1Y_2 + Q'(Y_3,\dots,y_n)$ de sorte que τ est un supplémentaire dans $V_1(P,Q)^n$ de $x_1 = (y_1, y_2,\dots,y_n)$ où $y_1y_2 + q'(y_3,\dots,y_n) = 1$. Le lemme précédent s'applique à x_1 car l'idéal engendré par $(y_1, y_3,\dots,y_n)$ est $V_1(P,Q)$ tout entier.

Si on ne suppose plus que Q représente 0, soit B une extension quadratique du corps A telle que $Q \otimes_A B$ représente 0 : alors $\tau \otimes_A B$ est un $V_1(P,Q) \otimes_A B$-module libre de rang $n-1$ et donc un $V_1(P,Q)$-module libre de rang $2(n-1)$ et on a donc démontré le point 1.

Le point 1 se généralise sans difficultés au cas où (P,Q) est de la forme $H(A) \perp (P',Q')$ où $H(A)$ est un plan hyperbolique et A est un anneau quelconque ; on a alors $\tau(P,Q) \simeq (A \oplus P') \otimes_A V_1(P,Q)$.

4. En conclusion, on voit qu'il manque des critères pour affirmer la non-liberté d'un module de dérivation. Les seuls exemples que je connaisse sont ceux qui proviennent directement du cas topologique, i.e. K est un corps réel et Q une forme quadratique, de rang différent de 2,4 et 8, positive pour un ordre sur K.

<u>Appendice 1</u>. Le lemme utilisé au point 1 peut se démontrer dans le cas général de la façon suivante (démonstration due à M. Karoubi).

Les hypothèses signifient qu'on a le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r] & A^2 \oplus P' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[u] & A \oplus P' \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale $A \oplus P' \to A^2 \oplus P'$ est l'injection naturelle : $(a,p') \mapsto ((a,0),\ p')$, $a \in A$, $p' \in P'$. Appliquant le lemme du serpent, on obtient le diagramme commutatif suivant, où lignes et colonnes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
 & & A \arrow[u] \arrow[r, equal] & A \arrow[u] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[u] & A^2 \oplus P' \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
(L) & 0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[u] & A \oplus P' \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & & (C) & & &
\end{tikzcd}$$

L'exactitude de (L) et de (C) donne que W et $A \oplus P'$ sont isomorphes, ce qui est le résultat cherché. Le module P' n'a même pas besoin d'être projectif.

<u>Appendice 2.</u> Soit (P,Q) un A-module quadratique qui possède un 2-produit vectoriel (cf. [2] Ch. III), notée φ. Alors la sphère algébrique $V_1(P,Q)$ possède une structure presque complexe, i.e. il existe un automorphisme u du fibré tangent $\tau(P,Q)$ de carré -1. D'après [2] 3.2.2, cela équivaut à dire qu'il existe sur $\tau(P,Q)$ un 1-produit vectoriel. Or soit $x_1 \in P \otimes V_1(P,Q)$, le vecteur canonique de longueur 1 ; $y \mapsto \varphi(y \wedge x_1)$ restreint à $\tau(P,Q)$ est un automorphisme orthogonal de τ dont le carré est bien -1.

On obtient ainsi une structure presque complexe sur les sphères $V_1(P,Q)$ pour P de rang 3 et Q de déterminant trivial ([2] § 3.3) et dans le cas où P est de rang 7 et où Q vérifie des conditions plus difficiles à préciser. Dans le cas réel, on trouve ainsi les structures presque complexes des sphères S^2 et S^6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LEGRAND D., Formes quadratiques et algèbres quadratiques, Thèse de doctorat n° d'ordre CNRS 803, 1971.

[2] MICALI A. et REVOY Ph., Modules quadratiques, Cahiers mathématiques de Montpellier 10, 1977.

Philippe REVOY

Institut de Mathématiques
Université des Sciences et
Techniques du Languedoc

34060 MONTPELLIER CEDEX
FRANCE