DANIEL GUIN

K-théorie algébrique et invariants des formes quadratiques

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 69-94
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__69_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire, 59, 1979, p. 69-94

K-THEORIE ALGEBRIQUE ET INVARIANTS DES FORMES QUADRATIQUES

par

Daniel GUIN

INTRODUCTION : Soit A un anneau hermitien dans lequel 2 est inversible, ou, plus généralement, dans le centre duquel il existe un élément λ tel que $\lambda+\bar{\lambda} = 1$ (où $^-$ est l'anti-involution de A). Grâce aux théorèmes de périodicité de Karoubi en K-théorie hermitienne (cf. [2], [3]), on montre que, quel que soit $n \geq 0$, le groupe de Witt ${}_\epsilon W_n(A)$ et le co-groupe de Witt ${}_\epsilon W'_n(A)$ peuvent être obtenus comme l'aboutissement d'une suite spectrale définie à partir de la K-théorie algébrique de A. En particulier, pour $n = 0$, on obtient une filtration de ${}_\epsilon W_0(A)$ qui permet de définir une suite d'invariants des formes quadratiques sur A. En utilisant la "suite exacte des douze", (cf. [2], [3]), analogue hermitien de la suite exacte de chirurgie de Rothenberg et Shaneson, on explicite les trois premiers invariants. On démontre que dans le cas d'un corps commutatif F, de caractéristique différente de 2, muni de l'involution triviale, les trois premiers invariants coïncident avec des invariants classiques. Plus précisément, cela implique que les trois premiers termes de la filtration de ${}_1W_0(F)$ donnée par la suite spectrale, sont égaux aux puissances successives I, I^2, I^3 de l'idéal fondamental I de ${}_1W_0(F)$.

Précisons le plan de cet article.

Le paragraphe 1 est un paragraphe de rappels de notions de K-théorie hermitienne qu'on utilisera. En particulier, A étant un anneau hermitien, on considère l'anneau $A \times A^o$ (où A^o est l'anneau opposé de A) muni de l'anti-involution $(x,y) \mapsto (y,x)$ et l'anneau $\mathfrak{M}_2(A)$ muni de l'anti-involution
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$. On montre que les foncteurs oubli et hyperbolique s'interprètent simplement aux moyens des homomorphismes d'anneaux hermitiens suivants : $A \to A \times A^o$ défini par $a \mapsto (a,\bar{a})$ et $A \times A^o \to \mathfrak{M}_2(A)$ défini par $(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$ (cf. [3]).

Le paragraphe 2 est consacré à la construction de la suite spectrale dont le groupe ${}_{\epsilon}W_0(A)$ est l'aboutissement. Plus précisément, si X est un foncteur de la catégorie des anneaux hermitiens dans la catégorie des espaces topologiques, on définit une suite de foncteurs $X^{(p)}$ de la façon suivante. L'homomorphisme d'anneaux hermitiens $A \times A^o \to \mathfrak{M}_2(A)$ défini par $(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$, induit une application continue $X(A \times A^o) \to X(\mathfrak{M}_2(A))$ dont on note $X^{(1)}(A)$ la fibre homotopique. Par récurrence on note $X^{(p+1)}(A)$ la fibre homotopique de l'application $X^{(p)}(A \times A^o) \to X^{(p)}(\mathfrak{M}_2(A))$. On établit le résultat suivant :

THEOREME : <u>Soit</u> X <u>un foncteur de la catégorie des anneaux hermitiens dans la catégorie des espaces topologiques</u>. <u>Si</u> X <u>est muni d'une transformation naturelle de foncteurs</u> $X(A) \xrightarrow{\alpha_A} X(\mathfrak{M}_2(A))$ <u>qui est une équivalence d'homotopie faible, il existe une suite spectrale convergente, de termes</u>

$$E^1_{pq} = \begin{cases} \pi_q\ (X^{(p)}(A \times A^o)) & \text{si } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>dont l'aboutissement est</u>

$$D_n \approx \operatorname{coker}\ (\pi_0\,(X^{(n+1)}(A \times A^o)) \to \pi_0\ (X^{(n+1)}(A))).$$

On en déduit le théorème

THEOREME : <u>Soit</u> A <u>un anneau hermitien dans le centre duquel il existe un élément</u> λ <u>tel que</u> $\lambda+\bar{\lambda} = 1$ (<u>c'est en particulier le cas si</u> $2 \in A^*$). <u>Alors il existe une suite spectrale convergente, de termes</u>

$$E^2_{pq} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ K_q(A)) & \text{si } p > 0 \text{ et } q \geq 0 \\ K_q(A)/(1+t)\ K_q(A) & \text{si } p = 0 \text{ et } q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>dont l'aboutissement est</u>

$$D_{p+q} = \begin{cases} {}_{\epsilon}W_0(A) & \text{si } p+q \equiv 0 \mod 4 \\ \operatorname{Coker}\ (K_0(A) \to \pi_0({}_{\epsilon}\mathcal{U}(A))) & \text{si } p+q \equiv 1 \mod 4 \\ {}_{-\epsilon}W_0\ (A) & \text{si } p+q \equiv 2 \mod 4 \\ \operatorname{Coker}\ (K_0(A) \to \pi_0({}_{-\epsilon}\mathcal{U}(A))) & \text{si } p+q \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Dans le paragraphe 3 on utilise l'isomorphisme canonique entre le groupe E^{∞} et le groupe gradué associé à la filtration de l'aboutissement ${}_{\epsilon}W_0(A)$ pour définir une suite d'invariants des formes quadratiques.

Dans le paragraphe 4, on montre que dans le cas d'un corps commutatif F, de caractéristique différente de 2, muni de l'involution triviale, les trois premiers invariants "coincident" respectivement avec le rang modulo 2, le discriminant, l'invariant de Hasse-Witt. On montre également que le troisième invariant peut aussi s'exprimer à l'aide de classes d'algèbres de Clifford dans le groupe de Brauer de F.

1 - RAPPELS. ([2], [3], [4], [5], [6], [12]).

Soit A un anneau hermitien, c'est à dire un anneau unitaire muni d'une anti-involution $a \mapsto \bar{a}$ vérifiant $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ et $\overline{ab} = \bar{b}\,\bar{a}$, et soit ϵ un élément du centre de A tel que $\epsilon.\bar{\epsilon} = 1$. On note $K_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\overline{\underline{\underline{P}}(A)}$ dont les objets sont les A-modules (à droite) projectifs de type fini et dont les morphismes sont les isomorphismes. Rappelons qu'un A-module (à droite) ϵ-hermitien est un A-module (à droite) projectif de type fini M, muni d'un isomorphisme $\varphi : M \to {}^tM$ (où ${}^tM$ est le dual de M) vérifiant ${}^t\varphi = \epsilon\varphi$. On note ${}_{\epsilon}KH_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie ${}_{\epsilon}\underline{\underline{H}}(A)$ dont les objets sont les A-modules (à droite) ϵ-hermitiens et dont les morphismes sont les isomorphismes. On considère les espaces $K(A) = K_{\theta}(A) \times BGL(A)^+$ et ${}_{\epsilon}KH(A) = {}_{\epsilon}KH_0(A) \times B_{\epsilon}O(A)^+$ dont les groupes d'homotopie sont respectivement les groupes $K_n(A)$ de K-théorie algébrique de A et ${}_{\epsilon}KH_n$ les groupes de K-théorie hermitienne de A (cf. [2]).

Le foncteur hyperbolique H de $\overline{\underline{\underline{P}}(A)}$ dans ${}_{\epsilon}\underline{\underline{H}}(A)$ associe au module M le module $M \oplus {}^tM$ muni de la forme ϵ-hermitienne définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

et à l'isomorphisme α, l'isomorphisme $\alpha \oplus ({}^t\alpha)^{-1}$, ${}^t\alpha$ étant définie par $({}^t\alpha)_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Ce foncteur induit une application continue pointée $h : K(A) \to {}_{\epsilon}KH(A)$, dont la fibre homotopique est notée ${}_{\epsilon}\mathcal{U}(A)$. Il induit donc, pour tout $n \geq 0$, un homomorphisme de groupes $h_n : K_n(A) \to {}_{\epsilon}KH_n(A)$ dont le conoyau est, par définition, le $n^{\text{ième}}$ groupe de Witt de A, noté ${}_{\epsilon}W_n(A)$.

De même, le foncteur oubli F de ${}_{\epsilon}\underline{\underline{H}}(A)$ dans $\overline{\underline{\underline{P}}(A)}$ induit une application continue $f : {}_{\epsilon}KH(A) \to K(A)$, dont la fibre homotopique est notée ${}_{\epsilon}\mathcal{V}(A)$. Il induit donc, pour tout $n \geq 0$, un homomorphisme de groupes $f_n : {}_{\epsilon}KH_n(A) \to K_n(A)$

dont le noyau est, par définition, le $n^{\text{ième}}$ co-groupe de Witt de A, noté ${}_{\epsilon}W'_n(A)$.

Les résultats exposés dans cet article, reposent sur le théorème de périodicité en K-théorie hermitienne dû à Karoubi :

(1.1) - THEOREME ([2], [3]). Si A est un anneau hermitien dans le centre duquel il existe un élément λ tel que $\lambda+\bar{\lambda} = 1$, les espaces ${}_{\epsilon}\mathcal{V}(A)$ et $\Omega_{-\epsilon}\mathcal{U}(A)$ ont le même type d'homotopie. □

Autrement dit, les longues suites exactes d'homotopie des fibrations

$$(1.2) \qquad \begin{cases} {}_{\epsilon}\mathcal{U}(A) \to K(A) \to {}_{\epsilon}KH(A) \\ {}_{\epsilon}\mathcal{V}(A) \to {}_{\epsilon}KH(A) \to K(A) \end{cases}$$

sont reliées par les isomorphismes

$$\forall\, n \geq 0 \qquad \pi_n({}_{\epsilon}\mathcal{V}(A)) \approx \pi_{n+1}({}_{-\epsilon}\mathcal{U}(A))$$

Remarque : L'hypothèse du théorème (1.1) est en particulier vérifiée si 2 est inversible dans A. Rappelons que dans ce cas les formes ϵ-hermitiennes et ϵ-quadratiques coïncident.

Nous allons donner une autre description des applications $K(A) \longrightarrow {}_{\epsilon}KH(A)$ et ${}_{\epsilon}KH(A) \longrightarrow K(A)$ induites par les foncteurs hyperbolique et oubli, au moyen des homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{lll} A \longrightarrow A \times A^o & \qquad & A \times A^o \longrightarrow \mathfrak{M}_2(A) \\ a \longmapsto (a, \bar{a}) & & (a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} a & o \\ o & \bar{b} \end{pmatrix} \end{array}$$

où A^o désigne l'anneau opposé de A([3]).

L'application $A \to \mathfrak{M}_2(A)$ $\left(a \mapsto \begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix}\right)$ qui est un morphisme de pseudo-anneaux (elle ne respecte pas l'unité), définit un homomorphisme de groupes $\Phi : GL(A) \to GL(\mathfrak{M}_2(A))$. L'application induite $\Phi^+ : BGL(A)^+ \to BGL(\mathfrak{M}_2(A))^+$ est une équivalence d'homotopie ([5] prop. 1.4.11). Les deux espaces $K(A)$ et $K(\mathfrak{M}_2(A))$ ont donc le même type d'homotopie.

D'autre part, soient A un anneau hermitien et P un A-module (à droite) projectif de type fini, muni d'une forme 1-hermitienne : on a donc un isomorphisme $\varphi : P \to {}^tP$ tel que ${}^t\varphi = \varphi$. Alors $\mathrm{End}_A(P)$ est un anneau hermitien pour l'anti-involution définie par l'adjonction $f \mapsto \bar{f} = \varphi^{-1} \circ {}^tf \circ \varphi$. Une démonstration analogue à la précédente, dans le cas hermitien, montre que les deux espaces ${}_{\epsilon}KH(A)$ et ${}_{\epsilon}KH(\mathrm{End}_A(P))$ ont le même type d'homotopie. En prenant pour P le module $A \times A$ muni de la forme 1-hermitienne $[(x,y), (x',y')] \mapsto \bar{x}y' + \bar{y}x'$, l'anneau hermitien

$\mathrm{End}_A(P)$ est isomorphe à l'anneau $\mathfrak{M}_2(A)$ muni de l'anti-involution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

(dans toute la suite $\mathfrak{M}_2(A)$ sera muni de cette anti-involution). Les espaces ${}_\varepsilon KH(A)$ et ${}_\varepsilon KH(\mathfrak{M}_2(A))$ ont donc le même type d'homotopie.

On déduit de ce qui précède que les espaces ${}_\varepsilon \mathcal{U}(A)$ (resp. ${}_\varepsilon \mathcal{V}(A)$) et ${}_\varepsilon \mathcal{U}(\mathfrak{M}_2(A))$ (resp. ${}_\varepsilon \mathcal{V}(\mathfrak{M}_2(A))$) ont le même type d'homotopie.

Considérons l'anneau $A \times A^o$ muni de l'anti-involution (indépendante de celle de A) $(x,y) \to (y,x)$ (Dans toute la suite $A \times A^o$ sera muni de cette anti-involution).

Si $\begin{pmatrix} (a,a') & (b,b') \\ (c,c') & (d,d') \end{pmatrix}$ est une matrice appartenant à ${}_\varepsilon O_{n,n}(A \times A^o)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $GL_{2n}(A)$ et son inverse est $\begin{pmatrix} {}^t d' & \varepsilon\, {}^t b' \\ \bar{\varepsilon}\, {}^t c' & {}^t a' \end{pmatrix}$. Inversement si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $GL_{2n}(A)$ ayant pour inverse la matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, la matrice $\begin{pmatrix} (a, {}^t u) & (b, \bar{\varepsilon}\, {}^t y) \\ (c, \varepsilon\, {}^t z) & (d, {}^t x) \end{pmatrix}$ appartient à ${}_\varepsilon O_{n,n}(A \times A^o)$. On vérifie facilement que les homomorphismes de groupes ${}_\varepsilon O_{n,n}(A \times A^o) \longrightarrow GL_{2n}(A)$ et $GL_{2n}(A) \to {}_\varepsilon O_{n,n}(A \times A^o)$ ainsi définis sont inverses l'un de l'autre. Ces deux groupes sont donc isomorphes et on en déduit que les espaces ${}_\varepsilon KH(A \times A^o)$ et $K(A)$ ont le même type d'homotopie.

Ceci implique que les espaces ${}_\varepsilon \mathcal{U}(A \times A^o)$ et ${}_\varepsilon \mathcal{V}(A \times A^o)$ ont le même type d'homotopie que $K(A)$.

L'homomorphisme d'anneaux hermitiens

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \times A^o \\ a &\longmapsto (a, \bar{a}) \end{aligned}$$

Induit une application continue $\bar{f} : {}_\varepsilon KH(A) \longrightarrow {}_\varepsilon KH(A \times A^o)$.

L'homomorphisme d'anneaux hermitiens

$$\begin{aligned} A \times A^o &\longrightarrow \mathfrak{M}_2(A) \\ (a,b) &\longmapsto \begin{pmatrix} a & o \\ o & \bar{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induit une application continue $\bar{h} : {}_\varepsilon KH(A \times A^o) \longrightarrow {}_\varepsilon KH(\mathfrak{M}_2(A))$.

(1.3) PROPOSITION ([3]). i) <u>Le composé de l'application</u> $\bar{f}$ <u>avec l'équivalence d'homotopie</u> ${}_{\epsilon}KH(A \times A^{o}) \sim K(A)$ <u>est une application homotope à l'application induite par le foncteur oubli.</u>

ii) <u>Le composé de l'application</u> $\bar{h}$ <u>avec les équivalences d'homotopie</u> $K(A) \sim {}_{\epsilon}KH(A \times A^{o})$ <u>et</u> ${}_{\epsilon}KH(\mathfrak{m}_2(A)) \sim {}_{\epsilon}KH(A)$ <u>est une application homotope à l'application induite par le foncteur hyperbolique.</u> □

2 - LA SUITE SPECTRALE

Si A est un anneau hermitien, le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur $GL_n(A)$ par l'involution $\alpha \mapsto ({}^t\alpha)^{-1}$ avec $({}^t\alpha)_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Cette involution induit, via la stabilisation et la construction "+", une opération, que nous noterons t, de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur les groupes $K_q(A)$, quel que soit $q \geq 0$. Dans toute la suite, c'est cette opération de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $K_q(A)$ que nous considérerons.

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant.

(2.1) THEOREME : <u>Soit</u> A <u>un anneau hermitien vérifiant l'hypothèse du théorème</u> (1.1.) <u>Il existe une suite spectrale convergente, de termes</u>

$$E^2_{pq} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_q(A)) & \text{si } p > 0 \text{ et } q \geq 0 \\ K_q(A) \,/\, (1+t)\, K_q(A) & \text{si } p = 0 \text{ et } q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>dont l'aboutissement est</u>

$$D_{p+q} = \begin{cases} {}_{\epsilon}W_0(A) & \text{si } p+q \equiv 0 \mod 4 \\ \operatorname{Coker}\,(K_0(A) \to \pi_0({}_{\epsilon}\mathcal{U}(A))) & \text{si } p+q \equiv 1 \mod 4 \\ {}_{-\epsilon}W_0(A) & \text{si } p+q \equiv 2 \mod 4 \\ \operatorname{Coker}\,(K_0(A) \to \pi_0({}_{-\epsilon}\mathcal{U}(A))) & \text{si } p+q \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

En fait, nous allons établir un résultat plus général (théorème (2.2)) dont ce théorème sera un cas particulier.

Soit X un foncteur de la catégorie des anneaux hermitiens et homomorphismes d'anneaux hermitiens dans la catégorie des espaces topologiques. Si A est un anneau hermitien, considérons les anneaux $A \times A^{o}$ et $\mathfrak{m}_2(A)$ munis des anti-involutions définies précédemment, c'est à dire $(x,y) \mapsto (y,x)$ et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

L'homomorphisme d'anneaux hermitiens

$$\begin{aligned} A \times A^o &\longrightarrow \mathfrak{m}_2(A) \\ (a,b) &\longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induit une application continue $X(A \times A^o) \to X(\mathfrak{m}_2(A))$ dont on notera $X^{(1)}(A)$ la fibre homotopique. Par récurrence on notera $X^{(p+1)}(A)$ la fibre homotopique de l'application $X^{(p)}(A \times A^o) \to X^{(p)}(\mathfrak{m}_2(A))$ induite par l'homomorphisme ci-dessus.

On peut alors énoncer le théorème suivant.

(2.2) - THEOREME. <u>Soit</u> X <u>un foncteur de la catégorie des anneaux hermitiens dans la catégorie des espaces topologiques</u>. <u>Si</u> X <u>est muni d'une transformation naturelle de foncteurs</u> $X(A) \xrightarrow{\alpha_A} X(\mathfrak{m}_2(A))$ <u>qui est une équivalence d'homotopie faible</u>, <u>il existe une suite spectrale convergente</u>, <u>de termes</u>

$$E^1_{pq} = \begin{cases} \pi_q(X^{(p)}(A \times A^o)) & \text{si } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>dont l'aboutissement est</u>

$$D_n \approx \operatorname{coker} \left(\pi_0(X^{n+1)}(A \times A^o)) \to \pi_0(X^{(n+1)}(A))\right).$$

Nous allons d'abord établir le lemme suivant.

(2.2.1) LEMME : <u>Soit</u> X <u>un foncteur de la catégorie des anneaux hermitiens dans la catégorie des espaces topologiques</u>. <u>Si</u> X <u>est muni d'une transformation naturelle de foncteurs</u> $X(A) \xrightarrow{\alpha_A} X(\mathfrak{m}_2(A))$ <u>qui est une équivalence d'homotopie faible</u>, <u>il en est de même pour les foncteurs</u> $X^{(p)}$, <u>quel que soit</u> $p > 0$.

Il suffit de démontrer le lemme pour le foncteur $X^{(1)}$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X(A \times A^o) & \longrightarrow & X(\mathfrak{m}_2(A)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{A \times A^o}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathfrak{m}_2(A)}} \\ X(\mathfrak{m}_2(A \times A^o)) & \longrightarrow & X(\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_2(A))) \end{array}$$

Puisque $\alpha_{A \times A^o}$ et $\alpha_{\mathfrak{m}_2(A)}$ sont des équivalences d'homotopies faibles, si on note F la fibre homotopique de l'application $X(\mathfrak{m}_2(A \times A^o)) \longrightarrow X(\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_2(A)))$, on a une équivalence d'homotopie faible $X^{(1)}(A) \xrightarrow{\sim} F$.

Posons $\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et notons φ l'homomorphisme canonique

$$\mathfrak{M}_2(A \times A^o) \longrightarrow \mathfrak{M}_2(A) \times \mathfrak{M}_2(A^o)$$

$$\begin{pmatrix} (a,a') & (b,b') \\ (c,c') & (d,d') \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right)$$

L'homomorphisme composé γ

$\mathfrak{M}_2(A \times A^o) \overset{\varphi}{\to} \mathfrak{M}_2(A) \times \mathfrak{M}_2(A^o) \xrightarrow{(id,\sigma)} \mathfrak{M}_2(A) \times \mathfrak{M}_2(A)^o$ est un isomorphisme d'anneaux hermitiens. Considérons l'isomorphisme d'anneaux hermitiens $\delta : \mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_2(A)) \to \mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_2(A))$ défini par la conjugaison par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux isomorphismes induisent des équivalences d'homotopie $X(\gamma) : X(\mathfrak{M}_2(A{\times}A^o)) \to X(\mathfrak{M}_2(A) \times \mathfrak{M}_2(A)^o)$ et $X(\delta) : X(\mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_2(A)) \to X(\mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_2(A)))$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & X(\mathfrak{M}_2(A{\times}A^o)) & \longrightarrow & X(\mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_2(A))) \\ & & \big\downarrow X(\gamma) & & \big\downarrow X(\delta) \\ X^{(1)}(\mathfrak{M}_2(A)) & \longrightarrow & X(\mathfrak{M}_2(A){\times}\mathfrak{M}_2(A)^o) & \longrightarrow & X(\mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_2(A))) \end{array}$$

D'où une équivalence d'homotopie faible $F \overset{\sim}{\to} X^{(1)}(\mathfrak{M}_2(A))$. Le composé $X^{(1)}(A) \overset{\sim}{\to} F \overset{\sim}{\to} X^{(1)}(\mathfrak{M}_2(A))$ est l'équivalence d'homotopie faible cherchée. $\square$

<u>Démonstration du théorème (2.2)</u> : Tout couple exact de groupes bigradués

$$\begin{array}{ccc} D^1_{**} & \xrightarrow{\quad i \quad} & D^1_{**} \\ & {}_{k}\nwarrow \quad \swarrow_{j} & \\ & E^1_{**} & \end{array}$$

avec $\deg i = (1,-1)$, $\deg j = (0,0)$, $\deg k = (-1,0)$ détermine une suite spectrale. Pour définir la suite spectrale du théorème (2.2) nous allons construire un tel couple exact. Pour cela posons

$$E^1_{pq} = \begin{cases} \pi_q\,(X^{(p)}(A{\times}A^o)) & \text{si } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$D^1_{pq} = \begin{cases} \pi_q(X^{(p)}(A)) & \text{si } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0 \\ \operatorname{Coker}\,(\pi_0(X^{(n+1)}(A\times A^o)) \to \pi_0(X^{(n+1)}(A))) & \text{si } p+q = n \geq 0 \text{ et } q<0 \\ \pi_n(X^{(o)}(A)) & \text{si } p+q = n \geq 0 \text{ et } p<0 \\ 0 & \text{si } p+q = -1 \text{ et } q < 0 \\ \operatorname{Coker}\,(\pi_0(X^{(1)}(A)) \to \pi_0(X^{(o)}(A\times A^o))) & \text{si } p+q = -1 \text{ et } p < 0 \\ 0 & \text{si } p+q \leq -2 \end{cases}$$

Les flèches i,j,k sont les homomorphismes intervenant dans les longues suites exactes d'homotopie des fibrations

$$X^{(p+1)}(A) \longrightarrow X^{(p)}(A\times A^o) \longrightarrow X^{(p)}(\mathfrak{m}_2(A))$$

composés avec les isomorphismes $\pi_n(X^{(p)}(A)) \approx \pi_n(X^{(p)}(\mathfrak{m}_2(A)))$.

(2.2.2) PROPOSITION. <u>Les groupes bigradués</u> E^1_{**} <u>et</u> D^1_{**} <u>et les homomorphismes, définis ci-dessus constituent un couple exact</u>

$$\begin{tikzcd} D^1_{**} \arrow[rr, "i"] & & D^1_{**} \arrow[dl, "j"] \\ & E^1_{**} \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

<u>avec</u> $\deg i = (1,-1)$, $\deg j = (0,0)$, $\deg k = (-1,0)$. □

Nous allons maintenant calculer l'aboutissement de la suite spectrale (du premier quadrant, donc convergente) définie par ce couple exact. Rappelons que l'aboutissement D_n est la limite inductive du système (D^1_{pq}, i) avec $p+q = n$.

Il est évident que $D_n = 0$ pour $n < 0$. Puisque $E^1_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$, on déduit du couple exact les isomorphismes $D^1_{-k,n+k} \approx D^1_{-1,n+1}$ et $D^1_{n+k,-k} \approx D^1_{n+1,-1}$ quel que soit $k \geq 1$. L'aboutissement D_n est donc isomorphe au groupe $D^1_{n+1,-1}$ qui est par définition le conoyau de l'homomorphisme

$$\pi_0(X^{(n+1)}(A\times A^o)) \to \pi_0(X^{(n+1)}(A)). \ □$$

<u>Dans toute la suite on supposera que l'anneau hermitien</u> A <u>vérifie l'hypothèse du théorème</u> (1.1), <u>et donc qu'on a l'isomorphisme de périodicité de Karoubi.</u>

(2.3) PROPOSITION. <u>Si le foncteur</u> X <u>est le foncteur</u> ${}_{\epsilon}KH$, <u>les foncteurs</u> $X^{(p)}$, $p \geq 0$, <u>sont périodiques de période</u> 4, <u>et on a</u>

$$X^{(o)} = X = {}_{\epsilon}KH, \qquad X^{(1)} = {}_{\epsilon}\mathcal{U}, \qquad X^{(2)} = {}_{-\epsilon}KH, \qquad X^{(3)} = {}_{-\epsilon}\mathcal{U}.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème (1.1) et du lemme (1.3) . □

<u>Démonstration du théorème</u> (2.1). Pour obtenir la suite spectrale annoncée au théorème (2.1), il suffit de prendre pour foncteur X, dans la suite spectrale du théorème (2.2), le foncteur ${}_{-\epsilon}\mathcal{U}$. D'après la proposition (2.3) l'aboutissement est périodique de période 4, et on obtient

$$\begin{aligned}
D_0 &= \operatorname{Coker}(K_0(A) \to {}_{\epsilon}KH_0(A)) = {}_{\epsilon}W_0(A)\\
D_1 &= \operatorname{Coker}(K_0(A) \to \pi_0({}_{\epsilon}\mathcal{U}(A)))\\
D_2 &= \operatorname{Coker}(K_0(A) \to {}_{-\epsilon}KH_0(A)) = {}_{-\epsilon}W_0(A)\\
D_3 &= \operatorname{Coker}(K_0(A) \to \pi_0({}_{-\epsilon}\mathcal{U}(A))).
\end{aligned}$$

La proposition suivante achève la démonstration du théorème (2.1).

(2.4) PROPOSITION : <u>La suite spectrale provenant du couple exact établi au théorème</u> (2.2), <u>dans lequel on fait</u> $X = {}_{-\epsilon}\mathcal{U}$, <u>a pour termes</u>

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_q(A)) & \text{si } p > 0 \text{ et } q \geq 0 \\ K_q(A)/(1+t)\,K_q(A) & \text{si } p = 0 \text{ et } q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, les termes $E^2_{p,q}$ sont les groupes d'homologie des complexes

$$(*) \qquad \cdots \longrightarrow E^1_{p+1,q} \to E^1_{p,q} \longrightarrow E^1_{p-1,q} \longrightarrow \cdots$$

où les différentielles sont les homomorphismes composés $j \circ k$ (j et k étant les homomorphismes définissant le couple exact). Dans notre cas, quel que soit $q \geq 0$, les complexes (*) s'écrivent

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & K_q(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "k"'] & & K_q(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "k"] & & K_q(A) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_q(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "k"'] & & K_q(A) \arrow[r] & 0 \\
& & {}_{\pm\epsilon}KH_q(A) \arrow[ur, "j"'] & & \pi_{q-1}({}_{\pm\epsilon}\mathcal{U}(A)) \approx \pi_q({}_{\mp\epsilon}\mathcal{U}(A)) \arrow[ur, "j"] & & & & {}_{-\epsilon}KH_q(A) \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

On sait (cf. [2], [3]) que, quel que soit $q \geq 0$, l'homomorphisme composé

$$K_q(A) \xrightarrow{h_q} {}_{\pm\varepsilon}KH_q(A) \xrightarrow{f_q} K_q(A)$$

est la multiplication par $(1+t)$ (t est l'opération de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $K_q(A)$ définie au début du paragraphe 2), et que l'homomorphisme composé

$$K_q(A) \longrightarrow \pi_{q-1}({}_{\pm\varepsilon}\mathcal{V}(A)) \approx \pi_q({}_{\mp\varepsilon}\mathcal{U}(A)) \longrightarrow K_q(A)$$

est la multiplication par $(1-t)$. Les complexes (*) s'écrivent donc

$$\xrightarrow{(1-t)} K_q(A) \xrightarrow{(1+t)} K_q(A) \xrightarrow{(1-t)} K_q(A) \to \dots \xrightarrow{(1-t)} K_q(A) \xrightarrow{(1+t)} K_q(A) \to 0$$

Leurs groupes d'homologie sont, pour $p > 0$ $H^p(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_q(A))$, et $p = 0$ $K_q(A)/(1+t)\, K_q(A)$. □

Plus généralement, on peut énoncer le théorème suivant.

(2.5) THEOREME : <u>Soit</u> A <u>un anneau hermitien vérifiant l'hypothèse du théorème</u> (1.1). <u>Quel que soit</u> $q_o \in \mathbb{N}$, <u>il existe une suite spectrale convergente</u>, <u>de termes</u>

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_q(A)) & \text{si } p > 0 \text{ et } q \geq q_o \\ K_q(A)/(1+t)\, K_q(A) & \text{si } p = 0 \text{ et } q \geq q_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>L'aboutissement</u> D_{p+q} <u>de cette suite spectrale est périodique de période</u> 4 <u>et est égal à</u> ${}_{\varepsilon}W_{q_o}(A)$, ${}_{-\varepsilon}W_{q_o}(A)$, ${}_{\varepsilon}W'_{q_o-1}(A)$, ${}_{-\varepsilon}W'_{q_o-1}(A)$ <u>suivant les valeurs de</u> $p+q$ <u>modulo</u> 4.

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème (2.1). Il suffit de tronquer le couple exact en posant

$$E^1_{p,q} = \begin{cases} K_q(A) & \text{si } p \geq 0 \text{ et } q \geq q_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'aboutissement D_n est alors isomorphe au conoyau de l'homomorphisme $E^1_{n-q_o+1,q_o} \longrightarrow D^1_{n-q_o,q_o}$. Or, quel que soit $n \geq q_o-1$, $E^1_{n-q_o+1,q_o} = K_{q_o}(A)$; puisque les foncteurs $X^{(p)}$ sont périodiques de période 4, l'aboutissement D_n est périodique de période 4 et est égal à

$$\mathrm{Coker}\,(K_{q_o}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon KH_{q_o}(A)) = {}_\varepsilon W_{q_o}(A)$$
$$\mathrm{Coker}\,(K_{q_o}(A) \longrightarrow \pi_{q_o}({}_\varepsilon \mathcal{U}(A)) \approx \pi_{q_o-1}({}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(A))) \approx {}_{-\varepsilon}W'_{q_o-1}(A)$$
$$\mathrm{Coker}\,(K_{q_o}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}KH_{q_o}(A)) = {}_{-\varepsilon}W_{q_o}(A)$$
$$\mathrm{Coker}\,(K_{q_o}(A) \longrightarrow \pi_{q_o}({}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A)) \approx \pi_{q_o-1}({}_\varepsilon \mathcal{V}(A))) \approx {}_\varepsilon W'_{q_o-1}(A). \square$$

3 - LES INVARIANTS DES FORMES QUADRATIQUES

(3.1) La suite spectrale du théorème (2.1) étant définie par un couple exact, l'aboutissement D_n est filtré par des sous groupes $F_p(D_n)_{p \in \mathbb{Z}}$ qui sont les images successives dans D_n, du système inductif $(D_{p,q}, i)$ avec $p+q = n$. Puisque la suite spectrale est convergente, il y a un isomorphisme entre le terme E^∞ et les groupes gradués associés aux filtrations $F_p(D_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Plus précisément, on a $F_p(D_n)/F_{p-1}(D_n) \approx E^\infty_{p,n-p}$.

Nous allons nous intéresser à l'aboutissement D_{4n} $(n \geq 1)$, qui est isomorphe à ${}_\varepsilon W_0(A)$. Soit $F_p({}_\varepsilon W_0(A))_{p \in \mathbb{Z}}$ la filtration de ${}_\varepsilon W_0(A)$ donnée par la suite spectrale (noter que, en général $\bigcap_p F_p \neq 0$). Alors, quel que soit $p \geq 1$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F_{p-1}({}_\varepsilon W_0(A)) \longrightarrow F_p({}_\varepsilon W_0(A)) \xrightarrow{\Phi_{p,q}} E^\infty_{p,q} \longrightarrow 0$$

avec $p+q = 4n$. On remarquera que, compte tenu de la périodicité des foncteurs $X^{(p)}$ introduits au paragraphe 2, les premiers termes de la filtration $F_p(D_{4n})$ de $D_{4n} = {}_\varepsilon W_0(A)$ sont indépendants de n. Plus précisément, on a les égalités suivantes

(3.1.1) $\forall\, n \geq 1,\ \forall\, k > 0,\ \forall p,\ 0 \leq p \leq 4n,\ F_{4(n+k)-p}({}_\varepsilon W_0(A)) = F_{4n-p}({}_\varepsilon W_0(A))$

Il est évident que $F_{4n}({}_\varepsilon W_0(A)) = {}_\varepsilon W_0(A)$. Nous pouvons donc interpréter les homomorphismes $\Phi_{p,q}$ en termes d'invariants des formes quadratiques, de la manière suivante. Soit $X \in {}_\varepsilon W_0(A)$: on définit son premier invariant, noté ${}_\varepsilon i_0(X)$, par ${}_\varepsilon i_0(X) = \Phi_{4n,0}(X)$. Lorsque ${}_\varepsilon i_0(X) = 0$, X appartient à $F_{4n-1}({}_\varepsilon W_0(A))$ et on définit sont deuxième invariant, noté ${}_\varepsilon i_1(X)$, par ${}_\varepsilon i_1(X) = \Phi_{4n-1,1}(X)$. Par récurrence, si ${}_\varepsilon i_0(X) = \ldots = {}_\varepsilon i_{k-1}(X) = 0$, X appartient à $F_{4n-k}({}_\varepsilon W_0(A))$ et l'invariant ${}_\varepsilon i_k(X)$ est bien défini par ${}_\varepsilon i_k(X) = \Phi_{4n-k,k}(X)$.

(3.2) Nous allons maintenant, en calculant les trois premiers termes de la filtration $F_p({}_\varepsilon W_0(A))$, expliciter les trois premiers invariants. Pour ce faire, nous allons utiliser de façon essentielle le résultat suivant

THEOREME ([2] théorème 4.11). "<u>Suite exacte des douze</u>". <u>Soit</u> A <u>un anneau hermitien. On a une suite exacte à douze termes</u> :

$$\begin{tikzcd}
k_n(A) \arrow[r, "\alpha_n"] & {}_{\epsilon}W_{n+1}(A) \arrow[r, "\beta_n"] & {}_{-\epsilon}W'_{n-1}(A) \arrow[r, "d_n"] & k'_n(A) \arrow[r, "\gamma_n"] & {}_{\epsilon}W'_n(A) \arrow[r, "c_n"] & {}_{\epsilon}W_n(A) \arrow[d, "r_n"] \\
{}_{-\epsilon}W_n(A) \arrow[u, "r_n"] & {}_{-\epsilon}W'_n(A) \arrow[l, "c_n"] & k'_n(A) \arrow[l, "\gamma_n"] & {}_{\epsilon}W'_{n-1}(A) \arrow[l, "d_n"] & {}_{-\epsilon}W_{n+1}(A) \arrow[l, "\beta_n"] & k_n(A) \arrow[l, "\alpha_n"]
\end{tikzcd}$$

<u>avec</u> $k_n(A) = H^{2p}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ K_n(A))$ et $k'_n(A) = H^{2p+1}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ K_n(A))$, <u>l'action du groupe</u> $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ <u>sur le groupe</u> $K_n(A)$ <u>étant celle définie au début du paragraphe</u> 2.

Remarquons que, si on pose $\partial_n = r_{n+1} \circ \alpha_n$ et $\partial'_n = d_{n+1} \circ \gamma_n$, on obtient deux complexes (k_n, ∂_n) et (k'_n, ∂'_n) dont on notera $\underline{k}_n$ et $\underline{k}'_n$ les groupes d'homologie.

Les groupes $F_p({}_\epsilon W_0(A))$ sont les images successives dans ${}_\epsilon W_0(A)$ du système inductif suivant (où on note ${}_\epsilon U_p(A)$ (resp. ${}_\epsilon V_p(A)$) le groupe $\pi_p({}_\epsilon \mathcal{U}(A))$ (resp. $\pi_p({}_\epsilon \mathcal{V}_p(A))$)) :

$$\begin{aligned}
&{}_\epsilon KH_{4n}(A) \longrightarrow {}_\epsilon U_{4n-1}(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}KH_{4n-2}(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}U_{4n-3}(A) \longrightarrow {}_\epsilon KH_{4(n-1)}(A) \longrightarrow \\
&\ldots \longrightarrow {}_\epsilon U_{4p+3}(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}KH_{4p+2}(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}U_{4p+1}(A) \longrightarrow {}_\epsilon KH_{4p}(A) \longrightarrow \ldots \\
&\ldots \longrightarrow {}_\epsilon KH_4(A) \longrightarrow {}_\epsilon U_3(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}KH_2(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}U_1(A) \longrightarrow {}_\epsilon KH_0(A) \longrightarrow {}_\epsilon W_0(A).
\end{aligned}$$

Les homomorphismes ${}_\epsilon KH_p(A) \longrightarrow {}_\epsilon U_p(A)$ sont ceux intervenant dans la longue suite exacte d'homotopie de la fibration

$${}_\epsilon \mathcal{U}(A) \longrightarrow K(A) \longrightarrow {}_\epsilon KH(A)$$

Les homomorphismes ${}_\epsilon U_p(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}KH_{p-1}(A)$ sont les homomorphismes composés

$${}_\epsilon U_p(A) \approx {}_{-\epsilon}V_{p-1}(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}KH_{p-1}(A)$$

où les homomorphismes ${}_\epsilon V_{p-1}(A) \longrightarrow {}_\epsilon KH_{p-1}(A)$ sont ceux intervenant dans la longue suite exacte d'homotopie de la fibration

$${}_\epsilon \mathcal{V}(A) \longrightarrow {}_\epsilon KH(A) \longrightarrow K(A).$$

Puisque, quel que soit $n \geq 1$, le groupe D_{4n} est isomorphe à ${}_\epsilon W_0(A)$ et que les premiers termes de sa filtration sont indépendants de n, pour alléger les notations, nous noterons, en vertu des égalités (3.1.1), $\hat{F}_k = F_{4n-k}({}_\epsilon W_0(A))$.

(3.2.1) <u>Détermination de</u> $\hat{F}_1$. Considérons l'application $r_0 : {}_\epsilon W_0(A) \to k_0(A)$ induite par l'application ${}_\epsilon KH_0(A) \longrightarrow K_0(A)$ provenant du foncteur oubli.

(3.2.1.1) PROPOSITION. <u>L'homomorphisme</u> ${}_{\varepsilon}i_0$ <u>est égal à</u> r_0 <u>et</u> $\hat{F}_1$ <u>est le noyau de</u> r_0.

Le sous groupe $\hat{F}_1$ de ${}_{\varepsilon}W_0(A)$ est l'image de l'homomorphisme composé

$$ {}_{-\varepsilon}U_1(A) \approx {}_{\varepsilon}V_0(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}KH_0(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_0(A) $$

qui se factorise en

$$
\begin{tikzcd}
{}_{-\varepsilon}U_1(A) \approx {}_{\varepsilon}V_0(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{\varepsilon}KH_0(A) \arrow[r] & {}_{\varepsilon}W_0(A) \\
 & {}_{\varepsilon}W'_0(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

On a donc $\hat{F}_1 = \mathrm{Im}\,({}_{\varepsilon}W'_0(A) \to {}_{\varepsilon}KH_0(A) \to {}_{\varepsilon}W_0(A))$

Or cet homomorphisme est l'homomorphisme c_0 de la suite exacte des douze, dont l'image est le noyau de r_0. On a donc la suite exacte

$$ 0 \longrightarrow \hat{F}_1 \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_0(A) \xrightarrow{r_0} k_0(A). \ \square $$

(3.2.1.2) PROPOSITION. <u>Si on appelle rang d'un</u> A-<u>module projectif de type fini, sa classe dans</u> $K_0(A)$, <u>l'invariant</u> ${}_{\varepsilon}i_0$ <u>est le rang modulo</u> 2.

En effet, pour tout anneau A, on a $k_0(A) = K_0(A)/2K_0(A)$ et l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}KH_0(A) \to K_0(A)$, qui induit r_0, associe à la classe d'un module quadratique (M,q) la classe de M dans $K_0(A)$. $\square$

(3.2.2) <u>Détermination de</u> $\hat{F}_2$. L'homomorphisme $d_1 : {}_{\varepsilon}W'_0(A) \to k'_1(A)$ de la suite exacte des douze induit de manière évidente un homomorphisme
$\overline{d_1} : {}_{\varepsilon}W'_0(A)/\mathrm{Im}\,\gamma_0 \longrightarrow \overline{k'_1(A)}$.

(3.2.2.1) PROPOSITION. <u>L'homomorphisme</u> ${}_{\varepsilon}i_1$ <u>est isomorphe à</u> $\overline{d_1}$ <u>et</u> $\hat{F}_2$ <u>est isomorphe au noyau de</u> $\overline{d_1}$.

Le sous-groupe $\hat{F}_2$ de ${}_{\varepsilon}W_0(A)$ est l'image de l'homomorphisme composé

$$ {}_{-\varepsilon}KH_2(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}U_1(A) \approx {}_{\varepsilon}V_0(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}KH_0(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_0(A) $$

qui se factorise en

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
{}_{-\epsilon}KH_2(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{-\epsilon}U_1(A) \approx {}_{\epsilon}V_0(A) \arrow[rrr] \arrow[drr] & & & {}_{\epsilon}KH_0(A) \arrow[r] & {}_{\epsilon}W_0(A) \\
& {}_{-\epsilon}W_2(A) \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & {}_{\epsilon}W'_0(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

On a donc $\hat{F}_2 = \mathrm{Im}({}_{-\epsilon}W_2(A) \to {}_{\epsilon}W'_0(A) \to {}_{\epsilon}W_0(A))$ Or l'homomorphisme ${}_{-\epsilon}W_2(A) \to {}_{\epsilon}W'_0(A)$ est l'homomorphisme β_1 de la suite exacte des douze dont l'image est égale au noyau de $d_1 : {}_{\epsilon}W'_0(A) \to k'_1(A)$. Puisque $\hat{F}_1$ est isomorphe à ${}_{\epsilon}W'_0(A)/\mathrm{Im}\ \gamma_0$, un élément de ce groupe appartient à $\hat{F}_2$ s'il est dans l'image de l'homomorphisme composé ${}_{-\epsilon}W_2(A) \xrightarrow{\beta_1} {}_{\epsilon}W'_0(A) \longrightarrow {}_{\epsilon}W'_0(A)/\mathrm{Im}\ \gamma_0$. Cette image est égale au noyau N de l'homomorphisme $\underset{\epsilon}{\overline{d_1}}$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{F}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \hat{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & E^{\infty}_{4n-1,1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & {}_{\epsilon}W'_0(A)/\mathrm{Im}\gamma_0 \arrow[r, "\overline{d_1}"] & \overline{k'_1} &
\end{tikzcd}$$

$\square$

(3.2.3) <u>Détermination de</u> $\hat{F}_3$. L'homomorphisme $r_2 : {}_{-\epsilon}W_2(A) \to k_2(A)$ de la suite exacte des douze induit un homomorphisme $\overline{r_2} : {}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1 \to \overline{k_2(A)}$. D'autre part, si on note $\mathrm{Im}\ k'(A)$ l'image de $k'(A)$ dans ${}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1$ via les homomorphismes γ_0 et β_1, l'homomorphisme $\overline{r_2}$ induit un homomorphisme

$$\tilde{r}_2 : ({}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1)/\mathrm{Im}\ k'_0(A) \longrightarrow \overline{k_2(A)}/\overline{r}_2(\mathrm{Im}\ k'_0(A))$$

(3.2.3.1) PROPOSITION. <u>L'homomorphisme</u> ${}_{\epsilon}i_2$ <u>est isomorphe à</u> $\tilde{r}_2$ <u>et</u> $\hat{F}_3$ <u>est isomorphe au noyau de</u> $\tilde{r}_2$.

Le sous groupe $\hat{F}_3$ de ${}_{\epsilon}W_0(A)$ est l'image de l'homomorphisme composé

$${}_{\epsilon}U_3(A) \approx {}_{-\epsilon}V_2(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}KH_2(A) \longrightarrow {}_{-\epsilon}U_1(A) \approx {}_{\epsilon}V_0(A) \longrightarrow {}_{\epsilon}KH_0(A) \longrightarrow {}_{\epsilon}W_0(A)$$

qui se factorise en

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
{}_{\epsilon}U_3(A) \approx {}_{-\epsilon}V_2(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{-\epsilon}KH_2(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{-\epsilon}U_1(A) \approx {}_{\epsilon}V_0(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{\epsilon}KH_0(A) \arrow[r] & {}_{\epsilon}W_0(A) \\
& {}_{-\epsilon}W'_2(A) \arrow[ur] \arrow[rr] & & {}_{-\epsilon}W_2(A) \arrow[ur] \arrow[rr, "\beta_1"] & & {}_{\epsilon}W'_0(A) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

On a donc $\hat{F}_3 = \mathrm{Im}\ ({}_{-\epsilon}W'_2(A) \to {}_{-\epsilon}W_2(A) \to {}_{\epsilon}W'_0(A) \to {}_{\epsilon}W_0(A))$

L'homomorphisme ${}_{-\epsilon}W'_2(A) \to {}_{-\epsilon}W_2(A)$ est l'homomorphisme c_2 de la suite exacte des douze dont l'image est le noyau de $r_2 : {}_{-\epsilon}W_2(A) \to k_2(A)$. Or $\mathrm{Im}\ \beta_1$ est isomorphe à ${}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1$: l'image de l'homomorphisme composé ${}_{-\epsilon}W'_2(A) \xrightarrow{c_2} {}_{-\epsilon}W_2(A) \to \mathrm{Im}\ \beta_1$ est égale au noyau de l'homomorphisme $\overline{r_2} : {}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1 \to \overline{k_2}(A)$, induit par r_2. Puisque $\hat{F}_2$ est isomorphe au quotient $\mathrm{Im}\ \beta_1/\mathrm{Im}\ \beta_1 \cap \mathrm{Im}\ \gamma_0$, un élément de ce groupe appartient à $\hat{F}_3$ s'il est dans l'image de l'homomorphisme composé

$$ {}_{-\epsilon}W'_2(A) \to {}_{-\epsilon}W_2(A) \to \mathrm{Im}\ \beta_1 \to \mathrm{Im}\ \beta_1/\mathrm{Im}\ \beta_1 \cap \mathrm{Im}\ \gamma_0 . $$

D'après ce qui précède, cette image est égale au noyau N de l'homomorphisme $\tilde{r}_2$ défini sur le quotient $({}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1)/\mathrm{Im}\ k'_0(A)$ et induit par $\overline{r_2}$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{F}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \hat{F}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & E^{\infty}_{4n-2,2} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & ({}_{-\epsilon}W_2(A)/\mathrm{Im}\ \alpha_1)/\mathrm{Im}\ k'_0(A) \arrow[r, "\tilde{r}_2"] & \overline{k_2}(A)/\overline{r_2}(\mathrm{Im}\ k'_0(A)) &
\end{tikzcd}$$ □

4 - IDENTIFICATION DE ${}_1i_0$, ${}_1i_1$, ${}_1i_2$ DANS LE CAS D'UN CORPS

Soit F un corps commutatif, de caractéristique différente de 2, muni de l'involution triviale, et soit $\epsilon = 1$. (Dans la suite, nous ne mentionnerons plus, dans les notations, le terme ϵ, lorsqu'il vaudra 1).

(4.1) Rappelons briévement les définitions des invariants classiques définis sur $W_0(F)$ (cf. [9] p. 76 et suivantes).

i) Le rang. C'est la dimension de l'espace vectoriel sous jacent.

ii) Le discriminant. Soit $X = (M,q)$ un module quadratique de rang r. Le discriminant de X noté $d(X)$, est l'élément $(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\ \mathrm{dét}(X) \in F^*/F^{*2}$ (où dét (X) est le déterminant de la matrice $(q(e_i,e_j))$ où $(e_1,\dots,e_r)$ est une base de M). Le discriminant ne dépend que de la classe de X dans $W(F)$ (le discriminant d'un module hyperbolique est nul) ; il définit une application, encore notée d, de $W_0(F)$ dans F^*/F^{*2}. Si on note I l'idéal fondamental de $W_0(F)$ constitué par les classes de modules quadratiques de rang pair, on peut énoncer le théorème

(4.1.1) THEOREME. ([9] théorème 5.2). Le discriminant définit un homomorphisme $d : I \to F^*/F^{*2}$ dont le noyau est I^2. □

iii) <u>L'invariant de Hasse-Witt</u> : Soit φ un symbole défini sur $F^* \times F^*$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$, c'est à dire une fonction bimultiplicative vérifiant $\varphi(\alpha, 1-\alpha) = 1$, quel que soit $\alpha \neq 1$ appartenant à F^*. Tout module quadratique $X = (M,q)$ admettant une décomposition orthogonale $X = \langle\alpha_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\alpha_n\rangle$, on définit <u>l'invariant de Hasse</u> $H_\varphi(X)$ de X, lié au symbole φ, par

$$H_\varphi(X) = \prod_{i<j} \varphi(\alpha_i, \alpha_j)$$

Cet élément est indépendant du choix de la décomposition orthogonale, et deux modules quadratiques ayant même rang et même classe dans $W_0(F)$ ont des invariants de Hasse égaux. Soit $w \in I$; on choisit un module quadratique $X = (M,q)$ dont la classe dans $W_0(F)$ soit égale à w, vérifiant

$$\text{rang } (X) \equiv 0 \text{ modulo } 8.$$

On définit <u>l'invariant de Hasse-Witt</u> de w lié au symbole φ, et noté $h_\varphi(w)$, par

$$h_\varphi(w) = H_\varphi(X).$$

On peut énoncer le théorème.

(4.1.2) THEOREME ([9] théorème 5.8). <u>Pour chaque symbole</u> φ <u>défini sur</u> $F^* \times F^*$ <u>à valeurs dans</u> $\{\pm 1\}$, <u>la restriction à</u> I^2 <u>de la fonction de Hasse-Witt</u> h_φ <u>est un homomorphisme</u> $I^2 \to \{\pm 1\}$. <u>Un élément</u> $w \in I^2$ <u>est annulé par chacun de ces homomorphismes</u> h_φ, <u>quel que soit</u> φ, <u>si et seulement si</u> $w \in I^3$. $\square$

(4.2) Nous allons montrer que les invariants i_0, i_1, i_2 "coïncident" respectivement avec le rang modulo 2, le discriminant, l'invariant de Hasse-Witt. Pour cela nous allons utiliser les explicitations de i_0, i_1, i_2 données en (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3). Remarquons que dans le cas d'un corps commutatif muni de l'involution triviale, les situations présentées dans ces trois paragraphes se simplifient considérablement car $k_0'(F) = 0$ et $\operatorname{Im} \alpha_1 = 0$.

(4.2.1) THEOREME : <u>L'invariant</u> i_0 <u>est le rang modulo</u> 2. <u>Son noyau est</u> I.

C'est bien clair, car $k_0(F) = K_0(F)/2K_0(F)$. $\square$

(4.2.2) THEOREME : <u>L'invariant</u> i_1 <u>est isomorphe au discriminant</u>. <u>Son noyau est</u> I^2.

Puisque $k_0'(F)$ est nul, d'après la proposition (3.2.2.1) l'invariant i_1 est isomorphe à d_1, par c_0, où c_0 est l'homomorphisme canonique $KH_0(F) \longrightarrow K_0(F)$ restreint à $W_0'(F)$. Rappelons la définition de d_1 (cf. [2]).

L'homomorphisme $\Delta : V(F) \to K_1(F)$, qui associe au triple (E, g_1, g_2) la classe dans $K_1(F)$ de l'automorphisme $g_1 g_2^{-1}$, fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} KH_1(F) \arrow[r, "f_1"] & K_1(F) \arrow[r, "\delta"] & V_0(F) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, "\Delta"] & W_0'(F) \arrow[r] & 0 \\ & & {}_{-1}U_1(F) \arrow[r] & K_1(F) \arrow[r] & {}_{-1}KH_1(F) \end{tikzcd}$$

Nous avons déjà observé (démonstration de la proposition(2.4)) que l'application composée $\Delta \circ \delta$ est la multiplication par $(1-t)$. En relevant les éléments de $W_0'(F)$ dans $V_0(F)$ et en leur appliquant Δ, on obtient un homomorphisme bien défini d_1 de $W_0'(F)$ dans $k_1'(F)$. Tout élément de $KH_0(F)$ peut, en stabilisant, s'écrire $(E,g) - (H(F^n),\psi)$ avec $\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (cf. [4] théorème 1.4). Cet élément appartient à $W_0'(F)$ si E est isomorphe à $H(F^n)$. On peut donc écrire tout élément de $W_0'(F)$ sous la forme $(H(F^n),g) - (H(F^n), \psi)$. Cet élément se relève dans $V_0(F)$ en $(H(F^n),g,\psi)$ dont l'image dans $K_1(F)$ est $\text{dét}(\psi^{-1}g) = (-1)^n \det(g)$. En posant $r = 2n$, on a $(-1)^n = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}$ et $d_1(c_0^{-1}(X)) = d(X)$ où $d(X)$ est le discriminant défini en (4.1).

On en déduit donc que l'invariant i_1 est canoniquement isomorphe au discriminant. D'après le théorème (4.1.1) son noyau est égal à I^2. □

Nous allons maintenant comparer l'invariant i_2 à l'invariant de Hasse-Witt. Examinons la construction faite en (3.2.3). Puisque $k_0'(F)$ et $\mathrm{Im}(\alpha_1)$ sont nuls, le diagramme (3.2.3.1) devient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{F}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \hat{F}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & E^{\infty}_{4n-2,2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & {}_{-1}W_2(F) \arrow[r] & k_2(F) = K_2(F)/2K_2(F) & \end{tikzcd}$$

L'invariant i_2 est donc défini sur I^2 à valeurs dans $k_2(F)$.

Si φ est un symbole défini sur $F^* \times F^*$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$, il existe un unique homomorphisme $\bar{\varphi} : k_2(F) \to \{\pm 1\}$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K_1(F) \times K_1(F) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\text{dét} \times \text{dét}"', "\wr"] & K_2(F) \arrow[r] & K_2(F)/2K_2(F) = k_2(F) \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ F^* \times F^* \arrow[rr, "\varphi"'] & & \{\pm 1\} \end{tikzcd}$$

l'homomorphisme $K_1(F) \times K_1(F) \xrightarrow{\cup} K_2(F)$ étant le cup-rpoduit. En effet, d'après le théorème de Matsumoto (cf. [7]), tout symbole se factorise de manière unique par $K_2(F)$. Donc tout symbole d'ordre 2 se factorise de manière unique par $k_2(F)$.

L'invariant i_2 "coïncide" avec l'invariant de Hasse-Witt de la façon suivante.

(4.2.3) THEOREME : <u>Soit</u> φ <u>un symbole défini sur</u> $F^* \times F^*$ <u>à valeurs dans</u> $\{\pm 1\}$. <u>Quel que soit</u> $X \in I^2$, <u>on a l'égalité</u>

$$\bar{\varphi} \circ i_2(X) = h_\varphi(X).$$

Pour démontrer ce théorème, remarquons que I^2 est engendré par les $D_{\alpha,\beta} = \langle\alpha\beta\rangle + \langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle + \langle 1\rangle$, pour α et β parcourant F^*. Il suffit donc de démontrer l'égalité des deux homomorphismes $\bar{\varphi} \circ i_2$ et h_φ sur les $D_{\alpha,\beta}$.

Calculons l'expression de $h_\varphi(D_{\alpha,\beta})$. Nous devons considérer un module quadratique de rang congru à 0 modulo 8, dont la classe dans $W_0(F)$ soit $D_{\alpha,\beta}$. Considérons

$$\widetilde{D_{\alpha,\beta}} = \langle\alpha\beta\rangle + \langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle + \langle 1\rangle + \langle 1\rangle + \langle -1\rangle + \langle 1\rangle + \langle -1\rangle.$$

En utilisant les propriétés élémentaires des symboles, à savoir bimultiplicativité, $\varphi(a,1) = \varphi(1,a) = 1$, $\varphi(b,a) = \varphi(a,b)^{-1}$, $\varphi(-1,a) = \varphi(a,-1) = \varphi(a,a)$ (cf. [7], [8]) on trouve facilement

$$\boxed{h_\varphi(D_{\alpha,\beta}) = H_\varphi(\widetilde{D_{\alpha,\beta}}) = \varphi(\alpha,\beta)\ \varphi(\alpha,\alpha)\ \varphi(\beta,\beta)\ \varphi(-1,-1)}$$

La démonstration du théorème (4.2.3) comporte trois étapes.

i) On démontre le théorème pour $F = \mathbb{Q}_2$

ii) En considérant l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\,[t,u,t^{-1},u^{-1}]$ on calcule l'expression de $i_2(D_{t,u})$ avec $D_{t,u} = \langle tu\rangle + \langle t\rangle + \langle u\rangle + \langle 1\rangle$.

iii) On démontre le théorème dans le cas général.

(4.2.3.1) Démontrons le théorème (4.2.3) dans le cas où F est le corps local $\mathbb{Q}_2$.

Dans [8],Milnor a défini, pour un corps, des groupes de K-théorie, que nous noterons $K_n^M(F)$, et a montré que $k_2^M(F)$ qui est, par définition, le groupe $K_2^M(F)/2\,K_2^M(F)$, est isomorphe à I^2/I^3. Or pour un corps les groupes $K_2(F)$ et $K_2^M(F)$ coïncident. De plus, F étant un corps commutatif muni de l'involution triviale, le groupe $k_2(F) = H^{2p}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(F))$ est égal à $K_2(F)/2\,K_2(F)$. On en déduit donc que $k_2(F)$ est isomorphe à I^2/I^3.

Il est bien connu que sur $\mathbb{Q}_2$, il n'existe qu'un seul symbole φ non trivial, à valeurs dans $\{\pm 1\}$, qui est le symbole local $\varphi(.,.) = (.,.)_2$ (cf. [13]). On en déduit que

i) $k_2(\mathbb{Q}_2)$ est cyclique d'ordre 2, et donc aussi I^2/I^3

ii) Il n'existe qu'un seul homomorphisme de Hasse-Witt $h_\varphi : I^2 \to \{\pm 1\}$: son noyau est donc égal à I^3 (théorème (4.1.2)).

Or on sait que le rang, le discriminant et l'invariant de Hasse-Witt caractérisent les modules quadratiques sur $\mathbb{Q}_2$ (cf. [11]p. 168-170). Ceci implique que I^3 est nul. On en déduit que

iii) I^2 est cyclique d'ordre 2 (d'après i))

iv) L'homomorphisme h_φ est injectif (d'après ii))

L'homomorphisme h_φ est donc un homomorphisme injectif de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans lui-même : C'est l'identité.

D'autre part, puisque l'homomorphisme $r_2 : {}_{-1}W_2(F) \to k_2(F)$ est surjectif (cf. [2]), l'homomorphisme i_2 l'est également. De plus, d'après i), l'homomorphisme $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme. L'homomorphisme $\bar{\varphi} \circ i_2$ est donc surjectif de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans lui-même : c'est l'identité :

On a donc démontré que, dans le cas $F = \mathbb{Q}_2$, les homomorphismes $\bar{\varphi} \circ i_2$ et h_φ sont égaux. □

(4.2.3.2) Considérons l'anneau $A = \mathbb{Z}'[t,u,t^{-1},u^{-1}]$, avec $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (afin que 2 soit inversible dans A), muni de l'involution triviale. L'homomorphisme i_2 est à valeurs dans $\overline{k_2(A)}$ qui est un sous groupe de $k_2(A)/\mathrm{Im}\,\partial_1$, les notations étant celles introduites au début du paragraphe (3.2).

Nous allons utiliser le lemme suivant dont la démonstration est en appendice.

LEMME : <u>Le groupe</u> $K_2(A)$ <u>est engendré par les éléments</u> $(t\cup u)$, $(t\cup t)$, $(u\cup u)(-1\cup -1)$, $(t\cup 2)$, $(2\cup u)$.

En notant $[a \cup b]$ la classe dans $k_2(A)/\mathrm{Im}\,\partial_1$ de $(a \cup b) \in K_2(A)$, a et b appartenant à A^*, on déduit du lemme précédent que $k_2(A)/\mathrm{Im}\,\partial_1$ est engendré, en tant que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module, par $[t \cup u]$, $[t \cup t]$, $[u \cup u]$, $[-1 \cup -1]$, $[t \cup 2]$, $[2 \cup u]$, (à priori, certaines de ces classes peuvent être nulles). En notant, de manière générale, i_2^R, l'homomorphisme i_2 quand l'anneau de base est R, on peut écrire

$$i_2^A(D_{t,u}) = x[t \cup u] + y[t \cup t] + z[u \cup u] + w[-1 \cup -1] + r[t \cup 2] + s[2 \cup u]$$

Considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Q}_2 \\ t & \longmapsto & \alpha \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{Q}_2^* \\ u & \longmapsto & \beta \end{array}$$

Rappelons que sur $\mathbb{Q}_2$ il n'existe qu'un seul symbole non trivial à valeurs dans $\{\pm 1\}$ qui est le symbole local $\varphi(.,.) = (.,.)_2$, et que $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme.

Par fonctonalité nous avons

$$\rho_* \, i_2^A(D_{t,u}) = i_2^{\mathbb{Q}_2} \, \rho_* \, (D_{t,u}) = i_2^{\mathbb{Q}_2} \, (D_{\alpha,\beta})$$

et

$$\bar{\varphi} \, \rho_*([a \cup b]) = \varphi(a,b) = (a,b)_2$$

D'où

$$\bar{\varphi} \circ i_2^{\mathbb{Q}_2}(D_{\alpha,\beta}) = x(\alpha,\beta)_2 + y(\alpha,\alpha)_2 + z(\beta,\beta)_2 + w(-1,-1)_2 + r(\alpha,2)_2 + s(2,\beta)_2$$

Or d'après (4.2.3.1) on sait que (en notation additive)

$$\bar{\varphi} \circ i_2^{\mathbb{Q}_2}(D_{\alpha,\beta}) = h_\varphi(D_{\alpha,\beta}) = (\alpha,\beta)_2 + (\alpha,\alpha)_2 + (\beta,\beta)_2 + (-1,-1)_2$$

On en déduit donc, dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'équation

$$x(\alpha,\beta)_2 + y(\alpha,\alpha)_2 + z(\beta,\beta)_2 + w(-1,-1)_2 + r(\alpha,2)_2 + s(2,\beta)_2 = (\alpha,\beta)_2 + (\alpha,\alpha)_2 + (\beta,\beta)_2 + (-1,-1)_2$$

Nous allons calculer x,y,z,w,r,s en donnant à α et β des valeurs particulières. Pour cela, nous allons utiliser le calcul explicite des valeurs du symbole local $(.,.)_2$ (cf. [13] p. 219).

- $\alpha = 1,\ \beta = 1 \Rightarrow [w(-1,-1)_2 = (-1,-1)_2] \Rightarrow w = 1$
- $\alpha = 5,\ \beta = 1 \Rightarrow [(-1,-1)_2 + r(5,2)_2 = (-1,-1)_2] \Rightarrow r = 0$
- $\alpha = 1,\ \beta = 5 \Rightarrow [(-1,-1)_2 + s(2,5)_2 = (-1,-1)_2] \Rightarrow s = 0$
- $\alpha = 1,\ \beta = -1 \Rightarrow [(-1,-1)_2 + z(-1,-1)_2 = (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2] \Rightarrow z = 1$
- $\alpha = -1,\ \beta = 1 \Rightarrow [(-1,-1)_2 + y(-1,-1)_2 = (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2] \Rightarrow y = 1$
- $\alpha = -1,\ \beta = -1 \Rightarrow [x(-1,-1)_2 + (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2 = (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2 + (-1,-1)_2] \Rightarrow x = 1$

Ce raisonnement prouve également que les classes $[t \cup u]$, $[t \cup t]$, $[u \cup u]$, $[-1 \cup -1]$ ne sont pas nulles dans $k_2(A)/\mathrm{Im}\,\partial_1$. On a donc

$$(*) \qquad i_2^A(D_{t,u}) = [t \cup u] + [t \cup t] + [u \cup u] + [-1 \cup -1] \qquad \square$$

(4.2.3.3) Soit F un corps commutatif, de caractéristique différente de 2, muni de l'involution triviale et soit φ un symbole défini sur $F^* \times F^*$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$A = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][t,u,t^{-1},u^{-1}] \xrightarrow{\ \rho\ } F$$

$$t \longmapsto \alpha \qquad u \longmapsto \beta \qquad \alpha,\beta \in F^*$$

Par fonctonalité on obtient

$$\rho_*(D_{t,u}) = D_{\alpha,\beta}\ , \quad \bar{\varphi} \circ \rho_*([a \cup b]) = \varphi(a,b)$$

$$\bar{\varphi} \circ i_2^F(D_{\alpha,\beta}) = \bar{\varphi} \circ \rho_*\, i_2^A(D_{t,u})$$

En appliquant la relation $(*)$, on en déduit que

$$\bar{\varphi} \circ i_2^F(D_{\alpha,\beta}) = \varphi(\alpha,\beta)\,\varphi(\alpha,\alpha)\,\varphi(\beta,\beta)\,\varphi(-1,-1)$$

d'où $\bar{\varphi} \circ i_2 (D_{\alpha,\beta}) = h_\varphi(D_{\alpha,\beta})$

ce qui achève la démonstration du théorème (4.2.3). □

(4.2.4) COROLLAIRE : <u>Le sous groupe</u> $\hat{F}_3$ <u>de</u> $W_0(F)$, <u>qui est le noyau de</u> i_2, <u>est égal à</u> I^3.

Ceci est une conséquence immédiate de l'isomorphisme entre $k_2(F)$ et I^2/I^3 démontré par Milnor dans [8]. □

(4.2.5) COROLLAIRE : <u>Soit</u> F <u>un corps commutatif, de caractéristique différente de</u> 2, <u>muni de l'involution triviale. Le noyau</u> N <u>de l'homomorphime</u> ${}_{-1}W_2(F) \to k_2(F)$ <u>est isomorphe à</u> I^3.

C'est une conséquence du corollaire précédent. □

(4.3) - Soit G un groupe abélien quelconque, et soit $\varphi : F^* \times F^* \to G$ un symbole de Steinberg, c'est à dire une fonction bimultiplicative vérifiant $\varphi(x, 1-x) = 1$ quel que soit $x \in F^*$, $x \neq 1$. On supposera que φ est d'ordre 2. Alors, d'après le théorème de Matsumoto (cf. [7]), il existe un unique homomorphisme $\bar{\varphi} : k_2(F) \to G$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} K_1(F) \times K_1(F) & \xrightarrow{\ \cup\ } & K_2(F) & \longrightarrow & k_2(F) \\ {\scriptstyle \text{dét} \times \text{dét}}\ \downarrow \wr & & & & \downarrow {\scriptstyle \bar{\varphi}} \\ F^* \times F^* & & \xrightarrow[\varphi]{\qquad\qquad} & & G \end{array}$$

En particulier, considérons le cas où G est le groupe de Brauer de F, noté Br(F). Rappelons que le groupe de Brauer de F est le groupe des classes d'équivalence de F-algèbres centrales simples de dimensions finies. Deux telles algèbres, qui, d'après le théorème de Wedderburn sont du type $\mathfrak{M}_p(D)$, $\mathfrak{M}_q(D')$ où D et D' sont deux corps (non nécessairement commutatifs) contenant F, sont dites équivalentes si D et D' sont deux F-algèbres isomorphes. La loi de groupe sur Br(F) est celle induite par le produit tensoriel de F-algèbres.

Considérons l'application $\varphi : F^* \times F^* \to Br(F)$, qui à tout $(a,b) \in F^* \times F^*$, associe la classe, notée $\varphi(a,b)$, dans Br(F) de l'algèbre de quaternions engendrée sur F par a et b. On sait (cf. [7] p 144) que l'application φ ainsi définie est un symbole de Steinberg d'ordre 2. On peut alors énoncer la proposition suivante:

(4.3.1) PROPOSITION : <u>Soit</u> $X \in I^2$ <u>la classe d'un module quadratique</u> (M,q). <u>Alors</u> $\bar{\varphi} \circ i_2(X)$, <u>où</u> φ <u>est le symbole défini ci-dessus, est égal à la classe dans</u> $Br(F)$ <u>de l'algèbre de Clifford de</u> (M,q).

Si on note $\mathcal{H}(F)$ le groupe des classes d'algèbres de Clifford (cf. [10] p. 106), on sait que le foncteur qui, à un module quadratique (M,q), associe son algèbre de Clifford $Cl(M,q)$ induit un homomorphisme de groupes $W_0(F) \to \mathcal{H}(F)$ (cf. [10] theorème 2.8.4). Notons $\mathcal{H}_0(F)$ le sous groupe de $\mathcal{H}(F)$ formé des classes d'algèbres de Clifford de modules quadratiques de rang pair. L'homomorphisme précédent induit donc un homomorphisme $f : I \to \mathcal{H}_0(F)$. De plus, il est facile de voir que, si (M,q) est un module quadratique de rang pair, la classe dans $Br(F)$ de $Cl(M,q)$ ne dépend que de sa classe dans $\mathcal{H}_0(F)$. D'où une application $g : \mathcal{H}_0(F) \to Br(F)$ qui n'est pas en général, un homomorphisme de groupes.

On déduit donc de ce qui précède que si $X \in W_0(F)$ est la classe d'un module quadratique de rang pair (M,q), la classe dans $Br(F)$ de $Cl(M,q)$ est l'image de X par l'application $g \circ f : I \to Br(F)$.

(4.3.2) LEMME : <u>La restruction à</u> I^2 <u>de l'application</u> $g \circ f$ <u>est un homomorphisme de groupe</u> $I^2 \to Br(F)$.

Soit $X \in I^2$. C'est la classe d'un module quadratique de rang pair et de discriminant nul. Or le discriminant n'est autre que l'application composée $I \xrightarrow{f} \mathcal{H}_0(F) \to Q(F)$ où $Q(F)$ est le groupe des classes d'isomorphismes d'extensions quadratiques de F. (Dans le cas d'un corps de caractéristique différente de 2, $Q(F)$ s'identifie à F^*/F^{*2}, ce qui est bien $k_1'(F)$ si F est muni de l'involution triviale). On en déduit donc que $f(X)$ appartient au noyau de $\mathcal{H}_0(F) \to Q(F)$. Or on sait (cf. [10] théorème 2.8.6) que la restriction de g au noyau de $\mathcal{H}_0(F) \to Q(F)$ est un homomorphisme. D'où le lemme. $\square$

D'après ce lemme, il suffit donc de prouver la proposition (4.3.1) pour les générateurs $D_{\alpha,\beta} = \langle\alpha\beta\rangle + \langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle + \langle 1\rangle$ de I^2. On a déjà montré que

$$\bar{\varphi} \circ i_2(D_{\alpha,\beta}) = \varphi(\alpha,\beta)\ \varphi(\alpha,\alpha)\ \varphi(\beta,\beta)\ \varphi(-1,-1)$$

Or on sait, d'après [1], que la classe dans $Br(F)$ de l'algèbre de Clifford $Cl(M,q)$ du module quadratique $(M,q) = \langle a_1\rangle + \dots + \langle a_n\rangle$, est égale à

$$[Cl(M,q)] = \prod_{i<j} (a_i,a_j) \prod_i (-1,a_i)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1,-1)^{e(n)}$$

avec $e(n) = \dfrac{(n+1)\ n(n-1)(n-2)}{8}$, où (a_i,a_j) désigne la classe dans $Br(F)$, de l'algèbre de quaternions engendrée sur F par a_i et a_j. Un calcul immédiat donne, avec nos notations

$$[\mathrm{Cl}(D_{\alpha,\beta})] = \varphi(\alpha,\beta)\ \varphi(\alpha,\alpha)\ \varphi(\beta,\beta)\ \varphi(-1,-1)$$

D'où la proposition (4.3.1). □

APPENDICE

LEMME : <u>Soit</u> $\mathbb{Z}'_{t,u}$ <u>l'anneau</u> $\mathbb{Z}'[t,u,t^{-1},u^{-1}]$ <u>avec</u> $\mathbb{Z}'=\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. <u>Le groupe</u> $K_2(\mathbb{Z}'_{t,u})$ <u>est engendré par les éléments</u> $(t \cup u)$, $(t \cup t)$, $(u \cup u)$, $(-1 \cup -1)$, $(t \cup 2)$, $(2 \cup u)$.

Ce lemme résulte du théorème suivant :

THEOREME ([5] Corollaire 2.3.7) <u>Soit</u> A <u>un anneau</u> : <u>l'élément</u> $t \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ <u>définit</u> $\{t\} \in K_1(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$ <u>et le produit par</u> $\{t\}$ <u>induit une injection scindée</u> $K_n(A) \to K_{n+1}(A[t,t^{-1}])$. <u>Par conséquent</u>, <u>on a</u>

$$K_{n+1}(A[t,\ t^{-1}]) \approx K_{n+1}(A) \oplus K_n(A) \oplus (?)\ .$$

On sait de plus (ce qui est le cas pour l'anneau $\mathbb{Z}'$) que si A est noetherien régulier on a $(?) = 0$.

On va appliquer plusieurs fois de suite ce théorème pour calculer $K_2(\mathbb{Z}'_{t,u})$, en écrivant $\mathbb{Z}'_{t,u} = \mathbb{Z}'_t[u,u^{-1}]$ avec $\mathbb{Z}'_t = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$.

On a $K_2(\mathbb{Z}'_{t,u}) \approx K_2(\mathbb{Z}'_t) \oplus K_1(\mathbb{Z}'_t)$. De plus, on a $K_1(\mathbb{Z}'_t) \approx K_1(\mathbb{Z}') \oplus K_0(\mathbb{Z}')$. Or, $K_1(\mathbb{Z}')$ est isomorphe à $\mathbb{Z}'^*$ (éléments inversibles de $\mathbb{Z}'$) et a pour générateurs -1 et 2. D'après le théorème ci-dessus, l'image dans $K_1(\mathbb{Z}'_t)$ du générateur de $K_0(\mathbb{Z}')$ est t. Les générateurs de $K_1(\mathbb{Z}'_t)$ sont donc $-1,2,t$. D'après le théorème, l'injection $K_1(\mathbb{Z}'_t) \longrightarrow K_2(\mathbb{Z}'_{t,u})$ envoie respectivement ces éléments sur $(-1 \cup u) = (u \cup u)$, $(2 \cup u)$, $(t \cup u)$. D'autre part, on a $K_2(\mathbb{Z}'_t) \approx K_2(\mathbb{Z}') \oplus K_1(\mathbb{Z}')$. De même que précédemment, les générateurs de $K_1(\mathbb{Z}')$, qui sont -1 et 2, ont pour images dans $K_2(\mathbb{Z}'_t)$ (donc dans $K_2(\mathbb{Z}'_{t,u})$ par l'inclusion canonique $K_2(\mathbb{Z}'_t) \longrightarrow K_2(\mathbb{Z}'_{t,u})$) $(-1 \cup t) = (t \cup t)$ et $(2 \cup t)$. De plus, on sait (cf. [7]) que le générateur de $K_2(\mathbb{Z}')$ est $(-1 \cup -1)$. D'où le lemme. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.J. BUSHNELL, Modular quadratic and hermitian forms over Dedekind ring II. J. für die reine und angew. Math., 288 (1976), 24-36.

[2] M. KAROUBI, Périodicité de la K-théorie hermitienne. Springer Lecture Notes, 343 (1973), 301-411.

[3] M. KAROUBI, Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal

[4] M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, K-théorie algébrique et K-théorie topologique II. Math. Scand., 32 (1973), 57-86.

[5] J.L. LODAY, K-théorie algébrique et représentations de groupes. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 9 (1976), 309-377.

[6] J.L. LODAY, Higher Witt groups : a survey. Springer Lecture Notes, 551 (1977), 155-163.

[7] J. MILNOR, Introduction to algebraic K-theory. Annals of Math. Studies, 72 (1971), Princeton University Press.

[8] J. MILNOR, Algebraic K-theory and quadratic forms. Inventiones Math., 9 (1970), 318-344.

[9] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER, Symmetric bilinear forms. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Greuzgebiete, 73 (1973). Springer Verlag.

[10] A. MICALI et PH. REVOY, Modules quadratiques. Cahiers Mathématiques, 10 (1977) Publication de l'U.E.R. de Math. Montpellier.

[11] O.T. O'MEARA, Introduction to quadratic forms. Die Grundlehren des mathematischen Wissenschaften un Einzeldarstellugen, 117 (1963). Springer Verlag.

[12] D. QUILLEN, Cohomology of groups. Congrès Inter. Math. (1970)t.2, 47-51.

[13] J.P. SERRE, Corps locaux. Publication de l'Institut Mathématique de Nancago (1968) - Hermann. Paris.

Daniel GUIN

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au CNRS

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cedex