MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 13-31
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__13_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p.13-31

FORMES QUADRATIQUES SUR LES ANNEAUX SEMI-LOCAUX REGULIERS

par

Jean-Louis COLLIOT-THELENE

Résumé. Soit A un anneau semi-local intègre, avec 2 inversible dans A, et soit K son corps des fractions. Soit Q une forme quadratique sur A, non dégénérée, isotrope sur K : pour A régulier, l'est-elle aussi sur A ? On donne une liste de questions semblables, liées au passage de A à K, on précise les relations entre ces questions et l'état des connaissances sur ce sujet : travaux de Craven, Knebusch, Rosenberg, Ware. On montre que la question initiale a une réponse affirmative si le rang de Q est au plus 4, en supposant seulement A d'anneaux strictement locaux factoriels.

§0. Notations, rappels et plan.

Dans tout cet article, on désigne par A un anneau commutatif unitaire intègre où 2 est inversible, et on note K son corps des fractions. On note A^* le groupe des éléments inversibles de A.

On utilise la terminologie usuelle pour les espaces quadratiques sur A, pour laquelle le lecteur pourra consulter le rapport de M. Knebusch [13]. Voici quelques rappels concernant le cas A semi-local, qui, à quelques remarques près, seul nous intéressera. On appelle espace quadratique sur A, ou A-espace, la donnée d'un couple (E,Q), où E est un A-module libre de rang fini, et Q est une A-forme quadratique sur E, non dégénérée, c'est-à-dire telle que la forme bilinéaire symétrique B associée à Q par la formule :

$$(x,y \in E) \qquad 2B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

induise un isomorphisme de E avec son dual. Etant donné E un A-espace et $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, on note E_B le B-espace $(E \otimes_A B, Q \otimes_A B)$. On note $E \cong F$ l'isomorphisme de deux A-espaces (isomorphisme de A-modules respectant les formes quadratiques). On note $E \perp F$ la somme orthogonale de deux A-espaces, et $E \otimes F$ leur produit tensoriel (sur A). Etant donné $(a_1,\ldots,a_n) \in (A^*)^n$, on note $<a_1,\ldots,a_n>$ l'espace défini par $E = A^n$ et $Q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. L'anneau A étant semi-local et 2 inversible, tout A-espace est isomorphe à un tel espace (diagonalisation). Un espace E (par abus de langage) est dit sous-espace d'un espace F s'il existe un espace G tel que $E \perp G \cong F$. On note H les plan hyperbolique $<1,-1>$. Un espace E est dit isotrope si H est un sous-espace de E, ce qui équivaut à l'existence de $x \in E$ primitif (i.e. Ax est un facteur direct, comme A-module, de E) avec $Q(x) = 0$. Etant donné (E,Q) un espace, et n un entier, on note nE la somme orthogonale de n exemplaires de (E,Q) si n est positif, et de $(-n)$ exemplaires de $(E,-Q)$ si n est négatif. Un espace isomorphe à nH (n entier) est dit hyperbolique. Deux espaces E et F sont dits semblables, et l'on note $E \sim F$, s'il existe des espaces hyperboliques nH et mH tels que $E \perp nH \cong F \perp mH$. Les classes de similitude de A-espaces forment (via la somme orthogonale et le produit tensoriel) un anneau, l'anneau de Witt $W(A)$. On a le :

Théorème de simplification (Roy, Knebusch [14, p. 256]). Soient E,F,G des A-espaces. Si l'on a : $E \perp G \cong F \perp G$, alors $E \cong F$. En particulier, deux espaces de même rang dont les classes dans $W(A)$ sont égales sont isomorphes.

Etant donné E un A-espace, on note $\underline{O}(E)$, resp. $\underline{SO}(E)$, le A-schéma en groupes dont les points à valeurs dans une A-algèbre B sont les éléments du groupe orthogonal $O(E_B)$, resp. du groupe spécial orthogonal $SO(E_B)$ (éléments de $O(E_B)$ de déterminant constant et égal à 1).

On note $\mu_{2/A}$ le A-schéma en groupes des racines carrées de l'unité, qui d'après l'hypothèse $2 \in A^*$ est le A-schéma en groupes constant défini par $\mu_{2/A}(X) = (\pm 1)$ pour un A-schéma connexe X.

Rappelons enfin qu'un anneau (commutatif unitaire) B est dit régulier s'il est noethérien et si ses localisés en tous les idéaux premiers sont des anneaux locaux réguliers.

Plan. Au §1, on donne une liste d'assertions concernant le passage de A à K, et, dans le cas A semi-local normal, on indique le lien entre ces assertions. Au §2, on pose la question : ces assertions sont-elles vraies pour A semi-local régulier ? On fait une revue des travaux consacrés à cette question. Au §3, on remarque que le théorème de Craven-Rosenberg-Ware (cf. §2) admet pour corollaire immédiat une version locale du 17ème problème de Hilbert, telle que demandée par Swan [21]. Au §4, qui seul est peut-être original, on démontre le résultat annoncé dans le résumé.

Des remarques de R. Baeza, D. Ferrand et J.J. Sansuc m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce texte.

§1. Le passage de l'anneau à son corps des fractions : problèmes et lien entre ces problèmes.

1.1. Voici une liste d'assertions (où l'on peut, pour fixer les idées, supposer A semi-local) ; dans les énoncés bis, on se donne un idéal maximal $\underline{m}$ de A, on note $k = A/\underline{m}$ le corps résiduel en $\underline{m}$, et on note $a \mapsto \tilde{a}$ l'application $A \to A/\underline{m}$. On note $n \geq 1$ un entier naturel.

($\underline{A}$) Soit E un A-espace. Supposons E_K isotrope. Alors E est isotrope.

($\underline{A}_n$) Même énoncé, en supposant de plus E de rang $\leq (n+1)$.

($\underline{A}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{A}$), E_k est isotrope.

($\underline{B}$) Soit (E,Q) un A-espace, et soit $a \in A^*$. Si a est représenté par Q_K sur K (i.e. si $\langle a \rangle_K$ est un sous-espace de E_K), alors a est représenté par Q sur A (i.e. $\langle a \rangle$ est un sous-espace de E).

($\underline{B}_n$) Même énoncé, en supposant de plus E de rang $\leq n$.

($\underline{B}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{B}$), $\tilde{a}$ est représenté par Q_k sur k.

($\underline{C}$) Soient E et F des A-espaces. Supposons F_K sous-espace de E_K. Alors F est un sous-espace de E.

($\underline{C}_n$) Même énoncé, en supposant E de rang $\leq n$.

($\underline{C}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{C}$), F_k est un sous-espace de E_k.

($\underline{D}$) Soient E et F des A-espaces. Supposons $F_K \cong E_K$. Alors $F \cong E$.

($\underline{D}_n$) Même énoncé, en supposant E (donc F) de rang $\leq n$.

($\underline{D}$ bis) Sous les hypothèses de ($\underline{D}$), $F_k \cong E_k$.

($\underline{E}$) Soit E un A-espace. Le noyau de l'application d'ensembles pointés de cohomologie étale :

$$H^1(A,\underline{SO}(E)) \to H^1(K,\underline{SO}(E_K))$$

est trivial.

($\underline{F}$) Même énoncé que ($\underline{D}$), en se limitant à E hyperbolique.

($\underline{F}_n$) Même énoncé que ($\underline{D}$), en se limitant à $E = mH$, avec $m \leq n$.

($\underline{G}$) L'homomorphisme naturel $W(A) \longrightarrow W(K)$ est injectif.

($\underline{G}$ bis) Le noyau de $W(A) \longrightarrow W(K)$ est inclus dans le noyau de $W(A) \longrightarrow W(k)$.

($\underline{H}$) Le noyau de $W(A) \longrightarrow W(K)$ est formé d'éléments nilpotents, de torsion 2-primaire.

($\underline{I}$) Soit $a \in A^*$ un élément qui est somme de carrés dans K. C'est une somme de carrés dans A.

Ces assertions ont une ressemblance formelle avec les différentes variantes du principe de Hasse pour les formes quadratiques. On ne s'étonnera donc pas que la démonstration de 1.2.b ci-après soit en partie inspirée du lien entre ces différentes variantes (e.g. [19], VI,§3).

1.2. Proposition. Supposons A semi-local normal. Les assertions ci-dessus sont reliées par les implications suivantes :

a) $(\underline{X}) \Rightarrow (\underline{X}$ bis$)$.

b) $(\underline{A}) \Leftrightarrow (\underline{B}) \Leftrightarrow (\underline{C}) \Rightarrow (\underline{D}) \Leftrightarrow (\underline{E}) \Leftrightarrow (\underline{F}) \Leftrightarrow (\underline{G})$.

c) $[(\underline{G}$ bis$)$ pour tout $A_{\underline{p}}$, $\underline{p} \in \mathrm{Spec}A] \Rightarrow (\underline{H}) \Rightarrow (\underline{I})$.

Préliminaire. Le point a) est clair. Pour c), cf. 2.3.4. pour la première implication et 3.1 pour la seconde. En ce qui concerne b), notons que les énoncés $(\underline{X}_1)$ sont satisfaits, car A étant normal, l'application naturelle $A^*/A^{*2} \longrightarrow K^*/K^{*2}$ est injective. Cette remarque sera utilisée tacitement dans la démonstration des implications suivantes, qui précisent l'énoncé 1.2.b :

$(\underline{A}_n) \Leftrightarrow (\underline{B}_n) \Leftrightarrow (\underline{C}_n) \Rightarrow (\underline{D}_n) \Leftrightarrow (\underline{F}_n)$

$(\underline{D}) \Leftrightarrow (\underline{E})$

$(\underline{F}) \Rightarrow (\underline{G}) \Rightarrow (\underline{D})$.

Démonstration.

$(\underline{B}_n) \Rightarrow (\underline{A}_n)$. C'est immédiat par diagonalisation.

$(\underline{A}_n) \Rightarrow (\underline{B}_n)$. Soit $(E,Q) = \langle a_1,\dots,a_m\rangle$ $(a_i \in A^*)$ un A-espace de rang m avec $2 \leq m \leq n$ et soit $a \in A^*$ représenté par Q_K. La forme quadratique Q' non dégénérée $\langle a_1,\dots,a_m,-a\rangle$ étant isotrope sur K, l'hypothèse implique l'existence d'un vecteur primitif $w = (x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) \in A^{m+1}$ isotrope dans l'espace quadratique (A^{m+1},Q') :

$$Q'(w) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2 - a x_{m+1}^2 = 0 \ .$$

Notons $\underline{m}_j$ $(j=1,\dots,k)$ les idéaux maximaux de A. Pour $x_{m+1} \notin \underline{m}_j$, posons :

$$v_j = (x_1,\dots,x_m,0).$$

Pour $x_{m+1} \in \underline{m}_j$, choisissons $\alpha(j)$ entier avec $1 \leq \alpha(j) \leq m$ tel que $x_{\alpha(j)} \notin \underline{m}_j$, ce qui est possible puisque w est primitif, et définissons :

$$v_j = (x_1,\dots,x_{\alpha(j)-1},-x_{\alpha(j)},x_{\alpha(j)+1},\dots,x_m,1)$$

Par le théorème du reste chinois, on peut trouver $v \in A^{m+1}$ tel que, pour tout j, v soit congru à v_j modulo $\underline{m}_j$. On vérifie alors facilement que v est strictement anisotrope (i.e. $Q'(v) \in A^*$) et que la symétrie orthogonale définie par v (transformant le vecteur z en $z - \frac{2B'(z,v)}{Q'(v)}v$) transforme le vecteur w en un vecteur isotrope de (A^{m+1},Q') dont la $(m+1)$-ième composante est dans A^*, ce qui permet de conclure. Remarquons qu'on dispose de résultats bien plus précis de "transversalité" : voir [3], Satz 2.5.

$(\underline{B}_n) \Rightarrow (\underline{C}_n)$. Soit $F = \langle a_1,\dots,a_m\rangle$, E de rang p, avec $1 \leq m \leq p \leq n$, et G un K-espace tel que $F_K \perp G \cong E_K$. On fait la démonstration par récurrence sur m : le cas m = 1 résulte de $(\underline{B}_n)$; supposons donc $m \geq 2$; l'espace $\langle a_m\rangle_K$ est un sous-espace de E_K , et donc, par $(\underline{B}_n)$, $\langle a_m\rangle$ est un sous-espace de E, i.e. il existe un A-espace L tel que $<a_m> \perp L \cong E$, ce qui, vu l'hypothèse, et en simplifiant sur K (ce qui est loisible d'après Witt), implique :

$$<a_1,\ldots,a_{m-1}>_K \perp G \cong L_K .$$

L'hypothèse de récurrence implique donc qu'il existe un A-espace J tel que $<a_1,\ldots,a_{m-1}> \perp J \cong L$. Ajoutant $<a_m>$ à chacun des deux membres de cet isomorphisme, on obtient le résultat $F \perp J \cong E$.

$(\underline{C}_n) \Rightarrow (\underline{B}_n)$. $(\underline{B}_n)$ est en effet un cas particulier de $(\underline{C}_n)$.

$(\underline{C}_n) \Rightarrow (\underline{D}_n)$. Même argument.

$(\underline{D}_n) \Rightarrow (\underline{F}_n)$. Soit m un entier avec $2 \leq m \leq n$, et soit F un A-espace tel que $F_K \cong (mH)_K$. On peut écrire (diagonalisation) $F = F_1 \perp F_2$, avec F_1 et F_2 des A-espaces de rang m. On a :

$$(F_1)_K \perp (mH)_K \cong (F_1)_K \perp (F_2)_K \perp (-F_2)_K \cong (mH)_K \perp (-F_2)_K$$

donc, par simplification sur K, $(F_1)_K \cong (-F_2)_K$, donc par $(\underline{D}_n)$, $F_1 \cong (-F_2)$ et donc $F = F_1 \perp F_2 \cong mH$.

$(\underline{F}_n) \Rightarrow (\underline{D}_n)$. Soient E et F deux A-espaces de rang m (avec $2 \leq m \leq n$) tels que $E_K \cong F_K$. Alors $(E \perp (-F))_K = E_K \perp (-F_K) \cong (mH)_K$, donc par $(\underline{F}_n)$, $E \perp (-F) \cong mH$, donc, par addition de F, $E \perp mH \cong F \perp mH$, d'où, par le théorème de simplification sur A, $E \cong F$.

$(\underline{D}) \Leftrightarrow (\underline{E})$. Fixons E un A-espace de rang au moins 2. La "suite exacte" de A-schémas en groupes lisses définie par le déterminant :

$$1 \to \underline{SO}(E) \to \underline{O}(E) \to \mu_{2/A} \to 1$$

et la suite exacte analogue au-dessus de K donnent le diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés (ensembles de cohomologie étale, cf.[11]) :

$$\begin{array}{ccccccccc} O(A) & \to & \mu_2(A) & \to & H^1(A,\underline{SO}(E)) & \to & H^1(A,\underline{O}(E)) & \to & H^1(A,\mu_{2/A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow \\ O(K) & \to & \mu_2(K) & \to & H^1(K,\underline{SO}(E_K)) & \to & H^1(K,\underline{O}(E_K)) & \to & H^1(K,\mu_{2/K}) \end{array}$$

On a $(\pm 1) = \mu_2(A) = \mu_2(K)$, et les deux flèches horizontales de gauche sont surjectives, le déterminant d'une symétrie orthogonale définie par un vecteur strictement anisotrope étant (-1). Par ailleurs, la suite de Kummer montre que la dernière flèche verticale s'identifie à la flèche naturelle $A^*/A^{*2} \longrightarrow K^*/K^{*2}$ qui est injective car A est normal. On voit alors que le noyau de i est trivial si et seulement si celui de j l'est. Comme ce dernier noyau s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-espaces F (de rang celui de E) tels que $F_K \cong E_K$, on a fini.

($\underline{F}$) $\Rightarrow$ ($\underline{G}$). Si E est un A-espace tel que E_K ait une classe triviale dans $W(K)$, le théorème de simplification sur K montre qu'il existe n tel que $E_K \cong (nH)_K$, donc, par ($\underline{F}$), $E \cong nH$ et $E \sim 0$. (On a utilisé le fait que tout élément de $W(A)$ peut être représenté par un espace).

($\underline{G}$) $\Rightarrow$ ($\underline{D}$). Si E et F sont deux A-espaces tels que $E_K \cong F_K$, ils ont même rang, même classe dans $W(A)$ via ($\underline{G}$). Le théorème de simplification sur A montre qu'ils sont isomorphes.

§2. Les assertions du §1 sont-elles vraies pour A semi-local régulier ?

2.1. Historique de cette question : une question de Grothendieck.

Sous la forme ($\underline{G}$), la question est bien connue des spécialistes (e.g. [15] 2.4.b)). Sous la forme ($\underline{D}$), qui d'après le paragraphe précédent lui est équivalente, la question est un cas particulier de la question suivante :

($\underline{K}$) Supposons A semi-local régulier. Soit G un A-schéma en groupes réductifs ([10],XIX 2.7). L'application naturelle d'ensembles pointés :

$$H^1(A,G) \longrightarrow H^1(K,G_K)$$

a-t-elle un noyau trivial ? (En d'autres termes : un torseur sur A sous G qui admet une section "rationnelle" admet-il une section sur A, i.e. est-il trivial?).

Dans le cas où de plus A est local et G un A-schéma en groupes quelconques, cette question a été posée par Grothendieck ([2], exp. 5 n° 5 Remarque 3) qui demande même si l'application ci-dessus est injective. Voir également une remarque de Serre ([2], exp. 1 n° 5.5, Remarque). En fait il n'est pas difficile de donner un exemple d'un A-schéma en groupes affines tel que l'application ci-dessus ait un noyau non trivial : un tel exemple est donné dans [8] ; dans cet exemple, A est un anneau de valuation discrète, la fibre générique de G est connexe et la fibre spéciale non connexe. On peut d'ailleurs noter que dans [12], 1.11.a, où est reposée la question, Grothendieck se limite au cas où G est un A-schéma en groupes semi-simples ([10], loc. cit.), ce qui est par exemple le cas de $G = \underline{SO}(E)$ pour E un A-espace quadratique.

On sait répondre à la question ($\underline{K}$) dans quelques cas : dans [12],1.11.a Grothendieck montre, à partir de l'injection du groupe de Brauer cohomologique de A dans celui de K que la réponse est affirmative pour $G = \underline{PGL}_{n/A}$. Plus généralement, étant donné D une algèbre d'Azumaya sur A, semi-local, on peut montrer que l'ensemble $H^1(A,\underline{GL}(D))$ est trivial (on pose ici $\underline{GL}(D) = \underline{GL}_1(D)$, $\underline{PGL}(D) = \underline{PGL}_1(D)$, $\underline{SL}(D) = \underline{SL}_1(D)$). Ceci permet, en utilisant la méthode de [12], d'obtenir une réponse affirmative à la question ($\underline{K}$) pour $G = \underline{PGL}(D)$, et de voir que pour $G = \underline{SL}(D)$, la question ($\underline{K}$) est équivalente à la question : si un élément de A^* est, dans K^*, la norme réduite d'un élément de $(D \otimes_A K)^*$, est-il la norme réduite d'un élément de D^* ?

Par ailleurs, dans [8], Sansuc et l'auteur montrent que la réponse à ($\underline{K}$) est oui pour G un A-tore, et plus généralement pour un A-groupe de type multiplicatif de type fini ([10], VIII-X).

2.2. <u>Liste des résultats connus</u>.

Les assertions du §1 sont vraies au moins dans les cas suivants (($\underline{X}$) varie de ($\underline{A}$) à ($\underline{I}$)) :

a) ($\underline{X}$), donc ($\underline{X}$ bis), pour A anneau de valuation : voir 2.3.1.

b) ($\underline{X}$ bis) pour A anneau régulier : voir 2.3.2.

c) ($\underline{H}$) pour A semi-local régulier : voir 2.3.4.

d) ($\underline{I}$) pour A semi-local régulier : voir §3.

e) ($\underline{X}_3$) pour A semi-local régulier : voir §4.

2.3.1. Soit A un anneau de valuation (Bourbaki, Alg. Comm.Chap. VI, §1). D'après 1.2.b., pour établir ($\underline{X}$), il suffit d'établir ($\underline{A}$). Soit $E = \langle a_1,\dots,a_n \rangle$. S'il existe un n-uplet $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$, non trivial, tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0$, comme A est un anneau de valuation, on peut trouver $y \in K^*$ tel que tous les (yx_i) soient dans A et l'un au moins dans A^*, ce qui établit ($\underline{A}$). Ce résultat, et ses conséquences, sont bien connus : dans [15], §2, Knebusch obtient de plus des résultats dans le cas où 2 n'est pas supposé inversible.

2.3.2. Pour démontrer ($\underline{X}$ bis) pour A régulier, il suffit, par localisation, de le démontrer pour A local régulier, ce qu'on suppose maintenant, en gardant les notations du début de 1.1. Les énoncés ($\underline{A}$ bis), ($\underline{B}$ bis), ($\underline{D}$ bis) sont des cas particuliers de ($\underline{C}$ bis), qui a été démontré par Knebusch ([15],2.3). Quant à ($\underline{G}$ bis), qu'on déduit immédiatement, via le théorème de simplification, de ($\underline{D}$ bis), il est explicité dans [6],2.1. Tous ces résultats reposent sur 2.3.1 et sur un principe simple, qu'on trouvera également utilisé dans [7], 2.1 :

<u>Principe</u>. Pour démontrer un énoncé du type ($\underline{X}$ bis) pour A local régulier, il suffit de le démontrer dans le cas où A est un anneau de valuation discrète, par exemple de connaître ($\underline{X}$) pour tout tel A.

Ceci repose sur la remarque suivante : si A est un anneau local régulier de dimension $d \geq 2$, et t un paramètre régulier de A, définissant l'idéal premier $\underline{p}$ de hauteur 1, l'anneau de valuation discrète $A_{\underline{p}}$ a pour corps des fractions K et pour corps résiduel le corps des fractions de l'anneau local régulier $B = A/\underline{p}$, dont le corps résiduel est encore k, mais dont la dimension est $(d-1)$. Notons de plus, l'hypothèse et la conclusion de ($\underline{X}$ bis) n'étant pas modifiées par complétion, que l'on peut même se limiter au cas A anneau de valuation discrète complet.

2.3.3. Comme le note Knebusch [15], les énoncés du type ($\underline{C}$ bis) sont des généralisations du principe de substitution de Cassels-Pfister (e.g. [19], IX, 1.5). Ce principe vaut donc pour tout point rationnel <u>lisse</u> d'une variété algébrique sur un corps k de caractéristique différente de 2 (pour des précisions en caractéristique 2, cf. [15]) ; dans le cas d'un point rationnel normal non lisse, on obtient facilement des contre-exemples (e.g. [6] 3.2 et [7] 2.1.3), ce qui montre que l'hypothèse de régularité dans la question du titre de ce paragraphe est fondamentale. A ce sujet, il convient de remarquer que l'anneau A localisé à l'origine de l'anneau $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n](x_1^2+\ldots+x_n^2)$ avec $n \geq 5$, qui est l'exemple de Craven-Rosenberg-Ware [6], est non seulement factoriel mais encore géométriquement localement factoriel (cf. définition ci-après) - ceci résulte de la "conjecture de Samuel" démontrée dans [22], XI, 3.14.

<u>Définition</u>. On dit qu'un anneau noethérien B est géométriquement localement factoriel si pour tout idéal premier $\underline{p}$ de B le hensélisé strict de $B_{\underline{p}}$ est factoriel, ce qui équivaut à dire que tout anneau C étale sur B est localement factoriel.

Un anneau régulier est géométriquement localement factoriel (Auslander-Buchsbaum), la réciproque n'étant pas vraie, comme le montre l'exemple ci-dessus.

L'hypothèse A semi-local géométriquement localement factoriel est suffisante pour assurer une réponse affirmative à la question ($\underline{K}$) si $G = \underline{PGL}_{n/A}$ (car dans [12], il est démontré que pour A géométriquement localement factoriel, le groupe de Brauer de A s'injecte dans celui de K), si G est un A-tore ([8]), si $G = \underline{SO}(E)$ où E est un espace quadratique de rang au plus 3 : on verra de façon générale dans le §4 que pour A comme ci-dessus, on a ($\underline{X}_3$). Mais l'exemple de Craven-Rosenberg-Ware montre que cette hypothèse n'est pas en général suffisante. Avec l'anneau en question (avec $n = 5$) dans K on a $-1 = \sum_{i=1}^{4} (x_i/x_5)^2$, et (-1) ne peut être une somme de 4 carrés, ni même une somme de carrés dans A, sinon il le serait dans $\mathbb{R}$. Ceci donne un contre-exemple à ($\underline{B}_4$) et ($\underline{I}$), ainsi qu'à la question sur les normes réduites posée à la fin de 2.1.. Par ailleurs, de l'égalité ci-dessus, on tire facilement (utiliser la multiplicativité de la norme réduite d'une algèbre de quaternions) que les A-espaces $<1,1,1,1>$ et $<-1,-1,-1,-1>$ sont isomorphes sur K, et ils ne sont pas isomorphes sur A comme on le voit par passage au corps résiduel $\mathbb{R}$. Ceci fournit un contre-exemple à $(\underline{D}_4)$. Les contre-exemples à $(\underline{A}_4),(\underline{C}_4),(\underline{E}),(\underline{F}_4),(\underline{G}),(\underline{H}),(\underline{K})$, aux énoncés ($\underline{X}$ bis) se déduisent des précédents. Ceci ôte en particulier tout espoir de ramener par des manipulations du type de celles du §4 ces énoncés pour A local régulier à l'énoncé (K) pour les A-tores, ou à l'injection du groupe de Brauer de A dans celui de K.

2.3.4. L'énoncé ($\underline{H}$) pour A semi-local régulier a été démontré par Craven-Rosenberg-Ware ([6],th.2.4). La démonstration de loc.cit., où le théorème est énoncé seulement dans le cas local, s'étend au cas semi-local : on conjugue ($\underline{G}$ bis) pour A régulier (cf. 2.3.2) et l'implication [($\underline{G}$ bis) pour tout $A_{\underline{p}},\underline{p} \in \mathrm{Spec}A \Rightarrow (H)$], pour A semi-local (connexe), implication qui repose sur le théorème de factorisation de Kanzaki-Kitamura, généralisé par Knebusch au cas semi-local (cf.[13],V,§1), et sur la connaissance des idéaux premiers de W(A) ([16],cf.[13],II,§5). Les assertions sur la torsion résultent de [16],cf.[13],II,§6.

En utilisant un théorème de A. Dress, on voit alors ([6],2.8) que pour A un anneau régulier quelconque, le noyau de $W(A) \to W(K)$ est formé d'éléments nilpotents (mais pas a priori de torsion).

§3. Une version locale du 17ème problème de Hilbert; globalisation.

3.1. Proposition. Supposons A semi-local régulier. Si un élément $a \in A^*$ est une somme de carrés dans K, c'est une somme de carrés dans A.

Il s'agit de l'énoncé ($\underline{I}$) pour A semi-local régulier. Cet énoncé résulte du théorème de Craven-Rosenberg-Ware et de l'implication $(\underline{H}) \Rightarrow (\underline{I})$ pour A semi-local, annoncée en 1.2.c.

Démonstration de cette implication. Comme a est une somme de carrés dans K, c'est une somme de 2^n carrés dans K, pour n entier convenable. La forme de Pfister $<1,1>^{\otimes n} \otimes <1,-a>$ est une forme non dégénérée sur A. En la tensorisant par K sur A, on obtient une forme de Pfister sur K, isotrope, donc hyperbolique (cf.[19],X,1.6). Ainsi l'élément de W(A) que la forme initiale définit a une image nulle dans W(K). D'après ($\underline{H}$), il existe un entier naturel N (en fait une puissance de 2) tel que :

$$N <1,1>^{\otimes n} \sim <a> \otimes [N <1,1>^{\otimes n}]$$

Comme les deux espaces quadratiques ci-dessus ont même rang, le théorème de simplification montre qu'ils sont isomorphes. Comme a est représenté par la forme de droite sur A, il est aussi représenté par la forme de gauche, i.e. c'est une somme de carrés dans A.

Autre démonstration. D'après [17],2.11, l'hypothèse ($\underline{H}$) implique que toute signature sur $W(A)$ est induite par une signature sur $W(K)$, i.e. par un ordre sur le corps K. Comme a est une somme de carrés dans K, ceci implique que pour toute signature σ sur $W(A)$, $\sigma(a) = 1$. D'après [17],4.8, ou [13],II,§7,Th.4, ceci implique que a est une somme de carrés dans A.

3.1.1. Remarque. Si l'on suppose seulement A régulier, non nécessairement semi-local le théorème 2.8 de [6] montre encore qu'il existe N et n comme ci-dessus tels que :

$$N <1,1>^{\otimes n} \sim <a> \otimes [N < 1, 1>^{\otimes n}] \qquad (*)$$

(similitude au sens de [13],I,i.e. isomorphie à addition près d'un espace métabolique). En effet, la classe de $<1,1>^{\otimes n} \otimes <1,-a>$ est nilpotente et appartient au sous-anneau de $W(A)$ engendré par A^*/A^{*2}, sous-anneau qui est un anneau de Witt abstrait ([16],cf.[13],App.3) ; cette classe est donc de torsion 2-primaire (loc. cit.). Malheureusement, on est alors loin de pouvoir conclure à l'isomorphisme des deux espaces de (*) !

3.2. Corollaire. Soit X une $\mathbb{R}$-variété algébrique (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-schéma de type fini) intègre. Soit f un élément non nul du corps des fractions de X. Supposons qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de X tel que $f \in \Gamma(U,\underline{O}_U)$ et, pour tout $P \in U(\mathbb{R})$, $f(P) \geq 0$. Alors, en tout point P lisse de $X(\mathbb{R})$ où f est définie et $f(P) \neq 0$, f est une somme de carrés dans l'anneau local de X en P.

Démonstration. D'après E. Artin ([1],Satz 11), l'hypothèse implique que f est une somme de carrés dans le corps des fractions de X. Pour P comme dans l'énoncé, f est un élément inversible de l'anneau local $\underline{O}_{X,P}$, et, comme cet anneau local est régulier (car P est lisse), il résulte alors de 3.1 que f est une somme de carrés dans $\underline{O}_{X,P}$.

3.3. Remarques.

3.3.1. Dans le corollaire ci-dessus, l'hypothèse de lissité en P est fondamentale, comme le montrent les contre-exemples mentionnés en 2.3.3. Par ailleurs, Choi et Lam ont annoncé un résultat ([5],th.4.3) montrant que l'hypothèse $f(P) \neq 0$ est également nécessaire.

3.3.2. Soit V l'intersection de l'ouvert de lissité de X et de l'ouvert où f est inversible. De l'hypothèse de 3.2 résulte même que pour tout ensemble fini de points (schématiques) inclus dans un ouvert affine de V, on peut écrire f comme une somme de carrés de fonctions rationnelles appartenant aux anneaux locaux de tous ces points. Notons qu'en pratique (cf. les exemples donnés à la suite de Motzkin dans [5]), trouver explicitement une telle écriture est loin d'être facile.

3.3.3. Dans le cas particulier où X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, le corollaire 3.2 est l'une des versions locales du 17ème problème de Hilbert proposées par Swan ([21],§10). Choi-Lam, Prestel et Knebusch ont établi ce cas particulier avec les méthodes de [20] ; ils obtiennent en fait un résultat <u>global</u> (cf. [5],§5, Problem E, et discussion). Ce résultat global vaut lui-même dans un cadre plus large : les deux énoncés qui suivent sont issus d'une discussion avec A. Prestel (juin 1978).

3.4.1. <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> X <u>une $\mathbb{R}$-variété algébrique intègre, affine et lisse, d'anneau</u> A, <u>Soit</u> f <u>dans</u> A, <u>et supposons qu'il existe un ouvert de Zariski non vide</u> U <u>de</u> X <u>tel que, pour tout</u> $P \in U(\mathbb{R})$, <u>on ait</u> $f(P) \geq 0$. <u>Il existe alors</u> $g \in A$ <u>tel que</u> :

(i) $\forall\, P \in X(\mathbb{R})$, $g(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$

(ii) $g^2 f$ <u>est une somme de carrés dans</u> A.

<u>Démonstration</u>. Le Satz 11 d'Artin montre que cet énoncé résulte lui-même du suivant:

3.4.2. <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien régulier intègre, avec</u> $2 \in A^*$, <u>de corps des fractions</u> K, <u>et soit</u> f <u>un élément de</u> A <u>qui est une somme de carrés dans</u> K. <u>Il existe alors un entier</u> $r \geq 0$, <u>et des éléments</u> a_i $(i = 1,\ldots,n)$ <u>et</u> b_j $(j = 1,\ldots,m)$ <u>dans</u> A <u>tels que</u> :

$$(\sum_i a_i^2)\, f = f^{2r} + \sum_j b_j^2$$

<u>Si</u> f <u>est inversible</u>, <u>on peut prendre</u> $r = 0$.

<u>Démonstration</u>. Par passage à l'anneau régulier A_f (f est rendu inversible) on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion concernant le cas f inversible. Notons $QS(A)$ l'ensemble des sommes de carrés dans A. Si f ne s'écrit pas sous la forme $(1 + \Sigma a_i^2)/(\Sigma b_j^2)$ avec a_i, b_j dans A, on a $(-1) \notin P_0 = QS(A) - fQS(A)$ (ensemble des éléments $a - fb$ avec a,b dans $QS(A)$). D'après Prestel ([20], Lemme 1.4), le cône "pré-positif" P_0 de A admet une extension P satisfaisant $P \cup (-P) = A$ et $P \cap (-P) = \underline{p}$ idéal premier propre de A. Par image réciproque sur A, on peut à partir de P définir une structure d'ordre total (notée $<$) sur l'anneau intègre $A/\underline{p}$, puis sur le corps des fractions $\kappa(\underline{p})$ de ce dernier (pour $a \in A$, $a \notin \underline{p}$, la classe $\bar{a}$ de a dans $A/\underline{p}$ satisfait $\bar{a} > 0$ si et seulement si $a \in P$). De $(-f) \in P_0 \subset P$, on tire, f étant inversible, $\bar{f} < 0$. Par ailleurs f est une unité de l'anneau local régulier $A_{\underline{p}}$ qui est une somme de carrés dans le corps des fractions K de $A_{\underline{p}}$; comme (<u>B</u> bis) vaut pour $A_{\underline{p}}$ (cf. 2.2. et 2.3.2), $\bar{f}$ est une somme de carrés dans le corps résiduel $\kappa(\underline{p})$: contradiction.

3.4.3. <u>Remarque</u>. La proposition 3.4.2 redonne la proposition 3.1 , dans le cas où, pour chaque idéal maximal $\underline{m}$ de l'anneau semi-local régulier A, le corps $A/\underline{m}$ est ordonnable ; il ne semble pas que, par cette méthode, on puisse obtenir plus : on n'obtient pas en particulier l'énoncé fort indiqué en 3.3.2. Par contre, on peut obtenir 3.4.2 à partir de 3.1, c'est à dire partiellement globaliser ce dernier résultat. On utilise la remarque simple suivante, que je tiens de J.M. Bony:

3.4.4. Lemme. Soit A un anneau commutatif, $f \in A$. Les ensembles :

$$\underline{a}(f) = \{a \in A \mid \exists n,m \in \mathbb{N},\ \exists x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \in A : (a^2+x_1^2+\dots+x_n^2)f = y_1^2+\dots+y_m^2\}$$

$$\underline{b}(f) = \{b \in A \mid \exists n,m \in \mathbb{N},\ \exists x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \in A : (x_1^2+\dots+x_n^2)f = b^2+y_1^2+\dots+y_m^2\}$$

sont des idéaux de A.

Démonstration. On utilise :

$$2x^2+2y^2 = (x+y)^2 + (x-y)^2 .$$

3.4.5. Autre démonstration de 3.4.2. Comme ci-dessus, on se réduit au cas $f \in A^*$, et $r=0$. Comme f est une somme de carrés dans K, il résulte de 3.1 que pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A, il existe $a \notin \underline{p}$ et $z_1,\dots,z_n \in A$ tels que :

$$a^2 f = z_1^2 +\dots+ z_n^2 .$$

Ainsi, l'un des z_i n'est pas dans $\underline{p}$, et, avec les notations du lemme ci-dessus, on a :

$$\underline{a}(f) \not\subset \underline{p} \quad \text{et} \quad \underline{b}(f) \not\subset \underline{p} .$$

Il résulte donc du lemme que l'on a $\underline{a}(f) = A$ et $\underline{b}(f) = A$, et en particulier des égalités :

$$(1 + \sum_i a_i^2)f = \sum_j b_j^2$$

et

$$(\sum_i c_i^2)f = 1 + \sum_j d_j^2$$

pour a_i,b_j,c_i,d_j dans A, convenables.

3.4.6. Esquissons une troisième démonstration, assez proche, et inspirée de [13], p. 190. Du résultat local, on tire l'existence d'éléments $f_i \in A$ $(i=1,\dots,r)$ tels que chaque $f_i^2 f$ soit une somme de carrés dans A, et que l'on ait $\sum_i f_i = 1$. On montre alors qu'il existe une égalité :

$$(1 + \Sigma a_i^2)f = \Sigma b_j^2$$

en utilisant l'identité suivante, qui généralise celle utilisée pour établir 3.4.4:

$$2^{r-1}(f_1^2 +\dots+ f_r^2) = \sum_{\epsilon} (f_1 + \epsilon_2 f_2 +\dots+ \epsilon_r f_r)^2$$

(où $\epsilon = (\epsilon_2,\dots,\epsilon_r)$ prend toutes les valeurs dans $(\pm 1)^{r-1}$. On conclut en raisonnant sur f^{-1} au lieu de f.

§ 4. Formes quadratiques de petit rang.

4.1. Proposition. Supposons A semi-local géométriquement localement factoriel (cf. 2.3.3). On a alors les énoncés : $(\underline{A}_3)$, $(\underline{B}_3)$, $(\underline{C}_3)$, $(\underline{D}_3)$, $(\underline{E}_3)$, $(\underline{F}_3)$ du §1.

Préliminaire. Comme A est normal, les énoncés $(\underline{X}_1)$ sont satisfaits. D'autre part, les implications établies en 1.2 montrent qu'il suffit, pour avoir les énoncés ci-dessus, de connaître $(\underline{B})$ pour tout espace E de rang 2, et $(\underline{A})$ pour tout espace E de rang 4.

4.2. Démonstration de $(\underline{B})$ pour E de rang 2.

Par diagonalisation et division par une unité, on se ramène à l'énoncé :

4.2.1. Proposition. Soit A comme en 4.1, et soient a et b dans A* tels qu'il existe x et y dans K avec $a=x^2-by^2$. Alors on peut trouver une telle égalité avec x et y dans A.

Si b est un carré dans K, donc dans A, c'est clair. En général, posons $B = A[T]/(T^2-b)$, et $L = K \otimes_A B$. La A-algèbre finie étale B est munie, via l'automorphisme induit par $T \mapsto (-T)$, d'une structure de A-algèbre galoisienne de groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'énoncé est un cas particulier de :

4.2.2. Proposition. Soit A comme en 4.1, soit G un groupe fini, et soit B une A-algèbre galoisienne de groupe G. Notons $L = K \otimes_A B$ l'anneau total de fractions de B, et $N_{B/A}$ (resp. $N_{L/K}$) la norme de B sur A (resp. de L sur K). Si $a \in A^*$ appartient à $N_{L/K}(L^*)$, il appartient à $N_{B/A}(B^*)$.

Note. La suite(*) ci-dessous est en fait scindée (comme suite de G-modules)! Ceci permet, entre autres, de donner une autre démonstration de 4.3.2 : cf. [8].

Démonstration de la proposition. Comme A est semi-local noethérien et B fini sur A, l'anneau B est semi-local, donc de groupe de Picard nul. Notant Div B le groupe des diviseurs de Cartier de B, on a donc la suite exacte de G-modules :

$$1 \to B^* \to L^* \to \mathrm{Div} B \to 1 \qquad (*),$$

où la flèche $L^* \to \mathrm{Div} B$ associe à un élément de L^* son diviseur. L'hypothèse sur A implique, puisque B est étale sur A, que les diviseurs de Cartier sur B s'identifient aux diviseurs de Weil, i.e. au groupe libre sur les idéaux premiers de hauteur 1. Comme G-module, ce groupe est une somme directe de G-modules du type $Z[G/H]$, avec H sous-groupe (variable) de G : pour le voir, il suffit de regrouper les orbites de G dans l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de B. Or on sait (lemme de Shapiro, cf. [4], chap. 4, prop. 6) que le groupe de cohomologie de Tate $\hat{H}^{-1}(G, Z[G/H])$ est nul, et ceci vaut encore pour une somme directe quelconque de tels G-modules. Ainsi, $\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Div}B) = 0$. La suite exacte de cohomologie modifiée définie par (*) donne donc l'injection $\hat{H}^0(G,B^*) \hookrightarrow \hat{H}^0(G,L^*)$, c'est à dire $A^*/N_{B/A}(B^*) \hookrightarrow K^*/N_{L/K}(L^*)$, c.q.f.d.

4.2.3. Remarque.

Supposons pour simplifier B intègre. Dans le cas où G est cyclique, pour établir la proposition, il suffit, la cohomologie d'un groupe cyclique étant de période 2, de montrer que $H^2(G,B^*)$ s'injecte dans $H^2(G,L^*)$, ce qui résulte alors du lemme de Shapiro au niveau H^1 : le groupe $H^1(G,\mathrm{Div}B)$ est nul. On pourrait aussi déduire cette injection de l'injection du groupe de Brauer cohomologique de A dans celui de K, mais ces deux arguments sont très proches : voir [12], §1. Cependant, le passage de H^1 à $\hat{H}^{-1}$ dans la démonstration de 4.2.1 est important : voir [8], où la démonstration de Grothendieck, [12], §1, est reprise et où on obtient l'énoncé (K) pour A comme dans 4.1 et G un A-tore : on obtient comme corollaire que la proposition 4.2.2 vaut encore sous la simple hypothèse que B/A est fini étale (non nécessairement galoisien).

4.3. Démonstration de (A) pour un espace E de rang 4.

L'idée de la démonstration est de reproduire la méthode purement algébrique utilisée dans [4], Exercice 4.4, pour passer du rang 3 au rang 4 dans la démonstration du théorème de Minkowski-Hasse. On a besoin ici du lemme :

4.3.1. Lemme (Hilbert 90). Soit G un groupe fini cyclique de générateur τ. Soit A un anneau semi-local, et soit B une A-algèbre galoisienne de groupe G. Soit ξ un élément de B^* tel que $N_{B/A}(\xi) = 1$. Il existe $u \in B^*$ tel que $\xi = u/\tau(u)$.

Démonstration. Comme A est semi-local, donc de groupe de Picard nul, le théorème de Hilbert 90, sous la forme de Grothendieck, implique que le groupe de cohomologie de Čech ($\check{H}^1(B/A, \mathbb{G}_m)$ est nul, $\mathbb{G}_m$ désignant le groupe multiplicatif. En utilisant l'isomorphisme structural $B \otimes_A B \simeq \prod_{\sigma\in G} B$, on obtient $H^1(G,B^*) = 0$, c'est à dire que tout 1-cocycle $(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ à valeurs dans B^* s'écrit $c_\sigma = u/\sigma(u)$, avec $u \in B^*$. Il suffit alors pour établir le lemme de rappeler que, pour ξ comme dans l'énoncé, il existe un 1-cocycle $(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ satisfaisant $c_\tau = \xi$, à savoir (n désignant l'ordre de τ) :

$$c_{\tau^i} = \prod_{0\leq r\leq i-1} \tau^r(\xi) \quad (1 \leq i \leq n).$$

(On peut aussi bien invoquer la périodicité de la cohomologie de Tate de G pour obtenir $\hat{H}^{-1}(G,B^*)=0$, égalité équivalente à l'énoncé.)

Par ailleurs une réduction simple (diagonalisation et division par une unité) ramène l'énoncé (A) pour un espace de rang 4 à :

4.3.2. Proposition. *Soit* A *comme en* 4.1, *et soient* a,b,c *des éléments de* A^*. *Supposons que la* A-*forme quadratique non dégénérée sur* A^4 :

$$Q(x,y,z,t) = x^2 - by^2 - cz^2 + act^2$$

admette un zéro non trivial dans K. *Alors, pour* A *semi-local géométriquement localement factoriel, cette forme admet un zéro* $(x,y,z,t) \in A^4$ *primitif, i.e. tel que ses coordonnées engendrent* A.

Démonstration. On peut supposer b non carré dans K, sinon $b = \beta^2$, avec β dans A^*, et $(\beta,1,0,0)$ est un zéro primitif. De même, on peut supposer a non carré dans K, sinon $a = \alpha^2$, avec α dans A^*, et $(0,0,\alpha,1)$ est un zéro primitif. Enfin on peut supposer $K(\sqrt{a})$ non K-isomorphe à $K(\sqrt{b})$, sinon, par la théorie de Kummer, on a $a=b\,\gamma^2$ avec γ dans K^*, donc dans A^*. L'élément c de A^* est alors de la forme $N_{K(\sqrt{b})/K}(\xi)$, pour ξ dans $K(\sqrt{b})^*$, donc, d'après 4.2.1, de la forme $\alpha^2-b\beta^2$, avec α et β dans A, et on trouve le zéro primitif $(\alpha,\beta,1,0)$. On peut donc supposer qu'on a le diagramme suivant d'extensions galoisiennes de degré 2 de corps, et d'anneaux semi-locaux réguliers intègres :

$$\begin{tikzcd}
 & K(\sqrt{a},\sqrt{b}) \arrow[dl, dash, "\sigma"'] \arrow[d, dash, "\rho"'] \arrow[dr, dash, "\tau"] & \\
K(\sqrt{a}) \arrow[dr, dash] & K(\sqrt{ab}) \arrow[d, dash] & K(\sqrt{b}) \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A[\sqrt{a},\sqrt{b}] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A[\sqrt{a}] \arrow[dr, dash] & A[\sqrt{ab}] \arrow[d, dash] & A[\sqrt{b}] \arrow[dl, dash] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Le groupe de Galois de $K(\sqrt{a},\sqrt{b})$ sur K est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: notons ρ,σ,τ les éléments non triviaux de ce groupe laissant fixe respectivement $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$. Un zéro non trivial de Q dans K donne $(x,y,z,t) \in K^4$ tel que $0 \neq x^2-by^2 = c(z^2-at^2)$, ce qui implique que c, dans $K(\sqrt{ab})$, est une norme de l'extension $K(\sqrt{a},\sqrt{b})/K(\sqrt{ab})$.

Comme c est dans $A[\sqrt{ab}]^*$, il résulte de 4.2.1 qu'il existe $z \in A[\sqrt{a},\sqrt{b}]^*$ tel que $c=z\,\rho(z)$. Posons $u = \tau(z)/z \in A[\sqrt{a},\sqrt{b}]^*$. En utilisant le fait que $c \in A^*$ est fixe par σ, on obtient $\sigma(u) = u$; ainsi u est dans $A[\sqrt{a}]^*$ (car, par exemple, $A[\sqrt{a}]$ est la clôture intégrale de A dans $K(\sqrt{a})$). On vérifie $u\rho(u)=1$. Utilisant 4.3.1 on trouve $x \in A[\sqrt{a}]^*$ tel que $u=x/\rho(x)$. Posons $y=xz \in A[\sqrt{a},\sqrt{b}]^*$. On vérifie $\tau(y) = y$, donc y appartient à $A[\sqrt{b}]^*$. De plus, on a l'égalité $y\rho(y) = cx\,\rho(x)$, c'est à dire qu'on trouve (α,β) et (γ,δ) dans A^2 avec $\alpha^2-b\,\beta^2$ et $\gamma^2-a\,\delta^2$ dans A^*, tels que :

$$\alpha^2-b\,\beta^2 = c(\gamma^2-a\,\delta^2)$$

Comme $\alpha^2-b\,\beta^2$ appartient à A^*, l'idéal $A\alpha+A\beta$ est égal à A, et le zéro $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de la forme Q est primitif.

4.3.3. Remarques

a) L'énoncé 4.10 de [18] permet de retrouver 4.2.1, mais donne seulement 4.3.2 dans le cas où le produit ab est un carré, cas qui relève de 4.2.1.

b) L'énoncé 4.3.2 peut aussi s'obtenir formellement à partir du résultat de [8] mentionné en 4.2.3 : considérons l'anneau B, produit des anneaux $A[X]/(X^2-b)$ et $A[Y]/(Y^2-a)$, qui est une extension finie étale de A. Si la forme Q a un zéro non trivial $(x,y,z,t) \in K^4$ satisfaisant $(x^2-by^2)(z^2-at^2)\neq 0$ (si on a l'égalité, le résultat est clair), alors

$$c = (x^2-by^2)(z^2-at^2)^{-1}$$

est un élément de A^* qui est la norme, pour l'extension $B\otimes_A K/K$, d'un élément de $(B\otimes_A K)^*$. Ceci implique (loc. cit.) que c'est une norme, pour l'extension B/A, d'un élément de B^*, ce qui permet facilement de conclure. On peut vérifier que la démonstration donnée en 4.3.2 ci-dessus est l'interprétation calculatoire de la démonstration "abstraite" de [8].

c) Utilisant la même idée qu'en b), on peut donner une démonstration (un peu sophistiquée) du principe de Hasse pour les formes quadratiques de rang 4 sur un corps de nombres : soit Q/k une telle forme, qu'on peut supposer donnée par $Q(x,y,z,t) = x^2-by^2-c(z^2-at^2)$, avec $abc \neq 0$. Comme la sous-variété de $\mathbb{A}^4_k$ définie par l'équation $Q = 0$ est lisse en dehors de l'origine, l'existence de zéros non triviaux dans tous les complétés de k implique que la k-variété lisse V définie dans $\mathbb{A}^4_k$ par les équations :

$$x^2-by^2 = c(z^2-at^2) \neq 0$$

a des points rationnels dans tous les complétés de k. Mais V est un espace homogène principal sous le k-tore $T \subset \mathbb{A}^4_k$ défini par les équations :

$$(x^2-by^2) = (z^2-at^2) \neq 0$$

Ce tore est k-birationnellement isomorphe au produit de $\mathbb{A}^1_k$ et de la quadrique lisse de $\mathbb{P}^3_k$ d'équation homogène $x^2-by^2-(z^2-at^2) = 0$, admettant un k-point, donc de corps des fractions transcendant pur sur k : il en est donc de même du corps des fractions de T, ce qui, d'après un théorème de Voskresenskiĭ ([23], Théorème 6) implique que tout espace principal homogène sous T qui est trivial sur chaque complété de k est trivial sur k.

d) Comme cas particulier de 4.1, notons l'énoncé suivant (comparer avec 3.1) :

Soit A semi-local géométriquement localement factoriel, et soit n un entier naturel avec $n \leq 3$. Si $f \in A^*$ est une somme de n carrés dans K, c'est

une somme de n carrés dans A.
Comme déjà indiqué (2.3.3), le contre-exemple de Craven-Rosenberg-Ware montre que cet énoncé ne s'étend pas à $n = 4$. Dans le cas A semi-local <u>régulier</u>, $n = 4$, la question est ouverte ; on pourrait y répondre si l'on savait répondre à la question $(\underline{K})$ pour $G=\underline{SL}(D)$ avec D l'algèbre des quaternions usuels, considérée sur A (cf. 2.1). Enfin, si pour A semi-local régulier, on connaissait seulement $(\underline{F}_{2^m})$, on aurait alors l'énoncé ci-dessus avec $n = 2^m$, par un argument de formes de Pfister analogue à celui donné en 3.1.

4.4. <u>Autres méthodes</u>.

Comme me l'a signalé Serre, on s'attend à obtenir des résultats du type $(\underline{D}_n)$, pour n petit, grâce aux "isomorphismes génériques" de groupes semi-simples (cf. [9], II,9 et IV,8). Je me contenterai ici d'un exemple ; il ne semble pas que par cette méthode on puisse obtenir plus que 4.1.

<u>Autre démonstration de</u> $(\underline{F}_3)$ <u>pour A semi-local géométriquement localement factoriel</u>.

Notons $\underline{SO}_{2n}$ le A-schéma en groupes $\underline{SO}(nH)$. Il faut montrer :
<u>Pour</u> $n = 1,2,3$, <u>l'application naturelle</u> $H^1(A,\underline{SO}_{2n}) \to H^1(K,\underline{SO}_{2n})$ <u>a son noyau trivial</u>.
Le cas $n = 1$ est laissé au lecteur. Pour $n \geq 2$, on a la suite exacte de A-schémas en groupes semi-simples déployés :

$$1 \to \mu_{2/A} \to \underline{Spin}_{2n} \to \underline{SO}_{2n} \to 1 \qquad (*)$$

4.4.1. Pour A comme ci-dessus, et $n \geq 2$, la question $(\underline{K})$ pour $\underline{SO}_{2n}$ est équivalente à la question $(\underline{K})$ pour $\underline{Spin}_{2n}$.

En effet, de la suite exacte (*), on tire le diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés ([11]) :

$$\begin{tikzcd}
\underline{SO}_{2n}(A) \arrow[r] \arrow[d] & A^*/A^{*2} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(A,\underline{Spin}_{2n}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(A,\underline{SO}_{2n}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(A,\mu_2) \arrow[d] \\
\underline{SO}_{2n}(K) \arrow[r] & K^*/K^{*2} \arrow[r] & H^1(K,\underline{Spin}_{2n}) \arrow[r] & H^1(K,\underline{SO}_{2n}) \arrow[r] & H^2(K,\mu_2)
\end{tikzcd}$$

Comme A est semi-local, donc PicA=0, la suite exacte de Kummer et l'injection $BrA \hookrightarrow BrK$ montrent que la flèche verticale de droite est injective. Par ailleurs, les flèches horizontales de gauche ne sont autres que la norme spinorielle, laquelle est surjective au niveau K comme au niveau A, comme le montre l'argument de [9], II,8 : l'élément de $\underline{SO}_{2n}(A)$ défini dans la base naturelle par la matrice $(a \in A^*)$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & & & \\ 0 & a^{-1} & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

a pour norme spinorielle la classe de a dans A^*/A^{*2}. Ceci établit 4.4.1.

4.4.2. Pour $n = 2,3$ et A semi-local, $H^1(A,\underline{Spin}_{2n}) = 0$.
En effet, on a les isomorphismes de A-schémas en groupes :

$$\underline{Spin}_4 \simeq \underline{SL}_2 \times \underline{SL}_2$$

$$\underline{Spin}_6 \simeq \underline{SL}_4$$

L'énoncé résulte alors de l'énoncé analogue pour $\underline{SL}_n$, pour tout n. On obtient l'assertion initiale en combinant 4.4.1 et 4.4.2.

REFERENCES

[1] ARTIN E., Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Hamb. Abh. (1927), s.100-115.

[2] Anneaux de Chow. Séminaire Chevalley, E.N.S. Paris, 1958, distribué par l'Institut Henri Poincaré.

[3] BAEZA R. und KNEBUSCH M., Annullatoren von Pfisterformen über semilokalen Ringen. Math. Z. 140, s.41-62 (1974).

[4] Algebraic Number Theory, edited by J.W.S. CASSELS and A. FRÖLICH, Academic Press, 1967.

[5] CHOI M.D. and LAM T.Y., An old question of Hilbert, in Conference on quadratic forms, 1976, Queen's papers in pure and applied mathematics, n°46 (1977).

[6] CRAVEN T.C., ROSENBERG A., WARE R., The map of the Witt ring of a domain into the Witt ring of its field of fractions. Proc. A.M.S. Vol. 51, n°1, p. 25-30, 1975.

[7] COLLIOT-THELENE J.L., Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques. Bull. Soc. Math. France (1978).

[8] COLLIOT-THELENE J.L. et SANSUC J.J., Propriétés cohomologiques des tores sur un schéma régulier. En préparation.

[9] DIEUDONNE J., La géométrie des groupes classiques, 3ème édition, Ergeb.d. Math.u.ihr.Grenzg.Band 5, Springer-Verlag, 1971.

[10] DEMAZURE M. et GROTHENDIECK A., SGA 3, Schémas en groupes. Lecture Notes in Math. 151,152,153, Springer-Verlag 1970.

[11] GIRAUD J., Cohomologie non abélienne. Grundlehren der Math. Wiss. 179, Springer-Verlag, 1971.

[12] GROTHENDIECK A., Le groupe de Brauer II, Séminaire Bourbaki 297 (1965) publié dans : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1968.

[13] KNEBUSCH M., Symmetric Bilinear Forms over Algebraic Varieties. In Conference on quadratic forms, 1976, Queen's papers in pure and applied mathematics, n° 46 (1977).

[14] KNEBUSCH M., Isometrien über semilokalen Ringen. Math.Z.108 (1969) 255-268.

[15] KNEBUSCH M., Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. Acta Arithmetica, XXIV, (1973) 279-299.

[16] KNEBUSCH M., ROSENBERG A., WARE R., Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings, Amer. J. Math. 94 (1972) 119-155.

[17] KNEBUSCH M., ROSENBERG A., WARE R., Signatures on semi-local rings, J.Algebra 26 (1973) 208-250.

[18] KNUS M.A., OJANGUREN M., SRIDHARAN R., Quadratic forms and Azumaya algebras. Preprint, ETH Zürich, 1977.

[19] LAM T.Y., The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.

[20] PRESTEL A., Lectures on formally real fields. I.M.P.A. Rio-de-Janeiro, 1975.

[21] SWAN R.G., Topological Examples of Projective Modules. Trans. Am. Math.Soc. 230 (1977) 201-234.

[22] GROTHENDIECK A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[23] VOSKRESENSKII V.E., Propriétés birationnelles des groupes algébriques linéaires. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Tom 34 (1970), n°1. Trad. ang.Math. USSR-Izvestija Vol. 4 (1970), n°1.

Note sur le §3. En utilisant la même idée de Prestel, F. LORENZ obtient dans "Quadratische Formen und die Artin-Schreiersche Theorie der formal reellen Körper", Bull. Soc. Math. France, Mémoire 48, 1976, p. 61-73, un résultat plus fort que l'énoncé 3.4.1 : son Zusatz zu Satz 9 permet de traiter le cas de variétés singulières ; par ailleurs les phénomènes liés à l'existence de points réels isolés sont étudiés par G. EFROYMSON dans "Local reality on algebraic varieties", J. of Algebra, t. 29, 1974, p. 133-142.

J.L. COLLIOT-THELENE
81, Avenue du Général Leclerc
75014 PARIS