BERNARD DE MATHAN

Approximations diophantiennes dans un corps local

Mémoires de la S. M. F., tome 21 (1970)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1970__21__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 21, 1970, 93 p.

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES DANS UN CORPS LOCAL

par

Bernard de MATHAN (*)

-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

(*) Thèse Sc. math. Caen, 1968.

CHAPITRE IV

Approximation diophantienne par les fractions rationnelles dans un corps de séries formelles

-:-:-:-

Introduction et Notations

(CHAPITRE O)

1. - Il y a deux sortes de "corps avec la formule du produit" ([2]), les extensions algèbriques de degré fini du corps Q des rationnels et les extensions algébriques de degré fini du corps K(T) des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps K , et dans ce dernier cas, si l'on veut avoir des complétés localement compacts, K doit être un corps fini. Le but de ce travail est essentiellement d'obtenir quelques résultats d'arithmétique diophantienne en remplaçant Q , et ses complétés R et Q_p , par le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps, le plus souvent fini, et les complétés d'un tel corps.

Soit K un corps. Nous désignerons par $\mathcal{J}$ l'anneau K[T] des polynômes à une indéterminée sur K et par $\mathcal{R}$ le corps K(T) des fractions rationnelles. Les valuations non triviales de $\mathcal{R}$ qui induisent la valuation triviale sur K sont les suivantes : tout d'abord, la valuation dite "O-adique" définie par :

$$w_o(f) = - \deg f \quad ,$$

si f est un polynôme non nul, dont deg f désigne le degré (on note f au lieu de f(T) pour simplifier l'écriture). Autrement dit, pour tout couple (f,g) de polynômes non nuls :

$$w_o\left(\frac{f}{g}\right) = \deg g - \deg f \quad .$$

D'autre part, si P est un polynôme sur K , irréductible, unitaire (non constant), la valuation P-adique sur $\mathcal{R}$ est définie sur $\mathcal{J}$ par $w_P(P^{\alpha}f) = \alpha$, pour tout entier rationnel non négatif α , et tout polynôme f , premier avec P .

Ces valuations sont de cette manière (*) en correspondance bijective avec le spectre de $\mathcal{J}$, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{J}$. (On considérera que le spectre de $\mathcal{J}$ est formé de l'élément O et des polynômes irréductibles unitaires). Remarquons que si K est un corps fini, on a ainsi toutes les valuations non triviales de $\mathcal{R}$.

(*) Ceci est évidemment assez artificiel, tout au moins en ce qui concerne la valuation "O-adique", et n'intervient qu'en tant que notation.

Ces valuations sont discrètes, à groupe de valeurs Z . Le corps résiduel pour la valuation 0-adique est K , et pour la valuation P-adique, le corps $\frac{K(T)}{P.K(T)}$. On normalisera donc les valeurs absolues associées en posant : $|f|_0 = a^{\deg f}$ ($f \in \mathcal{Z}$; $f \neq 0$ où a est un nombre réel supérieur à 1 , et $|P|_P = \frac{1}{|P|_0}$. Lorsque K est le corps fini à q éléments, on choisira $a = q$.

On désignera par $\mathcal{R}_0$, resp $\mathcal{R}_P$, les complétés de $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}_0$ s'identifie au corps $K\{T^{-1}\}$ des séries de Laurent formelles de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n T^{-n}$; $a_n \in K$, et $(a_n)_{n<0}$ presque tous nuls (nuls sauf un nombre fini d'entre eux) ; comme $\mathcal{R}_P$ ($P \neq 0$) possède un corps de représentants, il est aussi isomorphe à un corps de séries formelles (sur $\frac{K(T)}{P\,K(T)}$). Mais pour ce que nous ferons, il sera plus commode d'utiliser le développement de Hensel, avec, comme système de représentants, le groupe additif des polynômes de degré inférieur à deg P et l'uniformisante P , tout élément $x \in \mathcal{R}_P$ s'écrivant alors de façon unique :

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n P^n \ ; \ A_n \in \mathcal{Z} \, , |A_n|_0 < |P|_0 \quad ; \ (A_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls.}$$

Nous désignerons par $\mathcal{Z}_0$ (resp. $\mathcal{Z}_P$) l'anneau de valuation de $\mathcal{R}_0$ (reps. $\mathcal{R}_P$), et par $\mathfrak{m}_0$ (resp. $\mathfrak{m}_P$), l'idéal maximal de $\mathcal{Z}_0$ (resp. $\mathcal{Z}_P$).

Dans le cas où $K = F_q$, corps fini à q éléments, nous mettrons $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_P$ à la place de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_P$. Les complétés $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_P$ sont localement compacts. La mesure de Haar sur $\mathfrak{F}_0^+$ (resp. $\mathfrak{F}_P^+$) sera normalisée -sauf mention explicite du contraire- de façon que la mesure d'un disque soit égale à son rayon (par rayon d'un disque, nous entendons le rayon "exact", c'est-à-dire que le rayon du disque $D \subset \mathfrak{F}_0$: $D = \{x \mid |x-x_0|_0 \leq q^{-N}\}$ (resp. $D \subset \mathfrak{F}_P$; $D = \{x \mid |x-x_0|_P \leq |P|_0^{-N}\}$) est q^{-N} (resp. $|P|_0^{-N}$) ; par ailleurs le mot disque, signifiera toujours disque de rayon fini).

Précisons encore que par caractère d'un groupe abélien localement compact G , nous entendrons toujours homomorphisme continu de G dans le groupe multiplicatif T des nombres complexes de valeur absolue 1 , et nous désignerons par $\hat{G}$ le dual de G , c'est-à-dire le groupe des caractères de G , muni de la topologie de la convergence compacte. La notation $\mathbb{N}$ désignera l'ensemble des entiers naturels ($0 \in \mathbb{N}$) et $\mathbb{N}^* = N-\{0\}$. Les suites seront le plus souvent indexées sur $\mathbb{N}^*$.

2. - La décomposition d'Artin

Nous utiliserons la décomposition d'Artin sous la forme suivante : le groupe additif $\mathfrak{K}_0$ est somme directe -algébriquement et topologiquement- du sous-groupe discret $\mathfrak{Z}^+$ et du sous-groupe $\mathfrak{M}_0^+$

$$\mathfrak{K}_0^+ = \mathfrak{Z}^+ \oplus \mathfrak{M}_0^+$$

On désigne par E_0 et $\mathcal{H}_0$ respectivement les projections associées sur les facteurs $\mathfrak{Z}^+$ et $\mathfrak{M}_0^+$ (partie entière, partie fractionnaire). Pour tout élément $x \in \mathfrak{K}_0$, $E_0(x)$ est défini comme l'unique polynôme tel que $|x-E_0(x)|_0 < 1$ et $\mathcal{H}_0(x) = x-E_0(x)$.

Soit maintenant P un polynôme unitaire irréductible sur K. Soit $\mathfrak{Z}[1/_P]$ le sous-anneau de $\mathfrak{K}$ engendré par $\mathfrak{Z}$ et $1/_P$, qui est formé des fractions rationnelles de la forme $f/_{P^n}$ ($f \in \mathfrak{Z}$; $n \in \mathbb{N}$), et posons $\mathcal{J}_P = \mathfrak{Z}[1/_P] \cap \mathfrak{M}_0$.
Le développement de Hensel montre qu'on a la décomposition en somme directe -algébrique et topologique-

$$\mathfrak{K}_P^+ = \mathcal{J}_P^+ \oplus \mathfrak{Z}_P^+$$

de $\mathfrak{K}_P^+$ en somme du sous-groupe discret $\mathcal{J}_P^+$ et du sous-groupe $\mathfrak{Z}_P^+$. On désigne par $\mathcal{H}_P$ et E_P les projections associées sur les facteurs $\mathcal{J}_P^+$ et $\mathfrak{Z}_P^+$ respectivement. Pour tout élément $x \in \mathfrak{K}_P$, $\mathcal{H}_P(x)$ est l'unique élément de $\mathcal{J}_P$ tel que $|x-\mathcal{H}_P(x)|_P \leq 1$ et $E_P(x) = x-\mathcal{H}_P(x)$. Remarquons que $\mathcal{J}_P$ est discret dans $\mathfrak{K}_P$, mais dense dans $\mathfrak{M}_0$.

Ce travail est axé principalement sur le théorème de Koksma pour divers types de répartition dans un corps local, localement compact ou d'autres résultats métriques de répartition.

La notion d'équirépartition modulo 1 dans $\mathfrak{F}_0$ a été introduite par L. CARLITZ ([8]). Au chapitre 1, nous proposons diverses extensions de cette notion (en particulier aux $\mathfrak{F}_P$), et également d'autres notions qui lui sont liées. Nous donnons une forme du théorème de Koksma qui s'applique à toutes ces notions de répartition, et plus généralement à tout corps local localement compact L, avec un homomorphisme continu θ de L^+ dans un groupe abélien métrique compact M, tel que l'image de θ soit dense dans M, généralisant ainsi le résultat dans Q_p de F. Bertrandias. Cela permet l'étude des suites $(\lambda x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(\lambda \neq 0,\ |x| > 1)$. L'élément x étant donné, la suite $(\theta(\lambda x^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie dans le groupe compact M pour presque tout λ (au sens de la mesure de Haar de L^+).

Il en est de même lorsque l'on fixe $\lambda \neq 0$, pour presque tout x tel que $|x| > 1$, si L est de caractéristique nulle. Au contraire, si L est de caractéristique $p \neq 0$, pour λ fixé non nul, la suite $(\theta(\lambda x^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour presque tout x la mesure de répartition dans M : $\mu_\lambda = (1-\frac{1}{p}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu_{s,\lambda}}{p^s}$ où $\mu_{s,\lambda}$ est la mesure de Haar du sous-groupe $\theta(\lambda L^{p^s})$ de M .

Dans le chapitre 2, on s'intéresse plus particulièrement à la répartition mod 1 dans $\mathfrak{F}_0$ -bien qu'une plus grande généralité eût été possible sans difficulté supplémentaire, autre que de rédaction- . Essentiellement, on considère des ensembles de Cantor $C(\theta;\mu) = \{\mu \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \theta^{-n} ; \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$, où $|\theta|_0 > 1$, et $\mu \neq 0$. Contrairement à ce qui se passe pour les ensembles de Cantor réels, ces ensembles sont toujours d'unicité (sauf le cas exceptionnel où ils sont ouverts). Cependant, les résultats de M. Mendès-France sur la répartition mod.1 des suites $(x\,\theta^n)_{n>0}$ lorsque x appartient à un ensemble de Cantor à rapport $1/\theta$, s'étendent bien, et moyennant une condition très simple sur la suite $(\mu\,\theta^n)_{n>0}$ (de "densité suffisante" mod. 1), la suite $(x\,\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie mod. 1 pour presque tout $x \in C(\theta;\mu)$ au sens de la mesure sur $C(\theta;\mu)$ obtenue par transport de la mesure de Haar de $(\mathbb{Z}/_2)^{\mathbb{N}}$. Si au contraire la suite $(\mu\,\theta^n)_{n>0}$ tend vers 0 mod. 1 , on trouve une nouvelle mesure de répartition mod. 1 pour la suite $(x\,\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour presque tout x , répartition qu'on a en particulier si $x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \theta^{-n}$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément normal de $(\mathbb{Z}/_2)^{\mathbb{N}}$. On précise un résultat de M.Mendès-France en montrant qu'il en est également ainsi dans $\mathbb{R}$ si la suite $(\mu\,\theta^n)_{n>0}$ tend assez vite vers 0 mod. 1 .

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des approximations diophantiennes par les éléments d'une suite dans un espace métrique compact. On introduit la notion de suite fortement eutaxique (terminologie empruntée à J. Lesca, qui introduit une notion voisine), caractérisée par des propriétés de régularité sur les approximations diophantiennes aux quelles elle donne lieu. On montre en premier lieu que, dans un espace ultramétrique compact, une suite "suffisamment bien répartie" est fortement eutaxique. Puis on examine dans cette optique les suites de puissances $(\lambda\,x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathfrak{F}_0$ par exemple. Il semble peu probable que ces suites puissent être fortement eutaxiques pour presque tout λ ou presque tout x , cependant, on montre le résultat suivant : soit $([\alpha_n, \beta_n[\,)$ une suite d'intervalles contenus dans $[0,1[$, telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n)$ soit divergente :

alors pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. presque tout $x \in \mathbb{R} - [-1,+1]$) le nombre entiers n tels que $1 \leq n \leq N$ et $\{\lambda x^n\} \in [\alpha_n, \beta_n[$ est équivalent à $\sum_{n=1}^{N} (\beta_n - \alpha_n)$.

On obtient d'ailleurs en réalité une estimation plus précise. D'autre part, ce résultat est valable plus généralement en considérant une suite $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions, astreintes à certaines conditions. On a aussi un résultat analogue dans $\mathfrak{F}_o$.

Dans le chapitre 4, se trouvent l'étude du développement en fraction continue dans un corps de séries formelles, et l'équivalent du théorème métrique de Khintchine. Ces résultats, très simples, sont peut-être plus ou moins connus. Cependant, en raison de leur utilité en approximation diophantienne, il nous a semblé intéressant d'en donner une rédaction.

-:-:-:-

Monsieur le Professeur APERY m'a engagé à entreprendre ce travail, et a dirigé cette thèse, m'aidant de ses conseils et de sa documentation. Je lui exprime ici ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur PISOT a bien voulu s'intéresser à mon travail, et m'a ouvert les portes de son séminaire parisien, qui a été pour moi une source de contacts féconds. Il me fait l'honneur de participer au Jury de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Madame le Professeur AMICE m'a donné de nombreux et utiles conseils, et ses remarques m'ont permis d'améliorer ma rédaction. Je la remercie vivement.

Monsieur le Professeur CAMPBELL a bien voulu me donner le second sujet, et m'a guidé dans sa préparation avec gentillesse et bienveillance. Je le prie d'accepter mes sincères remerciements.

-:-:-:-

CHAPITRE I

Répartition dans $\mathfrak{F}_o$, $\mathfrak{F}_p$ - Le théorème de Koksma

1 - La notion de répartition d'une suite.

Soit X un espace topologique compact. Nous dirons qu'une mesure sur X est normale si elle est positive et de masse totale 1.

Rappelons la définition suivante :

Définition 1 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de X, et soit pour toute fonction complexe sur X, f, $(M_N(f))_{N \in \mathbb{N}^*}$ la suite des moyennes :

$$M_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n)$$

Etant donnée une mesure normale μ sur X, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dite μ- répartie si pour toute fonction $f \in C(X)$, espace des fonctions complexes continues sur X, on a :

$$\lim_{N \to \infty} M_N(f) = \mu(f)$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'étant donnée une partie $V \subset C(X)$, engendrant un sous-espace vectoriel dense de $C(X)$ (pour la topologie de la convergence uniforme sur X), on ait $\lim\limits_{N \to \infty} M_N(f) = \mu(f)$ pour toute fonction $f \in V$.

Pour tout ensemble $A \subset X$, et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit $\nu(A ; N)$ le nombre d'entiers n tels que $1 \leq n \leq N$ et $u_n \in A$. Autrement dit, $\frac{\nu(A ; N)}{N}$ est la moyenne $M_N(\varepsilon_A)$ de la fonction caractéristique ε_A de A.

Proposition 1. - Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit μ-répartie. On a alors :

$$\mu(\mathring{A}) \leq \liminf \frac{\nu(A;N)}{N} \leq \limsup \frac{\nu(A;N)}{N} \leq \mu(\overline{A})$$

Preuve. Comme $\mu(\overset{\circ}{A}\,;N) \leq \nu(A;N) \leq \nu(\bar{A};N)$, il suffit de démontrer que si A est fermé, on a $\limsup \frac{\nu(A;N)}{N} \leq \mu(A)$.

En remplaçant A par son complémentaire, on en déduira que si A est ouvert $\liminf \frac{\nu(A;N)}{N} \geq \mu(A)$.

Supposons donc A fermé. Pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction $f \in C(X)$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in A$ et que :

$$\mu(A) \leq \mu(f) \leq \mu(A) + \eta$$

Mais

$$\frac{\nu(A;N)}{N} \leq M_N(f) \text{ , donc } \limsup \frac{\nu(A;N)}{N} \leq \mu(f) \text{ ,}$$

Rappelons qu'un ensemble $A \subset X$ est dit μ-quarrable si sa frontière est μ-négligable. Naturellement, un tel ensemble est à fortiori μ-intégrable. On peut montrer qu'il existe dans X une base d'ouverts quarrables. (cf. Bourbaki, intégration, chap. 4 § 5 , exercice 17 ; ce résultat est d'ailleurs trivial dans le cas où X est totalement discontinu, ce qui sera généralement le cas dans ce travail).

Rappelons alors que :

Proposition 2. - Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de X est μ-répartie si et seulement si on a $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \nu(A;N) = \mu(A)$ pour tout ensemble $A \subset X$, μ-quarrable. Il suffit qu'il en soit ainsi pour une famille d'ensembles μ-quarrables contenant une base de voisinages de tout élément $x \in X$.

Preuve. La condition nécessaire résulte immédiatement de la proposition 1 . Inversement, soit $\mathcal{B}$ une famille d'ensembles μ-quarrables contenant une base de voisinages de tout point de X . Pour toute fonction $f \in C(X)$, et tout $\eta > 0$, il existe une famille finie d'ensembles $A_1,\ldots,A_k$ appartenant à $\mathcal{B}$, et des nombres complexes $\lambda_1 , \ldots ,\lambda_k$, tel que :

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varepsilon_{A_i} \right\| \leq \eta$$

($\|\cdot\|$ désignant la norme de la convergence uniforme, et ε_{A_i} étant la fonction caractéristique de A_i).

On a alors :

$$\left|\mu(f) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \; \mu(A_i)\right| \leq \eta$$

et pour tout N :

$$\left|M_N(f) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \; \frac{\nu(A_i;N)}{N}\right| \leq \eta$$

Pour N suffisamment grand, on aura :

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\nu(A_i;N)}{N} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \mu(A_i)\right| \leq \eta$$

et par suite

$$|M_N(f) - \mu(f)| \leq 3\eta$$

ce qui montre que :

$$\lim_{N\to\infty} M_N(f) = \mu(f)$$

Lorsque X est un <u>groupe topologique abélien</u>, <u>compact</u>, G, la densité des polynômes trigonométriques conduit au résultat suivant :

<u>Proposition 3</u>. - <u>(Critère de Weyl)</u> <u>Une suite</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>d'éléments de</u> G <u>est</u> μ-<u>répartie si et seulement si</u> :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(u_n) = \hat{\mu}(\chi)$$

<u>pour tout</u> $\chi \in \hat{G}$, $\hat{\mu}$ <u>désignant la transformée de Fourier de</u> μ :

$$\hat{\mu}(\chi) = \int \chi(x) \, d\mu(x)$$

De façon plus précise, si pour tout $\chi \in \hat{G}$, $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(u_n)$ a une limite $\alpha(\chi)$ pour N infini, α est nécessairement la transformée de Fourier d'une mesure normale μ sur G, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est μ-répartie.

Lorsque μ est <u>la mesure de Haar</u> de G (normale), une suite μ-répartie est dite <u>équirépartie</u>.

La condition du critère de Weyl est dans ce cas :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(u_n) = 0 \qquad \text{pour tout } \chi \in \hat{G} \, , \; \chi \neq 1$$

2 - Répartition dans un groupe profini.

Soit G un groupe abélien, et soit H un sous-groupe de G, d'indice fini. Désignons par π_H la surjection canonique $G \to G/_H$. Etant donnée une mesure λ sur le groupe fini $G/_H$, nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de G est λ-répartie mod H si la suite $(\pi_H(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est λ-répartie dans $G/_H$.

Supposons que G soit un groupe topologique abélien, profini, c'est-à-dire compact, et possédant une base $\mathcal{B}$ de voisinages de 0 formée de sous-groupes (nécessairement ouverts et fermés et d'indices finis). Soit μ une mesure normale sur G et pour sous-groupe $H \in \mathcal{B}$, soit μ_H la mesure quotient sur $G/_H$, c'est-à-dire la mesure définie par :

$$\mu_H(\varphi) = \mu(\varphi \circ \pi_H) \quad \text{pour toute fonction complexe sur } G/_H$$

ou encore

$$\mu_H(\{\pi_H(a)\}) = \mu(a+H) \quad \text{pour tout } a \in G$$

Comme l'espace des fonctions complexes localement constantes sur G est dense dans l'espace des fonctions continues (pour la topologie de la convergence uniforme), on voit que pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de G soit μ-répartie, il faut et il suffit que pour tout $H \in \mathcal{B}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit μ_H répartie mod H.

Inversement, soit G un groupe abélien quelconque, et supposons donnée une famille $\mathcal{B}$ de sous-groupes de G d'indices finis, filtrante et séparante (c'est-à-dire que pour $H \in \mathcal{B}$, $L \in \mathcal{B}$, il existe $M \in \mathcal{B}$ tel que $M \subset H \cap L$ et $\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = \{0\}$). Pour tout couple (H,L) d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que $H \subset L$, soit $\pi_{L,H}$ l'homomorphisme de $G/_H$ sur $G/_L$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & G/_H \arrow[d, "\pi_{L,H}"] \\
G \arrow[ur, "\pi_H"] \arrow[dr, "\pi_L"'] & \\
 & G/_L
\end{tikzcd}$$

Supposons donnée pour tout $H \in \mathcal{B}$, une mesure normale μ_H sur $G/_H$. Il ne peut exister de suite d'éléments de G, μ_H-répartie mod H pour tout H, que si la famille (μ_H) satisfait à la condition suivante (système projectif de mesures) :

(ℓ.p.) Pour tous H,L de $\mathcal{B}$ tels que $H \subset L$, et pour toute fonction complexe φ sur $G/_L$:

$$\mu_L(\varphi) = \mu_H(\varphi \circ \pi_{L,H})$$

ou encore : pour tout $\alpha \in G/_L$:

$$\mu_L(\{\alpha\}) = \mu_H(\pi^{-1}_{L,H}(\alpha))$$

Mais soit Γ le groupe topologique limite projective du système projectif de groupes topologiques $(G/_H, \pi_{L,H})_{H \in \mathcal{B}}$ (avec la topologie discrète sur les $G/_H$). Γ est compact. G s'injecte dans Γ par l'homomorphisme $i = \varprojlim \pi_H$, c'est-à-dire

$$i(x) = (\pi_H(x))_{H \in \mathcal{B}} \qquad \text{pour tout } x \in G$$

i est un homéomorphisme de G sur $i(G)$, lorsqu'on munit G de la topologie pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base de voisinages de 0, et $i(G)$ de la topologie induite par celle de Γ. $i(G)$ est dense dans Γ, qui apparaît donc comme le complété de G. On considérera G comme contenu dans Γ. On a $G/_H = \Gamma/_{\overline{H}}$. Nous désignerons par pr_H la projection $\Gamma \to G/_H$ qui n'est autre que la surjection canonique $\Gamma \to \Gamma/_{\overline{H}}$, π_H apparaissant alors comme la restriction de pr_H à G.

Etant donnée une famille de mesures (μ_H) sur les $G/_H$, satisfaisant à la condition (ℓ,p), il existe une mesure unique μ sur Γ, telle que pour tout $H \in \mathcal{B}$, μ_H soit la mesure quotient de μ sur $\Gamma/_{\overline{H}}$ ($= G/_H$), c'est-à-dire que :

$$(1) \qquad \mu_H(\varphi) = \mu(\varphi \circ pr_H)$$

pour toute fonction complexe φ sur $G/_H$ (limite projective des mesures μ_H) ; cela est bien évident ici car les conditions (1) et (ℓ,p) définissent la restriction de μ à l'espace des fonctions localement constantes sur Γ, qui est dense dans l'espace des fonctions continues. On voit alors que pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de G soit μ_H-répartie mod H pour tout $H \in \mathcal{B}$, il faut et il suffit qu'elle soit μ-répartie (comme suite d'éléments de Γ).

Naturellement, la famille (μ_H) des mesures de Haar des $G/_H$ est un système projectif de mesures, dont la limite projective est la mesure de Haar de Γ. On remplace dans ce cas les locutions μ-répartie ou μ_H-répartie par équirépartie.

3 - Répartition dans $\mathfrak{F}_o$, $\mathfrak{F}_p$

3.1. - Répartition mod 1 dans $\mathfrak{F}_o$

Définition 2 : Soit μ une mesure normale sur $\mathfrak{M}_o$. Une suite $(u_n)_{n \in N^*}$ d'éléments de $\mathfrak{F}_o$ est dite μ-répartie mod 1 si la suite $(\mathcal{H}_o(u_n))_{n \in N^*}$ est μ-répartie dans $\mathfrak{M}_o$.

Puisqu'un disque de $\mathfrak{M}_o$ est ouvert et fermé, cela revient à dire que pour tout disque $D \subset \mathfrak{M}_o$, si on désigne par $\nu(D;N)$ le nombre d'entiers n tel que $1 \leq n \leq N$ et que $\mathcal{H}_o(u_n) \in D$, on a :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \nu(D;N) = \mu(D)$$

Pour écrire le critère de Weyl, nous cherchons les caractères du groupe $\mathfrak{M}_o^+$
Nous désigons par χ_o le caractère de $\mathfrak{F}_o^+$ ainsi construit : on se donne un caractère $\varkappa \neq 1$ de F_q^+ et χ_o est alors défini par :

$$\chi_o\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^{-n}\right) = \varkappa(a_1)$$

($a_n \in F_q$; $(a_n)_{n<0}$ presque tous nuls).
On a alors :

Proposition 4. - L'application de $\mathfrak{F}_o^+$ dans son dual $\hat{\mathfrak{F}}_o$: $u \to \chi_u$ où χ_u est le caractère de $\mathfrak{F}_o^+$ défini par : $\chi_u(x) = \chi_o(u\,x)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{F}_o^+$ sur $\hat{\mathfrak{F}}_o$.
L'application de $\mathcal{Z}^+$ dans le dual $\hat{\mathfrak{M}}_o$ de $\mathfrak{M}_o^+$: $f \to \chi_f : \chi_f(x) = \chi_o(f\,x)$ est un isomorphisme de $\mathcal{Z}^+$ sur $\hat{\mathfrak{M}}_o$.
(Ces isomorphismes sont aussi topologiques ; naturellement, $\mathcal{Z}^+$ et $\hat{\mathfrak{M}}_o$ sont discrets).

Preuve. La première partie est bien connue ([7]) (et d'ailleurs facile à vérifier directement ici). Pour la seconde partie, la décomposition en somme directe $\mathcal{F}_o^+ = \mathcal{Z}^+ \oplus \mathfrak{M}_o^+$ permet d'identifier $\hat{\mathfrak{M}}_o$ au sous-groupe de $\hat{\mathcal{F}}_o$, $\mathcal{Z}^\perp$, orthogonal de $\mathcal{Z}$. On doit donc démontrer que $\chi_u \in \mathcal{Z}^\perp$ si et seulement si $u \in \mathcal{Z}$. Comme $\chi_o(g) = 1$ pour tout $g \in \mathcal{Z}$, il est clair que si $u \in \mathcal{Z}$, $\chi_u \in \mathcal{Z}^\perp$. Inversement, soit $u \notin \mathcal{Z}$:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^{-n}$$

Il existe un entier $n > 0$ tel que $a_n \neq 0$, et un élément $b \in F_q$ tel que $\varkappa(a_n b) \neq 1$. Alors $\chi_o(u\, b\, T^{n-1}) = \varkappa(a_n b) \neq 1$, donc $\chi_u \notin \mathcal{Z}^\perp$

On en déduit immédiatement :

Proposition 5. - (Critère de Weyl). Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}_o$ soit μ-répartie mod 1, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_o(f\, u_n) = \hat{\mu}(f)$$

pour tout $f \in \mathcal{Z}$, $\hat{\mu}$ désignant la transformée de Fourier de μ :

$$\hat{\mu}(f) = \int_{\mathfrak{M}_o} \chi_o(f\, x)\, d\mu(x)$$

3.2. - Répartition mod $1/_f$ dans $\mathfrak{M}_o$ et répartition mod f dans $\mathcal{Z}$

$\mathfrak{M}_o^+$ est un groupe profini. Soit $\tilde{\mathcal{Z}}$ l'ensemble des polynômes sur F_q, non réduits au terme constant. Pour tout $f \in \tilde{\mathcal{Z}}$ et pour tout $x \in \mathfrak{M}_o$, il existe un unique élément $h \in \mathcal{Z}$ tel que :

$$|x - \frac{h}{f}|_o < \frac{1}{|f|_o} \quad , \text{ à savoir } h = E_o(f\, x) \text{ , et on a :}$$

$$|h|_o < |f|_o$$

Le quotient $\left(\frac{\mathfrak{M}_o}{\frac{1}{f}\mathfrak{M}_o}\right)^+$ s'identifie donc au groupe additif des polynômes de degré inférieur à deg(f), isomorphe lui-même à $\left(\frac{\mathcal{Z}}{f\mathcal{Z}}\right)^+$; soit s_f la surjection de $\mathfrak{M}_o^+$ sur $\left(\frac{\mathcal{Z}}{f\mathcal{Z}}\right)^+$:

$$s_f : x \to \pi_f\,(E_0\,(fx)\,)$$

où π_f désigne la surjection canonique $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}$

Pour tout couple (f,g) d'éléments de $\tilde{\mathfrak{Z}}$ tels que $|f|_0 \leq |g|_0$, soit $s_{f,g}$ la surjection de $\mathfrak{Z}/_{g\mathfrak{Z}}$ sur $\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}} \\
\mathfrak{M}_0 \arrow[ur, "s_f"] \arrow[dr, "s_g"'] & \\
& \mathfrak{Z}/_{g\mathfrak{Z}} \arrow[uu, "s_{f,g}"']
\end{tikzcd}$$

Soit J un sous-ensemble infini quelconque de $\tilde{\mathfrak{Z}}$. $\mathfrak{M}_0^+$ s'identifie à la limite projective du système projectif de groupes topologiques $(\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}\,, s_{f,g})_{f \in J}$ ($\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}$ discret), par l'isomorphisme $s = \varprojlim s_f$:

$$s(x) = (s_f(x)\,)_{f \in J}$$

Suivant le paragraphe 2, nous dirons qu'<u>une suite</u> $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ <u>d'éléments de</u> $\mathfrak{M}_0$ <u>est</u> μ_f<u>-répartie</u> mod $1/f$ (μ_f étant une mesure normale sur $\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}$) <u>si la suite</u> $(s_f\,(u_n)\,)_{n \in \mathbb{N}^*}$ <u>est</u> μ_f<u>-répartie</u>.

Etant donné une famille de mesures normales (μ_f) sur les $(\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}})_{f \in J}$ nous appellerons "condition ℓ.p.s" la condition de système projectif.

ℓ.p.s. $\begin{cases} \text{Pour tout couple } (f,g) \text{ d'éléments de } J \text{ tel que } |f|_0 \leq |g|_0 : \\ \mu_f(\{\alpha\}\,) = \mu_g\,(s_{f,g}^{-1}(\alpha)\,) \end{cases}$

Il y a équivalence entre la donnée d'une mesure normale μ sur $\mathfrak{M}_0$ et la donnée d'une famille de mesures normales $(\mu_f)_{f \in J}$ sur les $\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}$, satisfaisant à la condition (ℓ.p.s.), et qui sera la famille des mesures quotients de μ sur les $\mathfrak{Z}/_{f\mathfrak{Z}}$:

$$\mu_f(\{\,s_f(x)\,\}\,) = \mu\,(D_f(x)\,) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{M}_0 \quad , \; D_f(x)$$

désignant le disque de $\mathfrak{M}_0$:

$$D_f(x) = \{y \mid |x-y|_0 < \frac{1}{|f|_0}\}$$

Pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{M}_0$ soit μ-répartie, il faut et il suffit que pour tout $f \in J$, elle soit μ_f-répartie mod $1/f$.

Remarquons la forme du critère de Weyl pour la répartition mod 1/f : soit $h \in \mathfrak{Z}$. Le caractère Θ_h de $\mathfrak{Z}^+$:

$$\Theta_h(g) = \chi_0\left(\frac{hg}{f}\right)$$

est orthogonal à $f\mathfrak{Z}$, et peut donc être considéré comme un caractère de $\left(\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}\right)^+$. D'autre part, Θ_h ne dépend que de la classe de h modulo f, et l'application $\pi_f(h) \to \Theta_h$ est un isomorphisme de $\left(\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}\right)^+$ sur son dual.

En prenant comme système de représentants de $\left(\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}\right)^+$ le groupe additif des polynômes h tels que $|h|_0 < |f|_0$, comme on a pour un tel polynôme h :

$$\Theta_h(s_f(x)) = \chi_0(h\,x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{M}_0$$

le critère de Weyl pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{M}_0$ soit μ_f-répartie mod $\frac{1}{f}$ s'écrit :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_0(h\,u_n) = \hat{\mu}_f(h)$$

pour tout $h \in \mathfrak{Z}$ tel que $|h|_0 < |f|_0$, $\hat{\mu}_f$ désignant la transformée de Fourier de μ_f :

$$\hat{\mu}_f(h) = \int_{\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}} \chi_0\left(\frac{h\gamma}{f}\right) d\mu_f(\gamma)$$

Naturellement, si μ est une mesure sur $\mathfrak{M}_0$ dont μ_f est la mesure quotient sur $\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}$, on a :

$$\hat{\mu}_f(h) = \hat{\mu}(h) = \int_{\mathfrak{M}_0} \chi_0(h\,x)\, d\mu(x)$$

pour tout $h \in \mathfrak{Z}$ tel que $|h|_0 < |f|_0$

Examinons maintenant une notion de répartition dans $\mathfrak{Z}$. Etant donné un polynôme $f \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ et une mesure normale μ_f sur $\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}$, nous dirons qu'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{Z}$ est μ_f-répartie mod f si la suite $(\pi_f(g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est μ_f-répartie dans $\mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}$ (π_f désignant toujours la surjection canonique $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}/f\mathfrak{Z}$). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_0\left(\frac{h\,g_n}{f}\right) = \hat{\mu}_f(h)$$

pour tout $h \in \mathfrak{Z}$ (mod f), $\hat{\mu}_f$ désignant la transformée de Fourier de μ_f.

Soit $J \subset \widetilde{\mathcal{Z}}$ un sous-ensemble filtrant et séparant pour la divisibilité (pour tout couple (f,g) d'éléments de J, il existe $h \in J$ tel que $h\mathcal{Z} \subset f\mathcal{Z} \cap g\mathcal{Z}$, et $\bigcap_{f \in J} f\mathcal{Z} = \{0\}$) et soit V_J le complété de $\mathcal{Z}$ pour la topologie d'anneau de $\mathcal{Z}$ pour laquelle les $(f\mathcal{Z})_{f \in J}$ forment une base de voisinages de 0, c'est-à-dire la limite projective du système projectif d'anneaux topologiques $(\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}, \pi_{f,g})_{f \in J}$ ($\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$ discret), où pour tout couple (f,g) d'éléments de J tels que $f \mid g$, $\pi_{f,g}$ est l'homomorphisme de $\mathcal{Z}/g\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{Z}/f\mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} \arrow[urr, "\pi_f"] \arrow[drr, "\pi_g"'] & & \\ & & \mathcal{Z}/g\mathcal{Z} \arrow[uu, "\pi_{f,g}"'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{Z}$ est plongé dans V_J par l'homomorphisme $\pi = \varprojlim \pi_f$:

$$\pi(\ell) = (\pi_f(\ell))_{f \in J} \quad \text{pour tout } \ell \in \mathcal{Z}$$

La donnée d'une mesure normale μ sur V_J est équivalente à la donnée d'une famille de mesures normales (μ_f) sur les $\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$ $(f \in J)$, satisfaisant à la condition :

$(\ell.p.\pi)$: Pour tous f et g appartenant à J tels que $f \mid g$:

$$\mu_f(\alpha) = \mu_g(\pi_{f,g}^{-1}(\alpha)) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$$

les (μ_f) étant alors les mesures quotients de μ sur les $\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$.
Une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{Z}$ sera μ_f-répartie mod f pour tout $f \in J$ si et seulement si elle est μ-répartie comme suite d'éléments de V_J

On a le lien suivant entre répartition dans $\mathfrak{M}_o$ et répartition dans $\mathcal{Z}$:

Proposition 6. - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{F}_o$. Soit $f \in \mathcal{Z}$, et soit μ_f une mesure normale sur $\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$. Pour que la suite $(\mathcal{H}_o(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit μ_f-répartie mod $\frac{1}{f}$ dans $\mathfrak{M}_o$, il faut et il suffit que la suite $(E_\partial(f u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit μ_f-répartie mod f dans $\mathcal{Z}$.

Soit J un sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{Z}}$ filtrant et séparant pour la divisibilité et soit $(\mu_f)_{f\in J}$ une famille de mesures normales sur les $(\mathcal{Z}/f\mathcal{Z})_{f\in J}$. Supposons que la famille des mesures (μ_f) satisfasse à la condition (ℓ.p.s.) (resp. ℓ.p.π) et soit μ la mesure sur $\mathfrak{M}_o$ (resp. V_J) limite projective des (μ_f).

Pour que la suite $(\mathcal{H}_o(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $E_o(u_n)$) soit μ-répartie dans $\mathfrak{M}_o$ (resp. dans V_J), il faut et il suffit que pour tout $f\in J$, la suite $(E_o(f\,u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $\mathcal{H}_o(\frac{u_n}{f}))_{n\in\mathbb{N}^*}$) soit μ_f-répartie mod f dans V_J (resp. μ_f-répartie mod $\frac{1}{f}$ dans $\mathfrak{M}_o$).

Preuve - Soient $x\in\mathfrak{F}_o$, $f\in\tilde{\mathcal{Z}}$, et $h\in\mathcal{Z}$, tel que $|h|_o<|f|_o$.

L'inégalité $\quad |\mathcal{H}_o(x)-\frac{h}{f}|_o<\frac{1}{|f|_o}\quad$ équivaut à $\quad E_o(f\,x)\equiv h \mod f$,

puisque $\quad E_o(f\,x)\equiv E_o(f\,\mathcal{H}_o(x)) \mod f$ et que $|E_o(f\,\mathcal{H}_o(x))|_o<|f|_o$

Remarquons que la proposition s'applique dans les deux cas lorsque la famille $(\mu_f)_{f\in J}$ est la famille des mesures de Haar sur les $\mathcal{Z}/f\mathcal{Z}$.

3.3.- Répartition dans $\mathfrak{F}_P$

Soit un polynôme irréductible $P\in\mathcal{Z}$.

Définition 3. - Soit μ une mesure normale sur $\mathfrak{M}_o$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{F}_P$ est dite μ-répartie mod 1 si la suite $(\mathcal{H}_P(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est μ-répartie dans $\mathfrak{M}_o$.

Désignons par χ_P le caractère de $\mathfrak{F}_P$: $\chi_P=\chi_o\circ\mathcal{H}_P$. Comme $\mathcal{H}_P(f\,x)-f\,\mathcal{H}_P(x)\in\mathcal{Z}$, pour tout $x\in\mathfrak{F}_P$ et tout $f\in\mathcal{Z}$, on a $\chi_o(f\,\mathcal{H}_P(x))=\chi_o(\mathcal{H}_P(f\,x))$.

Donc le critère de Weyl pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{F}_P$ soit μ-répartie mod 1 s'écrit :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_P(f\,u_n)=\hat{\mu}(f)$$

où $\hat{\mu}$ est la transformée de Fourier de μ sur $\mathfrak{M}_o$:

$$\hat{\mu}(f)=\int_{\mathfrak{M}_o}\chi_o(f\,x)\,d\mu(x)$$

L'anneau $V_J = \varprojlim_{f \in J} \frac{\mathcal{Z}}{f\mathcal{Z}}$ du paragraphe précédent n'est autre que $\mathcal{Z}_P$ lorsque $J = \{P^k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$. Nous dirons donc qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{Z}_P$ est μ_k-répartie mod P^k, μ_k étant une mesure normale sur $\frac{\mathcal{Z}}{P^k\mathcal{Z}}$, si la suite $(pr_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est μ_k-répartie dans $\frac{\mathcal{Z}}{P^k\mathcal{Z}}$ (pr_k étant la surjection $\mathcal{Z}_P \to \frac{\mathcal{Z}}{P^k\mathcal{Z}}$)

On peut écrire le critère de Weyl pour qu'il en soit ainsi :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_P\left(\frac{h\,u_n}{P^k}\right) = \hat{\mu}_k(h)$$

pour tout $h \in \mathcal{Z}$ (mod P^k), $\hat{\mu}_k$ étant la transformée de Fourier de μ_k :

$$\hat{\mu}_k(h) = \int_{\frac{\mathcal{Z}}{P^k\mathcal{Z}}} \chi_o\left(\frac{h\,\gamma}{P^k}\right) d\mu(\gamma).$$

On a l'analogue de la proposition 6 :

<u>Proposition 7.</u> - <u>Soit</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>une suite d'éléments de</u> $\mathcal{F}_P$. <u>Soit</u> $k \in \mathbb{N}^*$, <u>et soit</u> μ_k <u>une mesure normale sur</u> $\frac{\mathcal{Z}}{P^k\mathcal{Z}}$. <u>Pour que la suite</u> $(\mathcal{H}_P(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>soit</u> μ_k<u>-répartie</u> mod $\frac{1}{P^k}$ <u>dans</u> $\mathfrak{M}_o$, <u>il faut et il suffit que la suite</u> $(E_P(P^k u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>soit</u> μ_k<u>-répartie</u> mod P^k <u>dans</u> $\mathcal{Z}_P$.

<u>Supposons donnée une famille de mesures normales</u> $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ <u>sur les</u> $\frac{\mathcal{Z}}{P^k\mathcal{Z}}$, <u>satisfaisant à la condition</u> (ℓ.p.s.) (resp. (ℓ.p.π)), <u>et soit</u> μ <u>la mesure sur</u> $\mathfrak{M}_o$ (resp. $\mathcal{Z}_P$), <u>limite projective des</u> (μ_k). <u>Pour que la suite</u> $(\mathcal{H}_P(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $(E_P(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>soit</u> μ<u>-répartie dans</u> $\mathfrak{M}_o$ (resp. $\mathcal{Z}_P$), <u>il faut et il suffit que pour tout</u> $k \in \mathbb{N}^*$, <u>la suite</u> $(E_P(P^k u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $(\mathcal{H}_P(\frac{u_n}{P^k}))_{n\in\mathbb{N}^*}$) <u>soit</u> μ_k<u>-répartie mod</u> P^k <u>dans</u> $\mathcal{Z}_P$ (resp. μ_k<u>-répartie</u> mod P^{-k} <u>dans</u> $\mathfrak{M}_o$).

<u>Preuve</u>. Il suffit de remarquer que x étant un élément de $\mathcal{F}_P$ et f un élément de $\mathcal{Z}$ tel que $|f|_o < |P|^k$, l'inégalité

$$\left|\mathcal{H}_P(x) - \frac{f}{P^k}\right|_o < \frac{1}{|P|_o^k}$$

équivaut à

$$\left|E_P(P^k x) - f\right|_P \leq \frac{1}{|P|_o^k}$$

En effet : $$\left|\mathcal{H}_P(x) - \frac{f}{P^k}\right|_o < \frac{1}{|P|_o^k}$$

équivaut à $$E_o(P^k \mathcal{H}_P(x)) = f$$

Mais pour tout $\xi \in \mathfrak{Z}[\frac{1}{P}]$, on a :

$$E_o(\xi) = E_P(\xi)$$

car si $\xi = \frac{g}{P^\alpha} \quad (g \in \mathfrak{Z}, \alpha \in \mathbb{N})$,

écrivant la division euclidienne :

$$g = P^\alpha h + r \quad ; \quad h \in \mathfrak{Z},\ r \in \mathfrak{Z},\ |r|_o < |P|_o^\alpha$$

on a :

$$E_o\left(\frac{g}{P^\alpha}\right) = h = E_P\left(\frac{g}{P^\alpha}\right)$$

Alors $\quad E_o(P^k \mathcal{H}_P(x)) = E_P(P^k \mathcal{H}_P(x))$

Mais $\quad E_P(P^k \mathcal{H}_P(x)) \equiv E_P(P^k x) \pmod{P^k}$

Comme de plus, on a nécessairement $|E_o(P^k \mathcal{H}_P(x))|_o < |P|_o^k$, on voit que $|\mathcal{H}_P(x) - \frac{f}{P^k}|_o < \frac{1}{|F|_o^k}$ équivaut à $|E_P(P^k x) - f|_P \leq |P|_o^k$.

4 - Le théorème de Kokma.

Nous allons maintenant étudier la répartition des suites $(\lambda x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{F}_o$ au $\mathfrak{F}_P$. Comme dans le cas p-adique ([4]), les résultats sont basés sur la technique des applications "isométriques" et "homométriques", qui peut s'exprimer dans un cadre plus général :

G désignera un groupe topologique abélien, localement compact, dans lequel il existe une base $\mathcal{B}$ du filtre des voisinages de 0, formée de sous-groupes compacts.

Remarquons d'abord que :

Lemme 1. - Tout caractère χ de G est localement constant.

Cela résulte du fait qu'un caractère non trivial d'un groupe prend au moins une valeur dans l'ensemble des nombres complexes u tels que $|u| = 1$ et $\mathcal{R}(u) \leq 0$, et qui satisfait donc à $|u-1| \geq \sqrt{2}$. Alors comme χ est continu, il existe $H \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in H \Rightarrow |\chi(x) - 1| < \sqrt{2},$$

d'où

$$\chi(x) = 1 \quad \forall x \in H.$$

Soit $\Gamma \in \mathcal{B}$, désignons par $\mathcal{B}_\Gamma$ la base du filtre, des voisinages de 0 dans Γ formée des intersections avec Γ des éléments de $\mathcal{B}$. Soit D un translaté de Γ.

Définition 4. - Une application Φ de D dans G est dite isométrique si, pour tout $H \in \mathcal{B}_\Gamma$, on a la double implication :

$$x - y \in H \Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi(y) \in H .$$

Une tele application est nécessairement continue. Remarquons la propriété suivante :

Lemme 2. - Soit $x_o \in D$. Φ est une bijection de D sur $\Delta = \Phi(x_o) + \Gamma$.

On a évidemment $\Phi(D) \subset \Delta$, et d'autre part Φ est injective (car G est séparé). Il y a seulement à démontrer que $\Phi(D) = \Delta$, et on peut se restreindre au cas où Φ est une application de Γ dans Γ. Pour tout $H \in \mathcal{B}_\Gamma$, il existe une famille finie $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de Γ telle que l'on ait

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} D_i^H , \quad \text{où} \quad D_i^H = a_i + H ,$$

et

$$D_i^H \cap D_{i'}^H = \emptyset , \quad \text{si} \quad i \neq i' .$$

Soient $b_i = \Phi(a_i)$ et $j(i)$ tels que $b_i \in D_{j(i)}^H$. L'application $i \to j(i)$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même est injective, donc surjective, et par suite, les ensembles $b_i + H$ forment une partition de Γ. $\Phi(\Gamma)$ est donc dense dans Γ, donc $\Phi(\Gamma) = \Gamma$ puisque Γ est compact.

Définition 5. - Soit Λ un homomorphisme continu de Γ dans G. Une application ψ de D ($= x_o + \Gamma$) dans G est dite Λ-homométrique, s'il existe une isométrie Φ de D dans G telle que l'on ait

$$\psi(x) - \psi(x_o) = \Lambda(\Phi(x) - \Phi(x_o)) , \qquad \forall x \in D .$$

On a le résultat suivant sur l'intégration d'une telle application (par rapport à une mesure de Haar dx de G).

Lemme 3. - Soit $\chi \in \hat{G}$. On a

$$\int_D \chi(\psi(x))dx = \begin{cases} \chi(\psi(x_o)) \text{ mes } D, & \text{si } \chi \circ \Lambda = 1 \ (\text{sur } \Gamma), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme

$$\int_D \chi(\psi(x))\, dx = \chi(\psi(x_o))\int_\Gamma \chi \circ \Lambda\, (\Phi(x_o+y) - \Phi(x_o))\, dy ,$$

il suffit de montrer que, si χ est un caractère non trivial de Γ, et Φ une isométrie de Γ sur lui-même, on a

$$\int_\Gamma \chi(\Phi(x))\, dx = 0 .$$

Soit $H \in \mathcal{B}_\Gamma$ tel que $H \subset \ker$, et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'éléments de Γ tels que les ensembles $a_i + H$ forment une partition de Γ. Il en est alors de même pour les ensembles $b_i + H$ $(b_i = \Phi(a_i))$. On a

$$\int_\Gamma \chi(\Phi(x))\, dx = \text{mes } H \sum_{i=1}^{n} \chi(b_i) = \int_\Gamma \chi(x) = 0 .$$

On peut alors démontrer le résultat suivant :

Proposition 8. - Soit X une partie dénombrable de G. Soit $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'applications continues de D $(x = x_o + \Gamma)$ dans G. Supposons qu'il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ (contenant la diagonale, et symétrique), satisfaisant à la condition

(1) Si $K_N = \text{card}\{(m,n) \in K \mid \sup(m,n) \leq N\}$,

on a
$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_N}{N^3} < +\infty ,$$

et tel que, pour tout $(m,n) \notin K$, l'application $\psi_{m,n} = \Phi_n - \Phi_m$ possède la propriété suivante :

Il existe une famille finie de sous-ensembles de D, $(D^j_{m,n})_{j \in J(m,n)}$ disjoints, qui sont des translatés de sous-groupes $(\Gamma^j_{m,n})_{j \in J(m,n)}$ appartenant à la famille $\mathcal{B}_\Gamma$, et pour tout $j \in J(m,n)$, un homomorphisme continu $\Lambda^j_{m,n}$ de $\Gamma^j_{m,n}$ dans G tel que la restriction de $\psi_{m,n}$ à $D^j_{m,n}$ soit une $\Lambda^j_{m,n}$-homométrie et l'on a, en outre, les propriétés suivantes :

(2) Si

$$\operatorname{mes}(D - \bigcup_{j \in J(m,n)} D^j_{m,n}) = C_{m,n} \operatorname{mes} D \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{(m,n) \notin K \\ \sup(m,n) \leq N}} C_{m,n} = C_N ,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_N}{N^3} < +\infty .$$

(3) Pour tout $\chi \in X$, il existe un entier $\nu(\chi)$ tel que, pour $(m,n) \notin K$ et $\sup(m,n) \geq \nu(\chi)$, on ait :

$$\chi \circ \Lambda^j_{m,n} \neq 1 \quad (\text{ sur } \Gamma^j_{m,n}) , \qquad \forall\, j \in J(m,n).$$

Alors, pour presque tout $x \in D$, (au sens d'une mesure de Haar de G), on a :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(\Phi_n(x)) = 0 \qquad \text{pour tout } \chi \in X.$$

Preuve. La démonstration se fait maintenant comme dans [4] ; soit :

$$\sigma_{N,\chi}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(\Phi_n(x))$$

et posons ;

$$I_N(\chi) = \int_D |\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \, dx$$

Il suffit de montrer ([14]) que la série $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(\chi)$ est convergente pour tout χ. Alors, pour chaque $\chi \in X$, on aura, pour presque tout $x \in D$:

$$\lim_{N \mapsto \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(\Phi_n(x)) = 0 ,$$

d'où le résultat pour tout $\chi \in X$, puisqu'on suppose X dénombrable.

Ecrivons : $$|\sigma_{N,\chi}(x)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{(m,n) \\ \sup(m,n) \leq N}} \chi(\psi_{m,n}(x))$$

et en supposant $N \geq \nu(\chi)$:

$$|\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \leq \frac{K_N + (\nu(\chi))^2}{N^2} + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{(m,n) \notin K \\ m < n \\ \nu(\chi) \leq n \leq N}} (\chi(\psi_{m,n}(x)) + \chi(-\psi_{m,n}(x)))$$

donc :

$$\int_D |\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \, dx \leq \frac{K_N+(\nu(x))^2}{N^2} \text{ mes } D + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{(m,n)\notin K \\ m<n \\ \nu(x)\leq n\leq N}} \int_D (\chi(\psi_{m,n}(x))+\chi(-\psi_{m,n}(x)) \, dx$$

Mais pour $(m,n)\notin K$ et $\sup(m,n)\geq \nu(x)$, on a :

$$\int_D \chi(\psi_{m,n}(x)) \, dx = \int_{D-\bigcup_{j\in J(m,n)} D^j_{m,n}} \chi(\psi_{m,n}(x)) \, dx$$

car la condition (3) implique que :

$$\int_{D^j_{m,n}} \chi(\psi_{m,n}(x)) \, dx = 0 \qquad \forall\, j \in J(m,n)$$

d'où puisque :

$$\left|\int_{D-\bigcup_{j\in J(m,n)} D^j_{m,n}} \chi(\psi_{m,n}(x)) \, dx\right| \leq C_{m,n} \text{ mes } D$$

$$\int_D |\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \, dx = \frac{K_N+C_N+(\nu(x))^2}{N^2} \text{ mes } D$$

ce qui démontre la proposition.

On a le corollaire immédiat suivant :

Corollaire. - Soit M un groupe abélien, métrique, compact, et soit θ un homomorphisme continu de G dans M, tel que $\theta(G)$ soit dense dans M. Si une suite $(\Phi_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ d'applications de Γ dans G satisfait aux conditions de la proposition 8, avec pour X l'ensemble des caractères de G de la forme $\chi\circ\theta$ $(\chi\in\hat{M}\,;\chi\neq 1)$, la suite $(\theta(\Phi_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie dans M pour presque tout $x\in D$.

En effet, le dual $\hat{M}$ de M étant dénombrable, la proposition 8 s'applique aux sommes de Weyl :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} \chi(\theta(\Phi_n(x)))$$

pour tout $\chi\in M$, $\chi\neq 1$. Remarquons que pour un tel caractère χ, le caractère $\chi\circ\theta$ de G est toujours différent de 1, puisque $\theta(G)$ est dense dans M.

Nous allons maintenant déduire de la proposition 8 et de son corollaire, certains résultats de répartition dans un corps local localement compact. Reprenant les notations de cette proposition, nous dirons qu'un sous-ensemble K de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

satisfait à la condition (C) s'il est symétrique, contient la diagonale, et si $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_N}{N^3} < +\infty$ (K_N = card $\{n,m\} \in K$; sup $(m,n) \leq N$). Pour simplifier l'expression, nous prendrons des hypothèses un peu simplifiées. Commençons par un résultat particulier à la répartion mod. 1 dans $\mathfrak{F}_o$.

Théorème 1. - Soit D un disque de $\mathfrak{F}_o$, de rayon q^k , et soit $(\Phi_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ une suite d'applications continues de D dans $\mathfrak{F}_o$. Posons : $\psi_{m,n} = \Phi_m - \Phi_n$, et supposons qu'il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, satisfaisant à la condition (C) , tel que pour tout couple $(m,n) \notin K$, il existe un entier $\lambda_{m,n} \in Z$ tel que l'on ait :

$$|\psi_{m,n}(x) - \psi_{m,n}(y)| = q^{\lambda_{m,n}} \quad |x-y|_o$$

quelques soient les éléments x et y de D , et supposons de plus que :

$$\lambda_{m,n} + k \geq -1 \qquad \text{pour tout } (m,n) \notin K$$

Alors, pour presque tout $x \in D$ (au sens d'une mesure de Haar de $\mathfrak{F}_o^+$), la suite $(\Phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{F}_o$ est équirépartie mod. 1.

Preuve. Comme D est translaté de $T^{k+1}\mathfrak{M}_o$ et que pour tout $(m,n) \notin K$, l'application $\psi_{m,n}$ est une homométrie associée à l'homomorphisme $\Lambda_{m,n}$: $x \to T^{\lambda_{m,n}} x$ de $T^{k+1}\mathfrak{M}_o$ dans $\mathfrak{F}_o$, il suffit, d'après la proposition 8 et de son corollaire, que pour tout $f \in \mathcal{Z}$, différent de 0 , le caractère $x \to \chi_o\,(f\,T^{\lambda_{m,n}} x)$ de $T^{k+1}\mathfrak{M}_o$ soit différent de 1 , ou encore que la caractère $x \to \chi_o\,(f\,T^{\lambda_{m,n}+(k+1)} x)$ de $\mathfrak{M}_o$ soit différent de 1 .

Ceci résulte du fait que, comme $\lambda_{m,n} + k+1 \geq 0$, $f\,T^{\lambda_{m,n}+k+1}$ est un élément non nul de $\mathcal{Z}$.

Théorème 2. - Soit L un corps local, localement compact. On désigne par $|\ .\ |$ la valeur absolue sur L, et par π une uniformisante. Soit D un disque de L, et soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications continues de D dans L. Posons $\psi_{m,n} = \Phi_m - \Phi_n$, et supposons qu'il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ satisfaisant à la condition (C) tel que pour tout $(m,n) \notin K$, il existe $\lambda_{m,n} \in Z$ tel que :

$$|\psi_{m,n}(x) - \psi_{m,n}(y)| = \pi^{-\lambda_{m,n}} |x-y|$$

quels que soient les éléments x et y de D.

Soit $\lambda_N = \inf\limits_{\substack{\sup(m,n) \geq N \\ (m,n)\notin K}} \lambda_{m,n}$, ($N$ entier positif) et supposons que $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda_N = +\infty$

Soient M un groupe abélien, métrique, compact, et θ un homomorphisme continu de L^+ dans M tel que $\theta(M)$ soit dense dans G. Pour presque tout $x \in D$, (au sens d'une mesure de Haar de L^+), la suite $(\theta(\Phi_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de M est équirépartie.

Preuve. Soit A l'anneau de valuation de L. Désignons par $|\pi|^{-k}$ le rayon de D, c'est-à-dire que D est un translaté de $\pi^{-k} A$. Pour tout $\chi \in M$, différent de 1, le caractère $\chi \circ \theta$ de L^+ est différent de 1, donc il existe $\ell_o \in Z$ tel que, pour tout $\ell \geq \ell_o$, la restriction à $(\pi^{-\ell} A)^+$ du caractère $\chi \circ \theta$ de L^+ soit différente de 1. Pour tout $(m,n) \notin K$, l'application $\psi_{m,n}$ est une homométrie associée à l'homomorphisme $x \to \pi^{-\lambda_{m,n}} x$ de $(\pi^{-k} A)^+$ dans L^+. Pour $\sup(m,n)$ suffisamment grand pour que $\lambda_{m,n} + k \geq \ell_o$, le caractère $x \to \chi \circ \theta\,(\pi^{-\lambda_{m,n}} x)$ de $(\pi^{-k} A)^+$ est différent de 1, ce qui, d'après le corollaire de la proposition 8, démontre le résultat.

Naturellement, le théorème 1 et le théorème 2 restent valables si on remplace D par un ouvert quelconque Ω, réunion (nécessairement dénombrable) de disques D_j tels que les restrictions aux D_j des applications (Φ_n) satisfassent aux conditions de ces théorèmes. En particulier, le théorème 2 reste valable sans changement si on remplace D par L.

Nous allons déduire quelques résultats de ces théorèmes. On conserve les notations du théorème 2.

<u>Corollaire 1. - Soit</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>une suite d'éléments de</u> L <u>telle qu'il existe un sous-ensemble</u> K <u>de</u> $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, <u>satisfaisant à la condition</u> (C) , <u>tel que</u>

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\inf_{\substack{\sup(m,n)\geq N \\ (m,n)\notin K}} |u_n-u_m| \Big) = +\infty .$$

<u>Pour presque tout</u> $x\in L$, <u>la suite</u> $(\theta(x\,u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>est équirépartie dans</u> M .

La démonstration découle immédiatement du théorème 2. Avec les applications Φ_n de L dans L :

$$\Phi_n(x) = x\,u_n ,$$

les applications

$$\psi_{m,n}(x) = x\,(u_n-u_m)$$

satisfont bien aux conditions du théorème 2.

Le corollaire 1 s'appliquera en particulier si la suite $(|u_n|)$ est strictement croissante (et tend donc vers l'infini), car alors pour $m\neq n$: $|u_n-u_m|=|u_{\sup(m,n)}|$ l'ensemble K est alors réduit à la diagonale.

En particulier :

<u>Corollaire 2. - Soit</u> $\alpha\in L-A$. <u>La suite</u> $(\theta(x\,\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>est équirépartie dans</u> M <u>pour presque tout</u> $x\in L$.

<u>Corollaire 3. - Supposons que</u> L <u>soit caractéristique nulle. Soit</u> λ <u>un élément non nul de</u> L . <u>Pour presque tout</u> $x\in L-A$, <u>la suite</u> $(\theta(\lambda\,x^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>est équirépartie dans</u> M .

L'étude de ce cas a été faite par F. Bertrandias ([4], chap. V) dans le cas de la répartition mod. 1 dans Q_p . Soit p la caractéristique résiduelle de L , F. Bertrandias montre que dans tout disque D de rayon $|p|$, disjoint de A , les applications $\Phi_n : x \to \lambda\,x^n$ de D dans L satisfont aux conditions du théorème 2.

Nous voulons maintenant étudier le cas où L est de caractéristique $p \neq 0$. Nous avons besoin d'un préliminaire très simple. On dira naturellement que :

Définition 6. - Soit J un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}^*$, et soit φ la bijection croissante de $\mathbb{N}^*$ sur J. Soit X un espace topologique compact, et soit μ une mesure normale sur X. Une suite $(u_n)_{n \in J}$ d'éléments de X est dite μ-répartie si la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'est.

On a alors :

Lemme 4. - Soit $(J_s)_{0 \leq s \leq k_0}$ ou $(J_s)_{s \in \mathbb{N}}$ une suite finie ou infinie de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}^*$, disjoints. Soit $J = \bigcup_s J_s$.

Posons pour tout entier $N \geq \min_{n \in J} n$

$$h_s(N) = \text{card} \{ n \in J_s \mid n \leq N \}$$
$$h(N) = \text{card} \{ n \in J \mid n \leq N \} = \sum_s h_s(N)$$

Supposons que pour chaque s, la suite $\left(\frac{h_s(N)}{h(N)}\right)_N$ tende vers une limite α_s lorsque $N \to \infty$, et, si la famille (J_s) est infinie, supposons de plus que l'on ait $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\sum_{s \leq t} h_s(N)}{h(N)} = 1$, uniformément par rapport à N.

Soit $(u_n)_{n \in J}$ une suite d'éléments d'un espace topologique compact X, et supposons que pour tout s, la suite $(u_n)_{n \in J_s}$ ait une mesure de répartition μ_s. Alors la suite $(u_n)_{n \in J}$ a la mesure de répartition μ :

$$\mu = \sum_s \alpha_s \mu_s$$

(série de mesures convergentes au sens de la topologie forte si la famille (J_s) est infinie).

Preuve. A cause de la convergence uniforme de la série $\sum_s \frac{h_s(N)}{h(N)}$ si la famille (J_s) est infinie, on a $\sum_s \alpha_s = 1$, donc la série $\sum_s \alpha_s \mu_s$ converge fortement.

Posons : $\mu = \sum_s \alpha_s \mu_s$.

Soient ε un nombre réel positif et f une fonction complexe continue sur X. Choisissons un entier t suffisamment grand pour que $\sum\limits_{s>t} \frac{h_s(N)}{h(N)} \leq \varepsilon$ pour tout N, et donc que $\sum\limits_{s>t} \alpha_s \leq \varepsilon$. Ecrivons pour tout N :

$$\sum_{\substack{n\in J\\ n\leq N}} f(u_n) = \sum_{s\leq t} \sum_{\substack{n\in J_s\\ n\leq N}} f(u_n) + R_{N,t}(f)$$

où
$$R_{N,t}(f) = \sum_{s>t} \sum_{\substack{n\in J_s\\ n\leq N}} f(u_n)$$

donc
$$|R_{N,t}(f)| \leq \|f\| \sum_{s>t} h_s(N) \leq \varepsilon \|f\| h(N)$$

(où $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$)

Comme pour tout s, la suite $(u_n)_{n\in J_s}$ est μ_s-répartie, pour N suffisamment grand, on aura pour tout $s\leq t$

$$\Big|\sum_{\substack{n\in J_s\\ n\leq N}} f(u_n) - h_s(N)\,\mu_s(f)\Big| \leq \varepsilon\, h_s(N)$$

et
$$|h_s(N) - \alpha_s h(N)| \leq \frac{\varepsilon}{t+1}\, h(N)$$

donc
$$\Big|\sum_{s\leq t} \sum_{\substack{n\in J_s\\ n\leq N}} f(u_n) - h(N) \sum_{s\leq t} \alpha_s \mu_s(f)\Big| \leq \varepsilon\, h(N)\,(1+\|f\|)$$

car
$$|\mu_s(f)| \leq \|f\|.$$

Enfin
$$\Big|\sum_{s>t} \alpha_s \mu_s(f)\Big| \leq \varepsilon \|f\|$$

d'où
$$\Big|\sum_{\substack{n\in J\\ n\leq N}} f(u_n) - h(N) \sum_{s} \alpha_s \mu_s(f)\Big| \leq \varepsilon\, h(N)\,(1+3\|f\|)$$

ce qui établit le lemme.

L étant supposé de caractéristique $p \neq 0$, $w_p(n)$ désignera la valuation p-adique de l'entier n. La notation λL^{p^s} ($\lambda \in L$, $s \in \mathbb{N}$) désignera l'image de l'endomorphisme de $L^+ : x \to \lambda x^{p^s}$. On a le résultat suivant, avec toujours les notations du théorème 2:

Proposition 9. - Soit $\lambda \in L^*$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, soit $\mu_{s,\lambda}$ la mesure normale sur M, dont le support est $\theta(\lambda L^{p^s})$ et dont la trace sur $\theta(\lambda L^{p^s})$ est la mesure de Haar de ce groupe. La suite $(\theta(\lambda x^n))_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ w_p(n)=s}}$ d'éléments de M est $\mu_{s,\lambda}$-répartie pour presque tout $x \in L - A$.

En particulier, la suite $(\theta(\lambda x^n))_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ (n,p)=1}}$ est équirépartie dans M pour presque tout $x \in L - A$.

Preuve. On se place dans un disque D, de rayon 1, disjoint de A, et on applique le théorème 2 à la suite de fonctions $\Phi_n(x) = x^n((n,p)=1)$ sur D, et à l'homomorphisme $x \to \theta(\lambda x^{p^s})$ de L^+ dans $\theta(\lambda L^{p^s})$.

Les applications $(\Phi_n)_{(n,p)=1}$ satisfont bien aux conditions du théorème 2 : en effet, tous les éléments de D ont la même valeur absolue $\rho > 1$, et pour tout couple x, y d'éléments de D, écrivant :

$$x^n - y^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-y)^k \, y^{n-k}$$

comme on a :

$$|n(x-y)\, y^{n-1}|_0 = \rho^{n-1} \, |x-y|_0$$

et si $k > 1$:

$$\left|\binom{n}{k} (x-y)^k \, y^{n-k}\right|_0 \leq \rho^{n-k} \, |x-y|_0^k < \rho^{n-1} \, |x-y|_0$$

on voit que :

$$|x^n - y^n|_0 = \rho^{n-1} \, |x-y|_0$$

Alors si $m \neq n$:

$$|x^n - y^n - (x^m - y^m)|_0 = \rho^{\sup(n,m)-1} \, |x-y|_0$$

et on a bien : $$\lim_{N \to \infty} \inf_{\substack{\sup(m,n) \geq N \\ m \neq n}} \rho^{\sup(m,n)-1} = +\infty$$

Le lemme 4 s'applique à la partition $(J_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}^*$ où J_s est l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $w_p(n) = s$.

En effet, on a alors $h_s(N) = [\frac{N}{p^s}] - [\frac{N}{p^{s+1}}]$. Alors $\alpha_s = \lim_{N \to \infty} \frac{h_s(N)}{N} = \frac{1}{p^s}$; et la série $\sum_s \frac{h_s(N)}{N} = \sum_s \frac{1}{N} ([\frac{N}{p^s}] - [\frac{N}{p^{s+1}}])$ est convergente uniformément par rapport à N. On obtient alors :

Théorème 3. - Pour presque tout $x \in L-A$, lá suite $(\theta(\lambda x^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est μ_λ-répartie où μ_λ est la mesure normale sur M :

$$\mu_\lambda = (1 - \frac{1}{p}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{p^s} \mu_{s,\lambda}$$

On peut exprimer la transformée de Fourier de μ_λ :

$$\hat{\mu}_\lambda(\chi) = 0 \qquad \text{si } \chi \notin \bigcup_{s \in \mathbb{N}} (\theta(\lambda L^{p^s}))^\perp$$

$$\hat{\mu}_\lambda(\chi) = \frac{1}{p^{\sigma_\lambda(\chi)}} \qquad \text{si } \chi \in \bigcup_{s \in \mathbb{N}} (\theta(\lambda L^{p^s}))^\perp ,$$

$\sigma_\lambda(\chi)$ désignant le plus petit des entiers $s \in \mathbb{N}$ tels que $\chi \in (\theta(\lambda L^{p^s}))^\perp$.

On en déduit :

Corollaire 1. - Soit $\lambda \in L^*$. La suite $(\theta(\lambda x^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de M est équirépartie pour presque tout $x \in L-A$ si et seulement si pour tout $s \in \mathbb{N}$, le sous-groupe $\theta(\lambda L^{p^s})$ est dense dans M .

Le corollaire 2 du théorème 2 montre qu'il en est nécessairement ainsi pour presque tout $\lambda \in L^*$.

Dans le cas particulier de la répartition mod 1 dans $\mathfrak{F}_o$, énonçons le :

Corollaire 2. - Soit $\lambda \in \mathfrak{F}_o^*$. Pour presque tout $x \in \mathfrak{F}_o - \mathcal{Z}_o$, la suite $(\lambda x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a la mesure de répartition mod 1 :

$$\mu_\lambda = (1 - \frac{1}{p}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu_{s,\lambda}}{p^s}$$

où $\mu_{s,\lambda}$ est la mesure de Haar du sous-groupe de $\mathfrak{M}_o$, $\mathcal{H}_o(\lambda \mathfrak{F}_o^{p^s})$. En particulier, pour presque tout $x \in \mathfrak{F}_o - \mathcal{Z}_o$, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, d'éléments de $\mathfrak{F}_o$, a la mesure de répartition mod 1 :

$$\mu = (1 - \frac{1}{p}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\delta_s}{p^s}$$

où δ_s est la mesure de Haar de $\mathfrak{M}_o^{p^s}$ (image de $\mathfrak{M}_o$ par $x \to x^{p^s}$).

Etant donné un élément $\lambda \in \mathfrak{F}_o$, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(\lambda x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit équirépartie mod. 1 pour presque tout $x \in \mathfrak{F}_o - \mathcal{Z}_o$, est que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $f \in \mathcal{Z}$, $f \neq 0$, si :

$$\lambda f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T^{-n} \qquad (c_n \in F_q \ ; \ (c_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls})$$

<u>il existe</u> $n \in Z$ <u>tel que</u> $n \equiv 0 \pmod{p^s}$ <u>et</u> $c_n \neq 0$.

En effet, cette condition signifie que pour tout s, $(\mathcal{H}_o(\lambda\, \mathfrak{F}_o^{p^s}))^{\perp} = \{0\}$ c'est-à-dire que $\mathcal{H}_o(\lambda\, \mathfrak{F}_o^{p^s}) = \mathfrak{M}_o$.

-:-:-:-

CHAPITRE II

La répartition mod. 1 des suites de puissances et les ensembles de Cantor

On s'intéresse au cas de la répartition mod. 1 dans $\mathfrak{J}_o$. Pour préciser le théorème de Koksma, on cherche à obtenir des résultats sur la répartition mod. 1 , des suites $(\lambda x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour σ-presque tout λ (ou σ-presque tout x) , où σ est une mesure dont le support est de mesure nulle pour la mesure de Haar.

1 - Les propriétés trigonomètriques des ensembles de Cantor

Définition 1. - Soit $\Theta = (\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_o$ telle que la suite $(w_o(\theta_n))$ soit strictement croissante, et $w_o(\theta_1) = 1$. Soit pour tout n , $\mathcal{G}_n$ un groupe additif de représentants de $\mathcal{Z}_o^+ \Big/ \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\mathcal{Z}_o^+$, et M_n une partie non vide de $\mathcal{G}_n$. On notera $\mathcal{G}$ et M les suites $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ et $(M_n)_{n\geq 1}$. On appelle ensemble de Cantor $C(\Theta, \mathcal{G}, M)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}_o$ de la forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\theta_n$; $\alpha_n \in M_n$.

$\mathfrak{M}_o$ s'identifie algébriquement et topologiquement au produit $\prod_{n\geq 1} \mathcal{G}_n$ par l'isomorphisme $(\alpha_n)_{n\geq 1} \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\theta_n$.

L'ensemble de Cantor $C(\Theta ;\mathcal{G} ; M)$ est l'image par cet isomorphisme du sous-ensemble $\prod_{n\geq 1} M_n$ de $\prod_{n\geq 1} \mathcal{G}_n$.

Rappelons la notion d'ensemble d'unicité dans un groupe abélien compact G . Un sous-ensemble E de G est dit de multiplicité au sens strict s'il existe une mesure non nulle μ sur G , portée par E et telle que $\hat{\mu}(\gamma)$ tende vers 0 lorsque γ tend vers l'infini (selon le filtre des complémentaires des parties finies de $\hat{G}$).

Plus généralement, soit Φ un sous-espace de $L^\infty(\hat{G})$ invariant par translation et faiblement fermé. Pour tout $x \in G$, soit $\tilde{x}$ l'élément de $L^\infty(\hat{G})$ défini par $\tilde{x}(\gamma) = \gamma(x)$. Le spectre de Φ est l'ensemble des $x \in G$ tels que $\tilde{x} \in \Phi$.

Le spectre d'une fonction $\varphi \in L^\infty(\hat{G})$ est alors défini comme le spectre du sous-espace de $L^\infty(\hat{G})$ invariant par translation et faiblement fermé, engendré par φ. Si φ est la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ d'une mesure μ sur G le spectre de φ n'est autre que le support de μ. D'où l'extension de la définition précédente : un sous-ensemble E de G est dit de <u>multiplicité (au sens large)</u> s'il existe $\varphi \in L^\infty(\hat{G})$, non nulle, telle que $\varphi(\gamma)$ tende vers 0 lorsque $\gamma \to \infty$ et que le spectre de φ soit contenu dans E. Un sous-ensemble E de G sera dit <u>d'unicité</u> au sens strict (resp. au sens large) s'il n'est pas de multiplicité au sens large (resp. au sens strict). Nous dirons plus brièvement "d'unicité" pour "d'unicité au sens strict".

$A(G)$ désigne l'algèbre des fonctions complexes f sur G, transformées de Fourier d'une fonction $\hat{f}$ de $L^1(\hat{G})$ (c'est-à-dire $f(x) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} \hat{f}(\gamma)\,\overline{\gamma(x)}$). La norme de $L^1(\hat{G})$ est notée $\|\cdot\|_1$: $\|\hat{f}\|_1 = \sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|$. Nous utilisons aussi la notation $\langle x,\gamma \rangle = \gamma(x)$ $(x \in G,\ \gamma \in \hat{G})$.

Nous utiliserons le critère suivant ([4], [18]).

<u>Lemme 1. - Soit</u> E <u>un sous-ensemble de</u> G. <u>Supposons qu'il existe une suite de fonctions</u> $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ <u>de</u> $A(G)$ <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

1°) Le support de λ_k est disjoint de E pour tout k.

2°) $\sup_k \|\hat{\lambda}_k\|_1 < +\infty$

3°) $\lim_{k \to \infty} \hat{\lambda}_k(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 1$

$\lim_{k \to \infty} \hat{\lambda}_k(1) = 1$.

<u>Alors</u> E <u>est un ensemble d'unicité.</u>

On a alors :

<u>Théorème 1.A. - S'il existe une infinité d'entiers</u> n <u>tels que</u> $M_n \neq \mathcal{G}_n$ $C(\Theta\,; \mathcal{G}\,; M)$ <u>est un ensemble d'unicité dans le groupe</u> $\mathfrak{M}_o^+$.

Plus généralement :

<u>Théorème 1.B. - Soit I un ensemble infini, et soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de groupes compacts. Soit pour tout i, M_i une partie fermée non vide de G_i. S'il existe une infinité d'indices $i \in I$ tels que $M_i \neq G_i$, le sous-ensemble $M = \prod_{i\in I} M_i$ du groupe $G = \prod_{i\in I} G_i$ est un ensemble d'unicité.</u>

<u>Preuve</u> - Remarquons tout d'abord que le dual $\widehat{G}$ de G s'identifie (algébriquement) au groupe $\Gamma = \bigoplus_{i\in I} \widehat{G}_i$ (que nous noterons multiplicativement) :

Soient $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I} \in \Gamma$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in G$, on a $<\gamma, x> = \prod_{i\in I} <\gamma_i, x_i>$

Soit $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite injective d'éléments de I telle que $M_{i_k} \neq G_{i_k}$ pour tout k. Il existe une fonction $\eta_k \in A(G_{i_k})$ telle que $\|\widehat{\eta}_k\|_1 = \widehat{\eta}_k(1) = 1$ et dont le support soit disjoint de M_{i_k}. Soit alors λ_k la fonction définie sur G par :

$$\lambda_k(x) = \eta_k(x_{i_k})$$

Il est alors immédiat de vérifier que la suite des fonctions $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère du lemme 1. En effet, le support de λ_k est disjoint de E. D'autre part, $\lambda_k \in A(G)$ et, pour $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I} \in \Gamma$

$$\widehat{\lambda}_k(\gamma) = 0 \qquad \text{s'il existe } i \neq i_k \text{ tel que } \gamma_i \neq 1$$
$$\widehat{\lambda}_k(\gamma) = \widehat{\eta}_k(\gamma_{i_k}) \quad \text{si } \gamma_i = 1 \text{ pour tout } i \neq i_k$$

donc $$\|\widehat{\lambda}_k\|_1 = 1 .$$

De plus, $\widehat{\lambda}_k(1) = 1$ pour tout k ; si γ est un élément de Γ différent de 1, il existe au plus un entier k tel que $\widehat{\lambda}_k(\gamma) \neq 0$, donc $\lim_{k\to\infty} \widehat{\lambda}_k(\gamma) = 0$.

Dans certains cas, on peut aussi démontrer ce résultat par une technique d'ensemble de Pjatecki-Shapiro, généralisée.

Soient G et Γ deux groupes abéliens compacts, et soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes continus de G dans Γ. Disons que la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est normale si pour tout caractère $\gamma \in \widehat{\Gamma}$, différent de 1, $\gamma\circ\varphi_k$ tend vers l'infini dans $\widehat{G}$. Cela revient à dire que pour tout sous-groupe fermé H de Γ, différent de Γ, p désignant la surjection canonique $\Gamma \to \Gamma/_H$, $p\circ\varphi_k$ tend vers l'infini dans Hom $(G, \Gamma/_H)$. En particulier, le sous-groupe fermé de Γ engendré par la réunion des $\varphi_k(G)$ doit être Γ lui-même. En fait, comme on le verra dans la suite la réunion $\bigcup_k \varphi_k(G)$ est dense dans Γ.

Disons alors qu'un ensemble $E \subset G$ est Γ-de Pjatecki-Shapiro s'il existe une suite normale (φ_k) d'homomorphismes continus de G dans Γ telle que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(E)$ ne soit pas dense dans Γ.

Remarquons que s'il en est ainsi pour E, il en est également ainsi pour tout sous-ensemble de E et pour l'adhérence de E. D'autre part, en prenant $\Gamma = R/_Z$ ou $\Gamma = (R/_Z)^s$ ($s \in \mathbb{N}^*$) on retrouve les ensembles de Pjatecki-Shapiro classiques (de dimension 1 ou s).

Tout sous-ensemble E de G, Γ-de Pjatecki-Shapiro, est un ensemble d'unicité. La démonstration, aisément transposée du cas classique, s'obtient encore par le critère du lemme 1. Il existe une fonction $\varepsilon \in A(\Gamma)$, telle que $\|\hat{\varepsilon}\|_1 = \hat{\varepsilon}(1) = 1$ et dont le support soit disjoint de $\varphi_k(E)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On vérifie alors que la suite de fonctions sur G : $\lambda_k = \varepsilon \circ \varphi_k$ satisfait aux conditions du lemme 1. En effet, tout d'abord, le support de λ_k est disjoint de E pour tout k. D'autre part la fonction λ_k est dans $A(G)$; écrivant :

$$\varepsilon(\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon(\gamma) \langle -\xi, \gamma \rangle$$

et

$$\lambda_k(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon(\gamma)\, \gamma \circ \varphi_k(-x)$$

on obtient

$$\lambda_k(x) = \sum_{\chi \in G} \lambda_k(\chi)\, \chi(-x)$$

où :

$$\lambda_k(\chi) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \circ \varphi_k = \chi}} \varepsilon(\gamma)$$

λ_k appartient à $L^1(\hat{G})$ et $\|\lambda_k\|_1 = 1$.

Enfin on a $\lim_{k \to \infty} \lambda_k(\chi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \chi = 1 \\ 0 \text{ si } \chi \neq 1 \end{cases}$

En effet, écrivant :

$$\lambda_k(1) = 1 + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \circ \varphi_k = 1 \\ \gamma \neq 1}} \varepsilon(\gamma)$$

on voit qu'on a à démontrer que pour tout $\chi \in \hat{G}$:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \circ \varphi_k = \chi \\ \gamma \neq 1}} \varepsilon(\gamma) = 0$$

Or, pour tout nombre réel positif η , il existe une partie finie J de $\hat{\Gamma}$ telle que $\sum_{\gamma\in\hat{\Gamma}-J} |\hat{\varepsilon}(\gamma)| \leq \eta$

Mais puisque $\gamma\circ\varphi_k$ tend vers l'infini dans $\hat{G}$ si γ est différent de 1 , χ étant fixé, pour k suffisamment grand, on aura, pour tout $\gamma\in J-\{1\}$, $\gamma\circ\varphi_k \neq \chi$ (puisque J est finie), et donc :

$$\Big| \sum_{\substack{\gamma\in\hat{\Gamma} \\ \gamma\circ\varphi_k=\chi \\ \gamma\neq 1}} \hat{\varepsilon}(\gamma) \Big| \leq \eta$$

ce qui achève la démonstration.

S'il existe un entier s tel que l'on ait pour n suffisamment grand $w_0(\theta_{n+1})-w_0(\theta_n) = s$, et si pour une infinité de n , M_n n'est pas tout $\mathcal{G}_n$, le sous-ensemble $C(\Theta, \mathcal{G}, M)$ de $\mathfrak{M}_0$ est un ensemble F_q^s - de Pjatecki-Shapiro. Plus généralement, si on a deux groupes compacts H et Γ , une partie non vide $P\subset H$, et une famille $(M_n)_{n\in N}$ de parties fermées non vides de Γ , ayant une sous-famille infinie $(M_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$, dont la réunion ne soit pas dense dans Γ , le sous-ensemble $M = P\times \prod_{n\in N} M_n$ du groupe $G = H\times\Gamma^N$ est Γ - de Pjatecki-Shapiro. En effet, la suite d'homomorphismes continus de G dans Γ :

$\pi_k : (x,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \to y_{i_k}$ est normale et $\overline{\bigcup_k \pi_k(M)} \neq \Gamma$. Si au lieu de supposer que $\overline{\bigcup_{n\in N} M_n} \neq \Gamma$, on suppose seulement qu'il existe un voisinage V de 0 dans Γ tel que pour une infinité n , il existe $t_n\in\Gamma$ tel que $(t_n+V)\cap M_n=\emptyset$, on peut encore conclure que M est d'unicité, car il possède un translaté $M-t$, où $t = (0,(t_n)_{n\in\mathbb{N}})$ (les (t_n) étant tels que pour une infinité de n , $(t_n+V)\cap M_n = \emptyset$) qui est un ensemble Γ -de Pjatecki-Shapiro. Enfin, si Γ est fini, M sera un ensemble Γ - de Pjatecki-Shapiro dès qu'il existera une infinité de n tels que $M_n \neq \Gamma$, car alors il existera un élément $\alpha\in\Gamma$ tel que: $\alpha\notin M_n$ pour une infinité de n .

2 - Les ensembles de Cantor, et la répartition mod. 1 des suites de puissances.

On a un premier type de résultats très simples :

Théorème 3. - Soit H un sous-groupe de F_q^+, et, soit $\theta \in \mathfrak{F}_0 - \mathcal{Z}_0$. Désignons par $\mathcal{K}(H,\theta)$ le sous-groupe de $\mathfrak{F}_0^+$, formé des éléments x de la forme :

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \theta^{-n} \ ; \quad a_n \in H \text{ , et les } (a_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls}$$

Pour presque tout $x \in \mathcal{K}(H;\theta)$, (au sens d'une mesure de Haar de $\mathcal{K}(H;\theta)$) la suite $(x\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet comme mesure de répartition mod. 1, la mesure de Haar (normale) du sous-groupe $\mathcal{H}_0(\mathcal{K}(H;\theta))$ de $\mathfrak{M}_0$, c'est-à-dire le sous-groupe fermé de $\mathfrak{M}_0$, engendré par les $(\alpha\mathcal{H}_0(\theta^n))$ $(\alpha \in H \ ; \ n \in Z)$.

Théorème 3 bis. - Supposons maintenant que H soit un sous-corps de F_q. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}(H,\theta)$, de valeurs absolues strictement croissantes. Pour presque tout $x \in \mathcal{K}(H;\theta)$, (au sens d'une mesure de Haar de groupe additif), la suite $(x\,u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet comme mesure de répartition mod. la mesure de Haar du sous-groupe $\mathcal{H}_0(\mathcal{K}(H;\theta))$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{F}_0^*$. Pour presque tout $x \in \mathcal{K}(H;\theta)$, la suite $(\lambda x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la mesure de répartition mod. 1 :

$$\nu_\lambda = (1 - \frac{1}{p}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{p^s} \nu_{s,\lambda}$$

où $\nu_{s,\lambda}$ est la mesure de Haar (normale) du sous-groupe $\mathcal{H}_0(\lambda(\mathcal{K}(H;\theta))^{p^s})$.

Ces résultats se déduisent de façon immédiate de la proposition 8 du chapitre I.

On obtient des résultats plus intéressants, et complétement différents en se plaçant dans un ensemble de Cantor qui ne soit pas un sous-groupe.

Soient θ, μ et x_0 des éléments de $\mathfrak{F}_0$, tels que $|\theta|_0 > 1$ et $\mu \neq 0$. Nous appellerons $C(\theta\ ;\mu\ ;x_0)$ l'ensemble des éléments $x \in \mathfrak{F}_0$ tel que

$$x = x_0 + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k \theta^{-k} \qquad \varepsilon_k \in \{0,1\} .$$

Soit σ la mesure sur $C(\theta\ ;\mu\ ;x_0)$ obtenue par transport de la mesure de Haar du groupe compact $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$ sur $C(\theta\ ;\mu\ ;x_0)$ par l'homémorphisme $(\varepsilon_k)_{k\in} \to x_0 + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k \theta^{-k}$.

Pour calculer certaines intégrales, on utilisera aussi le fait que σ est la limite faible de la suite des mesures $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où σ_n est la mesure obtenue en attribuant la masse $1/_{2^n}$ à chacun des 2^n éléments de $C(\theta\,;\mu\,;x_o)$ de la forme $x_o + \sum_{0\le k<n} \varepsilon_k\,\theta^{-k}$, $((\varepsilon_k)_{0\le k<n}\in\{0,1\}^n)$, c'est-à-dire que pour toute fonction complexe continue φ sur $C(\theta\,;\mu\,;x_o)$, on a :

$$\sigma(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k)_{0\le k<n}\in\{0,1\}^n} \varphi\left(x_o+\mu \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k\,\theta^{-k}\right)$$

On a le résultat suivant :

<u>Théorème 4.</u> - <u>Supposons la condition suivante réalisée :</u>

$$(R)\begin{cases} \underline{\text{Si}}\ p\neq 2\ ,\ \underline{\text{désignant pour tout disque}}\ B\subset \mathfrak{M}_o\ ,\ \underline{\text{par}}\ \nu(B;h)\ (h\in\mathbb{N}^*)\ \underline{\text{le}} \\ \underline{\text{nombre d'entiers}}\ n\ \underline{\text{tel que}}\ 1\le n\le h\ \underline{\text{et que}}\ \mathcal{H}_o(\mu\,\theta^n)\in B\ ,\ \underline{\text{on a}} : \\ \qquad \liminf_{h\to\infty} \dfrac{\nu(B,h)}{\operatorname{Log} h} > 0 \\ \underline{\text{Si}}\ p=2\ ,\ \underline{\text{le sous-groupe fermé de}}\ \mathfrak{M}_o^+\ \underline{\text{engendré par les éléments}} \\ (\mathcal{H}_o(\mu\,\theta^n))_{n\in\mathbb{Z}}\ \underline{\text{est}}\ \mathfrak{M}_o^+\ \underline{\text{lui-même}}. \end{cases}$$

<u>Alors, pour</u> σ <u>-presque tout</u> $x\in C(\theta\,;\mu\,;x_o)$, <u>la suite d'éléments de</u> $\mathfrak{M}_o$, $(x\,\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>est équirépartie mod. 1</u> .

<u>Remarques</u>. La condition (R) est satisfaite à fortiori (dans les deux cas $p\neq 2$ ou $p=2$), si on a : $\liminf_{h\to\infty} \frac{\nu(B;h)}{h} > 0$, ce qui est le cas à plus forte raison si la suite $(\mu\,\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie mod. 1 . La condition (R) est donc satisfaite θ fixé, pour presque tout μ, resp. μ fixé, pour presque tout θ .

Dans le cas $p=2$, si $x_o\notin C(\theta\,;\mu\,;0)$, bien que $C(\theta\,;\mu\,;x_o)$ soit translaté du sous-groupe $C(\theta\,;\mu\,;0)$ de $\mathfrak{J}_o^+$, le résultat du théorème 4, voisin du théorème 3, ne peut cependant y entrer à cause de la translation par x_o. Il faudrait adapter la technique de la proposition 8 du chapitre I, mais ce ne sera pas nécessaire, nous reprendrons directement la technique du cas $p\neq 2$.

Remarquons enfin, que contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, on trouve donc des mesures σ , dont le support soit translaté d'un ensemble d'unicité dans un groupe $\mu \mathcal{Z}_o^+$, et telles que pour σ -presque tout x , la suite $(x\,\theta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit équirépartie mod. 1 .

Démonstration.

Pour tout $u \in \mathfrak{F}_o$, posons :

$$\sigma_N(u) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_o (u\,\theta^n)$$

et pour tout $f \in \mathcal{Z}$, non nul :

$$I_N(f) = \int | \sigma_N(f\,x)|^2 \, d\sigma\ (x)$$

Il faut montrer que pour tout f , la série $\sum_{N=1} \frac{1}{N} I_N(f)$ est convergente ([14]).

Ecrivons :

$$|\sigma_N(u)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} \chi_o(u(\theta^n - \theta^m)) + \chi_o(-u(\theta^n - \theta^m))$$

Posons :

$$J_N(f) = \int \Big[\sum_{1 \leq m < n \leq N} \chi_o\ (f\,x(\theta^n - \theta^m))\Big] \, d\sigma\ (x)$$

Il suffit de montrer la convergence de la série $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^3} J_N(f)$.

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{F}_o$, on a :

$$\int \chi_o(\lambda\,x)\, d\sigma\ (x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\varepsilon_k) \in \{0,1\}^n \\ 0 \leq k < n}} \chi_o(\lambda\,x_o + \lambda\mu \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k\ \theta^{-k})$$

soit

$$\int \chi_o(\lambda\,x) d\sigma\ (x) = \chi_o\ (\lambda\,x_o) \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1+\chi_o(\lambda\ \mu\,\theta^{-k})}{2}$$

donc

$$\left| \int \chi_o(\lambda\,x)\ d\sigma\,(x)\right| = \left| \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1+\chi_o(\lambda\ \mu\ \theta^{-k})}{2} \right|$$

(on emploie la notation $\prod_{k=0}^{+\infty}$ même s'il y a des termes nuls).

D'ailleurs il s'agit en fait ici de produit finis car $\chi_o(\lambda\mu\,\theta^{-k}) = 1$ pour k suffisamment grand).

On a donc :

$$| J_N(f)| \leq \sum_{1\leq m<n\leq N} \prod_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1+\chi_o(f\mu\,(\theta^n-\theta^m)\,\theta^{-k})}{2}\right|$$

Posant $n-m = r$:

$$| J_N(f) | \leq \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-r} \prod_{k=-m}^{+\infty} \left|\frac{1+\chi_o(f\mu\,(\theta^r-1)\,\theta^{-k})}{2}\right|$$

Il existe un entier $k_o = k_o(f) > 0$, tel que $\chi_o(f\,\mu\,\theta^{-k}) = 1$ dès que $k \geq k_o$.
Puisque, pour tout $u \in \mathfrak{F}_o$, $\left|\frac{1+\chi_o(u)}{2}\right| \leq 1$, on peut majorer par :

$$| J_N(f) | \leq N \sum_{r=1}^{N} \prod_{k=k_o}^{+\infty} \left|\frac{1+\chi_o(f\,\mu\,(\theta^r-1)\,\theta^{-k})}{2}\right|$$

soit

$$| J_N(f)| \leq N \sum_{r=1}^{N} \prod_{k=k_o}^{+\infty} \left|\frac{1+\chi_o\,(f\,\mu\,\theta^{r-k})}{2}\right|$$

Supposons d'abord $p \neq 2$. Posons, pour $N > k_o$:

$$R_N(f) = \sum_{r=k_o+1}^{N} \prod_{\ell=1}^{r-k_o} \left|\frac{1+\chi_o(f\,\mu\,\theta^{\ell})}{2}\right|$$

On a :

$$| J_N(f)| \leq N\,(k_o + R_N(f)\,)$$

On est ramené à montrer la convergence de la série $\sum_{N>k_o} \frac{R_N(f)}{N^2}$.

Posant, $\prod_{\ell=1}^{h} \left|\frac{1+\chi_o(f\,\mu\,\theta^{\ell}\,)}{2}\right| = v_h$, $(h \in \mathbb{N}^*)$, comme $R_N(f) = \sum_{h=1}^{N-k_o} v_h$,
il suffit de montrer la convergence de la série $\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{v_h}{h}$.

Il existe une constante c : $0 < c < 1$, $(c = \cos{}^{\pi}/_{p})$ telle que si $\chi_o(u) \neq 1$,
on ait $\left|\frac{1+\chi_o(u)}{2}\right| \leq c$.

Désignons par $\nu_f(h)$ le nombre d'entiers ℓ : $1 \leq \ell \leq h$, tels que $\mathcal{H}_o(\mu\,\theta^{\ell})$ n'appartienne pas au noyau du caractère $u \to \chi_o\,(f\,u)$ de $\mathfrak{M}_o^+$. On a donc :

$$v_h \leq c^{\nu_f(h)}$$

Mais, il existe un disque (de rayon non nul), de $\mathfrak{M}_0$, disjoint du noyau du caractère $u \to \chi_0(f\,u)$, et donc, d'après la condition (R), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour h suffisamment grand, on ait $\nu_f(h) \geq \frac{\varepsilon \log h}{-\log c}$. Alors

$$v_h \leq 1/_h$$

ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{v_h}{h}$.

Si $p = 2$, reprenons l'inégalité :

$$|J_N(f)| \leq N \sum_{r=1}^{N} \prod_{k=k_0}^{+\infty} \left| \frac{1+\chi_0(f\mu\ \theta^{r-k})}{2} \right|$$

Comme le sous-groupe fermé de $\mathfrak{M}_0^+$ engendré par les $(\mathcal{H}_0(\mu\ \theta^n))_{n\in Z}$ est $\mathfrak{M}_0^+$ lui-même, il existe un entier t tel que $\chi_0(f\ \mu\ \theta^t) = -1$, donc, pour $r \geq t+k_0$, $\prod_{k=k_0}^{+\infty} \left| \frac{1+\chi_0(f\ \mu\ \theta^{r-h})}{2} \right| = 0$, d'où : $|J_N(f)| \leq N\ (\max(0,t+k_0-1)$

d'où encore la convergence de la série $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{J_N}{N^3}$.

Appelons pour simplifier $C(\theta\ ;\mu)$ l'ensemble $C(\theta\ ;\ \mu\ ;0)$, ensemble des éléments $x \in \mathfrak{F}_0$, de la forme :

$$x = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k\ \theta^{-k} \qquad \varepsilon_k \in \{0,1\}$$

Nous allons étudier la répartition mod. 1 de la suite $(x\ \theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $x \in C(\theta\ ;\mu)$ en supposant maintenant que la suite $(\mathcal{H}_0(\mu\ \theta^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers 0.

Rappelons ([3], [15]) qu'on appelle élément de Pisot-Vijayaraghavan dans $\mathfrak{F}_0$ (en abrégé P.V. élément), un élément $\theta \in \mathfrak{F}_0$ qui soit entier algébrique (sur $\mathfrak{Z}$), tel que $|\theta|_0 > 1$ et que tous les conjugués de θ soient de valeurs absolues inférieures à 1. Pour un tel élément θ et un entier μ du corps $\mathfrak{F}(\theta)$, la suite $(\mathcal{H}_0(\mu\ \theta^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Inversement, si la suite $(\mathcal{H}_0(\mu\ \theta^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, θ est un P.V. élément et $\mu \in \mathfrak{F}(\theta)$.

Rappelons qu'un élément $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$ est dit normal si la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\eta_n = (\varepsilon_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$$

est équirépartie dans le groupe compact $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$.

Presque tous les éléments de $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$, au sens de la mesure de Haar, sont normaux.

<u>Théorème 5</u>. - <u>Soit</u> $x = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \theta^{-k} \in C(\theta\ ;\mu)$. <u>Si l'élément</u> $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ <u>de</u> $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$ <u>est normal</u>, <u>la suite d'éléments de</u> $\mathfrak{F}_o$, $(x\theta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, <u>a une mesure de répartition mod. 1</u> , τ , <u>dont la transformée de Fourier est</u> :

$$\hat{\tau}(f) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1+\chi_o(f\mu\theta^k)}{2} \qquad (f \in \mathcal{L}\ )$$

<u>Remarque</u>. Comme $\mu\theta^n \to 0$ (mod. 1) lorsque $n \to \pm\infty$, le produit $\prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1+\chi_o(f\mu\theta^k)}{2}$ ne comprend qu'un nombre fini de termes différents de 1 .

<u>Preuve.</u> Il faut étudier la limite des sommes de Weyl :

$$\sigma_N(f\ x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_o(f\ x\theta^n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prod_{k=-n}^{+\infty} (\chi_o(f\ \mu\ \theta^{-k}))^{\varepsilon_{n+k}}.$$

Il existe deux entiers non négatifs n_o et n_1 (dépendant de f) , tels que $\chi_o(f\mu\theta^k) = 1$ dès que $k > n_o$ ou $k < -n_1$.

On peut alors remplacer $\sigma_N(f\ x)$ par :

$$\sigma'_N = \frac{1}{N} \sum_{n_o \le n \le N} \prod_{k=-n_o}^{n_1} (\chi_o(f\ \mu\ \theta^{-k}))^{\varepsilon_{n+k}}$$

Posons $n_o + n_1 + 1 = h$. Pour tout élément $\alpha = (\alpha_{-n_o},\dots,\alpha_o,\dots,\alpha_{n_1}) \in (Z/_2)^h$, soit $\nu(\alpha\ ;N)$ le nombre d'entiers n tel que $n_o \le n \le N$ et que $\varepsilon_{n+k} = \alpha_k$ pour tout k tel que $-n_o \le k \le n_1$.

On a :

$$\sigma'_N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in (Z/_2)^h} \nu(\alpha\ ;N) \prod_{k=-n_o}^{+n_1} (\chi_o(f\ \mu\ \theta^{-k}))^{\alpha_k}$$

Mais comme $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément normal de $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$, on a $\lim_{N\to\infty} \frac{\nu(\alpha;N)}{N} = \frac{1}{2^h}$ pour tout $\alpha \in (Z/_2)^h$, d'où :

$$\lim_{N\to\infty} \sigma'_N = \frac{1}{2^h} \sum_{\alpha \in (Z/_2)^h} \prod_{k=-n_o}^{+n_1} (\chi_o(f\mu\ \theta^{-k}))^{\alpha_k}$$

$$= \prod_{k=-n_o}^{+n_1} \frac{1+\chi_o(f\ \mu\ \theta^{-k})}{2}$$

ce qui démontre le résultat.

Le corollaire suivant est alors immédiat :

<u>Corollaire. - Dans les conditions du théorème 5, pour σ -presque tout</u> $x \in C(\theta\,;\mu)$, <u>la suite</u> $(x\,\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>a une mesure de répartition mod. 1</u> , τ , <u>dont la transformée de Fourier est</u> :

$$\hat{\tau}(f) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \chi_0(f\,\mu\,\theta^{-k})}{2} .$$

Si $p \neq 2$, comme $\hat{\tau}(f) \neq 0$ pour tout f , la mesure τ ainsi trouvée n'est jamais la mesure de Haar de $\mathfrak{M}_0^+$, non plus que celle d'un sous-groupe fermé de $\mathfrak{M}_0$. τ ne peut être non plus de la forme des mesures de répartition mod. 1 qu'on a trouvées précédemment pour les suites $\lambda\, x^n$, c'est-à-dire $(1-\frac{1}{p})\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{p^s}\, \delta_s$ où les (δ_s) sont les mesures de Haar d'une famille décroissante de sous-groupes fermés $(\Gamma_s)_{s\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{M}_0$, car la transformée de Fourier d'une telle mesure ne prend que des valeurs de la forme $\frac{1}{h}$ $(h \in \mathbb{N})$ en 0 . Ces valeurs ne peuvent jamais être prises par $\hat{\tau}$, puisque $^p\hat{\tau}(f)$ est le quotient d'un entier algébrique sur Z par une puissance de 2 .

Par contre, si $p = 2$, τ est la mesure de Haar du sous-groupe fermé de $\mathfrak{M}_0$ engendré par les $(\mathcal{H}_0(\mu\ \theta^n))_{n\in\mathbb{Z}}$: l'énoncé du corollaire du théorème 5 reste vrai sans supposer que la suite $(\mathcal{H}_0(\mu\ \theta^n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 , c'est le résultat du théorème 3.

En reprenant cette méthode dans le cas réel, on peut aussi démontrer un résultat qui précise un résultat de Mendès-France ([27]). Soient θ et μ deux nombres réels tels que $\theta > 2$ et $\mu \neq 0$. Soit $\Gamma(\theta\,,\mu)$ l'ensemble des nombres réels x de la forme $x = \mu \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k\ \theta^{-k}$ $(\varepsilon_k \in \{0,1\})$. Soit σ la mesure sur $\Gamma(\theta\,,\mu)$ obtenue par transport de la mesure de Haar normale de $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$ par l'homéomorphisme de $(Z/_2)^{\mathbb{N}}$ sur $\Gamma(\theta\,,\mu)$: $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k\ \theta^{-k}$.

Mendès-France démontre que si θ est un P.V. nombre différent de 2 , en prenant $\mu = \frac{\theta-1}{\theta}$ la suite de nombres réels $(x\ \theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est équirépartie mod. 1 pour σ -presque aucun x de $\Gamma(\theta\,;\frac{\theta-1}{\theta})$. En fait :

Théorème 6. - Supposons que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mu\,\theta^k\|$ soit convergente (où $\|\xi\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |\xi - n|$). Soit $x = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \theta^{-k} \in \Gamma(\theta,\mu)$. Si $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément normal de $(\mathbb{Z}/_2)^{\mathbb{N}}$, la suite de nombres réels $(x\,\theta^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une mesure de répartition mod. 1, τ, dont la transformée de Fourier est :

$$\hat{\tau}(\ell) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^k}}{2} \qquad (\ell \in \mathbb{Z}) .$$

Démonstration : Remarquons d'abord que le produit infini $\prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^k}}{2}$ est nul ou absolument convergent car, si $\ell \neq 0$,

$\left|\frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^k}}{2} - 1\right| = \left|\frac{e^{2i\pi\ell\theta^k} - 1}{2}\right| \sim \pi\,|\ell|\,\|\mu\,\theta^k\|$ et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|\mu\theta^k\| < +\infty$ puisque, comme $|\theta| > 1$, on a nécessairement $\sum_{k=0}^{+\infty} \|\mu\,\theta^{-n}\| < \infty$.

Considérons la somme de Weyl :

$$\sigma_N(\ell\, x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\ell x\theta^n} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=-n}^{+\infty} (e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\varepsilon_{n+k}} \right) .$$

Soit $\eta > 0$. Choisissons un entier K suffisamment grand pour que $\left|\prod_{|k|>K} \frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}}}{2} - 1\right| \leq \eta$, et que $\sum_{|k|>K} \|\mu\theta^k\|$ soit assez petit pour que $\left|\exp(2i\pi \sum_{|k|>K} \ell\mu\theta^k) - 1\right| \leq \eta$.

On a alors pour tout $n \geq K$,

$$\left| \prod_{k=-n}^{+\infty} (e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\varepsilon_{n+k}} - \prod_{k=-K}^{+K} (e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\varepsilon_{n+k}} \right| \leq \eta$$

Pour N suffisamment grand, on aura alors :

$$\left| \sigma_N(\ell\, x) - \frac{1}{N} \sum_{K\leq n\leq N} \left(\prod_{k=-K}^{+K} (e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\varepsilon_{n+k}} \right) \right| \leq 2\eta$$

Pour tout $\alpha = (\alpha_{-K}, \ldots, \alpha_0, \ldots, \alpha_K) \in (\mathbb{Z}/_2)^{2K+1}$, soit $\nu(\alpha, N)$ le nombre d'entiers $n \in [K,N]$ tels que $\varepsilon_{n+k} = \alpha_k$ pour tout $k \in [-K, +K]$.

Ecrivons :

$$\frac{1}{N}\sum_{K\leq n\leq N}\prod_{k=-K}^{+K}(e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\varepsilon_{n+k}}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}/2)^{2K+1}}\nu(\alpha;N)\prod_{k=-K}^{+K}(e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\alpha_k}.$$

Comme $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\nu(\alpha;N)}{N}=\frac{1}{2^{2K+1}}$, on aura, pour N suffisamment grand :

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}/2)^{2K+1}}\nu(\alpha;N)\prod_{k=-K}^{+K}(e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\alpha_k}$$

$$-\frac{1}{2^{2K+1}}\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}/2)^{2K+1}}\prod_{k=-K}^{+K}(e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\alpha_k}\Big|\leq\eta$$

soit $$\Big|\frac{1}{N}\sum_{K\leq n\leq N}\prod_{k=-K}^{+K}(e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}})^{\varepsilon_{n+k}}-\prod_{k=-K}^{+K}\frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^{-k}}}{2}\Big|\leq\eta$$

Comme

$$\Big|\prod_{k=-K}^{+K}\frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^{k}}}{2}-\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^{k}}}{2}\Big|\leq\eta$$

on a $$\Big|\sigma_N(\ell x)-\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^{k}}}{2}\Big|\leq 4\eta$$

ce qui donne le résultat.

La condition $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\mu\theta^n\|<+\infty$ implique à fortiori $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\mu\theta^n\|^2<\infty$, et par suite que θ soit un nombre de l'ensemble S et que $\mu\in Q(\theta)$ ([29]). Inversement, si $\theta\in S$ et si μ est un entier de $Q(\theta)$, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\mu\,\theta^n\|<+\infty$.

Si $\theta\neq\pm 2$, la mesure τ ainsi trouvée n'est jamais la mesure de Haar. En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que pour tout entier positif ℓ, il existe deux entiers n_ℓ et h_ℓ (de Z) tels que $\ell\,\mu\theta^{n_\ell}=\frac{2h_\ell+1}{2}$. Prenant par exemple $\ell=1$, puis $\ell=2$, on a $\theta^{n_1-n_2}=\frac{2(2h_1+1)}{2h_2+1}$, n_1 et n_2 sont nécessai sairement distincts, et puisque $\theta\in S$, θ est entier rationnel, car sinon θ et tous ses conjugués auraient la même valeur absolue. Mais alors, avec $\ell=1$, on a $2\mu\theta^{n_1}\in Z$, et par suite, dès que $k\geq n_1$, $2\mu\theta^k\in Z$, on a donc, pour tout ℓ pair :

$$\hat{\tau}(\ell) = \prod_{k=-\infty}^{n_1-1} \frac{1+e^{2i\pi\ell\mu\theta^k}}{2} \quad .$$

Il suffit donc maintenant de trouver un entier $\ell' > 0$, tel qu'il n'existe pas d'entier $m > 0$ tel que $2\ell'\mu\theta^{n_1-m} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Soit w_2 la valuation 2-adique sur $\mathbb{Z}(x_2(2) = 1)$. Si θ est impair, tout entier ℓ', convient car, puisque $2\mu\theta^{n_1} \in \mathbb{Z}$, on a $w_2(2\mu) \geq 0$, et par suite $w_2(2\ell'\mu\theta^{n_1-m}) \geq 0$, donc $2\ell'\mu\theta^{n_1-m} \notin Z + \frac{1}{2}$. Si $w_2(\theta) > 1$, on a $w_2(2\ell'\mu\theta^{n_1-m}) = w_2(\ell') + w_2(2\mu\theta^{n_1}) - m\, w_2(\theta)$, il suffit de choisir ℓ' de façon que $w_2(\ell') + w_2(2\mu\theta^{n_1}) \not\equiv -1 \pmod{w_2(\theta)}$. Enfin, si $w_2(\theta) = 1$, ℓ' étant donné, il n'existe qu'une valeur de m pour laquelle on ait $w_2(2\ell'\mu\theta^{n_1-m}) = -1$, à savoir $m = w_2(\ell') + w_2(2\mu\theta^{n_1}) + 1$. Mais si $\theta \neq \pm 2$, soit $\theta = 2\,\theta'$, avec $\theta' \in Z$, et $|\theta'| > 1$, il suffit de prendre $\ell' = 2^s$ où s est un entier positif tel que $\theta'^{\,s+w_2(2\mu\,\theta^{n_1})+1}$ ne divise pas $2\mu\theta^{n_1}$, car alors $2\ell'\mu\theta^{n_1-m}$ (où $m = s + w_2(2\mu\theta^{n_1})+1$), qui s'écrit

$$\frac{2\mu\,\theta^{n_1}}{2^{w_2(2\mu\theta^{n_1})+1} \cdot \theta'^{\,s+w_2(2\mu\theta^{n_1})+1}} \quad , \text{ ne peut appartenir à } \mathbb{Z} + \frac{1}{2} .$$

Au contraire, si $\theta = \pm 2$, et si μ est de la forme $\mu = \frac{\alpha}{2^n}$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$, la mesure de répartition que l'on trouve est la mesure de Haar de $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$: on retrouve le lien bien connu entre la normalité du développement 2-adique d'un nombre réel x et la répartition mod. 1 de la suite $(2^n x)$.

-:-:-:-

CHAPITRE III

Approximation diophantienne par les éléments de certaines suites

1 - La notion de suite fortement eutaxique.

Soit X un espace métrique compact, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de X. On se pose le problème d'approximation suivant : étant donné une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels positifs, on veut étudier pour un élément x de X les solutions de l'inéquation diophantienne (en n)

$$I(x) \; : \; d(x, u_n) \leq \varepsilon_n$$

(d désigne la distance sur E).

Désignons par B_n la boule : $B_n = \{ z \in E \; | d(z, u_n) \leq \varepsilon_n \}$. Soit μ une mesure sur E, positive de masse totale 1. Il est facile de voir que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ est convergente, l'inéquation $I(x)$ n'a qu'un nombre fini de solutions pour μ-presque tout x.

Désignons par β_n la fonction caractéristique de la boule B_n, et pour tout entier positif h, par $N(h\,;\,x)$ le nombre de solutions inférieures ou égales à h de $I(x)$. On a

$$N(h\,;\,x) = \sum_{n=1}^{h} \beta_n(x) ,$$

donc

$$\int N(h;x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n) .$$

On peut donc s'attendre à ce que, sous certaines conditions de régularité, on ait l'estimation :

$$N(h\,;\,x) \sim \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)$$

pour μ-presque tout x. On dira :

Définition 1

Soient X un espace métrique compact, μ une mesure normale sur X, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite d'éléments de X.

Pour toute suite de boules fermées de X, $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que u_n soit centre de B_n, que la suite $(\mu(B_n))$ soit décroissante, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ divergente, on considère pour tout entier positif h et tout élément $x\in X$, le nombre $N(\mathcal{B} ; h ; x)$ d'entiers n tels que $1\leq n\leq h$ et que $x\in B_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite fortement μ-eutaxique si pour toute suite $\mathcal{B}$, satisfaisant aux conditions ci-dessus, on a pour μ-presque tout x :

$$\lim_{h\to\infty} \frac{N(\mathcal{B} ; h ; x)}{\sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)} = 1$$

Remarques - Précisons bien que cet énoncé signifie que pour toute suite de boules $\mathcal{B}$, satisfaisant aux conditions de la définition, l'ensemble $E(\mathcal{B})$ des $x\in X$ tels qu'on ait l'estimation $N(\mathcal{B} ; h ; x) \sim \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)$ est de complémentaire μ-négligeable.

L'énoncé ne signifie pas qu'il existe un ensemble E de complémentaire négligeable, tel qu'on ait l'estimation $N(\mathcal{B} ; h ; x)\sim \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)$ pour tout $x\in E$ et pour toute suite de boules $\mathcal{B}$, ou autrement dit, que $\bigcap_{\mathcal{B}} E(\mathcal{B})$ soit de complémentaire négligeable.

D'autre part, nous avons repris la terminologie de J. Lesca, qui dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est μ-eutaxique si, dans les conditions de la définition I, $N(\mathcal{B};h;x)$ tend vers l'infini pour μ-presque tout $x\in X$. Toute suite fortement μ-eutaxique est donc à plus forte raison μ-eutaxique.

Dans le cas où X est un groupe topologique, et μ la mesure de Haar de X, on remplacera la locution fortement μ-eutaxique par fortement eutaxique.

Précisons que nous employons la locution "suite décroissante" (resp. croissante) au sens large (i.e. monotone non croissante, resp. non décroissante).

Le résultat suivant montre que dans un espace ultramétrique, les suites "suffisamment bien réparties" sont fortement eutaxiques :

Théorème 1. - Soit X un espace ultramétrique compact, et soit μ une mesure normale sur X, de support X. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de X. Supposons qu'il existe une constante positive C telle que pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $0 \leq k < \ell$, et pour toute boule D de X, si on pose $\nu(k ; \ell ; D) = \operatorname{card}\{ n \mid k < n \leq \ell \ ; \ u_n \in D\}$, on ait :

$$\nu(k ; \ell ; D) \leq (\ell - k)\mu(D) + C$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est fortement μ-eutaxique.

De façon plus précise, soit $\mathcal{B} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de boules de X satisfaisant aux conditions de la définition 1, et posons avec les notations de la définition 1, $N(\mathcal{B} ; h ; x) = N(h ; x)$ et $\Phi(h) = \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)$.
On a pour μ-presque tout x, l'estimation :

$$N(h;x) = \Phi(h) + O\left((\Phi(h))^{1/2} (\operatorname{Log}(\Phi(h)))^{\frac{3+\varepsilon}{2}}\right) \qquad (h \to \infty)$$

quelque soit $\varepsilon > 0$.

Précisons que le symbole O n'est pas uniforme par rapport à x, ni évidemment par rapport à ε. La démonstration est basée sur le lemme suivant, qui nous servira aussi pour les autres résultats de ce chapitre.

Lemme 1. - Soit X un ensemble muni d'une mesure positive μ, de masse totale 1, complète. Soit $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur E, à valeurs réelles non négatives, intégrables et de carrés intégrables. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels non négatifs, bornée, telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ soit divergente, et telle qu'en posant :

$$N(k, \ell ; x) = \sum_{k < n \leq \ell} \gamma_n(x)$$

$$\Phi(k, \ell) = \sum_{k < n \leq \ell} \alpha_n \qquad (k, \ell \text{ entiers, } 0 \leq k < \ell)$$

on ait pour tout (k,ℓ) :

(i) $$\int N(k,\ell\,;x)\,d\mu(x) = \Phi(k,\ell) + O(1)$$

(ii) $$\int N^2(k,\ell\,;x)\,d\mu(x) = \Phi^2(k,\ell) + O(\Phi(k,\ell) + O(1)$$

Alors, posant :

$$N(h\,;x) = N(0,h\,;x)$$

$$\Phi(h) = \Phi(0,h)$$

on a pour μ-presque tout x l'estimation

(e) : $$N(h\,;x) = \Phi(h) + O((\Phi(h)))^{1/2}(\log\Phi(h))^{(3+\varepsilon)/2} \qquad (h\to\infty)$$

quelque soit $\varepsilon > 0$.

Remarque - Pour appliquer ce lemme, il suffira évidemment de prouver, à la place de (ii), que l'on a $\int N^2(k,\ell\,;x)\,d\mu(x) \leq \Phi^2(k,\ell) + O((k,\ell)) + O(1)$ car l'inégalité en sens contraire est impliquée par (i).

Démonstration. - Ce lemme est inspiré par un travail de Schmidt [36] dont nous reprenons la méthode. L'hypothèse que la suite (α_n) soit bornée n'est pas nécessaire, mais elle simplifie la démonstration, et cette restriction ne nous gênera pas.

Quitte à tout multiplier par une constante, on peut supposer $\alpha_n \leq 1$ pour tout n. Soit ω la suite définie par $\omega(h) = [\Phi(h)]$ si $h > 0$ et $\omega(0) = 0$. Comme on a $\alpha_n \leq 1$. et que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ est divergente, l'ensemble des valeurs de ω est $\mathbb{N}$. Soit Δ une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0, telle que la restriction à Δ de ω soit une bijection de Δ sur $\mathbb{N}$. Pour tout entier positif s, désignons par L_s l'ensemble des couples (k,ℓ) d'entiers appartenant à Δ tels que $0 \leq k < \ell$, $\omega(\ell) \leq 2^s$ et qu'il existe des entiers non négatifs u et t tels que

$$\omega(k) = u2^t \quad , \quad \omega(\ell) = (u+1)2^t .$$

Désignons par $\lambda(s)$ l'élément de Δ tel que $\omega(\lambda(s)) = 2^s$.

Lemme 2. - On a :

$$\sum_{(k,\ell) \in L_s} \int (N(k,\ell\ ;\ x) - \Phi\ (k,\ell))^2\ d\mu(x) = O\ (s\ 2^s)\ .$$

Preuve. On a :

$$\int (N(k,\ell\ ;\ x) - \Phi\ (k,\ell))^2\ d\mu(x)$$
$$= \int N^2(k,\ell\ ;\ x)\ d\mu(x) - 2\Phi\ (k,\ell) \int N(k,\ell\ ;\ x) d\mu(x) + \Phi^2(k,\ell)$$
$$= O(\Phi\ (k,\ell)) + O(1)\ .$$

Pour t entier fixé $(0 \leq t \leq s)$, soit $L_{s,t}$ l'ensemble des couples $(k,\ell) \in L_s$ tels que $\omega(k)$ et $\omega(\ell)$ soient de la forme $\omega(k) = u\ 2^t$, $\omega(\ell) = (u+1)\ 2^t$.

$$\sum_{(k,\ell) \in L_{s,t}} \Phi(k,\ell) = \Phi\ (\lambda(s)) = O(2^s)$$

et

$$\sum_{(k,\ell) \in L_{s,t}} 1 \leq 2^{s-t} = O\ (2^s)$$

donc en sommant sur t, puisque $0 \leq t \leq s$:

$$\sum_{(k,\ell) \in L_s} \Phi(k,\ell) = O\ (s\ 2^s)\ ,$$

et

$$\sum_{(k,\ell) \in L_s} 1 = O\ (s\ 2^s)$$

d'où le lemme.

Lemme 3. - Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite U_s de sous-ensembles intégrales de X, tels que $\mu(U_s) = O\ (\frac{1}{s^{1+\varepsilon}})$, et que l'on ait l'implication :

$$(x \notin U_s\ ,\ h \in \Delta \quad \text{et} \quad \omega\ (h) \leq 2^s) \Rightarrow |\ N(h;x) - \Phi\ (h)| \leq s^{(3+\varepsilon)/2}\ 2^{s/2}\ .$$

Preuve. Soit $U_s = \{ x \in X \mid \sum_{(k,\ell) \in L_s} (N(k,\ell\ ;\ x) - \Phi\ (k,\ell))^2 > s^{2+\varepsilon}\ 2^s \}$.

Le lemme précédent entraîne $\mu(U_s) = O(\frac{1}{s^{1+\varepsilon}})$.

D'autre part, soit $h \in \Delta$ tel que $\omega(h) \leq 2^s$, et soit le développement 2-adique : $\omega\ (h) = \sum_{i=0}^{s} a_i 2^i$.

Soit $i_1 < i_2 < \dots < i_q$ la suite des i tels que $a_i = 1$, et posons pour $0 \leq r \leq q$:

$$J_0 = 0 \quad \text{et} \quad J_r = \sum_{i=0}^{i_r} a_i \, 2^i \quad \text{si } r > 0 .$$

Soit $j_r \in \Delta$ tel que $\omega(j_r) = J_r$, on a

$$N(h\,;x) - \Phi(h) = \sum_{r=1}^{q} (N(j_{r-1}, j_r\,; x) - \Phi(j_{r-1}, j_r)) ,$$

d'où par l'inégalité de Schwarz :

$$(N(h\,;x) - \Phi(h))^2 \leq q \sum_{r=1}^{q} (N(j_{r-1}, j_r\,;x) - \Phi(j_{r-1}, j_r))^2 .$$

Comme $(j_{r-1}, j_r) \in L_s$, on a donc si $x \notin U_s$:

$$\sum_{r=1}^{q} (N(j_{r-1}, j_r\,; x) - \Phi(j_{r-1}, j_r))^2 \leq s^{2+\varepsilon} \, 2^s ,$$

et puisque $q \leq s$:

$$| N(h\,;x) - \Phi(h)| \leq s^{(3+\varepsilon)/2} \, 2^{s/2} .$$

<u>Fin de la démonstration du lemme 1.</u> Comme la série $\sum_{s=1}^{\infty} \mu(U_s)$ est convergente, pour μ-presque tout x , il existe $s_0 = s_0(x)$ tel que pour tout $s \geq s_0$, on ait $x \notin U_s$. Soit alors $h \in \Delta$, suffisamment grand pour que $\omega(h) \geq 2^{s_0}$ et soit s l'entier défini par $2^{s-1} < \omega(h) \leq 2^s$. Comme on a $s \geq s_0$, x n'appartient pas à U_s et le lemme précédent donne alors

$$| N(h;x) - \Phi(h)| \leq s^{(3+\varepsilon)/2} \, 2^s = O((\Phi(h))^{1/2} (\log \Phi(h))^{(3+\varepsilon)/2}).$$

Le lemme 1 est donc démontré pour $h \in \Delta$, et ε donné .

Prenons comme ensemble Δ l'ensemble Δ' ou Δ'' suivant :

$$\Delta' = \{ h \in \mathbb{N} \mid h > 0 \,;\, \omega(h-1) < \omega(h) \} \cup \{ 0 \}$$

$$\Delta'' = \{ h \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \omega(h) < \omega(h+1) \} \cup \{ 0 \}$$

L'estimation du lemme 1 est alors prouvée pour μ-presque tout x , lorsque $h \in \Delta' \cup \Delta''$ car l'ensemble des x pour lesquels on a cette estimation pour $h \in \Delta' \cup \Delta''$ est l'intersection des deux sous-ensembles de complémentaires μ-négligeables pour lesquels on a le lemme 1 lorsque $h \in \Delta'$ et lorsque $h \in \Delta''$ respectivement. Le lemme s'en déduit alors pour h quelconque, car il existe $h' \in \Delta'$ et $h'' \in \Delta''$ tels que :

$$h' \leq h \leq h'' \quad \text{et} \quad \omega(h') = \omega(h) = \omega(h'')$$

donc

$$\Phi(h') \leq \Phi(h) \leq \Phi(h'') \leq \Phi(h') + 1$$

et comme

$$N(h';x) \leq N(h;x) \leq N(h'';x)$$

l'estimation pour $N(h';x)$ et $N(h'';x)$ donne celle de $N(h;x)$.

Le lemme est alors démontré pour $\varepsilon > 0$ donné, il reste le détail de s'assurer qu'on peut trouver un sous-ensemble A de E, de complémentaire μ-négligeable tel qu'on ait le lemme pour tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$. Ceci est bien évident, il suffit de prendre l'intersection des sous-ensembles A_n de E pour lesquels on a le lemme pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Démonstration du théorème 1. - Soit β_n la fonction caractéristique de la boule B_n. On montre que les conditions du lemme 1 sont satisfaites avec les fonctions (β_n) et la suite $(\mu(B_n))$. Posons :

$$N(k,\ell\,;\,x) = \sum_{k < n \leq \ell} \beta_n(x)$$

$$\Phi(k,\ell) = \sum_{k < n \leq \ell} \mu(B_n)$$

Lemme 4. - On a pour tout couple (k,ℓ) :

(i) $\displaystyle\int N(k,\ell\,;\,x)\, d\mu(x) = \Phi(k,\ell)$

(ii) $\displaystyle\int N^2(k,\ell\,;\,x)\, d\mu(x) \leq \Phi^2(k,\ell) + (2C+1)\,\Phi(k,\ell)$

Preuve. (i) est évidente. Pour (ii), on utilisera le lemme suivant, dont la démonstration est élémentaire:

Lemme 5. - Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels non négatifs tels qu'il existe deux constantes non négatives ρ et C telles que pour tout entier positif N, on ait :

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leq \rho N + C$$

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de nombres réels non négatifs.
Pour tout N, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varepsilon_n \leq \rho \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n + C\,\varepsilon_1$$

En effet, posons $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n = S_k$. On a :

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varepsilon_n = S_1 \varepsilon_1 + (S_2-S_1)\varepsilon_2 + \ldots + (S_N-S_{N-1})\varepsilon_N$$
$$= S_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \ldots + S_{N-1}(\varepsilon_{N-1}-\varepsilon_N) + S_N \varepsilon_N$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varepsilon_n \leq \rho [(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+\ldots+(N-1)(\varepsilon_{N-1}-\varepsilon_N)+ N\varepsilon_N$$
$$+ C[(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \ldots + (\varepsilon_{N-1}-\varepsilon_N) + \varepsilon_N]$$

Soit

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varepsilon_n \leq \rho \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n + C\varepsilon_1$$

Pour obtenir l'inégalité (ii) du lemme 4, on écrit alors :

$$N^2(k,\ell ; x) = N(k,\ell ; x) + 2 \sum_{k< m< n\leq \ell} \beta_n(x)\beta_m(x) ,$$

d'où

$$\int N^2(k,\ell ; x)\, d\mu(x) = \Phi(k,\ell) + 2 \sum_{k< m< n\leq \ell} \mu(B_n \cap B_m) .$$

L'intersection $B_n \cap B_m$ est non vide, si, et seulement si, l'une des boules B_n, B_m est incluse dans l'autre, c'est-à-dire puisque $\mu(B_n) \leq \mu(B_m)$ et que le support de μ est X, si, et seulement si, on a $B_n \subset B_m$; d'où :

$$\sum_{k< m< n\leq \ell} \mu(B_n \cap B_m) = \sum_{k< m<\ell} \Big(\sum_{m< n\leq\ell} \beta_m(u_n)\mu(B_n)\Big).$$

La condition de répartition sur la suite (u_n) donne :

$$\sum_{n=m+1}^{\lambda} \beta_m(u_n) \leq (\lambda-m)\mu(B_m) + C \qquad \forall \lambda > m .$$

Puisque la suite $(\mu(B_n))$ est décroissante, on a d'après le lemme 5 :

$$\sum_{n=m+1}^{\ell} \beta_m(u_n)\,\mu(B_n)) \leq \mu(B_m) \sum_{m< n\leq \ell} \mu(B_n) + C\,\mu(B_{m+1}) ,$$

d'où

$$\sum_{k< m< n\leq\ell} \mu(B_n \cap B_m) \leq \sum_{k<m<n\leq \ell} \mu(B_m)\mu(B_n)+C \sum_{k<m\leq \ell} \mu(B_m)$$

d'où résulte : $\int N^2(k,\ell ; x)\, dx \leq \Phi^2(k,\ell) + (2C+1)\,\Phi(k,\ell)$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarques - Pour simplifier l'expression, appelons condition (d) , la condition de répartition du théorème 1 : $\nu(k,\ell\,;\,D) \leq (\ell-k)\,\mu(D) + C$.

Il est clair que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E satisfaisant à condition (d) est μ-répartie (mais pas nécessairement à discrépance finie). D'autre part, si μ est la mesure de X telle que toutes les boules de même rayon aient la même mesure, il est clair que toute suite fortement μ-eutaxique est μ-répartie : il suffit pour le voir de prendre des boules B_n de même rayon. Par contre, nous ignorons ce qu'il en est si μ est une autre mesure. Des conditions légèrement plus faibles que (d) suffisent pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit fortement μ-eutaxique. Il suffit par exemple que :

1°) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit μ-répartie .

2°) Pour μ-presque tout x , il existe une boule $B = B(x)$, contenant x , telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*;\, u_n\in B}$ (i.e. la suite $u \circ \varphi$ où φ est la bijection croissante de $\mathbb{N}^*$ sur l'ensemble des entiers positifs n tels que $u_n \in B$) satisfasse à la condition (d) dans B avec la mesure $\frac{1}{\mu(B)}\,\mu_B$, μ_B désignant la trace sur B de la mesure μ).

Naturellement, cette condition est effectivement plus faible que (d) , par exemple la suite d'éléments de Z_p , $u_n = n$ si n n'est pas une puissance de p , et $u_{p^e} = 1$ pour tout $e \in \mathbb{N}$, y satisfait, sans satisfaire à la condition (d).

Nous ne savons pas si on peut trouver des conditions plus faibles, pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit fortement μ-eutaxique.

En se plaçant par exemple dans R ou dans $\mathfrak{F}_o$, on peut se demander si les suites de Koksma $(\lambda\,\theta^n)$ sont eutaxiques mod. 1 (faiblement ou fortement) pour presque tout $(\lambda\,,\theta\,)$. Nous ne savons pas répondre à cette question, mais il semble peu probable qu'il en soit ainsi. Au contraire, il paraît plutôt "rare" qu'une suite $(\lambda\,\theta^n)$ soit eutaxique mod. 1 , même faiblement. Cependant, on peut démontrer certains résultats.

Théorème 2. - Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles continûment dérivables sur un segment compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Supposons que pour tout n, $\inf_{x\in[a,b]} \varphi'_n(x) = A_n$ soit positif, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/A_n$ soit convergente, et que si on pose pour tout couple (m,n) d'entiers tels que $1\leq m< n$, $\inf_{x\in[a,b]} \frac{\varphi'_n(x)}{\varphi'_m(x)} = A_{m,n}$, on ait $\sum_{m=1}^{n-1} 1/A_{m,n} = O(1)$.

Supposons de plus qu'il existe une suite décroissante de nombres réels positifs (c_n) tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ soit convergente, et que l'on ait pour tout n, et pour tout couple (x,x') d'éléments de $[a,b]$:

$$\left| \frac{1}{\varphi'_n(x)} - \frac{1}{\varphi'_n(x')}\right| \leq c_n \, | x-x' |$$

Soit alors $([\alpha_n , \beta_n[)$ une suite d'intervalles contenus dans $[0,1[$. Posons $\varepsilon_n = \beta_n - \alpha_n$, et supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ soit divergente. Pour tout $x\in [a,b]$ et tout entier positif h, soit :

$$N(h;x) = \mathrm{card}\,\{ n \mid 1\leq n\leq h \quad \text{et} \quad \{ \varphi_n(x) \}\in [\alpha_n ,\beta_n[\}$$

(où $\{ y \}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel y : $\{y\} = y - [y]$, $[y]$ désignant la partie entière de y).

Posons $$S(h) = \sum_{n=1}^{h} \varepsilon_n$$

Alors, pour presque tout $x\in [a,b]$, on a l'estimation :

$$N(h;x) = S(h) + O((S(h))^{\frac{1}{2}} \log(S(h))^{\frac{3}{2}+\eta}) \quad (h\to \infty) \qquad \eta > 0$$

(la majoration O n'est pas uniforme par rapport à x).

Démonstration - On peut supposer $[a,b] = [0,1]$. Désignons par δ_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha_n , \beta_n[$.

$$N(h;x) = \sum_{n=1}^{h} \delta_n (\{ \varphi_n(x)\})$$

Posons $$N(k,\ell ;x) = \sum_{k< n\leq \ell} \delta_n(\{ \varphi_n(x)\}) \quad (k, \ell \text{ entiers, } 0\leq k< \ell)$$

Nous allons appliquer le lemme 1, et pour cela, nous devons évaluer $\int_0^1 N(k,\ell ; x)\, dx$ et $\int_0^1 N^2(k,\ell ; x)dx$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 6. - Soit φ une fonction réelle continûment dérivable sur un intervalle $[u,v]$, à dérivée positive. Soit $A = \inf_{x \in [u,v]} \varphi'(x)$ et supposons que

$$c = \sup_{\substack{x,x' \in [u,v] \\ x \neq x'}} \left| \frac{1}{x-x'} \left(\frac{1}{\varphi'(x)} - \frac{1}{\varphi'(x')} \right) \right|$$ soit fini.

Soit $[\alpha, \beta[$ un intervalle contenu dans $[0,1[$, de longueur $\beta - \alpha = \varepsilon$ et soit δ sa fonction caractéristique.

On a :

$$\int_u^v \delta\{\varphi(x))\} \, dx = \varepsilon \, (v-u) + O\left(\varepsilon \left(c(v-u) + \frac{1}{A}\right)\right)$$

(le symbole O est ici absolu).

Preuve. Soient j_o et j_1 les entiers définis par :

$$j_o - 1 < \varphi(u) \leq j_o \qquad j_1 \leq \varphi(v) < j_1 + 1$$

Ecrivons : $$\int_u^v = \int_u^{\varphi^{-1}(j_o)} + \sum_{j_o \leq j < j_1} \int_{\varphi^{-1}(j)}^{\varphi^{-1}(j+1)} + \int_{\varphi^{-1}(j_1)}^v$$

(φ^{-1} est la fonction inverse de φ).

On a $$\int_u^{\varphi^{-1}(j_o)} \delta(\{\varphi(x)\})dx = O\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)$$

car pour $x \in [u, \varphi^{-1}(j_o)]$, $\delta(\{\varphi(x)\}) = 1$ équivaut à dire que $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha + j_o - 1, \beta + j_o - 1[$, de longueur ε, donc que x appartient à un intervalle de longueur au plus $\frac{\varepsilon}{A}$, sinon vide.

De même $$\int_{\varphi^{-1}(j_1)}^v \delta(\{\varphi(x)\})dx = O\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)$$

D'autre part : $$\int_{\varphi^{-1}(j)}^{\varphi^{-1}(j+1)} \delta(\{\varphi(x)\})dx = \varphi^{-1}(j+\beta) - \varphi^{-1}(j+\alpha) = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varphi'(x_j)}$$

avec $$x_j \in [\varphi^{-1}(j+\alpha), \varphi^{-1}(j+\beta)]$$

Mais $$\varphi^{-1}(j+1) - \varphi^{-1}(j) = \frac{1}{\varphi'(x'_j)}$$

avec $$x'_j \in [\varphi^{-1}(j), \varphi^{-1}(j+1)]$$

Comme $$\left| \frac{1}{\varphi'(x_j)} - \frac{1}{\varphi'(x'_j)} \right| \leq c\ (\ \varphi^{-1}(j+1) - \varphi^{-1}(j)\ )\ ,$$

$$\int_{\varphi^{-1}(j)}^{\varphi^{-1}(j+1)} \delta(\{\varphi(x)\})dx = \varepsilon\ (\ \varphi^{-1}(j+1) - \varphi^{-1}(j))\ (1 + O\ (c)\ )$$

d'où $$\int_u^v \delta(\{\varphi\ (x)\})dx = \varepsilon\ (\ \varphi^{-1}(j_1) - \varphi^{-1}(j_o)) + O\,(\varepsilon(\tfrac{1}{A} + c(v-u)))$$

Mais $$\varphi^{-1}(j_o) = u + O\,(\tfrac{1}{A})$$

et $$\varphi^{1}(j_1) = v + O\,(\tfrac{1}{A})$$

d'où $$\int_u^v \delta(\{\ \varphi(x)\})dx = \varepsilon\ (v-u) + O\,(\varepsilon(\tfrac{1}{A} + c(v-u)))$$

On peut alors démontrer le :

<u>Lemme 7</u>. - On a :

(i) $$\int_0^1 \delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = \varepsilon_n\ [\ 1 + O\,(\tfrac{1}{A_n} + c_n)]$$

et pour $m < n$

(ii) $$\int_0^1 \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\delta_n(\{\varphi_n(x)\}) = \varepsilon_m\varepsilon_n + O\,(\varepsilon_n(\tfrac{1}{A_m} + \tfrac{1}{A_{m,n}} + c_m)$$

<u>Preuve.</u> (i) résulte immédiatement du lemme précédent ; pour (ii), soient j_o et j_1 les entiers définis par

$$j_o - 1 < \varphi_m(0) \leq j_o \qquad j_1 \leq \varphi_m(1) < j_1 + 1$$

et écrivons comme précédemment :

$$\int_0^1 = \int_0^{\varphi_m^{-1}(j_o)} + \sum_{j_o \leq j < j_1} \int_{\varphi_m^{-1}(j)}^{\varphi_m^{-1}(j+1)} + \int_{\varphi_m^{-1}(j_1)}^{1}$$

On a :

$$\int_0^{\varphi_m^{-1}(j_o)} \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx \leq \int_0^{\varphi_m^{-1}(j_o)} \delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx$$

donc, d'après le lemme précédent :

$$\int_0^{\varphi_m^{-1}(j_o)} \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = O\,(\varepsilon_n\ \mathrm{Max}(\tfrac{1}{A_n}, \tfrac{1}{A_m}))$$

Si $\inf\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{\varphi'_n(x)}{\varphi'_m(x)} = A_{m,n}$ on a : $A_n \geq A_{m,n}\, A_m$, donc puisqu'en particulier

$1/A_{m,n} = O(1)$, $\mathrm{Max}(\frac{1}{A_n}, \frac{1}{A_m}) = O(\frac{1}{A_m})$.

De même :

$$\int_{\varphi_m^{-1}(j_1)}^{1} \delta_m(\{\delta_m(x)\})\, \delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = O(\frac{\varepsilon_n}{A_m})$$

Pour les autres intégrales :

$$\int_{\varphi_m^{-1}(j)}^{\varphi_m^{-1}(j+1)} \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = \int_{\varphi_m^{-1}(j+\alpha_m)}^{\varphi_m^{-1}(j+\beta_m)} \delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx$$

D'après le lemme 6 , on a :

$$\int_{\varphi_m^{-1}(j+\alpha_m)}^{\varphi_m^{-1}(j+\beta_m)} \delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = \varepsilon_n(\varphi_m^{-1}(j+\beta_m) - \varphi_m^{-1}(j+\alpha_m))$$

$$O(\varepsilon_n[c_n(\varphi_m^{-1}(j+\beta_m)-\varphi_m^{-1}(j+\alpha_m))+ \sup_{x\in[\varphi_m^{-1}(j),\, \varphi_m^{-1}(j+1)]} \frac{1}{\varphi'_n(x)}])$$

Or $$\varphi_m^{-1}(j+\beta_m) - \varphi_m^{-1}(j+\alpha_m) = \varepsilon_m(\varphi_m^{-1}(j+1)- \varphi_m^{-1}(j))\ (1+O(c_m))$$

D'autre part :

$$\sup_{x\in[\varphi_m^{-1}(j),\, \varphi_m^{-1}(j+1)]} \frac{1}{\varphi'_n(x)} \leq \frac{1}{A_{m,n}} \sup_{x\in[\varphi_m^{-1}(j),\varphi_m^{-1}(j+1)]} \frac{1}{\varphi'_m(x)}$$

et $$\sup_{x\in[\varphi_m^{-1}(j),\varphi_m^{-1}(j+1)]} \frac{1}{\varphi'_m(x)} = (\varphi_m^{-1}(j+1)- \varphi_m^{-1}(j))\ (1+ O(c_m))$$

$$= O(\varphi_m^{-1}(j+1) - \varphi_m^{-1}(j))$$

On obtient donc :

$$\int_{\varphi_m^{-1}(j)}^{\varphi_m^{-1}(j+1)} \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\,\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = \varepsilon_m\varepsilon_n(\varphi_m^{-1}(j+1) - \varphi_m^{-1}(j))$$

$$+ O(\varepsilon_n\ (\varphi_m^{-1}(j+1) - \varphi_m^{-1}(j))\ (\frac{1}{A_{m,n}} + c_m))$$

En additionnant, tenant compte de :

$$\varphi_m^{-1}(j_1) - \varphi_m^{-1}(j_o) = 1 + O(\frac{1}{A_m})$$

on obtient :

$$\int_0^1 \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\,\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = \varepsilon_n\varepsilon_m + O(\varepsilon_n(\frac{1}{A_m} + \frac{1}{A_{m,n}} + c_m))$$

On en déduit immédiatement les estimations suivantes, dont le théorème 2 découle aussitôt, en appliquant le lemme 1 :

Lemme 8. - Posons $S(k,\ell) = \sum_{k<n\leq\ell} \varepsilon_n$. On a :

(i) $\int_0^1 N(k,\ell\,;x)\,dx = S(k,\ell) + O(1)$

(ii) $\int_0^1 N^2(k,\ell\,;x)dx \leq S^2(k,\ell) + O(S(k,\ell)) + O(1)$

Preuve. (i) résulte évidemment du lemme 7, et de la convergence des séries $\Sigma\ 1/A_n$ et $\Sigma\ c_n$. Pour (ii) , écrivons :

$$\int_0^1 N^2(k,\ell\,;x)dx = \int_0^1 N(k,\ell\,;x)+2\sum_{k<m<n\leq\ell}\int_0^1 \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\,\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx$$

D'après le lemme 7 , on a :

$$\sum_{k<m<n\leq\ell}\int_0^1 \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\,\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx = \sum_{k<m<n\leq\ell}\varepsilon_m\varepsilon_n$$
$$+O(\sum_{k<n<\ell}(\sum_{1\leq m<n}(\frac{1}{A_m} + \frac{1}{A_{m,n}} + c_m))\ \varepsilon_n$$

donc :

$$\sum_{k<m<n\leq\ell}\int_0^1 \delta_m(\{\varphi_m(x)\})\,\delta_n(\{\varphi_n(x)\})dx \leq S^2(k,\ell) + O(S(k,\ell))$$

d'où le résultat annoncé, ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème 2 entraîne en particulier l'équirépartition mod. 1 de la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour presque tout $x \in [a,b]$. En effet, en prenant pour chaque intervalle $[\alpha_n, \beta_n[$, le même intervalle donné $[\alpha,\beta[$, on voit que si on pose

$$\nu(\alpha, \beta; h ; x) = \operatorname{card}\{n \mid 1 \leq n \leq h \mid \{\varphi_n(x)\} \in [\alpha, \beta[\},$$

le théorème 2 montre que pour presque tout $x : \lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{\nu(\alpha;\beta;h;x)}{h} = \beta - \alpha$.

Soit M une partie dénombrable dense de $[0,1[$. Pour presque tout $x \in [a,b]$, on aura pour tous α et β de M $\lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{\nu(\alpha;\beta;h;x)}{h} = \beta-\alpha$, et la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera donc équirépartie mod. 1.

Soit $\theta > 1$. Le théorème 2 s'applique sur tout intervalle à la suite de fonctions : $\varphi_n(x) = x\,\theta^r$. De façon plus générale, soit u_n une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{u_n}$ soit convergente et que l'on ait $\sum\limits_{1\leq m<n} u_m = O(u_n)$. Le théorème 2 s'applique alors sur tout intervalle à la suite de fonctions $\varphi_n(x) = x\,u_n$.

Soit λ un nombre réel positif. Le théorème 2 s'applique également à la suite de fonctions : $\varphi_n(x) = \lambda\, x^n$ sur tout intervalle $[a,b]$ tel que $1 < a < b$. En effet, $\inf\limits_{x\in[a,b]} \varphi'_n(x) = n\lambda a^{n-1}$ et la série $\sum\limits_n \dfrac{1}{n\,a^{n-1}}$ est convergente.

D'autre part, $\inf\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{\varphi'_n(x)}{\varphi'_m(x)} = \dfrac{n}{m}\, a^{n-m}$, et on a bien $\sum\limits_{1\leq m<n} m\,a^m = O(n\,a^n)$,

et enfin $\left| \dfrac{1}{\varphi'_n(x)} - \dfrac{1}{\varphi'_n(y)} \right| \leq \dfrac{a^{-n}}{\lambda} |x-y|$.

On a un résultat analogue dans $\mathcal{F}_o$:

<u>Théorème 3</u>. - <u>Soit</u> D <u>un disque de</u> $\mathcal{F}_o$, <u>et soit</u> $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>une suite d'applications de</u> D <u>dans</u> $\mathcal{F}_o$, <u>telles que, pour tout</u> n, <u>il existe</u> $\lambda_n \in Z$ <u>tel que</u> :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|_o = q^{\lambda_n} |x-y|_o$$

<u>pour tout couple</u> x,y <u>d'éléments de</u> D. <u>Supposons de plus que</u> :

$$\sum_{1\leq m<n} q^{\lambda_m} = O(q^{\lambda_n})$$

<u>pour tout</u> n.

Soit $(\Delta_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ une suite de disques contenus dans $\mathfrak{M}_o$. Désignons par ε_n le rayon de Δ_n, et supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ soit divergente. Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in D$, soit $N(h;x)$ le nombre d'entiers n tels que $1 \leq n \leq h$ et que $\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)) \in \Delta_n$. Posons $S(h) = \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_n$.

Pour presque tout $x \in D$, on a l'estimation :

$$N(h\,;\,x) = S(h) + O(\,(S(h))^{1/2}\,(\mathrm{Log}\,S(h))^{3/2+\eta}\,)$$

quelque soit $\eta > 0$.

Lemme 9. - Soit B un disque de $\mathfrak{F}_o$, de rayon q^s, et soit φ une application de B dans $\mathfrak{F}_o$, telle qu'il existe $\lambda \in Z$ tel que l'on ait pour tout couple x,y d'éléments de B :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|_o = q^{\lambda}\,|x-y|_o$$

Soit Δ un disque contenu dans $\mathfrak{M}_o$, de rayon ε, et soit δ sa fonction caractéristique. On a :

$$\int_B \delta(\,\mathcal{H}_o(\varphi(x)))\,dx = q^{s+1}\,\varepsilon + O\,(q^{-\lambda}\,\varepsilon)$$

Preuve. Supposons d'abord que $s+\lambda \geq -1$, et effectuons la partition de B en $q^{s+\lambda+1}$ disques $(B_j)_{1\leq j \leq q^{s+\lambda+1}}$ de rayons $q^{-(1+\lambda)}$. Pour tout j, $\varphi(B_j)$ est un disque de rayon $1/q$. Or sur un disque Γ, de rayon $1/q$, la fonction $z \to E(z)$ est constante et si on désigne par f sa valeur, la restriction de $\mathcal{H}_o$ à Γ n'est autre que la translation $x \to x-f$, de Γ sur $\mathfrak{M}_o$.
Donc l'ensemble des $x \in B_j$ tels que $\mathcal{H}_o(\varphi(x)) \in \Delta$ est un disque de rayon $q^{-\lambda}\,\varepsilon$, et :

$$\int_{B_j} \delta\,(\mathcal{H}_o(\varphi(x)))\,dx = q^{-\lambda}\,\varepsilon$$

d'où

$$\int_B \delta\,(\mathcal{H}_o(\varphi(x)))\,dx = q^{s+1}\,\varepsilon$$

Si $s+\lambda < -1$, $\varphi(B)$ est un disque de rayon inférieur à 1. Tous les éléments de $\varphi(B)$ ont la même partie entière g, et la restriction de $\mathcal{H}_o$ à $\varphi(B)$ est une translation qui applique $\varphi(B)$ sur un disque contenu dans $\mathfrak{M}_o$. L'ensemble des $x \in B$ tels que $\mathcal{H}_o(\varphi(x)) \in \Delta$ est donc un disque de rayon $q^{-\lambda}\,\varepsilon$, ou est vide, et :

$$\int_B \delta(\mathcal{H}_o(\varphi(x)))\,dx \leq q^{-\lambda}\,\varepsilon$$

Comme $q^{s+1}\varepsilon \leq q^{-\lambda}\varepsilon$, on peut donc écrire :

$$\int_B \delta(\mathcal{H}_o(\varphi(x)))\,dx = q^{s+1}\varepsilon + O(q^{-\lambda}\varepsilon)$$

Pour la démonstration du théorème 3, on peut supposer sans inconvénient que D soit un disque de rayon 1 , et que l'on ait $\lambda_n \geq -1$ pour tout n , car la condition $\sum_{1\leq m\leq n} q^{\lambda_m} = O(q^{\lambda_n})$ implique que $\inf_n q^{\lambda_n} > 0$, et par suite $\lim_{n\to\infty} q^{\lambda_n} = +\infty$. Alors :

<u>Lemme 10</u>. - <u>On a pour tout</u> n :

$$\text{(i)} \quad \int_D \delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))\,dx = q\,\varepsilon_n$$

<u>Pour tout couple</u> m,n <u>d'entiers tels que</u> $1\leq m < n$, <u>on a</u> :

$$\text{(ii)} \quad \int_D \delta_m(\mathcal{H}_o(\varphi_m(x)))\,\delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))dx = q^2\varepsilon_m\varepsilon_n + O(q^{\lambda_m-\lambda_n}\varepsilon_n)$$

<u>Preuve</u>. (i) résulte aussitôt du lemme précédent. D'autre part, comme on l'a vu au lemme 9, l'ensemble des $x\in D$ tels que $\mathcal{H}_o(\varphi_m(x))\in\Delta_m$ est la réunion de q^{λ_m+1} disques $(D_m^j)_{1\leq j\leq q^{\lambda_m+1}}$, disjoints, de rayon $q^{-\lambda_m}\varepsilon_m$. On a :

$$\int_D \delta_m(\mathcal{H}_o(\varphi_m(x)))\,\delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))dx = \sum_{j=1}^{q^{\lambda_m+1}} \int_{D_m^j} \delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))\,dx$$

Appliquons le lemme 9 à chaque disque D_m^j :

$$\int_{D_m^j} \delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))\,dx = q^{-\lambda_m+1}\varepsilon_m\,.\,\varepsilon_n + O(q^{-\lambda_n}\varepsilon_n)$$

d'où :

$$\int_D \delta_m(\mathcal{H}_o(\varphi_m(x)))\,\delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))dx = q^2\varepsilon_m\varepsilon_n + O(q^{\lambda_m-\lambda_n}\varepsilon_n)$$

Pour tout couple d'entiers k et ℓ , tels que $0 < k < \ell$, soit $N(k,\ell;x) = \sum_{k<n\leq\ell} \delta_n(\mathcal{H}_o(\varphi_n(x)))$, le nombre d'entiers n tels que $k < n \leq \ell$ et que $\mathcal{H}_o(\varphi_n(x))\in\Delta_n$. Posons $S(k,\ell) = q\sum_{k<n\leq\ell}\varepsilon_n$.

On déduit immédiatement du lemme précédent :

Lemme 11. - On a :

(i) $\int_D N(k,\ell\ ;\ x)\,dx = S(k,\ell)$

(ii) $\int_D N^2(k,\ell\ ;\ x)\,dx \leq S^2(k,\ell) + O(S(k,\ell))$

Preuve. (i) est évidente, et (ii) s'obtient en écrivant :

$$\int_D N^2(k,\ell\ ;x)dx = S(k,\ell)+2 \sum_{k<m<n\leq\ell} \int_D \delta_m(\mathcal{H}_m(\varphi_m(x)))\delta_n(\mathcal{H}_n(\varphi_n(x)))dx$$

donc :

$$\int_D N^2(k,\ell\ ;x)dx \leq S^2(k,\ell)+S(k,\ell) + O\Big(\sum_{k<m<n\leq\ell} q^{\lambda_m-\lambda_n}\varepsilon_n\Big)$$

Or, puisque $\sum_{1\leq m<n} q^{\lambda_m} = O(q^{\lambda_n})$, on a :

$$\sum_{k<m<n\leq\ell} q^{\lambda_m-\lambda_n}\varepsilon_n \leq \sum_{k<n\leq\ell} \Big(\sum_{1\leq m<n} q^{\lambda_m}\Big) q^{-\lambda_n}\varepsilon_n = O(S(k,\ell))$$

Le théorème 3 résulte alors du lemme 1 .

Le théorème 3 entraîne encore l'équirépartition mod. 1 de la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour presque tout $x\in D$. En effet, prenant pour la suite des disques Δ_n de $\mathfrak{M}_o$, le même disque donné Δ , de rayon ρ/q , on voit que pour presque tout $x \in D$, si $\nu(\Delta\ ;\ h\ ;\ x) = \operatorname{card}\{n \mid 1\leq n\leq h\ ;\ \mathcal{H}_o(\varphi_n(x)) \in \Delta\}$, on a $\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\nu(\Delta\ ;\ h\ ;\ x) = \rho$. Ceci entraîne l'équirépartition mod. 1 de la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour presque tout $x\in D$, car l'ensemble des disques de $\mathfrak{M}_o$ est dénombrable.

Le théorème 3 s'applique sur tout disque à la suite de fonctions :

$$\varphi_n(x) = x\,u_n$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments non nuls de $\mathfrak{M}_o$ telle que $\sum_{1\leq m<n} |u_m|_o = O(|u_n|_o)$. Ceci vaut en particulier si (u_n) est la suite $u_n=\theta^n$, où θ est un élément de $\mathfrak{F}_o$ tel que $|\theta|_o > 1$.

Soit λ un élément non nul de $\mathfrak{F}_o$. Le théorème 3 s'applique sur tout disque D de rayon 1, disjoint de $\mathfrak{L}_o$, à la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; $(n,p)=1$ où

$$\varphi_n(x) = x^n$$

En effet, si on désigne par r la valeur absolue des éléments de D, $(r > 1)$ on a pour tout x et tout y de D :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|_o = r^{n-1} \quad |x-y|_o$$

et la suite (r^{n-1}) satisfait à la condition :

$$\sum_{1 \leq m < n} r^{m-1} = O(r^{n-1})$$

-:-:-:-

CHAPITRE IV

Approximation diophantienne par les fractions rationnelles dans un corps de séries formelles

1 - Le développement en fraction continue.

Une première partie de la théorie est valable dans le complété O-adique $\mathcal{R}_o$ du corps $\mathcal{R} = K(T)$ des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps quelconque K. On se donne une valeur absolue associée à la valuation O-adique : $|f|_o = b^{\deg f}$ b étant un nombre réel plus grand que 1.

Définition 1. - On appelle fraction continue $(a_o, \dots, a_n, \dots)$ la donnée d'une suite finie ou infinie (fraction continue limitée ou illimitée) d'éléments de $\mathcal{Z}$, $a_o, \dots, a_n, \dots$ telle que $|a_n|_o > 1$ pour tout $n \geq 1$, à laquelle on associe la suite des fractions $(r_n)_{n \geq 0}$ (suite des "réduites") : $r_n = a_o + \frac{1|}{|a_1} + \dots + \frac{1|}{|a_n}$.

On dit qu'une fraction continue converge vers un élément $x \in \mathcal{R}_o$ si la fraction est limitée et si x est le dernier terme de la suite (r_n), ou si la fraction continue est illimitée, et si la suite (r_n) tend vers x.

Il est clair que les fractions (r_n) existent bien, car si $n \geq 2$, $\left| a_{n-1} + \frac{1|}{|a_n} \right|_o = |a_{n-1}|_o > 1$, donc $a_{n-1} + \frac{1|}{|a_n} \neq 0$. Alors, si $n \geq 3$, la fraction $a_{n-2} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \frac{1|}{|a_n}$ existe et est non nulle car de même valeur absolue que a_{n-2}, et ainsi de suite, on remonte à l'existence de la fraction $a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_n}$, qui est non nulle, d'où l'existence de r_n.

Théorème 1. - Toute fraction continue est convergente, et inversement tout élément x de $\mathcal{R}_o$ est limite d'une fraction continue unique (développement en fraction continue de x). Pour que le développement en fraction continue de x soit limité, il faut et il suffit que $x \in \mathcal{R}$.

Preuve. Soient (P_n) et (Q_n) les suites de polynômes déterminées de la façon suivante :

$$P_o = a_o \qquad P_1 = 1 + a_o a_1$$
$$Q_o = 1 \qquad Q_1 = a_1$$

et si $n > 1$, et si a_n est défini,

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

On a :

$$r_n = \frac{P_n}{Q_n} \text{ (et } \frac{P_n}{Q_n} \text{ est irréductible car } P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1}).$$

Comme $\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|_o = \frac{1}{|Q_n|_o |Q_{n-1}|_o} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (si la fraction continue est illimitée), car $|Q_n|_o = \prod_{1 \leq k \leq n} |a_k|_o$, la suite $\frac{P_n}{Q_n}$ est convergente.

Inversement, soit $x \in \mathfrak{F}_o$ donné. Soient les suites (finies ou infinies), de polynômes, $a_o, \ldots, a_n, \ldots$, et d'éléments de $\mathfrak{K}_o$, $x_o, \ldots, x_n, \ldots$, déterminées de la façon suivante :

$$x_o = x \qquad a_o = E_o(x)$$

et par récurrence si $x_n \neq a_n$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = x_n - a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} = E_o(x_{n+1})$$

le procédé s'arrêtant si x_n est un polynôme, i.e. si $x_n = a_n$.

Pour $n > 0$, si x_n est défini, on a $|x_n|_o > 1$ et $|a_n|_o = |x_n|_o > 1$. On a donc bien une fraction continue $(a_o, \ldots, a_n, \ldots)$. Pour chaque n :

$$x = a_o + \frac{1|}{|a_1} + \ldots + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \frac{1}{x_n}$$

Donc, dans le cas où la fraction est limitée, x est égal à la dernière réduite. Sinon, le fait que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ découle de la formule d'approximation :

$$|x - r_n|_o < \frac{1}{|Q_n|_o^2}$$

puisque, comme $$x = \frac{x_{n+1} P_n + P_{n-1}}{x_{n+1} Q_n + Q_{n-1}}$$

on a $$\left|x - \frac{P_n}{Q_n}\right|_o = \frac{1}{|Q_n|_o \, |x_{n+1} Q_n + Q_{n-1}|_o}$$

soit : $$\left|x - \frac{P_n}{Q_n}\right|_o = \frac{1}{|Q_n|_o \, |Q_{n+1}|_o} = \frac{1}{|a_{n+1}|_o \, |Q_n|_o^2}$$

L'unicité du développement en fraction continue d'un élément $x \in \mathcal{R}_o$ est bien claire car si $x = a_o + \frac{1|}{|a_1} + \dots + \frac{1|}{|a_n} + \dots$ avec $a_n \in \mathcal{Z}$ et $|a_n|_o > 1$ pour $n \geq 1$, on a nécessairement $a_o = E(x)$, $a_1 = E(\frac{1}{x-a_o})$, etc ... . Le fait qu'un élément $x \in \mathcal{R}$ ait un développement en fraction continue limité s'obtient comme dans le cas classique par l'algorithme de la division. La suite des (x_n) déterminée par $x_o = x$ et $\frac{1}{x_{n+1}} = x_n - a_n$ tant que $x_n \neq a_n$, i.e. $x_n = a_n + \frac{1|}{|a_{n+1}} + \frac{1|}{|} \dots$ s'appelle la suite des restes de x .

2 - Très bonnes approximations.

Pour tout $M = b^m$ $(m \in \mathbb{N})$, soit Φ_M l'ensemble des $r \in \mathcal{R}$ de la forme $r = \frac{P}{Q}$ avec $1 \leq |Q|_o \leq M$. Φ_M est un sous-ensemble discret de $\mathcal{R}_o$, car si $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ sont deux éléments distincts de Φ_M , $\left|\frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q'}\right|_o \geq \frac{1}{M^2}$. Soit $x \in \mathcal{R}_o$. L'ensemble des valeurs absolues $|r-x|_o$ où r décrit Φ_M , a donc un minimum, et par suite, il en est de même de l'ensemble $\{|Qx-P|_o\}$ $(P \in \mathcal{Z}$; $Q \in \mathcal{Z}$; $1 \leq |Q|_o \leq M)$.

<u>Définition 2.</u> - On appelle très bonne approximation d'ordre M d'un élément $x \in \mathcal{R}_o$, tout élément $r \in \Phi_M$, qui puisse s'écrire $r = \frac{P}{Q}$, P et Q étant des éléments de $\mathcal{Z}$ tels que $$|Qx-P|_o = \min_{\substack{R \in \mathcal{Z} \\ S \in \mathcal{Z} \\ 1 \leq |S|_o \leq M}} |Sx - R|_o$$

Naturellement P et Q sont nécessairement premiers entre eux sauf si $x = \frac{P}{Q}$.

Il revient au même de dire que $r = \frac{E_o(Q\,x)}{Q}$ où Q est tel que
$$|\mathcal{H}_o(Q\,x)|_o = \min_{1 \leq |S|_o \leq M} |\mathcal{H}_o(S\,x)|_o$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2. - L'ensemble des très bonnes approximations d'un élément $x \in \mathcal{R}_0$ est l'ensemble des réduites de x.

Démonstration - Nous démontrons tout d'abord que :

Lemme 1. - Si P et Q sont des polynômes premiers entre eux, tels que $|x - \frac{P}{Q}|_0 < \frac{1}{|Q|^2}$, $\frac{P}{Q}$ est une très bonne approximation de x. On a de plus, pour tout $S \in \mathcal{B}$, non proportionnel à Q et tel que $1 \leq |S|_0 \leq |Q|_0$

$$|\mathcal{H}_0 (Q\, X)|_0 < |\mathcal{H}_0 (S\, X)|_0$$

Preuve. Soient deux éléments R et S de $\mathcal{B}$ tels que $1 \leq |S|_0 \leq |Q|_0$ et $\frac{R}{S} \neq \frac{P}{Q}$. On a :

$$\left|\frac{P}{Q} - \frac{R}{S}\right|_0 \geq \frac{1}{|Q|_0\ |S|_0} \geq \frac{1}{|Q|_0^2}$$

donc

$$\left|x - \frac{R}{S}\right|_0 = \left|\frac{P}{Q} - \frac{R}{S}\right|_0 \geq \frac{1}{|Q|_0\ |S|_0}$$

et

$$|Sx - R|_0 \geq \frac{1}{|Q|_0} > |Q\, x - P|_0 .$$

On peut maintenant démontrer le théorème 2. Tout d'abord comme toute réduite vérifie $|x - \frac{P}{Q}|_0 < \frac{1}{|Q|_0^2}$, le lemme précédent montre que toute réduite est une très bonne approximation. Pour la réciproque, supposons les très bonnes approximations rangées de façon que la suite des dénominateurs soit de valeur absolue croissante (à priori pas nécessairement strictement). Il suffit de montrer que la très bonne approximation $\frac{P}{Q}$ suivant une réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ $(n \geq 0)$ est la réduite suivante : $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, et pour cela il suffit de montrer que $|Q|_0 \geq |Q_{n+1}|_0$ car la dernière assertion du lemme précédent montre qu'il n'existe pas de très bonne approximation $\frac{P}{Q}$ de x, autre que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, telle que $|Q|_0 = |Q_{n+1}|_0$.

Il existe des polynômes C et D premiers entre eux (et tous deux non nuls) tels que :

$$\frac{P}{Q} = \frac{C\, P_n + D\, P_{n-1}}{C\, Q_n + D\, Q_{n-1}}$$

(si $n = 0$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$).

$C\,P_n + D\,P_{n-1}$ et $C\,Q_n + D\,Q_{n-1}$ sont premiers entre eux car :

$$(Q_n(C\,P_n + D\,P_{n-1})) - P_n(C\,Q_n + D\,Q_{n-1}) = (-1)^n\,D$$

$$Q_{n-1}(C\,P_n + D\,P_{n-1}) - P_{n-1}(C\,Q_n + D\,Q_{n-1}) = (-1)^{n-1}\,C$$

On a donc en multipliant éventuellement C et D par une constante $\lambda \in K$:

$$P = C\,P_n + D\,P_{n-1}$$

$$Q = C\,Q_n + D\,Q_{n-1}$$

Ecrivant $x = \dfrac{x_{n+1}\,P_n + P_{n-1}}{x_{n+1}\,Q_n + Q_{n-1}}$ $\qquad \dfrac{P}{Q} = \dfrac{C\,P_n + D\,P_{n-1}}{C\,Q_n + D\,Q_{n-1}}$

on a : $|Qx-P|_o = \dfrac{|D\,x_{n+1} - C|_o}{|Q_{n+1}|_o}$

Alors, comme $|Q_n x - P_n|_o = \dfrac{1}{|Q_{n+1}|_o}$, on aura :

$|Qx - P|_o \leq |Q_n x - P_n|_o$ si et seulement si

$|D\,x_{n+1} - C|_o \leq 1$, ce qui exige,

comme $|x_{n+1}|_o \leq 1$ et $|D|_o \geq 1$, $|C|_o \geq 1$, que l'on ait :

$|C|_o = |D|_o\,|x_{n+1}|_o$, donc

$|C|_o > |D|_o$ et $|C|_o \geq |A_{n+1}|_o$

Alors $|Q|_o = |C\,Q_n + D\,Q_{n-1}|_o = |C\,Q_n|_o \geq |Q_{n+1}|_o$

ce qui démontre notre assertion. Ce raisonnement est en défaut si la suite des réduites s'arrête à $\dfrac{P_n}{Q_n} = x$, mais ce cas est trivial : il n'y a pas alors de très bonnes approximations $\dfrac{P}{Q}$ de x avec P et Q premiers entre eux et $|Q|_o > |Q_n|_o$.

Compte tenu du lemme 1, on déduit alors du théorème 2, le :

Corollaire : L'ensemble des solutions de l'inéquation diophantienne :

$$\left|x - \frac{P}{Q}\right|_0 < \frac{1}{|Q|_0^2} \qquad (P \in \mathcal{Z},\ Q \in \mathcal{Z},\ (P,Q) = 1)$$

est l'ensemble des réduites de x .

3 - Equivalence de développements en fraction continue.

Dans l'ensemble des éléments $x \in \hat{\mathcal{R}}_0 - \hat{\mathcal{R}}$, considérons la relation d'équivalence suivante : $x \mathrel{T} y$ si (x_n) et (y_n) étant les suites des restes de x et de y , il existe deux entiers non négatifs h et k et une constante $\lambda \in K^*$ tels que $x_h = \lambda y_k$. Il revient au même de dire, si :

$$x = a_0 + \frac{1\rfloor}{\lfloor a_1} + \dots + \frac{1\rfloor}{\lfloor a_n} + \dots$$

$$y = b_0 + \frac{1\rfloor}{\lfloor b_1} + \dots + \frac{1\rfloor}{\lfloor b_n} + \dots$$

que $a_{h+m} = \lambda^{(-1)^m} b_{k+m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On dira que x et y ont leurs développements en fraction continue équivalents.

Théorème 3. - La relation d'équivalence T coïncide avec l'équivalence modulaire ; on a : $x \mathrel{T} y$ si et seulement si $x = \dfrac{a\,y + b}{c\,y + d}$ a,b,c,d étant des éléments de $\mathcal{Z}$ tels que $ad - bc \in K^*$.

Preuve. Notons $x \mathrel{T_1} y$ l'équivalence modulaire. L'implication $x \mathrel{T} y \Longrightarrow x \mathrel{T_1} y$ est évidente car on a $x \mathrel{T_1} x_k$ et $y \mathrel{T_1} y_k$.

Inversement, soient x et y tels que $x \mathrel{T_1} y$: $x = \dfrac{a\,y + b}{c\,y + d}$ a,b,c,d étant des éléments de $\mathcal{Z}$ tels que $ad - bc \in K^*$.

Supposons d'abord que l'on ait $|x|_0 > 1$ et $|c|_0 > |d|_0 > 0$. On a alors :

$$\left|y - \frac{a}{c}\right|_0 = \frac{1}{|c|_0\,|cx + d|_0} < \frac{1}{|c|_0^2}$$

et

$$\left|y - \frac{b}{d}\right|_0 = \frac{x}{|d|_0\,|cx + d|_0} = \frac{1}{|c|_0\,|d|_0} < \frac{1}{|d|_0^2}$$

donc d'après le corollaire du théorème 2 , $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ sont deux réduites de y .

Soit $(\frac{R_n}{S_n})$ la suite des réduites de y . Si $\frac{b}{d} = \frac{R_n}{S_n}$, comme $|dy-b|_o = \frac{1}{|S_{n+1}|_o}$ on voit que $\frac{a}{c}$ est la réduite suivante : $\frac{R_{n+1}}{S_{n+1}}$.

Soient λ et μ les éléments de K^* tels que $b = \lambda R_n$, $d = \lambda S_n$, $a = \mu R_{n+1}$, $c = \mu S_{n+1}$.

La relation :
$$y = \frac{R_{n+1} y_{n+2} + R_n}{S_{n+1} y_{n+2} + S_n} = \frac{R_{n+1} \frac{\mu}{\lambda} x + R_n}{S_{n+1} \frac{\mu}{\lambda} x + S_n}$$
montre que $y_{n+2} = \frac{\mu}{\lambda} x$ ce qui établit le résultat dans ce cas. On va maintenant s'y ramener en remplaçant x par un reste x_m , ce qui assure immédiatement la condition $|x|_o > 1$.

Si $(\frac{P_m}{Q_m})$ est la suite des réduites de x , et
$$x = \frac{x_m P_{m-1} + P_{m-2}}{x_m Q_{m-1} + Q_{m-2}} ,$$
on a :
$$y = \frac{(a P_{m-1} + b Q_{m-1}) x_m + a P_{m-2} + b Q_{m-2}}{(c P_{m-1} + d Q_{m-1}) x_m + c P_{m-2} + d Q_{m-2}}$$
Pour m suffisamment grand, on aura :
$$|c P_{m-1} + d Q_{m-1}|_o = |Q_{m-1}|_o \quad |c x + d|_o > 0$$
$$|c P_{m-2} + d Q_{m-2}|_o = |Q_{m-2}|_o \quad |c x + d|_o > 0$$
donc
$$|c P_{m-1} + d Q_{m-1}|_o > |c P_{m-2} + d Q_{m-2}|_o > 0$$
On est alors ramené au cas précédent.

4 - Eléments quadratiques.

Pour ce paragraphe, nous supposons que le corps K soit fini : $K = F_q$, et nous revenons à la notation $\mathfrak{F} = K(T)$ et $\mathfrak{F}_o$ pour le complété O-adique de $\mathfrak{F}$.

Nous appelons élément quadratique de $\mathfrak{F}_o$ un élément de $\mathfrak{F}_o$, algébrique, de degré 2 , sur $\mathfrak{F}$. Rappelons qu'un tel élément est nécessairement séparable sur $\mathfrak{F}$. Plus généralement, si K est un corps parfait, tout complété $\mathfrak{K}_v$ du corps $\mathfrak{K} = K(T)$, pour une valuation triviale sur K , est une extension séparable de $\mathfrak{K}_o$.

Le développement en fraction continue d'un élément $x \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}$:

$$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \dots + \frac{1|}{|a_n} + \dots$$

sera dit périodique s'il existe des entiers $n_0 \geq 0$ et $k > 0$ tels que $a_{n+k} = a_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui revient aussi à dire que si (x_n) est la suite des restes :

$$x_{n_0} = x_{n_0+k}$$

si $n_0 = 0$, le développement sera dit périodique simple, et périodique mixte sinon.

Remarquons que pour que le développement en fraction continue de x soit périodique, il faut et il suffit qu'il existe des entiers $n \geq 0$, $k > 0$, et un élément $\lambda \in F_q^*$ tel que

$$x_{n_0+k} = \lambda\, x_{n_0}$$

En effet, on aura pour tout entier $\mu \geq 2$:

$$x_{n_0+\mu k} = \lambda^{(-1)^{(\mu-1)k}}\, x_{n_0+(\mu-1)k} \qquad \text{donc :}$$

$$x_{n_0+\mu k} = \lambda^{\left(\sum_{\nu=0}^{\mu-1}(-1)^{\nu k}\right)}\, x_{n_0} \;.$$

Si k est impair, $x_{n_0+2k} = x_{n_0}$,

et si k est pair : $x_{n_0+\mu k} = \lambda^{\mu} x_{n_0}$

donc $x_{n_0+(q-1)k} = x_{n_0}$.

On a le résultat analogue au cas classique :

<u>Théorème 4</u>. - <u>Pour que le développement d'un élément</u> $x \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}$, <u>soit périodique, il faut et il suffit que</u> x <u>soit quadratique.</u>

<u>Preuve</u>. La condition nécessaire est évidente. Appelons élément spécial tout élément quadratique x tel que $|x|_0 > 1$ et $|\bar{x}|_0 < 1$ ($\bar{x}$ désignant le conjugué de x). Remarquons que tous les restes d'un élément quadratique sont des éléments quadratiques du même corps. Le fait qu'un élément quadratique ait un développement en fraction continue périodique résultera alors de façon évidente, des lemmes suivants.

Lemme 2. - Tout élément quadratique a un reste spécial.

Lemme 3. - Tout reste d'un élément spécial est spécial.

Lemme 4. - Il n'existe qu'un nombre fini d'éléments spéciaux dans une classe d'éléments de développements en fraction continue équivalents.

Preuve du lemme 1. Soit x quadratique. Tous les restes x_n , $(n \geq 1)$, satisfont déjà à $|x_n|_o > 1$. D'autre part,

$$x = \frac{x_n P_{n-1} + P_{n-2}}{x_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

d'où

$$x_n = \frac{-Q_{n-2}x + P_{n-2}}{Q_{n-1}x - P_{n-1}}$$

et

$$\bar{x}_n = \frac{-Q_{n-2}\bar{x} + P_{n-2}}{Q_{n-1}\bar{x} - P_{n-1}} = -\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} \frac{\bar{x} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\bar{x} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = x \neq \bar{x}$, on aura pour n suffisamment grand

$$\left|\bar{x} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}\right|_o = \left|\bar{x} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|_o = |\bar{x} - x|_o \quad , \text{ et } :$$

$$|\bar{x}_n|_o = \left|\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}\right|_o < 1 .$$

Preuve du lemme 2. Soit x spécial. Il faut montrer que $x_1 = \frac{1}{x - a_o}$ est spécial, où $a_o = E_o(x)$.

On a $|x_1|_o > 1$. D'autre part $\left|\frac{1}{\bar{x}_1}\right|_o = |\bar{x} - a_o|_o = |a_o|_o > 1$ puisque $|\bar{x}|_o < 1$.

Preuve du lemme 3. Supposons d'abord la caractéristique p de $\mathfrak{F}_o$, différente de 2 . Soit $x \in \mathfrak{F}_o$ un élément quadratique.

Un calcul classique sur les formes quadratiques montre que deux éléments quadratiques équivalents pour l'équivalence modulaire ont même discriminant (à la multiplication près pour le carré d'un élément de F_q^*). Il existe donc $\delta \in \mathfrak{Z}_0$ (et $\delta^2 \in \mathfrak{Z}$) , tel que tous les éléments de la classe d'équivalence de x (pour l'équivalence du développement en fraction continue) s'écrivent sous la forme $\frac{e+\delta}{f}$, où e et f appartiennent à $\mathfrak{Z}$.

Pour qu'un tel élément soit spécial, il faut que :

$$|e - \delta|_0 < |f|_0 < |e + \delta|_0 \quad .$$

Ceci n'a lieu que si $|e|_0 = |\delta|_0$ car sinon $|e-\delta|_0 = |e+\delta|_0$.
Il n'y a qu'un nombre fini de tels polynômes e , et étant donné un tel polynôme, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes f satisfaisant à :

$$|e-\delta|_0 < |f|_0 < |e+\delta|_0$$

ce qui démontre donc le lemme 4 dans ce cas.

Supposons maintenant $p = 2$. Soit x un élément quadratique, racine de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a , b , et c sont des polynômes et $b \neq 0$ puisqu'on sait que x est séparable.

Soit y un élément de développement en fraction continue équivalent à celui de x : on a : $x = \frac{Py + Q}{P'y + Q'}$ où P , P' , Q et Q' sont des éléments de $\mathfrak{Z}$ tels que $PQ' + P'Q \in F_q^*$.

y satisfait alors à l'équation :

$$a(Py+Q)^2 + b(Py+Q)\,(P'y+Q') + c(P'y+Q')^2 = 0$$

soit :

$$(aP^2+bPP'+cP'^2)y^2 + b(PQ'+P'Q)y + aQ^2 + bQQ' + cQ'^2 = 0$$

qu'on peut écrire :

$$ey^2 + by + f = 0$$

e et f étant des polynômes, puisque $PQ' + P'Q \in F_q^*$.

Si y est spécial, on a $|y+\bar{y}|_0 > 1$ et $|y.\bar{y}|_0 < |y+\bar{y}|_0$, donc $|e|_0 < |b|_0$ et $|f|_0 < |b|_0$.

Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments spéciaux dont le développement en fraction continue est équivalent à celui de x .

Le théorème 4 est donc démontré. De plus, si $x \in \mathfrak{F}_0$ a un développement en fraction continue périodique simple, il est spécial puisqu'à partir d'un certain rang tous les restes sont spéciaux et qu'une infinité de restes sont égaux à x . Inversement, si x est spécial, il existe exactement un élément spécial x' tel que x soit le premier reste de x' . En effet, il faut prendre $x' = a + \frac{1}{x}$ avec $a = -E_0\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)$. Le développement en fraction continue de x est donc périodique simple.

5 - Le théorème de Khintchine

Nous allons démontrer un analogue du théorème de Khintchine. Si h est un élément de $\mathfrak{F}$, on note $\lceil h \rceil$ la hauteur de h , c'est-à-dire si $h = \frac{f}{g}$, $f \in \mathcal{Z}$, $g \in \mathcal{Z}$ et $(f,g) = 1$, $\lceil h \rceil = \max (|f|_0 , |g|_0)$. On désignera par I un sous-ensemble fini du spectre de $\mathcal{Z}$, et on note $\mathcal{V}_I$ l'anneau d'adèles : $\mathcal{V}_I = \prod_{P \in I} \mathfrak{F}_P$, muni de la topologie produit. On plonge $\mathfrak{F}$ diagonalement dans $\mathcal{V}_I$, $\mathfrak{F}$ est ainsi dense dans $\mathcal{V}_I$. On posera $\mathcal{C}_P = \mathcal{Z}_P$ si $P \neq 0$, $\mathcal{C}_0 = \mathfrak{M}_0$, et $\mathcal{C}_I = \prod_{P \in I} \mathcal{C}_P$. Ici la mesure de Haar de $\mathfrak{F}_P^+$ sera normalisée par $\mathrm{mes}\,(\mathcal{C}_P) = 1$. La mesure de Haar de $\mathcal{V}_I^+$, produit des mesures de Haar des $\mathfrak{F}_P^+$ $(P \in I)$, est alors telle que $\mathrm{mes}\,(\mathcal{C}_I) = 1$.

<u>Théorème 5</u>. - <u>Soit</u> I <u>un sous-ensemble fini du spectre de</u> $\mathcal{Z}$, <u>et soit pour tout</u> $P \in I$, ε_P , <u>une fonction numérique positive, définie sur l'ensemble des puissances entières non négatives de</u> q . <u>On pose</u> $\varepsilon = \prod_{P \in I} \varepsilon_P$.

<u>Pour tout élément</u> $x = (x_P)_{P \in I} \in \mathcal{V}_I$, <u>on considère le système d'inéquations diophantiennes</u> :

$$S(x) \ : \ |x_P - h|_P \leq \varepsilon_P \left(\lceil h \rceil \right) \ \text{pour tout } P \in I$$

<u>où l'inconnue est</u> $h \in \mathfrak{F}$.

<u>Si la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\,(q^n)$ <u>est convergente</u>, $S(x)$ <u>n'a qu'un nombre fini de solutions pour presque tout</u> $x \in \mathcal{V}_I$.

Supposons que les fonctions ε_P satisfassent aux conditions suivantes :

(i) Il existe une constante $A > 0$, telle que pour tout $P \in I$, on ait l'implication $m \leq n \Rightarrow \varepsilon_P(q^n) \leq A\,\varepsilon_P(q^m)$

(ii) La suite $(q^{2n}\ \varepsilon(q^n))$ est décroissante

(iii) La série $\sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}\,\varepsilon(q^n)$ est divergente.

Alors $S(x)$ a une infinité de solutions pour presque tout $x \in \mathcal{V}_I$.

La démonstration suit pas à pas celle du résultat classique. Le cas de convergence est très simple.

En effet, soit pour tout entier $N \geq 0$, E_N l'ensemble des $x \in \mathcal{V}_I$ tels que $S(x)$ ait au moins une solution de hauteur q^N . On a mes $E_N = O(q^{2N}\ \varepsilon(q^N))$. L'ensemble des $x \in \mathcal{V}_I$ tel que $S(x)$ ait une infinité de solutions est $\bigcap_{L \in \mathbb{N}} (\bigcup_{N > L} E_N)$, et comme la série $\sum_N$ mes (E_N) est convergente, cet ensemble est de mesure nulle.

Nous allons étudier maintenant le cas de divergence.

Précisons d'abord quelques notations. Pour une sommation portant sur un ensemble de polynômes, nous indiquerons par la notation Σ^* qu'on se restreint aux polynômes unitaires. Selon la convention habituelle, une sommation (resp. un produit) portant sur l'ensemble vide d'indice est nulle (resp. égal à 1). On posera $I^+ = I \cup \{0\}$ et $I^- = I^+ - \{0\}$.

Soit alors $G = \prod_{P \in I^-} P$ ($G = 1$ si $I = \{0\}$). On désigne par c_P l'inverse de la valeur-absolue d'une uniformisante de $\mathfrak{F}_P$: $c_o = q$ et si $P \neq 0$ $c_P = |P|_o$, et on pose $c_I = \prod_{P \in I} c_P$.

Pour tout polynôme f , non réduit au terme constant, posons : $\varphi(f) = \text{card}\ (\mathcal{Z}/_{f\mathcal{Z}})^*$, $(\mathcal{Z}/_{f\mathcal{Z}})^*$ étant le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{Z}/_{f\mathcal{Z}}$. On a évidemment $\varphi(\lambda f) = \varphi(f)$ pour tout $\lambda \in F_q^*$. On prolonge la définition de φ en posant $\varphi(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in F_q^*$. φ est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que si f et g sont deux polynômes non nuls premiers entre eux, on a $\varphi(f\,g) = \varphi(f)\ \varphi(g)$. D'autre part, si P est un polynôme irréductible, pour tout entier positif, n , on a : $\varphi(P^n) = |P|_o^{n-1}(|P|_o - 1)$.

De façon analogue au cas classique, on a besoin de la propriété préliminaire suivante :

$$\inf_{N\geq 0} \frac{1}{q^{2N}} \sum^{*}_{\substack{1\leq |f|_o \leq q^N \\ (f,G)=1}} \varphi(f) > 0 \, .$$

On peut calquer la démonstration classique de la propriété :
$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum\limits_{1\leq n\leq N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}$ (où φ est l'indicateur d'Euler habituel), en introduisant la fonction zêta du corps $\mathfrak{F}$, et une fonction de Möebius sur l'anneau $\mathfrak{A}$. Mais on peut procéder plus directement en fait, grâce au lemme suivant, de Carlitz et Eckford Cohen.

<u>Lemme 5.</u> - (Carlitz-Cohen). <u>Pour tout couple</u> (m,n) <u>d'entiers non nétatifs, désignons par</u> $\nu(m,n)$ <u>le nombre de couples de polynômes unitairs</u> (f,g) <u>tels que</u> $|f|_o = q^m$, $|g|_o = q^n$, et $(f,g) = 1$. <u>On a</u> :

$$\nu(m,n) = q^{m+n} \qquad \text{si } m\,n = 0$$

$$\nu(m,n) = q^{m+n} - q^{m+n-1} \qquad \text{si } m\,n \neq 0 \, .$$

Rappelons la démonstration : le cas $m\,n = 0$ est trivial. Supposant $0 < m \leq n$, on classe les couples de polynômes unitaires (f,g) tels que $|f|_o = q^m$, $|g|_o = q^n$, selon leur p.g.c.d. . On obtient alors :

$$\nu(m,n) = q^{m+n} - \sum_{0<k\leq m} q^k \, \nu(m-k,n-k) \, ,$$

le résultat s'en déduit aussitôt par récurrence.

<u>Lemme 6.</u> - On a :

$$\sum^{*}_{1\leq |f| \leq q^N} \varphi(f) = \frac{1}{q+1} \left(q^{2N+1} + 1\right) \qquad \text{et}$$

$$\sum^{*}_{\substack{1\leq |f| \leq q^N \\ (f,G)=1}} \varphi(f) = \frac{q}{q+1} \cdot \prod_{P\in I^-} \frac{|P|_o}{1+|P|_o} \cdot q^{2N} + O(N^r)$$

où $r = \mathrm{card}\,(I^-)$.

Preuve. Le premier résultat se déduit immédiatement du lemme 5. En effet, $\sum^*_{1<|f|\leq q^N} \varphi(f)$ est le nombre de couples de polynômes (g,f) tels que f soit unitaire, $1\leq |g|_o < |f|_o \leq q^N$ et $(g,f) = 1$. Donc :

$$\sum^*_{1\leq |f|\leq q^N} \varphi(f) = 1 + (q-1) \sum_{0\leq b\leq a\leq N} \nu(a,b)$$

$$= 1 + (q-1) \sum_{0<a\leq N} (q^a + \sum_{0<b<a} (q^{a+b} - q^{a+b-1}))$$

$$= 1 + (q-1) \sum_{0<a\leq N} q^{2a-1}$$

$$= \frac{1}{q+1} (q^{2N+1} + 1)$$

Le second résultat s'en déduit par récurrence sur le nombre r de facteurs premiers de G. Supposons le résultat démontré pour G et soit R un polynôme irréductible ne divisant pas G. Nous devons évaluer $\sum^*_{\substack{1\leq |f|\leq q^N \\ (f,GR)=1}} \varphi(f)$. Posons

$\varphi_G(f) = \varphi(f)$ si $(f,G) = 1$, $\varphi_G(f) = 0$ si $(f,G) \neq 1$. En d'autres termes, on doit donc évaluer $\sum^*_{\substack{1\leq |f|\leq q^N \\ (f,R)=1}} \varphi_G(f)$.

Soit s_o l'entier défini par $|R|_o^{s_o} \leq q^N < |R|_o^{s_o+1}$. On va montrer que pour tout entier s tel que $0\leq s\leq s_o$, on a :

$$\sum^*_{\substack{1\leq |f|_o\leq q^N \\ (f,R)=1}} \varphi_G(f) = \sum^*_{1\leq |f|_o\leq q^N} \varphi_G(f) - (|R|_o - 1) \sum_{1\leq t\leq s} \Big(\sum^*_{1\leq |f|_o\leq \frac{q^N}{|R|_o^t}} \varphi_G(f) \Big)$$

$$- \sum^*_{1\leq |f|_o\leq \frac{q^N}{|R|_o^{s+1}}} \Big(\varphi_G(f\,R^{s+1}) - (|R|_o - 1) \sum_{1\leq t\leq s} \varphi_G(f\,R^t)\Big)$$

On raisonne par récurence sur s.

Pour $s = 0$, cette formule se réduit à :

$$\sum^*_{\substack{1\leq |f|_o\leq q^N \\ (f,R)=1}} \varphi_G(f) = \sum^*_{1\leq |f|_o\leq q^N} \varphi_G(f) - \sum^*_{1\leq |f|_o\leq \frac{q^N}{|R|_o}} \varphi_G(f\,R)$$

ce qui est bien évident.

Pour passer de la formule relative à s , à la formule relative à $s+1$, remarquant que si $(f, R) = 1$, on a pour tout entier positif t :

$\varphi_G(f\,R^t) = \varphi_G(f)\,\varphi(R^t) = |R|_0^{t-1}\,(|R|_0 - 1)\,\varphi_G(f)$, donc :

$$\varphi_G(f\,R^{s+1}) - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s}\varphi_G(f\,R^t) = (|R|_0-1)\,[(|R|_0^s - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s}|R|_0^{t-1})]\,\varphi_G(f)$$
$$= (|R|_0-1)\,\varphi_G(f) ;$$

on peut donc écrire :

$$\sum^*_{1\le |f|_0\le \frac{q^N}{|R|_0^{s+1}}}[\varphi_G(fR^{s+1}) - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s}\varphi_G(f\,R^t)] = (|R|_0-1)\sum^*_{\substack{1\le |f|_0\le \frac{q^N}{|R|_0^{s+1}}\\ (f,R)=1}}\varphi_G(f)$$
$$+\sum^*_{1\le |f|\le \frac{q^N}{|R|_0^{s+2}}}[\varphi_G(f\,R^{s+2}) - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s}\varphi_G(f\,R^{t+1})]$$

$$= (|R|_0-1)\sum^*_{1\le |f|\le \frac{q^N}{|R|_0^{s+1}}}\varphi_G(f) + \sum^*_{1\le |f|\le \frac{q^N}{|R|_0^{s+2}}}[\varphi_G(f\,R^{s+2}) - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s+1}\varphi_G(f\,R^t)]$$

ce qui démontre bien notre assertion.

Pour $s = s_0$, la formule se réduit à :

$$\sum^*_{\substack{1\le |f|_0\le q^N\\ (f,R)=1}}\varphi_G(f) = \sum^*_{1\le |f|_0\le q^N}\varphi_G(f) - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s_0}\Big(\sum^*_{1\le |f|_0\le \frac{q^N}{|R|_0^t}}\varphi_G(f)\Big)$$

Supposons que $\displaystyle\sum^*_{1\le |f|_0\le q^N}\varphi_G(f) = \frac{q}{q+1}\prod_{P\in I^-}\frac{|P|_0}{1+|P|_0}\,q^{2N} + O(N^r)$

On en déduit alors que :

$$\sum^*_{\substack{1\le |f|_0\le q^N\\ (f,R)=1}}\varphi_G(f) = \frac{q}{q+1}\prod_{P\in I^-}\frac{|P|_0}{1+|P|_0}\cdot\Big(q^{2N} - (|R|_0-1)\sum_{1\le t\le s_0}\frac{q^{2N}}{|R|_0^{2t}}\Big) + O(N^{r+1})$$

puisque $s_0 \le N$. D'où :

$$\sum^*_{\substack{1 \le |f| \le q^N \\ (f,R) = 1}} \varphi_G(f) = \frac{q}{q+1} \prod_{P \in I^-} \frac{|P|_o}{1+|P|_o} \cdot \left(\frac{|R|_o + \frac{1}{|R|_o^{2s_o}}}{|R|_o + 1}\right) q^{2N} + O(N^{r+1})$$

et comme $\dfrac{q^{2N}}{|R|_o^{2s_o}} < q^2$, on obtient :

$$\sum^*_{\substack{1 \le |f|_o \le q^N \\ (f,R) = 1}} \varphi_G(f) = \frac{q}{q+1} \cdot \prod_{P \in I^- \cup \{R\}} \frac{|P|_o}{1+|P|_o} \quad q^{2N} + O(N^{r+1})$$

On peut se restreindre à démontrer le théorème 5 pour $x \in \mathcal{C}_I$. En effet, si on se place dans un produit de disques $D = \prod_{P \in I} D_P$, où D_P est un disque de $\mathfrak{F}_P$, dont on désigne le rayon par $c_P^{\nu_P}$ si $P \neq 0$, et $q^{\nu_{o-1}}$, si $P = 0$, soit $\lambda \in \mathfrak{F}$ tel que $|\lambda_P| = c_P^{\nu_P}$ pour tout $P \in I$. En posant $x = \lambda\, y$, le système $S(x)$ s'écrit :

$$|y_P - \frac{h}{\lambda}|_P \le c_P^{-\nu_P} \varepsilon_P \quad (\lceil h \rceil) \qquad (P \in I)$$

et maintenant $y \in \mathcal{C}_I$.

Or, si on pose : $\varepsilon'_P (q^n) = \frac{1}{A} \, c_P^{-\nu_P} \cdot \varepsilon_P (\lceil \lambda \rceil \, q^n)$, de toute solution du système :

$$|y_P - \ell|_P \le \varepsilon'_P \quad (\lceil \ell \rceil) \qquad (P \in I)$$

on déduit la solution $h = \lambda\, \ell$ de $S(x)$, car, puisque $\lceil \ell \lambda \rceil \le \lceil \ell \rceil \lceil \lambda \rceil$, on a :

$$\varepsilon'_P (\lceil \ell \rceil) \le c_P^{-\nu_P} \varepsilon_P (\lceil h \rceil)$$

Il est clair que les (ε'_P) satisfont bien aux conditions du cas de divergence du théorème.

On peut supposer que les (ε_P) satisfont en plus des conditions du théorème 5, aux conditions suivantes :

pour tout n, $\varepsilon_P(q^n) \leq 1$ pour tout $P \in I^-$ et si $0 \in I$,

$$\varepsilon_0(q^n) \leq \frac{1}{q} \ , \text{ et } \ q^n\,\varepsilon(q^n) < 1.$$

En effet, il suffit de remplacer éventuellement les (ε_P) pour $(\lambda\varepsilon_P)$ où $0 < \lambda \leq 1$, ce qui conserve les autres conditions du théorème. On a alors le résultat à fortiori.

On examine d'abord les solutions $h \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}_0$ de $S(x)$, c'est-à-dire les solutions du système : $|x - \frac{f}{g}|_P \leq \varepsilon_P\ (|g|_0)$ $(P \in I)$, où les inconnues sont les polynômes f et g, astreints aux conditions $0 \leq |f|_0 < g_0$, $(f,g) = 1$, et g unitaire. Ces solutions seront appelées $\mathfrak{M}$-solutions. D'ailleurs, dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placées, si $0 \in I$, $S(x)$ n'a que des $\mathfrak{M}$-solutions pour $x \in \mathcal{C}_I$. D'autre part, pour une $\mathfrak{M}$-solution $f/_g$ de $S(x)$, g est nécessairement premier avec G. Pour tout polynôme unitaire g, premier avec G, soit $\gamma(x\ ;\ g)$ le nombre de $\mathfrak{M}$-solutions de $S(x)$ de la forme $\frac{f}{g}$ ($(f;g) = 1$) c'est-à-dire : $\gamma(x\ ;\ g) = \sum\limits_{\substack{|f|_0 < |g|_0 \\ (f,g)=1}} \beta(x - \frac{f}{g}\ ;\ |g|_0)$, où $\beta(.\ ,\ q^n)$ désigne la fonction caractéristique du produit des boules $|x|_P \leq \varepsilon_P\ (q^n)$ $(P \in I)$.

Remarquons que la fonction $\gamma(.\ ,\ g)$ ne prend que les valeurs 0 ou 1, car si $f/_g$ et $h/_g$ sont deux $\mathfrak{M}$-solutions de $S(x)$, on a $|f/_g - h/_g|_P \leq \varepsilon_P\ (|g|_0)$ pour tout $P \in I$, soit $|f-h|_P \leq \varepsilon_P\ (|g|_0)$ pour tout $P \in I^-$ et $|f-h|_0 \leq |g|_0\ \varepsilon_0\ (|g|_0)$ si $0 \in I$.

De toute façon $|f-h|_0 < |g|_0$, et par suite, on a :

$$\prod_{P \in I^+} |f-h|_P \leq |g|_0\ \varepsilon\,(|g|_0) < 1$$

ce qui implique que $f = h$.

Pour tout entier $N \geq 0$, soient :

$$\Gamma_N(x) = \sum_{\substack{1 \leq |g|_0 \leq q^N \\ (g,G)=1}}^{*} \gamma(x\ ;\ g)$$

$$M_1(N) = \int_{\mathcal{C}_I} \Gamma_N(x)\, dx$$

et $$M_2(N) = \left(\int_{\mathcal{C}_I} \Gamma_N^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

Nous poserons $\eta(q^n) = \varepsilon(q^n)$ si $0 \notin I$ et $\eta(q^n) = q\,\varepsilon(q^n)$ si $0 \in I$ et

$$\Omega(N) = \sum_{n=0}^{N} q^{2n}\,\eta(q^n)$$

Nous allons chercher des évaluations de $M_1(N)$ et $M_2(N)$. Nous avons encore besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 5. - Soit</u> λ <u>une fonction numérique positive définie sur l'ensemble des puissances entières non négatives de</u> q, <u>telle qu'il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda(q^n) \geq C\,q^{2N} \qquad \text{pour tout } N \geq 0 .$$

<u>Soit</u> ω <u>une fonction numérique positive</u>, <u>définie sur l'ensemble des puissances entières non négatives de</u> q, <u>décroissante</u>.

On a : $$\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda(q^n)\,\omega(q^n)}{q^{2n}} \geq C\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \sum_{n=0}^{N} \omega(q^n)$$

<u>Preuve.</u> La démonstration est élémentaire. On considère d'abord :

$$\chi(N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda(q^n)}{q^{2n}}$$

Posant $$\Lambda(N) = \sum_{n=0}^{N} \lambda(q^n) \quad , \text{ on a :}$$

$$\chi(N) = \Lambda(0) + \frac{\Lambda(1) - \Lambda(0)}{q^2} + \dots + \frac{\Lambda(N) - \Lambda(N-1)}{q^{2N}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left[\Lambda(0) + \dots + \frac{\Lambda(N-1)}{q^{2(N-1)}}\right] + \frac{\Lambda(N)}{q^{2N}}$$

d'où $$\chi(N) \geq \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) C\,N + C$$

donc : $$\chi(N) \geq \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) C\,(N+1).$$

Soit maintenant :

$$\psi(N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda(q^n)}{q^{2n}} \omega(q^n)$$

$$= \chi(0)\omega(1) + (\chi(1)-\chi(0))\omega(q) + \ldots + (\chi(N)-\chi(N-1))\omega(q^N)$$

$$= \chi(0)(\omega(1)-\omega(q)) + \ldots + \chi(N-1)(\omega(q^{N-1})-\omega(q^N)) + \chi(N)\omega(q^N)$$

Puisque ω est décroissante, on minore en remplaçant $\chi(N)$ par $(1-\frac{1}{q^2})\,C(N+1)$, d'où :

$$\psi(N) \geq C(1-\frac{1}{q^2}) \sum_{n=0}^{N} \omega(q^n)$$

<u>Lemme 6. - On a</u> $M_1(N) \leq \Omega(N)$

<u>Il existe une constante positive</u> B (<u>ne dépendant pas des</u> ε_p) <u>telle que</u> :

$$M_1(N) \geq B\,\Omega(N)$$

<u>Preuve</u>. On a :

$$\int_{\mathcal{C}_I} \gamma(x\,;\,g)\,dx = \sum_{\substack{1\leq |f|_o < |g|_o \\ (f;g)=1}} \int_{\mathcal{C}_I} \beta\left(x-\frac{f}{g}\,;\,|g|_o\right) dx$$

donc :

$$\frac{1}{c_I}\,\varphi(g)\,\eta(|g|_o) \leq \int_{\mathcal{C}_I} \gamma(x\,;\,g)\,dx \leq |g|_o\,\eta(|g|_o)$$

D'où :

$$M_1(N) \leq \sum^{*}_{1\leq |g|_o \leq q^N} |g|_o\,\eta(|g|_o) = \sum_{n=0}^{N} q^{2n}\,\eta(q^n)$$

D'autre part :

$$M_1(N) \geq \frac{1}{c_I} \sum^{*}_{\substack{1\leq |g|_o \leq q^N \\ (g,G)=1}} \varphi(g)\,\eta(|g|_o)$$

Soit en posant

$$\Phi(q^n) = \sum^{*}_{\substack{|g|_o = q^n \\ (g,G)=1}} \varphi(g)$$

$$M_1(N) \geq \frac{1}{C_I} \sum_{n=0}^{N} \Phi(q^n)\,\eta(q^n)$$

et d'après le lemme 5, comme la suite $(q^{2n}\eta(q^n))$ est décroissante, et que $\inf\limits_N (q^{-2N} \sum_{n=0}^{N} \Phi(q^n)) > 0$, il existe une constante $B > 0$ (ne dépendant que de I) telle que :

$$M_1(N) \geq B\,\Omega(N)$$

Lemme 7. - On a $(M_2(N))^2 \leq (\Omega(N))^2 + \Omega(N)$.

Preuve. Comme les $\gamma(.\ g)$ sont à valeurs dans $\{0,1\}$, on a :

$$(M_2(N))^2 = M_1(N) + \sum_{\substack{g \neq \ell \\ 0 < |g|_0 \leq q^N \\ 0 < |\ell|_0 \leq q^N \\ (g\ \ell, G) = 1}} \int_{\mathcal{C}_I} \gamma(x\ ;\ g)\ \gamma(x\ ;\ell)\ dx$$

l'estimation annoncée résulte aussitôt du lemme suivant :

Lemme 8. - Soient g et ℓ deux polynômes unitaires distincts, premiers avec G. On a :

$$\int_{\mathcal{C}_I} \gamma(x\ ;\ g)\ \gamma(x\ ;\ell)\ dx \leq |g|_0\ |\ell|_0\ \eta(|g|_0)\ \eta(|\ell|_0)$$

Preuve. On a :

$$\int_{\mathcal{C}_I} \gamma(x;g)\ \gamma(x;\ell) dx = \sum_{\substack{|f|_0 < |g|_0 \\ |h|_0 < |\ell|_0 \\ (f,g)=(h,\ell)=1}} \int_{\mathcal{C}_I} \beta(x - \frac{f}{g}\ ; |g|_0)\ \beta(x - \frac{h}{\ell}\ ; |\ell|_0)\ dx$$

Désignons pour tout $P \in I^-$, par $c_P^{-s_P}$ (resp. $c_P^{-t_P}$) le maximum (resp. le minimum) des rayons (exacts) des deux boules de $\mathfrak{F}_P$, $|x|_P \leq \varepsilon_P(|g|_0)$ et $|x|_P \leq \varepsilon_P(|\ell|_0)$. Si $0 \in I$, soit $q^{-(s_0+1)}$ (resp. $q^{-(t_0+1)}$) le maximum et le minimum respectivement des rayons exacts des deux boules de $\mathfrak{F}_0$, $|x|_0 \leq \varepsilon_0(|g|_0)$ et $|x|_0 \leq \varepsilon_0(|\ell|_0)$. Une intégrale $\int_{\mathcal{C}_I} \beta(x - \frac{f}{g}\ ;\ |g|_0)\ \beta(x - \frac{h}{\ell}\ ; |\ell|_0)\ dx$ ne peut être non nulle que si pour tout $P \in I^-$, on a :

$|\frac{f}{g} - \frac{h}{\ell}|_P \leq c_P^{-s_P}$ et si $0 \in I$, $|\frac{f}{g} - \frac{h}{\ell}|_0 < q^{-s_0}$. Sa valeur est alors $\prod_{P \in I} c_P^{-t_P}$.

Soit $d = (g, \ell)$ et $g = g'd$, $\ell = \ell'd$. On doit donc avoir :

$$|f\ell' - hg'|_P \leq c_P^{-s_P} \qquad \text{pour tout } P \in I^-$$

et si $0 \in I$, $|f\ell' - hg'|_0 < \dfrac{|g|_0 |\ell|_0}{|d|_0} \quad q^{-s_0}$

De toute façon

$$|f\ell' - hg'|_0 < \frac{|g|_0 |\ell|_0}{|d|_0}$$

Soit $L = \prod_{P \in I^-} P^{s_P}$. Il faut donc que :

$$f\ell' - hg' = \mu L$$

où $\mu \in \mathcal{A}$ est tel que $0 < |\mu|_0 < \dfrac{|g|_0 |\ell|_0}{|d|_0} \prod_{P \in I} c_P^{-s_P}$

(car on ne peut avoir $\mu = 0$ puisque les fractions $\frac{f}{g}$ et $\frac{h}{\ell}$, étant irréductibles, sont distinctes puisque g et ℓ sont deux polynômes unitaires distincts).

Le nombre de tels polynômes μ est au plus $\dfrac{|g|_0 \; |\ell|_0}{|d|_0} \quad \prod_{P \in I} c_P^{-s_P}$.

D'autre part, étant donné un polynôme μ, il existe un couple de polynômes f_1, h_1, unique tel que $f_1 \ell' - h_1 g' = \mu L$, et $|f_1|_0 < |g'|_0$. Les autres couples de polynômes f, h tels que $f\ell' - hg' = \mu L$ sont :

$$f = f_1 + \nu g' \qquad h = h_1 + \nu \ell' \qquad (\nu \in \mathcal{A}).$$

Pour que $|f|_0 < |g|_0$, il faut que $|\nu|_0 < |d|_0$. Il y a donc au plus $|d|_0$ couples de polynômes (f, h) tels que $f\ell' - hg' = \mu L$ et $|f|_0 < |g|_0$, $|h|_0 < |\ell|_0$.

Le nombre d'intégrales $\int_{\mathcal{Z}_I} \beta(x - \frac{f}{g} ; |g|_o) \cdot \beta(x - \frac{h}{\ell} ; |\ell|_o) dx$ non nulles est donc au plus $|g|_o| \ell |_o \prod_{P \in I} c_P^{-s_P}$, et comme chaque intégrale non nulle a la valeur $\prod_{P \in I} c_P^{-t_P}$, on obtient :

$$\int_{\mathcal{Z}_I} \gamma(x ; g) \gamma(x ;\ell) dx \leq |g|_o |\ell|_o \varepsilon(|g|_o) \varepsilon(|\ell|_o)$$

La démonstration du théorème s'achève comme dans le cas classique. Comme $\Omega(N)$ tend vers l'infini, on a pour N suffisamment grand, $M_2(N) \leq 2\Omega(N)$. Le lemme de Paley-Zygmund, d'après lequel, si f est une fonction positive sur un ensemble E , muni d'une mesure normale, telle que f et f^2 soient intégrables et que $\int f \geq a (\int f^2)^{1/2}$ où $a \geq 0$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \geq b(\int f^2)^{1/2}$ $(\geq b \int f)$, où $0 \leq b \leq a$ est de mesure au moins $(a-b)^2$, montre que l'ensemble des $x \in \mathcal{C}_I$ tels que $\Gamma_N(x) \geq \frac{B^2}{4} \Omega(N)$ est de mesure au moins $\frac{B^2}{16}$.

Pour tout entier positif Q , soit V_Q , l'ensemble des $x \in \mathcal{C}_I$ tels que $S(x)$ ait au moins Q solutions. V_Q est de mesure au moins $\frac{B^2}{16}$ car, choisissant N suffisamment grand pour que $\frac{B^2}{4} \Omega(N) \geq Q$, il suffit que $\Gamma_N(x) \geq \frac{B^2}{4} \Omega(N)$. Comme les V_Q sont décroissants, l'ensemble E des $x \in \mathcal{C}_I$ tels que $S(x)$ ait une infinité de solutions est de mesure au moins $\frac{B^2}{16}$.

Considérons maintenant pour tout entier $n \geq 0$, le système

$$S_n(x) : \quad |x_P - h|_P \leq \frac{1}{A^n} \varepsilon_P (q^n \lceil h \rceil) \qquad (P \in I)$$

Soit E_n l'ensemble des $x \in \mathcal{C}_I$ tels que $S_n(x)$ ait une infinité de solutions, et soit $F = \bigcap_n E_n$. Comme les (E_n) sont décroissants et que mes $E_n \geq \frac{B^2}{16}$ pour tout n , on a mes $F > 0$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des $h \in \mathfrak{F}$ tels que $(h , \dots , h) \in \mathcal{C}_I$. $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{C}_I$, donc $F + \mathcal{H}$ est de complémentaire négligeable. Or, pour tout élément $y = x + \tau$ de $F + \mathcal{H}$ $(x \in F , \tau \in \mathcal{H})$, si $\lceil \tau \rceil = q^n$, toute solution h de $S_n(x)$ conduit à la solution $h + \tau$ de $S(x+\tau)$, car puisque $\lceil h+\tau \rceil \leq \lceil h \rceil \lceil \tau \rceil$, $\frac{1}{A^n} \varepsilon_P (q^n \lceil h \rceil) \leq \varepsilon_P (\lceil h+\tau \rceil)$, ce qui achève la démonstration.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. Math. France, t. 92, (1964) p. 117-160, (thèse Sc. Math. Paris, 1963).

[2] ARTIN (E.). - Algebraic number and algebraic functions, Princeton, Princeton University, (1951) (multigraphie).

[3] BATEMAN (P.) and DUQUETTE (A.). - The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series , Illinois J. of Math., t. 6, (1962), p. 594-606.

[4] BERTRANDIAS (F.). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 4, (1965) VI + 98 p. (thèse Sc. Math. Paris 1965).

[5] BOURBAKI (N.). - Algèbre, chapitres 4 et 5.

[6] BOURBAKI (N.). - Intégration, chapitres 1,2,3 et 4.

[7] BOURBAKI (N.). - Théories spectrales, chapitres 1 et 2.

[8] CARLITZ (L.). - Diophantine approximation in fields of charateristic p. , Trans. Amer. Math. Soc., 72 , (1952), p. 187-207.

[9] CARLITZ (L.) and COHEN(E.). - Divisors functions of polynomials in a Galois field, Duke Math. J. 14, (1947), p. 13-20.

[10] CASSELS (J.W.S.). - Some metrical theorems in diophantine approximation. III. Proc. Camb. Phil. Soc. 46 , (1950), p. 219-225.

[11] CASSELS (J.W.S.). - An introduction to diophantine approximation (Camb. Tract. in Math. and Math. Phys. , Cambridge University).

[12] CHAUVINEAU (J.). - Sur la répartition dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$. Thèse Sc. Math. Paris, (1967), Acta. Arith. XIV, (1968), p. 225-313.

[13] CIGLER (J.) and HELMBERG (G.). - Neuer Entwicklungen in der theorie der Gleichverteilung, Jahr. Dentsch. Mat. Vereinig. t. 64, (1962), p. 1-50.

[14] DAVENPORT, ERDÖS, LEVEQUE. - On Weyls criterion for uniform distribution, Mich. Math. J. 10, (1963), p. 311-314.

[15] GRANDET-HUGOT (M.). - Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles. Séminaire Delange-Pisot, Poitou- Paris, 1966/1967, n°4.

[16] GRANDET-HUGOT (M.). - Une propriété des "nombres de Pisot" dans un corps de séries formelles, Cr. Acad. Sc. Paris, t. 265, (1967), A , p. 39-41.

[17] HERZ (C.S.). - Spectral synthesis for the Cantor Set. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S., 42, (1956), p. 42-43.

[18] KAHANE (J.P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Paris, Hermann, (1963).

[19] KHINTCHINE (A.). - Zur metrischen theorie der diophantischen Approximationen, Math., Z, 24, (1926), p. 706-714.

[20] KOKSMA (J.F.).- Ein Mengen theoretischer Satz über die Gleichverteilung mod. Eins., Compositio, Math., t. 2, (1935), p. 250-258.

[21] LANG (S.). - An introduction to diophantine approximation. Interscience Publishers, (J. Wiley and sons).

[22] LANG (S.). - An introduction to diophantine geometry. Interscience, Tracts in pure and applied mathematics(J. Wiley and sons).

[23] LESCA (J.). - Sur les approximations diophantiennes à une dimension. Thèse Sc. Math., Grenoble, (1968).

[24] LUTZ (E.). - Sur les approximations diophantiennes linéaires P-adiques, Pzris, Hermann, (1955).

[25] MALHER (K.). - Lectures on diophantine approximations, Part. 1, Ann. Arbor, University of Notre-Dame, (1961).

[26] de MATHAN (B.). - Sur un théorème métrique d'équirépartition mod. 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 265, (1967), A , p. 289-291.

[27] MENDES-FRANCE (M.). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires. Jour. Analyse Math., 20, (1967).

[28] NIVEN (I.). - Uniform distribution of sequences of integers. Trans. Amer. Math. Soc. 98, (1961), p. 62-61.

[29] PISOT (C.). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola Sup. di Pisa, série 2, t. 7, (1938), p. 205-248.

[30] RIDOUT. - The p-adic généralization of the Roth theorem, Mathematika, 5, (1958), p. 40-48 .

[31] ROTH (K.F.). - Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika, 2, (1955) p. 1-20, (avec erratum p. 168).

[32] RUDIN (W.). - Fourier Analysis on groups. Interscience, Tracts in pure and applied mathematics, 12, (J. Wiley and Sons).

[33] SALEM (R.). - Sets of uniqueness and sets of multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc. 54, (1943), p. 218-228 et 56 (1944), p. 32-49.

[34] SALEM (R.). - Algebraic numbers and Fourier Analysis, Heath Mathematical Monographs (1963).

[35] SCHMIDT (W.). - A metrical theorem in diophantine approximation, Canadian. J. of math., 12, (1960), p. 619-631.

[36] Asymptotic distribution modulo 1. Nuffic international summer session in science, Nijenrode Lectures. P. Noordhoff, Groningen, (1962).

(Texte reçu le 30 mai 1970)

-:-:-:-

Bernard de MATHAN
M. Conf. Mathématiques
Faculté des Sciences de Bordeaux
351 cours de la Libération
33 - TALENCE

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne - 30 - 9 -70 - n°3887