MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALBERT RAUGI

Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable

Mémoires de la S. M. F., tome 54 (1977), p. 5-118
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__54__5_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 54, 1977, p. 5-118.

FONCTIONS HARMONIQUES SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS A BASE DENOMBRABLE

par Albert RAUGI

INTRODUCTION.

Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et μ une mesure de probabilité sur G (mesure positive de masse 1 sur la tribu barélienne de G) . Nous appelons fonction μ-harmonique bornée toute fonction borélienne bornée vérifiant l'équation

$$f(g) = \int_G f(gh)\ \mu(dh) \qquad (g \in G)$$

Celles-ci ont été étudiées de façon appronfondie par Furstenberg [8] et Azencott [1] :

En généralisant une construction probabiliste due à Furstenberg, Azencott obtient une représentation intégrale des fonctions μ-harmoniques bornées. Soient E_μ l'espace de Banach des fonctions μ-harmoniques bornées (muni de la norme de la convergence uniforme) et H_μ le sous-espace formé des éléments de E_μ uniformément continus à gauche (u.c.g.). Muni du produit

$$f \times f'(g) = \lim_n \int_G f(gh)\ f'(gh)\ \mu^n(dh) \qquad (f,f' \in H_\mu) ,$$

où μ^n désigne le produit de convolution de n mesures égales à μ , H_μ est une C^*-algèbre. Le spectre Π_μ de cette C^*-algèbre est appelé l'espace de Poisson de μ ; c'est un espace compact sur lequel G opère continûment. Lorsque μ est étalée sur G , (i.e. qu'il existe un entier p tel que μ^p ne soit pas singulière par rapport à une mesure de Haar sur G) , il existe une mesure de probabilité ν sur Π_μ (noyau de Poisson de μ) et une mesure quasi-invariante ε sur Π_μ telles que l'application $f \longmapsto f * \nu : g \longmapsto \int_{\Pi_\mu} f(g.x)\nu(dx)$, $(g \in G)$, soit une isométrie de $L^\infty(\Pi_\mu,\varepsilon)$ sur E_μ envoyant $C(\Pi_\mu)$ (espace des fonctions continues sur Π_μ) sur H_μ . L'espace Π_μ et le noyau ν sont déterminés à isomorphisme près par cette dernière propriété.

Lorsque μ est étalée l'étude du cas des groupes L.C.D. G tels que G/G_o soit compact (G_o est la composante connexe de l'unité dans G) se ramène à celle des groupes de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes.

Nous disons ([1]) qu'un groupe L.C.D. G est de type (T) si pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , l'espace de Poisson Π_μ est homogène. Parmi ces groupes on trouve : les groupes de Lie connexes moyennables G tels que les valeurs propres des éléments de Ad R , image du radical R de G_o par la représentation adjointe de G , soient de modules égaux à 1 ([1]) ; les groupes de Lie connexes semi-simples de centre fini ([8]) et les groupes de Lie connexes qui sont "localement produit direct de ces groupes" ([4]) . Pour les groupes de type (T) on connaît explicitement l'espace de Poisson Π_μ (voir [1]).

Dans cet article nous étudions essentiellement le cas où G est un groupe L.C.D. tel que ${}_{G_o}\backslash^G$ soit compact et μ est étalée et possède un moment d'ordre 1. L'hypothèse "${}_R\backslash^G$ de centre fini" qui apparaissait dans [21] a pu être supprimée grâce à un résultat de Rosenberg (voir [24]) . Dans cette situation, nous montrons, qu'en général, l'espace de Poisson n'est pas "un bon espace de représentation". Nous établissons une nouvelle représentation intégrale des fonctions μ-harmoniques bornées à l'aide d'un espace homogène Λ_μ de G ; dans le cas où l'espace de Poisson Π_μ est homogène, les espaces Λ_μ et Π_μ coïncident ; dans les autres cas Π_μ est une compactification non métrisable de Λ_μ .

Donnons une description rapide de l'espace Λ_μ , en nous limitant, pour simplifier, au cas où G est un groupe de Lie connexe :

Désignons par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G ; par $\mathcal{R}$ le radical de $\mathcal{G}$ et par $\mathcal{G} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ une décomposition de Lévi de $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{S} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K}$ une décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lévi $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$. Posons $\mathcal{D} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$ et désignons par D et K les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{K}$ pour algèbres de Lie. Nous obtenons la décomposition G = D K , avec $D \cap K$ central et discret.

Soit B(G) la frontière maximale gauche de G ([1]) ; nous savons que K est transitif sur B(G) . Nous appelons A-cocycle ([10]) , K-invariant sur B(G) , toute application continue ρ de B(G) x G dans $\mathbb{R}$ telle que

i) $\rho(u,g_1g_2) = \rho(u,g_1) + \rho(u.g_1,g_2)$ $(u \in B(G)\ ;\ g_1,g_2 \in G)$

ii) $\rho(u,k) = 0$ $(u \in B(G)\ ;\ k \in K)$.

Soit $\mathcal{M}$ le nilradical de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ une sous algèbre de Cartan du centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$. Nous avons alors

$$\mathcal{R} = \mathcal{M} + \mathcal{P} \qquad \text{(somme non nécessairement directe).}$$

$\mathcal{P} \oplus \mathcal{A}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{G}$ qui est le produit direct des sous-algèbres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$. Désignons par Θ , l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{P} \oplus \mathcal{A}$ dans la complexifiée $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{G}$. Notons M , P , A et N les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ pour algèbres de Lie ; nous avons la décomposition G = M N P A K . Pour tout élément θ de Θ , soit ϕ_θ le poids de la représentation adjointe de P A dans $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ dont la différentielle en e est θ et posons

$$\rho_\theta(u_o.k,g) = \mathrm{Log}|\phi_\theta(x)| ,$$

où u_o désigne l'unique élément de $B(G)$ stable par D et où kg s'écrit mxk avec $m \in MN$, $x \in PA$ et $k \in K$.

Cette définition est en fait sans ambiguité et fournit une famille d'A-cocycles K-invariants $\{\rho_\theta , \theta \in \Theta\}$, étudiée au § 7.

Soit μ une mesure de probabilité étalée et possèdant un moment d'ordre 1 sur G. Nous savons ([8]) qu'il existe sur $B(G)$ une unique mesure de probabilité ν, μ-invariante (i.e. telle que $\nu * \mu = \nu$) ; définissons

$$\Theta_- = \{\theta \in \Theta : \int_G \int_{B(G)} \rho_\theta(u,g)\, \nu(du)\, \mu(dg) < 0\}$$

$$\Theta_+ = \{\theta \in \Theta : \int_G \int_{B(G)} \rho_\theta(u,g)\, \nu(du)\, \mu(dg) \geqslant 0\} .$$

Pour tout élément θ de Θ, soit

$$\mathfrak{g}_\theta = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} : \exists\, n \in \mathbb{N}^* \,/\, (\mathrm{ad}H - \theta(H)I)^n(X) \doteq 0 ,\ \forall H \in \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}\} \quad ;$$

nous avons ([25]) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\theta \in \Theta} \mathfrak{g}_\theta$. Posons

$$\mathfrak{g}_-^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\theta \in \Theta_-} \mathfrak{g}_\theta ,\quad \mathfrak{g}_+^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\theta \in \Theta_+} \mathfrak{g}_\theta$$

Alors $\mathfrak{g}_-^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{g}_+^{\mathbb{C}}$ sont deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ qui sont les complexifiées de deux sous-algèbres $\mathfrak{g}_-$ et $\mathfrak{g}_+$ de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+$; et si on désigne par G_- et G_+ les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathfrak{g}_-$ et $\mathfrak{g}_+$ pour algèbre de Lie, G_- et G_+ sont deux sous-groupes fermés de G, $G_- \cap G_+ = \{e\}$ et $G = G_- G_+$ modulo une quelconque mesure de Haar de G.

On obtient alors une représentation intégrale des fonctions μ-harmoniques bornées à l'aide d'un revêtement à fibre dénombrable (explicitement décrit), Λ_μ, de G/G_+ (théorème (8.4)). Dans le cas où $_R\backslash^G$ est de centre fini, ce revêtement est fini.

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_-$ est contenue dans $\mathcal{D}$; posons $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D} \cap \mathfrak{g}_+$ et désignons par D_+ le sous-groupe de Lie connexe de D ayant $\mathcal{D}_+$ pour algèbre de Lie. Soit $E_+ = D_+K$; E_+ est une sous-variété de G et l'application qui au couple (h,g) associe le produit hg est un isomorphisme de variétés analytiques de $G_- \times E_+$ sur G. Le procédé utilisé pour obtenir la représentation des fonctions μ-harmoniques bornées à l'aide d'un revêtement Λ_μ de G/G_+, est alors basé sur les deux faits suivants :

i) Désignons par $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G. Nous montrons (§ 9) que la composante de X_n sur G_-, dans la décomposition $G = G_- E_+$, converge $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall\, x \in G$. De plus si on note Z_g la limite de la composante de gX_n sur G_- ; on montre alors que si on identifie G_- à un ouvert de ${}^{G}/_{G_+}$,

$$Z_g = g.Z_e \ , \ \mathbb{P}_x \text{ - p.s. } \forall x \in G .$$

ii) Soit H un sous-groupe fermé de G , nous appelons fonction µ-harmonique bornée sur ${}_H\backslash^G$, toute fonction f sur ${}_H\backslash^G$ telle que $f \circ p$ soit µ-harmonique bornée, où p désigne l'application naturelle de G sur ${}_H\backslash^G$. Nous étendons à cette situation un résultat de [1] sur les périodes des fonctions µ-harmoniques bornées (théorème (6.8)). Nous montrons (§ 10) que les fonctions µ-harmoniques bornées sur ${}_{G_-}\backslash^G$ sont les composées par l'application naturelle de ${}_{G_-}\backslash^G$ sur ${}_D\backslash^G$ des fonctions µ-harmoniques bornées sur ${}_D\backslash^G$. On montre que ces fonctions prennent un nombre dénombrable de valeurs ; ce nombre est fini si ${}_R\backslash^G$ est de centre fini.

Ensuite, nous comparons les espaces Λ_μ et Π_μ (§ 11) ; nous étudions les groupes de type (T) (§ 12) et nous passons du cas des groupes de Lie au cas des groupes L.C.D. (§ 13) .

Ce travail fait partie d'une thèse de doctorat d'état dirigée par R. Azencott. Je tiens à remercier vivement R. Azencott pour son aide et ses encouragements constants, ainsi que Y. Guivarc'h avec qui j'ai eu des discussions fructueuses.

1. PRELIMINAIRES

1.0.- $\mathcal{L}$ étant une algèbre de Lie réelle, nous notons $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ sa complexifiée et $\mathcal{L}^*$ l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{L}$ à valeurs complexes.

Soit ρ une représentation d'une algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}$ (resp. d'un groupe de Lie L) dans un espace vectoriel (réel ou complexe) V et γ un élément de $\mathcal{L}^*$ (resp. de l'ensemble des homomorphismes de G dans $\mathbb{C}$). Nous disons que γ est un poids de ρ s'il existe un sous-espace W de V stable par ρ et un vecteur v de V-W tels que

$$\forall\, x \in \mathcal{L} \text{ (resp. } L\text{)},\ \rho(x)(v) = \gamma(x).v \text{ modulo } W\ ;$$

l'élément v de V-W est alors appelé un vecteur presque propre associé au poids γ .

D'autre part, si $\gamma \in \mathcal{L}^*$, nous désignons par V_γ le sous-espace de V formé des éléments qui pour chaque x de $\mathcal{L}$ sont annulés par au moins une puissance de $\rho(x) - \gamma(x)I$ (I désigne l'identité de V). Dans le cas où l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est nilpotente et V est un espace vectoriel sur le corps des complexes, nous savons que (voir [25]) : les espaces V_γ sont stables par ρ ; si $V_\gamma \neq (0)$, γ est le seul poids de ρ dans V_γ et V est la somme directe des sous-espaces V_γ .

1.1.- Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. On note G_0 la composante connexe de l'unité dans G et R le radical de G_0 (i. e. le plus grand sous-groupe résoluble distingué connexe de G_0 ; R est un sous-groupe fermé de G_0 et donc de G). On désigne par $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{R}$ les algèbres de Lie respectives de G et R .

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{s}$ une décomposition de $\mathfrak{g}$ comme somme directe de son radical $\mathfrak{R}$ et d'une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{s}$ (décomposition de Lévi) ; on sait ([5], théorème de Lévi-Malcev) que deux telles décompositions se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{g}$ de la forme $\operatorname{Exp} \operatorname{ad} X$, où X appartient à l'idéal nilpotent $[\mathfrak{g}, \mathfrak{R}]$.

1.2.- Nous allons introduire une décomposition d'Iwasawa de la sous-algèbre de Lévi $\mathfrak{s}$. La description donnée ci-dessous résume des résultats classiques (voir, par exemple, [13]).

Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$.

Considérons la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{s}$; soit Σ l'ensemble des poids de cette représentation. Tout élément de Σ est à valeurs réelles et nous avons :

i) $\mathfrak{S} = \bigoplus_{\gamma \in \Sigma} \mathfrak{S}_\gamma$ avec $\mathfrak{S}_\gamma = \{X \in \mathfrak{S} : [H,X] = \gamma(H).X \ , \ \forall H \in \mathfrak{a}\}$

ii) $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{K}$

iii) $[\mathfrak{S}_\gamma , \mathfrak{S}_{\gamma'}] \subset \mathfrak{S}_{\gamma+\gamma'}$, $\forall \gamma$ et $\gamma' \in \Sigma$

iv) Si $\gamma \in \Sigma$, $(-\gamma) \in \Sigma$

Soit $\mathfrak{a}'$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}$ où aucun élément de $\Sigma-\{0\}$ ne s'annule . Les composantes connexes de $\mathfrak{a}'$ (en nombre fini) sont les chambres de Weyl . Choisissons une chambre de Weyl W . Soit Σ_1 (resp. Σ_2) l'ensemble des éléments de Σ négatifs (resp. positifs) sur W .

Posons $\mathcal{N} = \bigoplus_{\gamma \in \Sigma_1} \mathfrak{S}_\gamma$ et $\tilde{\mathcal{N}} = \bigoplus_{\gamma \in \Sigma_2} \mathfrak{S}_\gamma$. $\mathcal{N}$ et $\tilde{\mathcal{N}}$ sont des sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{S}$. $\mathcal{N} \oplus \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{S}$. On obtient une décomposition d'Iwasawa , soit $\mathfrak{S} = \mathcal{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{K}$. Une telle décomposition dépend des choix de la décomposition de Cartan $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$, du sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{P}$ et de la chambre de Weyl W . Cependant on sait que deux telles décompositions se déduisent par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{S}$.

1.3.- Posons $\mathcal{D} = \mathfrak{R} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathfrak{a}$. Nous obtenons la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D} \oplus \mathfrak{K} \ ,$$

où $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre résoluble et $\mathfrak{K}$ une sous-algèbre compacte de $\mathfrak{g}$.

La décomposition ainsi obtenue dépend des choix de la sous-algèbre de Lévi $\mathfrak{S}$ et de sa décomposition d'Iwasawa . Deux telles décompositions se déduisent par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$.

1.4.- Désignons par S le sous-groupe de Lie connexe de G_0 ayant $\mathfrak{S}$ pour algèbre de Lie . Nous avons $G_0 = R\,S$ et $R \cap S$ est un sous-groupe de G_0 , discret , distingué , donc central . On notera que S n'est pas nécessairement fermé dans G_0.

Soient N , $\tilde{N}$, A et K les sous-groupes de Lie connexes de S ayant respectivement $\mathcal{N}$, $\tilde{\mathcal{N}}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{K}$ pour algèbre de Lie. Les sous-groupes N , $\tilde{N}$, A et K sont fermés dans S . L'application

$$(n , a , k) \longmapsto n\,a\,k \quad (n \in N , a \in A, k \in K) ,$$

est un isomorphisme de variétés analytiques de $N \times A \times K$ sur S (voir [13]) ; les groupes A, N et $\tilde{N}$ sont simplement connexes , respectivement abélien et nilpotents ; K contient le centre $Z(S)$ de S et est compact si et seulement si S est de centre fini . En outre K est son propre normalisateur dans S .

Soit Γ le centralisateur de A dans K (Γ contient $Z(S)$) ; alors Γ et A normalisent N ainsi que $\tilde{N}$. De plus $N A \Gamma$ est le normalisateur de N

dans S .

1.5. Lemme. - *Soit* D *le sous-groupe de Lie connexe de* G_o *ayant* $\mathcal{D}$ *pour algèbre de Lie.* D *est un sous-groupe de Lie résoluble connexe fermé de* G *. L'application* $(r, n, a) \longmapsto rna$ *est un isomorphisme de variétés analytiques de* $R \times N \times A$ *sur* D *; en particulier les sous-groupes* N *et* A *sont fermés dans* G .

Preuve. - Soit ξ l'application naturelle de G sur $R\backslash G$. $\xi(G_o) = \xi(N)\,\xi(A)\,\xi(k)$ est une décomposition d'Iwasawa du groupe de Lie semi-simple $\xi(G_o)$; nous savons que $\xi(N)\,\xi(A) = \xi(D)$ est fermé dans $\xi(G_o)$; par suite D est fermé dans G_o .

Il est évident que l'on a $D = RNA$. Le sous-groupe $R \cap NA$ est contenu dans le sous-groupe $R \cap S$. Or $R \cap S$ est contenu dans le centre $Z(S)$ de S et donc dans Γ . Comme $NA \cap K = \{e\}$, il s'ensuit que $R \cap NA = \{e\}$. Tout élément d de D s'écrit alors de façon unique sous la forme $d = rna$ avec $r \in R$, $n \in N$ et $a \in A$. Autrement dit l'application analytique

$$\eta : R \times N \times A \longrightarrow D$$
$$(r, n, a) \longmapsto rna$$

est bijective .

Comme $\mathcal{D} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$, on sait que η est un isomorphisme de variétés analytiques d'un ouvert $U \times V \times W$ de $R \times N \times A$ contenant (e, e, e) sur un ouvert X de D contenant e . Soit alors $d = rna \in D$ avec $r \in R$, $n \in N$ et $a \in A$; la restriction de η^{-1} à l'ouvert $X' = dX$ se décompose en

$$X' \longrightarrow X \xrightarrow{\eta^{-1}} U \times V \times W \longrightarrow R \times N \times A$$
$$x \longmapsto d^{-1}x \qquad (u, v, w) \longmapsto (r(nau(na)^{-1}), nava^{-1}, aw)$$

et est par suite analytique . L'application η est donc un isomorphisme de variétés analytiques . Le lemme (1.5) est prouvé .

1.6. Lemme. - *Soit* $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}$ *la représentation adjointe de* G *dans* $\mathcal{G}$ *. Les sous-groupes* $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}A$, $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}N$, $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}S$, $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}\Gamma$, $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}D$ *sont fermés dans* $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}G$ *; le sous-groupe* $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}K$ *est compact* .

Preuve. - Le radical de $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}G_o$ est $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}R$; $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}G_o = \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}R\ \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}S$ est une décomposition de Lévi de $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}G_o$ et $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}S = \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}N\ \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}A\ \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}K$ est une décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}S$. $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}D = \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}R\ \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}N\ \mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}A$ est un sous-groupe de Lie connexe résoluble fermé de $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}G_o$ (lemme (1.5)) . $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}\Gamma$ est le centralisateur de $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}A$ dans $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}K$: en effet , soit $k \in K$ tel que $\mathrm{Ad}\,k$ centralise $\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}}A$; il s'ensuit que $aka^{-1}k^{-1} \in Z(G_o) \cap S$, pour tout $a \in A$; mais A étant connexe et $Z(G_o) \cap S$ discret , il s'ensuit que $aka^{-1}k^{-1} = e$, pour tout $a \in A$; autrement dit $k \in \Gamma$.

Ceci dit $Ad_{\mathfrak{g}} S$ est un sous-groupe de Lie connexe semi-simple du groupe linéaire $GL(\mathfrak{g})$; on sait qu'un tel sous-groupe est fermé dans $GL(\mathfrak{g})$ et est de centre fini . Il s'ensuit que $Ad_{\mathfrak{g}} K$ est un sous-groupe compact maximal de $Ad_{\mathfrak{g}} S$ et les sous-groupes $Ad_{\mathfrak{g}} A$, $Ad_{\mathfrak{g}} N$, $Ad_{\mathfrak{g}} \Gamma$ qui sont fermés dans $Ad_{\mathfrak{g}} S$, sont fermés dans $Ad_{\mathfrak{g}} G_o$.

1.7. <u>Proposition</u>. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes . Désignons par* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G *; par* $\mathfrak{R}$ *le radical de* $\mathfrak{g}$ *et par* $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{S}$ *une décomposition de Lévi de* $\mathfrak{g}$ *. Soient* $\mathfrak{N}$ *le nilradical de* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{P}$ *une sous-algèbre de Cartan du centralisateur de* $\mathfrak{S}$ *dans* $\mathfrak{R}$ *. Alors* $\mathfrak{R}$ *est la somme , non nécessairement directe , de* $\mathfrak{N}$ *et de* $\mathfrak{P}$ *.*

Désignons par P *(resp.* S *) le sous-groupe de Lie connexe de* G *ayant* $\mathfrak{P}$ *(resp.* $\mathfrak{S}$ *) pour algèbre de Lie et par* $S = N A K$ *une décomposition d'Iwasawa de* S *. Soit* Γ' *le sous-groupe de* G *formé des éléments qui normalisent à la fois* N *,* A *,* K *et* P *(et donc aussi* $\tilde{N}$ *et* Γ *).* Γ' *est un sous-groupe fermé de* G *rencontrant ses différentes composantes connexes ; l'intersection de* Γ' *avec* G_o *est égale à* $P\,\Gamma$ *, où* Γ *est le centralisateur de* A *dans* K *; et* $K\,\Gamma'$ *est un sous-groupe fermé de* G *possédant un nombre fini de composantes connexes .* $K\,\Gamma'$ *possède donc des sous-groupes compacts maximaux deux à deux conjugués ; soit* L *l'un deux et posons* $\mathcal{K} = KL$ *; l'image ,* $Ad_{\mathfrak{g}} \mathcal{K}$*, de* $\mathcal{K}$ *par la représentation adjointe de* G *est compacte ; nous avons alors* $G = D\,\mathcal{K}$ *et* $D \cap \mathcal{K}$ *est contenu dans* P *.*

1.8.- La décomposition $G = D\,\mathcal{K}$ ainsi obtenue dépend des choix de la sous-algèbre de Lévi $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{g}$, de sa décomposition d'Iwasawa et du sous-groupe compact maximal L de $K\Gamma'$. Il est facile de voir que deux telles décompositions se déduisent par conjuguaison par un élément de G_o .

Dans le cas où G_o est semi-simple (on a alors $G_o = S$) , on obtient la décomposition $G = N A \mathcal{K}$ avec $N A \cap \mathcal{K} = \{e\}$. Nous dirons que cette décomposition est la décomposition d'Iwasawa de G .

Les sections de (1.9) à (1.16) sont consacrées à la preuve de la proposition (1.7) . En première lecture on pourra laisser de coté cette preuve qui ne servira pas pour la suite .

Soit $\mathfrak{C}$ le centralisateur de la sous-algèbre de Lévi $\mathfrak{S}$ dans le radical $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{C} = \{ X \in \mathfrak{R} : [X , \mathfrak{S}] = (0) \}$) .

Soit $\mathfrak{P}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{C}$ (i.e. une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{C}$ qui est son propre normalisateur dans $\mathfrak{C}$, voir [5]) . D'après ([5] , VI , §4 , prop. 19) on sait que deux telles sous-algèbres $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ de $\mathfrak{C}$ se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de la forme Exp ad X, où X appartient à $[\mathfrak{C} , \mathfrak{C}]$.

Soit $\mathcal{N}$ le nilradical de $\mathcal{R}$ (i.e. le plus grand idéal nilpotent de $\mathcal{R}$) . $\mathcal{N}$ contient l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathcal{R}]$ et est formé des éléments X de $\mathcal{R}$ tels que $\operatorname{ad} X$ soit nilpotent ([5] , V , §2 , prop. 4) .

La première partie de la proposition (1.7) résulte alors du lemme :

1.9. Lemme. - *Le radical $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}$ est la somme (non nécessairement directe) des sous-algèbres nilpotentes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$.*

Preuve. - $\mathcal{S}$ étant une algèbre de Lie semi-simple, la représentation adjointe de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$ est semi-simple . L'idéal $[\mathfrak{g}, \mathcal{R}]$ de $\mathfrak{g}$ admet donc , dans $\mathcal{R}$, un sous-espace supplémentaire , invariant par cette représentation . Soit $\mathcal{C}$ ce sous-espace ; nous avons :

$$\mathcal{R} = [\mathfrak{g}, \mathcal{R}] \oplus \mathcal{C} \quad \text{et} \quad [\mathcal{S}, \mathcal{C}] \subset [\mathfrak{g}, \mathcal{R}] \cap \mathcal{C} = (0) .$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{R} = [\mathfrak{g}, \mathcal{R}] + \mathcal{C} \quad \text{(somme non nécessairement directe)}$$

où $\mathcal{C}$ est le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$.

Considérons la représentation adjointe de la sous-algèbre de Cartan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ et appelons Θ l'ensemble de ses poids . Nous avons avec les notations de (1.0)

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{P} , \qquad \mathcal{C}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\gamma \in \Theta} \mathcal{C}_\gamma$$

Il est facile de voir que pour tout $\gamma \in \Theta - \{0\}$, $\mathcal{C}_\gamma \subset [\mathfrak{g}, \mathcal{R}]^{\mathbb{C}}$ nous avons alors $\mathcal{R} = [\mathfrak{g}, \mathcal{R}] + \mathcal{P}$ et par suite $\mathcal{R} = \mathcal{N} + \mathcal{P}$.

1.10. Remarque. - Soit $gl(V)$ l'algèbre de Lie de tous les endomorphismes d'un espace vectoriel réel V . Supposons que $\mathfrak{g}$ soit une sous-algèbre de Lie algèbrique de $gl(V)$. On sait (voir [5]) que le radical $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie résoluble algèbrique de $gl(V)$. Désignons alors par $\mathcal{N}$ l'idéal de $\mathcal{R}$ formé , non plus par les éléments X de $\mathcal{R}$ tels que $\operatorname{ad} X$ soit nilpotent , mais par les éléments X de $\mathcal{R}$ nilpotents sur V . Alors on peut représenter $\mathfrak{g}$ comme une somme directe $\mathcal{N} \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{S}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ qui possède les propriétés suivantes : $\mathcal{P}$ est abélienne et algèbrique , et ses éléments sont semi-simples (sur V) ; le radical $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}$ est $\mathcal{N} \oplus \mathcal{P}$; $\mathcal{S}$ est semi-simple et ses éléments commutent avec ceux de $\mathcal{P}$. (voir [5] , ch. V , §4 , prop. 5) .

Dans le cas d'une algèbre de Lie algébrique d'endomorphismes d'un espace vectoriel réel , on peut alors remplacer , dans ce qui suit , la décomposition générale obtenue en (1.9) par celle obtenue ci-dessus .

1.11. Remarque. - En passant nous avons obtenu pour $\mathcal{G}$ la décomposition

$$\mathcal{G} = (\mathcal{M} + \mathcal{P}) \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{K} .$$

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{M} + \mathcal{P}^1) \oplus \mathcal{N}^1 \oplus \mathcal{Q}^1 \oplus \mathcal{K}^1$ une autre décomposition de $\mathcal{G}$ obtenue par le même procédé .

D'après ce qui a été rappelé antérieurement , il existe :

i) $X_0 \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{S}^1 = \operatorname{Exp} \operatorname{ad} X_0 (\mathcal{S})$

ii) $Y_0 \in [\mathcal{E}^1 , \mathcal{E}^1]$ avec $\mathcal{E}^1 = \{X \in \mathcal{R} : [X , \mathcal{S}^1] = (0)\}$ tel que

$$\mathcal{P}^1 = (\operatorname{Exp} \operatorname{ad} Y_0) (\operatorname{Exp} \operatorname{ad} X_0) (\mathcal{P}) .$$

En posant $X_1 = Y_0 \times X_0 = Y_0 + X_0 + \frac{1}{2} [Y_0 , X_0] + \ldots$ (formule de Campbell-Hausdorff) , on a alors

$$\mathcal{P}^1 = \operatorname{Exp} \operatorname{ad} X_1 (\mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^1 = \operatorname{Exp} \operatorname{ad} X_1 (\mathcal{S}) .$$

Autrement dit deux choix possibles du couple $(\mathcal{S} , \mathcal{P})$ se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de $\mathcal{G}$ de la forme $\operatorname{Exp} \operatorname{ad} X$, où $X \in \mathcal{M}$.

Comme deux décompositions d'Iwasawa d'une algèbre de Lie semi-simple se déduisent par un automorphisme intérieur , on en déduit que les deux décompositions considérées de $\mathcal{G}$ se déduisent par un automorphisme intérieur de $\mathcal{G}$.

1.12.- Désignons par P (resp. M) le sous-groupe de Lie nilpotent connexe de R admettant $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{M}$) pour algèbre de Lie . M est le nilradical de R (i.e. le plus grand sous-groupe distingué nilpotent connexe de R) et est donc un sous-groupe fermé de R (et par suite de G) . D'autre part soit $\overline{P}$ l'adhérence de P dans R , l'algèbre de Lie $\overline{\mathcal{P}}$ du groupe de Lie connexe $\overline{P}$ est nilpotente , contenue dans $\mathcal{E}$ et contient $\mathcal{P}$; d'après ([5] , VI , §4 , prop. 1) on sait que $\mathcal{P}$ est une sous-algèbre nilpotente maximale de $\mathcal{E}$; il s'ensuit que $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}$ et $P = \overline{P}$. P est donc un sous-groupe fermé de R (et par suite de G) .

M étant distingué dans R , du lemme (1.9) il résulte que l'on a $R = M P$.

Pour achever la preuve de la proposition (1.7) , nous commençons par établir deux lemmes .

1.13. Lemme. - *Soit* C *le centralisateur de* S *dans* R . *Nous avons*

$$C = \exp_M(\mathcal{M} \cap \mathcal{E}) P$$

et P *est son propre normalisateur dans* C . *(En particulier* P *est un sous-groupe de Cartan de* C *, voir* [5] *)* .

Preuve. - M étant un groupe de Lie nilpotent , nous avons $M = \exp \mathcal{M}$. Soit $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_2 = [\mathcal{M}, \mathcal{M}_1]$, ... , $\mathcal{M}_r = [\mathcal{M}, \mathcal{M}_{r-1}]$, $\mathcal{M}_{r+1} = (0)$, la suite centrale descendante de l'idéal nilpotent $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}$. Pour $i \in \{1 , \dots , r\}$, désignons par m^i un sous-espace supplémentaire de $\mathcal{N}_{i+1}$ dans $\mathcal{N}_i$. Nous avons

$$\mathcal{N} = m^1 \oplus m^2 \oplus \dots \oplus m^r .$$

Soit $c = (\exp X)\, p \in C$, avec $X \in \mathcal{N}$ et $p \in P$. Comme P est contenu dans C , $\exp X$ appartient à C ; il s'ensuit que l'on a

$$(\mathrm{Ad} \exp X - I)(\mathfrak{z}) = (\mathrm{Exp}\, \mathrm{ad}\, X - I)(\mathfrak{z}) = (0) ;$$

c'est-à-dire

$$(*) \quad (\mathrm{ad}\, X + \dots + \frac{(\mathrm{ad}\, X)^r}{r!})(\mathfrak{z}) = (0) .$$

Soit Y un élément quelconque de $\mathfrak{z}$; écrivons

$$\mathrm{ad}\, X (Y) = [X , Y] = \sum_{i=1}^{r} u^i ,$$

avec $u^i \in m^i$. Comme on a

$$(\mathrm{ad}\, X)^j (m^i) \subset \mathcal{N}_{i+j} = m^{i+j} \oplus \dots \oplus m^r \quad \text{si } i+j \leqslant r$$
$$(\mathrm{ad}\, X)^j (m^i) = (0) \quad \text{si } i+j \geqslant r+1 ,$$

la relation $(*)$ implique que l'on a nécessairement $u^i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots , r\}$. Autrement dit X appartient à $\mathcal{N} \cap \mathfrak{C}$. On a donc prouvé que $C = \exp(\mathcal{N} \cap \mathfrak{C})\, P$.

Considérons à présent un élément X de $\mathcal{N} \cap \mathfrak{C}$ tel que $\exp X$ normalise P . Nous avons

$$(\mathrm{Exp}\, \mathrm{ad}\, X - I)(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P} \cap \mathcal{N};$$

c'est-à-dire

$$(**) \quad (\mathrm{ad}\, X + \dots + \frac{(\mathrm{ad}\, X)^r}{r!})(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P} \cap \mathcal{N}.$$

Appelons Θ l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{C}^{\mathbb{C}}$; nous avons $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{C}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\gamma \in \Theta} \mathfrak{C}_\gamma$. Et par suite

$$\mathcal{N} \cap \mathfrak{C} = \mathcal{N} \cap \mathfrak{P} \oplus \Big(\big(\bigoplus_{\gamma \in \Theta - \{0\}} \mathfrak{C}_\gamma \big) \cap \mathcal{N} \Big) .$$

D'après $(**)$, il est facile de voir que X ne peut pas avoir une composante non nulle sur $\big(\bigoplus_{\gamma \in \Theta - \{0\}} \mathfrak{C}_\gamma \big) \cap \mathcal{N}$. Il s'ensuit donc que $X \in \mathfrak{P} \cap \mathcal{N}$ et par suite $\exp X \in P$.

On en déduit que P est son propre normalisateur dans C . Le lemme (1.13) est démontré .

Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre résoluble , nous avons $\mathfrak{z} = (0)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} = \mathfrak{C}$. Du lemme (1.13) il résulte donc que l'on a :

<u>Corollaire</u>. - *Les sous-groupes de Cartan ([5]) , d'un groupe de Lie résoluble connexe* R *, sont les images par l'application exponentielle des sous-algèbres de Cartan de l'algèbre de Lie de* R *. De plus tout sous-groupe de Cartan de* R *est son propre normalisateur .*

1.14. Lemme. - *Soit* Γ' *le sous-groupe de* G *formé des éléments qui normalisent à la fois les sous-groupes* N , A , K *et* P *(et donc aussi* Γ *et* $\tilde{N}$ *).* Γ' *est un sous-groupe fermé de* G *qui rencontre ses différentes composantes connexes . En outre nous avons* $\Gamma' \cap G_0 = P\,\Gamma$.

Preuve. - Soit $Z(G_0)$ le centre de G_0 . Les sous-groupes N , A , K $Z(G_0)$ et P sont fermés dans G (voir (1.12) et les lemmes (1.5) et (1.6)) . Comme Γ' est aussi l'intersection des normalisateurs dans G de ces sous-groupes , Γ' est un sous-groupe fermé de G .

D'après la remarque (1.11) , nous savons que deux décompositions du type $\mathcal{G} = (\mathcal{M} + \mathcal{P}) \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{K}$ se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de $\mathcal{G}$ de la forme Ad x , où x appartient à G_0 . Il s'ensuit donc que pour tout g de G , il existe $g_0 \in G_0$ tel que $g_0^{-1}g$ normalise à la fois N , A , K et P . On en déduit que Γ' rencontre les différentes composantes connexes de G .

Soit $g \in \Gamma' \cap G_0$; écrivons $g = r\,s$ avec $r \in R$ et $s \in S$. r normalise S . Posons $[r,S] = \{rs'r^{-1}s'^{-1} , s' \in S\}$; $[r,S]$ est contenu dans le sous-groupe discret $R \cap S$. Comme S est connexe , il s'ensuit que $[r,S] = \{ e\}$, c'est-à-dire $r \in C$. L'élément s normalise alors N , A et K ; nous avons donc $s \in \Gamma$. Puisque S centralise P , r normalise P ; r appartenant à C , d'après le lemme (1.13) il s'ensuit que $r \in P$. Nous avons donc montré que $\Gamma' \cap G_0 = P\Gamma$.

1.15. Fin de la preuve de la proposition (1.7.). - Désignons par Q le sous-groupe $K\,\Gamma'$ de G . D'après le lemme (1.14) nous avons $Q \cap G_0 = P\,K$; il s'ensuit que $Q \cap G_0$ est la composante connexe de l'unité dans Q . D'autre part $P\,\Gamma = \Gamma' \cap G_0$ est un sous-groupe fermé de G (lemme (1.14)) et $Q \cap G_0 / P\,\Gamma = P\,K / P\,\Gamma$, qui est homéomorphe à K / Γ , est compact (noter que Γ contient le centre $Z(S)$ de S) , on en déduit que $Q \cap G_0$ est un sous-groupe fermé de G . G ayant un nombre fini de composantes connexes , Q est donc un sous-groupe fermé de G possèdant le même nombre de composantes connexes que G .

Nous savons alors ([14] , ch XV , théorème 3.7) que Q possède des sous-groupes compacts maximaux deux à deux conjugués et , si L est l'un d'eux , nous avons $Q = (Q \cap G_0) L$ (et par suite $G = G_0 L$, puisque Q rencontre les différentes composantes connexes de G) .

Choisissons un tel groupe L et posons $\mathcal{K} = K\,L$. Nous obtenons la décomposition $G = D\,\mathcal{K}$, où D est un sous-groupe résoluble connexe de G , l'image Ad $\mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ par la représentation adjointe de G est compacte et le sous-groupe $D \cap \mathcal{K}$ est contenu dans P . Plus précisément nous avons :

1.16. Lemme. - *Soit* K_1 *le plus grand sous-groupe compact du groupe de Lie nilpotent connexe* P *(* [11] *) . Alors l'intersection des sous-groupes* D *et* K *est contenue dans* K_1 *(* $R \cap S$ *) et donc dans* P .

Preuve. - $L \cap G_o$ est un sous-groupe compact maximal de $Q \cap G_o = P K$. Il est clair que $L \cap G_o = K_1 \; (K \cap L)$. Nous avons donc

$$D \cap K = D \cap (K(L \cap G_o)) = D \cap K_1K = D \cap (K_1(D \cap K)) \; ;$$

or $D \cap K = R \cap S \subset R \cap Z(G_o) \subset C \cap Z(G_o) \subset P$ (lemme (1.13)) .

Le lemme (1.16) est prouvé .

2. FAMILLES DISCRIMINANTES D'A-COCYCLES ASSOCIEES A UN GROUPE DE LIE

2.1. Définitions. - (voir [10]) . Soient G un groupe L.C.D. et E un G - espace à droite (i.e. un espace topologique sur lequel G opère à droite continûment). On appelle A-cocycle sur E toute fonction continue ρ sur $E\times G$, à valeurs réelles vérifiant

$$\rho(u,g_1g_2)=\rho(u,g_1)+\rho(u.g_1\,,\,g_2)\quad \text{pour } g_1,g_2\in G\ ,\ u\in E$$

Soient L un sous-groupe de G et ρ un A-cocycle sur E ; nous disons que ρ est L-invariant si on a :

$$\rho(u,l)=o,\quad \text{pour}\quad l\in L\ ,\ u\in E$$

Dorénavant G désigne un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes . Nous reprenons les notations du paragraphe précédent : En particulier on considère la décomposition $G = DK$, où D est un sous-groupe fermé connexe résoluble et $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}K$ est compact ; on note $\mathfrak{g} = \mathcal{D}\oplus\mathcal{K}$ la décomposition correspondante pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

2.2. Lemme. - G *possède une frontière maximale (voir* [1] *)* , $B(G)$, *unique à* G *- homéomorphisme près . Le plus grand sous-groupe résoluble distingué* R' *de* G_o *opère trivialement sur* $B(G)$; $B(G)$ *est alors un* ${}_{R'}\backslash^{G}$ *- espace (de façon évidente) qui est une frontière maximale du groupe de Lie* ${}_{R'}\backslash^{G}$ *dont la composante connexe est semi-simple et de centre trivial . En outre ,* $B(G)$ *est une frontière maximale de tout sous-groupe de* G *contenant* G_o .

Preuve. - Soit $N_o(D)$ (resp. $N(D)$) le normalisateur de D dans G_o (resp. dans G) . Nous avons $N_o(D) = D\,\Gamma$ et $N(D) = D\,\Gamma'$ (voir (1.4) et prop. (1.7))

D'après [1] , nous savons que G_o possède une frontière maximale $B(G_o)$, unique à G_o - homéomorphisme près , dont une version est $N_o(D)\backslash^{G_o}$.

Soit $Z(G_o)$ le centre de G_o ; $DZ(G_o)$ est un sous-groupe fermé (lemme (1.6)) , distingué de $N(D)$. ${}_{DZ(G_o)}\backslash^{N(D)}$ étant compact , d'après ([1] lemme II 8) , $N(D)$ possède la propiété de point fixe .

Comme ${}_{N(D)}\backslash^{G}$ est G_o - homéomorphe à ${}_{N_o(D)}\backslash^{G_o}$, d'après ([1] , corollaire 1 de la proposition II.2) , on en déduit que G possède une frontière maximale $B(G)$, unique à G -homéomorphisme près , dont une version est ${}_{N(D)}\backslash^{G}$.

D'autre part , désignons par ξ' l'application naturelle de G sur ${}_{R'}\backslash^{G}$. D'après ([1] lemme II.12) R' opère trivialement sur $B(G)$. $B(G)$ est alors un ${}_{R'}\backslash^{G}$ - espace (de façon évidente) , ${}_{R'}\backslash^{G}$ - homéomorphe à

$${}_{\xi'(N(D))}\backslash^{\xi'(G)}$$ qui est une frontière maximale de ${}_{R'}\backslash^{G}$.

Enfin si G_1 est un sous-groupe de G contenant G_o , notons $N_1(D)$ le normalisateur de D dans G_1 . Il est alors clair que la frontière maximale $N_1(D)\backslash^{G_1}$ de G_1 est G_1 - homéomorphe à $_{N(D)}\backslash^{G}$ et donc à $B(G)$.

Le lemme 2.2. est prouvé .

2.3. Lemme. - *Soit* $N(D)$ *le normalisateur de* D *dans* G . *Il existe sur la frontière maximale* $B(G)$ *de* G *un unique élément* u_o *dont le stabilisateur dans* G *est* $N(D)$.

Preuve. - $B(G)$ étant G - homéomorphe à $_{N(D)}\backslash^{G}$, il est clair qu'un tel point u_o existe . Soit u_1 un autre point de $B(G)$ dont le stabilisateur est $N(D)$; écrivons $u_1 = u_o \cdot x$, avec $x \in G$. L'élément u_o est alors stable par les éléments de $x^{-1}\ N(D)\ x$; par suite nous avons $x^{-1}\ N(D)\ x \subset N(D)$; c'est-à-dire que x normalise $N(D)$.

Or $N(D)$ est son propre normalisateur dans G : en effet , le normalisateur de $N(D)$ dans G est une extension compacte de $N(D)$ et possède donc la propriété de point fixe ([1] lemme II.8) ; mais $_{N(D)}\backslash^{G}$ étant une frontière de G , on sait aussi ([1] cor. 1 de la prop. II.2) que $N(D)$ est maximal pour la propriété de point fixe ; par suite $N(D)$ est son propre normalisateur dans G .

On en déduit alors que $x \in N(D)$ et $u_1 = u_o$. Le lemme (2.3) est prouvé .

2.4. Lemme. - *Soit* G_1 *un sous-groupe (fermé) de* G *contenant* G_o . *Désignons par* ζ_1 *l'application naturelle de* G *sur* $_{G_1}\backslash^{G}$ *et par* v_o *l'unique élément* $(u_o, \zeta_1(e))$ *de* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G}$ *stable par* $G_1 \cap N(D)$.

Alors l'application , $\rho \longmapsto \phi\ :\ d \in D \longmapsto \rho(v_o, d)$, *établit une correspondance biunivoque entre les* A- *cocycles* K-*invariants sur le* G-*espace homogène produit* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G}$ *et les homomorphismes continus* ϕ *de* D *dans* $\mathbb{R}$ *additif tels que* $\phi(k) = 0$, *pour tout* $k \in K \cap D$ *et* $\phi(x^{-1}dx) = \phi(d)$, *pour* $d \in D$, $x \in G_1 \cap N(D)$.

Preuve. - Désignons par ζ_1 l'application naturelle de G sur $_{G_1}\backslash^{G}$. L'élément $v_o = (u_o, \zeta_1(e))$ de $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G}$ est stable par $G_1 \cap N(D)$.

Soit ρ un A-cocycle K-invariant sur $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G}$. Posons $\phi(d) = \rho(v_o, d)$, $(d \in D)$; il est clair que l'on définit ainsi un homomorphisme continu ϕ de D dans $\mathbb{R}$ additif vérifiant les propriétés énoncées . En outre , pour tout $(k, g) \in K \times G$, nous avons $\rho(v_o \cdot k, g) = \phi(d)$, où d est un élément de D tel que $k\,g = d\,k'$ avec $k' \in K$. On notera que K est transitif sur $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G}$.

Réciproquement, soit ϕ un homomorphisme continu de D dans $\mathbb{R}$ additif possèdant les propriétés énoncées. Posons

$$\rho(v_0 \cdot k, g) = \phi(d) \qquad (k \in K, g \in G)$$

où d est un élément de D tel que $kg = dk'$ avec $k' \in K$. Puisque ϕ est nul sur $D \cap K$, la valeur donnée à $\rho(v_0 \cdot k, g)$ ne dépend pas du choix de l'élément $d \in D$. D'autre part, soient $k_1, k_2 \in K$ avec $v_0 \cdot k_1 = v_0 \cdot k_2$ et $g \in G$; écrivons $k_1 g = d_1 k'_1$ avec $d_1 \in D$, $k'_1 \in K$, et $k_2 = x k_1$ avec $x \in G_1 \cap N(D) \cap K$; nous avons $k_2 g = (x d_1 x^{-1}) x k'_1$ et par suite

$$\rho(v_0 \cdot k_2, g) = \phi(x d_1 x^{-1}) = \phi(d_1) = \rho(v_0 \cdot k_1, g)$$

Ce qui montre que ρ est bien définie.

Montrons que ρ est continue. Pour cela on est amené à montrer que si (g_n) est une suite d'éléments de G convergeant vers un élément g de G, on peut trouver une suite (d_n) d'éléments de D convergeant vers un élément d de D tels que $g_n = d_n k_n$ et $g = dk$ avec $k_n, k \in K$. Soit donc (g_n) une telle suite ; écrivons $g_n = d^1_n k^1_n$ et $g = dk$ avec $d^1_n, d \in D$ et $k^1_n, k \in K$. la suite $x_n = d^{-1} g_n k^{-1}$ converge alors vers e ; comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{K}$, nous pouvons trouver des suites (d^2_n) et (k^2_n) d'éléments respectivement de D et K convergeant vers e, telles que $x_n = d^2_n k^2_n$. Il s'ensuit que l'on a :

$$d^2_n = d^{-1} d^1_n z_n \quad \text{et} \quad k^2_n = z_n^{-1} k^1_n k^{-1} \quad \text{avec } z_n \in D \cap K$$

en posant $d_n = d^1_n z_n$ et $k_n = z_n^{-1} k^1_n$, on obtient ce que l'on voulait.

Enfin, on vérifie facilement les relations

$$\rho(u, k) = 0 \qquad (u \in B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G}, k \in K)$$

$$\rho(u, g_1 g_2) = \rho(u, g_1) + \rho(u \cdot g_1, g_2) \quad (u \in B(G) \times {}_{G_1}\backslash^{G} ; g_1, g_2 \in G)$$

2.5. <u>Une famille d'homomorphismes de $\mathfrak{D}$ dans $\mathbb{C}$ additif</u>. - Soit $\mathfrak{h}$ le nilradical de $\mathfrak{D}$. Nous désignons par Ξ l'ensemble des poids (voir (1.0) de la représentation adjointe, $ad_{\mathfrak{D}} |_{\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}$, de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. ($\mathfrak{D}$ étant résoluble, d'après le théorème de Lie, nous pouvons trouver une base de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ qui triangularise simultanément les éléments de $ad_{\mathfrak{D}} |_{\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}$. Alors Ξ n'est autre que la famille d'homomorphismes définie par les éléments diagonaux).

2.6. <u>Lemme</u>. - Ξ *engendre l'espace vectoriel complexe des homomorphismes de* $\mathfrak{D}$ *dans* $\mathbb{C}$ *additif qui s'annulent sur le nilradical* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{D}$. *La dimension de cet espace est donc égale à celle de l'espace vectoriel* $\mathfrak{D}/\mathfrak{h}$.

<u>Preuve</u>. - Reprenons les notations du paragraphe 1. Nous avons

$\mathcal{D} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$. Désignons par $\mathcal{M}$ le nilradical de $\mathcal{R}$ et par $\mathcal{P}$ une sous-algèbre de Cartan du centralisateur $\mathcal{E}$ de la sous-algèbre de Lévi $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{R}$, Nous avons alors (prop. (1.7)) $\mathcal{R} = \mathcal{M} + \mathcal{P}$ et par suite

$$\mathcal{D} = \mathcal{H} + (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$$

où $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ est le nilradical de $\mathcal{D}$.

Désignons par $(\mathcal{H}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, la série centrale descendante de l'idéal nilpotent $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}$. Il est clair que Ξ est la réunion des poids des représentations adjointes de $\mathcal{D}$ dans les espaces $(\mathcal{H}_i / \mathcal{H}_{i+1})^{\mathbb{C}}$ $1 \leqslant i \leqslant p$. Tout élément de Ξ est donc nul sur $\mathcal{H}$.

Considérons la représentation adjointe Π de $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ dans $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$. Il est clair que les poids de Π sont les restrictions à $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ des éléments de Ξ ; nous identifions Ξ et l'ensemble des poids de Π . Avec les notations de (1.0) , les sous-espaces $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}_{\lambda}$, $\lambda \in \Xi$, sont stables par $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ et nous avons

$$\mathcal{H}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \in \Xi} \mathcal{H}^{\mathbb{C}}_{\lambda}$$

Soit alors $X \in \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ vérifiant $\lambda(X) = 0$ pour tout $\lambda \in \Xi$. Pour tout $\lambda \in \Xi$ et tout $Y \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}_{\lambda}$, il existe un entier n tel que $(\mathrm{ad}\, X)^n (Y) = 0$. Autrement dit ad X est nilpotent sur $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{H} + (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$, il s'ensuit que ad X est nilpotent sur $\mathcal{D}$ et par suite X appartient au nilradical $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}$. Le lemme (2.6) est prouvé..

2.7. Corollaire. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe* G_0 *de l'unité est semi-simple . Soit* $\mathcal{G} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{K}$ *une décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *de* G . *Alors la famille* Ξ *d'homomorphismes de* $\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$ *dans* $\mathbb{C}$ *additif , obtenue en (2.5) , engendre tout l'espace des homomorphismes de* $\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$ *dans* $\mathbb{C}$ *additif . La dimension de cet espace est égale à celle de* $\mathcal{Q}$.

Preuve. - Nous avons

$$\mathcal{N} = [\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q} , \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}] ;$$

par suite tout homomorphisme de $\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$ dans $\mathbb{C}$ additif , s'annule sur le nilradical $\mathcal{N}$ de $\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$. Le corollaire résulte alors du lemme (2.6) .

2.8. Lemme. - *Soit* θ *un automorphisme de* $\mathcal{G}$ *laissant stable* $\mathcal{D}$. *Alors pour tout* λ *de* Ξ , $\lambda \circ \theta \in \Xi$; θ *permute ainsi les éléments de* Ξ . *En particulier* $\lambda \circ \mathrm{Ad}\, x = \lambda$ *pour tout* $\lambda \in \Xi$ *et tout* $x \in N_0 (D)$.

Preuve. - θ est un automorphisme de $\mathcal{G}$ laissant stable $\mathcal{D}$, θ laisse donc invariant le nilradical $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}$.

Soit $\lambda \in \Xi$. Il existe alors un idéal $\mathfrak{w}$ de $\mathfrak{D}$, contenu dans $\mathfrak{h}$, et un élément V de $\mathfrak{h} - \mathfrak{w}$ vérifiant

$$(\operatorname{ad}_{\mathfrak{D}} X)(V) = \lambda(X) . V \text{ modulo } \mathfrak{w} \text{ , pour tout } X \in \mathfrak{D}$$

Comme on a $\Theta \circ \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X \circ \Theta^{-1} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \Theta(X)$ ($X \in \mathfrak{g}$) , nous avons pour tout $X \in \mathfrak{D}$

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \Theta(X))(\Theta(V)) &= (\Theta \circ \operatorname{ad}_{\mathfrak{D}}(X))(V)\\ &= \lambda(X) . \Theta(V) \text{ modulo } \Theta(\mathfrak{w}) ;\end{aligned}$$

c'est-à-dire pour tout $X \in \mathfrak{D}$

$$(\operatorname{ad}_{\mathfrak{D}} X)(\Theta(V)) = \lambda \circ \Theta^{-1}(X) . \Theta(V) \text{ modulo } \Theta(\mathfrak{w}) ;$$

ce qui montre que $\lambda \circ \Theta^{-1} \in \Xi$

D étant connexe , il s'ensuit alors que $\lambda \circ \operatorname{Ad} x = \lambda$, pour tout $\lambda \in \Xi$ et tout $x \in D$. Enfin comme Γ centralise P et A , la restriction $\operatorname{Ad}\gamma\,|\,\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{A}$, de $\operatorname{Ad} \gamma$ à $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{A}$ est l'identité , pour tout γ de Γ ; il s'ensuit que $\lambda \circ \operatorname{Ad}\gamma = \lambda$ pour tout $\lambda \in \Gamma$ et pour tout $\lambda \in \Xi$. Comme $N_o(D) = D\,\Gamma$, le lemme (2.8) est prouvé .

2.9. <u>Une famille d'A-cocycles K-invariants sur la frontière maximale $B(G)$ de G .</u> - Soit $\lambda \in \Xi$; D étant un groupe résoluble connexe λ est la différentielle en e d'un poids ϕ_λ de la représentation adjointe de D dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Nous avons alors :

i) pour tout automorphisme σ de G laissant stable D , $\phi_\lambda \circ \sigma = \phi_{\lambda \circ d\sigma}$ (lemme (2.8)) . En particulier $\phi_\lambda(x\, d\, x^{-1}) = \phi_\lambda(d)$, pour $d \in D$ et $x \in N_o(D)$.

ii) ϕ_λ prend la valeur 1 pour tout élément du nilradical MN , de D . De plus plus , comme $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}} K$ est compact , $|\phi_\lambda(k)| = 1$, pour tout $k \in D \cap K$.

D'après le lemme (2.4) à l'homomorphisme continu $\log|\phi_\lambda|$ de D dans $\mathbb{R}$ additif , se trouve associé un A-cocycle K-invariant τ_λ sur $B(G) \times {}_{G_o}\backslash G$.

Le normalisateur $N(D)$ de D dans G rencontre les différentes composantes connexes de G ; soit s une section de l'application naturelle ζ de G sur ${}_{G_o}\backslash G$, à valeur dans $N(D)$. Alors l'homomorphisme continu de D dans $\mathbb{R}$ additif , $\dfrac{1}{\operatorname{card} {}_{G_o}\backslash G} \sum_{x \in {}_{G_o}\backslash G} \operatorname{Log} |\phi_{\lambda \circ \operatorname{Ad} s(x)}|$ est invariant par les automorphismes intérieurs associés , non seulement aux éléments de $N_o(D)$, mais aussi à ceux de $N(D)$. D'après le lemme (2.4) à cet homomorphisme se trouve donc associé un A-cocycle K-invariant ρ_λ sur $B(G)$.

Nous avons ,

$$\rho_\lambda(u_o . k , g) = \frac{1}{\operatorname{card} {}_{G_o}\backslash G} \sum_{x \in {}_{G_o}\backslash G} \tau_{\lambda \circ \operatorname{Ad} s(x)}((u_o , \zeta(e)) . k , g)$$

$(k \in K , g \in G)$,

où u_o est l'élément de $B(G)$ stable par $N(D)$ (lemme (2.3)) ; c'est-à-dire , aussi ,

$$\rho_\lambda(u , g) = \int_{G_o\backslash G} \tau_\lambda((u , x), g) \, dx \quad (u \in B(G) , g \in G) ,$$ où dx désigne la mesure de Haar normalisée sur le groupe fini $G_o\backslash G$.

Nous avons ainsi associé à G une famille d'A-cocycles $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$ sur la frontière maximale $B(G)$. Il est facile de voir que cette famille ne dépend de la décomposition $G = D\mathcal{K}$ que par le choix du sous-groupe $\mathcal{K}$; c'est-à-dire que pour toute décomposition $G = D'\mathcal{K}$ où D' est un conjugué de D , on obtient la même famille d'A-cocycles $\mathcal{K}$-invariants sur $B(G)$.

2.10. Remarque. - D'après le lemme (2.6) , la famille d'A-cocycles $\mathcal{K}$-invariants sur $B(G)$, $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$ obtenue en (2.9) engendre l'espace vectoriel des A-cocycles , ρ , $\mathcal{K}$-invariants sur $B(G)$ tels que l'homomorphisme de D dans $\mathbb{R}$ additif , $d \longmapsto \rho(u_o , d)$, (voir lemme (2.4)) , est nul sur le nilradical de D . Cet espace vectoriel est donc de dimension inférieure ou égale à celle de $\mathfrak{h}\backslash\mathfrak{D}$. [Il peut en effet arriver qu'un élément de Ξ soit à partie réelle nulle sans être nul] .

Si G_o est semi-simple , il résulte du corollaire (2.6) que la famille d'A-cocycles ainsi obtenue engendre tout l'espace vectoriel des A-cocycles $\mathcal{K}$-invariants sur $B(G)$. Cet espace vectoriel est donc de dimension égale à celle de $\mathfrak{a}$. [En effet , dans ce cas , les éléments de Ξ sont réels (voir (1.2))].

2.11. Définition. - A tout sous-groupe $\mathcal{K}$ qui provient d'une décomposition de G du type construit au paragraphe 1 , nous avons associé (voir (2.9)) une famille d'A-cocycles , $\mathcal{K}$-invariants , $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$, sur la frontière maximale $B(G)$ de G . Une telle famille sera appelée une famille discriminante d'A-cocycles associée à G .

Si x est un élément de G , on note I_x l'automorphisme intérieur associé à x^{-1} (i.e. $I_x : g \longmapsto x^{-1} g x$) et J_x l'homéomorphisme de $B(G)$ sur lui-même qui à $u \in B(G)$ associe $u . x$. Nous avons alors

2.12. Lemme. - *Soit* $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$ *une famille discriminante d'A-cocycles associée à* G . *Alors toute autre telle famille s'écrit* $\{\rho_\lambda \circ (J_d , I_d) , \lambda \in \Xi\}$ *pour un certain élément* d *de* D .

Preuve. - Considérons la décomposition $G = D\mathcal{K}$ de G et soit $\mathcal{K}'$ un quelconque sous-groupe de G qui provient d'une décomposition analogue de G . Alors G admet la décomposition $G = D\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}'$ est le conjugué de $\mathcal{K}$ par un élément d

de D (i.e. $K' = d\,K\,d^{-1}$) .

Il est alors clair qu'à partir de la décomposition $G = D\,K'$, on obtient (voir (2.9)) la famille d'A -cocycles K'-invariants sur $B(G)$ $\{\rho_\lambda \circ (J_d , I_d) , \lambda \in \Xi\}$. Il suffit en effet de remarquer que si $x \in G$, la composante sur D de $d\,x\,d^{-1}$, pour la décomposition $G = D\,K'$, est la conjuguée par d de la composante sur D de x , pour la décomposition $G = D\,K$. Le lemme 2.12 est prouvé .

En passant , on notera que l'on a

$$\rho_\lambda \circ (J_d , I_d)(u , g) = \rho_\lambda (u , g) + \rho_\lambda (u . g , d) - \rho_\lambda (u , d)$$
$$(u \in B(G) , g \in G)$$

2.13. <u>Remarque.</u> - Appelons Ξ_o l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{D}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} / [\mathfrak{h} , \mathfrak{h}]^{\mathbb{C}}$; Ξ_o est un sous-ensemble de Ξ . Comme on sait que tout système $x_1 , ... , x_s$ d'éléments de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ dont l'image dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}/[\mathfrak{h} , \mathfrak{h}]^{\mathbb{C}}$ forme une base de cet espace , engendre $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ en tant qu'algèbre de Lie , il est facile de voir que tout élément λ de Ξ est une somme d'éléments de Ξ_o . Il s'ensuit alors que tout élément de $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$ est une somme d'éléments de $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi_o\}$.

3. ALGEBRES DE LIE NILPOTENTES

3.1. Définition. - Soit G un groupe topologique, $A_1,\dots,A_r$ $(r \in \mathbb{N})$ des sous-groupes fermés de G ; nous disons que G est le produit amalgamé des sous-groupes $A_1,\dots,A_r$ si l'application du produit cartésien $A_1 \times \dots \times A_r$ dans G qui au couple $(a_1,\dots,a_r)$ fait correspondre le produit $a_1 \dots a_r$ est un homéomorphisme. Dans ce cas les applications $\rho_1,\dots,\rho_r$ qui à un élément g de G font correspondre les éléments $\rho_1(g),\dots,\rho_r(g)$ respectivement de $A_1,\dots,A_r$ tels que $g = \rho_1(g)\dots\rho_r(g)$, sont appelés les projections de G respectivement sur $A_1, A_2,\dots,A_r$.

Remarques. - Il est facile de voir que

i) Soient G un groupe localement compact qui est une réunion dénombrable de compacts, A et B des sous-groupes fermés de G ; alors si l'application

$$\begin{aligned}\psi : A\times B &\longrightarrow G\\ (a,b) &\longmapsto ab\end{aligned}$$

est surjective, elle est ouverte ; si de plus on a $A \cap B = \{e\}$, G est le produit amalgamé des sous-groupes A et B .

ii) Soit G un groupe de Lie qui est le produit amalgamé de deux sous-groupes fermés A et B ; alors l'application ψ est un isomorphisme de variétés analytiques.

Dans la suite, nous utiliserons le résultat suivant :

3.2. Lemme. - *Soit* G *un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est somme directe de deux sous-algèbres* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$. *Soient* G_1 *et* G_2 *des sous-groupes de Lie de* G *ayant respectivement* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *pour algèbre de Lie. Si tout élément de* G *s'écrit de façon unique comme produit d'éléments de* G_1 *et* G_2 , *alors* G *est le produit amalgamé de* G_1 *et* G_2 .. *En particulier* G_1 *et* G_2 *sont fermés dans* G .

Preuve. - D'après les hypothèses l'application $\eta : G_1 \times G_2 \longrightarrow G$ est bijective. Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, nous savons que η est un isomorphisme de variétés analytiques d'un ouvert $V \times W$ contenant (e,e) de $G_1 \times G_2$ sur un ouvert U contenant e de G (e désigne l'élément unité de G) . Soit alors $g = g_1 g_2 \in G$ avec $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$. La restriction de η^{-1} à l'ouvert $X = g_1 U g_2$, contenant g , se décompose en

$$\begin{aligned}X &\longrightarrow U \xrightarrow{\eta^{-1}} V \times W \longrightarrow G_- \times G_+\\ x &\longmapsto g_1^{-1} x g_2^{-1} \qquad (v,w) \longmapsto (g_1 v, w g_2) .\end{aligned}$$

et est donc analytique. L'application η est donc un isomorphisme de variété analytique de $G_1 \times G_2$ sur G ; autrement dit G est le produit amalgamé des sous-groupes fermés G_1 et G_2.

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle ou complexe de dimension m, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}, \mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1], \ldots, \mathfrak{h}_p = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{p-1}], \mathfrak{h}_{p+1} = (0)$, sa série centrale descendante. Soit $e_1, \ldots, e_{i_1}, e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_p} = e_m$ une base de $\mathfrak{h}$ adaptée à cette série (i.e. pour tout $j = 1, \ldots, m$, $e_j \in \mathfrak{h}_\ell \setminus \mathfrak{h}_{\ell+1}$ si $i_{\ell-1} < j \leqslant i_\ell$). La formule de Campbell-Hausdorff,

$$(3.3) \qquad u \times v = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \ldots \qquad (u, v \in \mathfrak{h}),$$

permet de munir $\mathfrak{h}$ d'une structure de groupe nilpotent.

Désignons par $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$. Soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ le système de fonctions coordonnées associées à la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$; on définit ([12]) une notion de degré sur $\mathcal{A}$ en attribuant un degré à chaque générateur x_i ; le degré de x_i, noté "dg x_i", est par définition égal au plus grand entier s tel que $e_i \in \mathfrak{h}_s$; on convient que le degré du polynome nul est $(-\infty)$. Cette notion est évidemment indépendante du choix de la base adaptée. Si $u \in \mathfrak{h}$, on pose $x_i(u) = u_i$. On sait que la multiplication dans $\mathfrak{h}$ est polynomiale. Plus précisément on a, pour tout u et $v \in \mathfrak{h}$.

$$(3.4) \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, i_1\}, \quad (u \times v)_i = u_i + v_i$$

$$\forall\, \ell \in \{2, \ldots, p\},\ \forall\, i \in \{i_{\ell-1}+1, \ldots, i_\ell\},\ (u \times v)_i = u_i + v_i + T_i(u_1, \ldots, u_{i_{\ell-1}}; v_1, \ldots, v_{i_{\ell-1}})$$

où les T_i sont des polynômes dont le degré total est inférieur ou égal à ℓ et le degré partiel par rapport à l'ensemble des variables u_k (resp. v_k), $1 \leqslant k \leqslant i_{\ell-1}$ est inférieur ou égal à $(\ell-1)$.

Si $c \in \mathfrak{h}$, nous désignons par L_c (resp. R_c) la multiplication à gauche (resp. à droite) par c dans $\mathfrak{h}$. Il résulte de (3.4.) que L_c et R_c sont des applications polynomiales. Un endomorphisme E de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ est dit adapté à sa série centrale si les $\mathfrak{h}_\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant p$, sont stables par E.

3.5. Lemme. - *Avec les notations ci-dessus, nous avons :*

i) $\forall\, c \in \mathfrak{h}$, $\forall\, T \in \mathcal{A}$, $T \circ L_c = T + T'$ *avec* $\mathrm{dg}T' < \mathrm{dg}T$.

ii) Si E *est un endomorphisme (resp. un automorphisme) d'espace vectoriel de* $\mathfrak{h}$*, adapté à sa série centrale, alors*

$\forall\, T \in \mathcal{A} \quad \mathrm{dg}(T \circ E) \leqslant \mathrm{dg}T$ *(resp.* $\mathrm{dg}(T \circ E) = \mathrm{dg}T$*)*.

Preuve. - Il suffit de montrer le lemme quand T est un générateur x_i de $\mathcal{A}$. La première partie est alors une conséquence immédiate de (3.4.). Quant à la seconde, E étant adapté, nous avons

$$E(e_j) = \sum_{\ell=1}^{m} E_{j,\ell}\, e_\ell \quad \text{avec} \quad E_{j,\ell} = 0 \quad \text{si} \quad dg\, x_j > dg\, x_\ell \,.$$

D'où

$$x_i o E(u) = \sum_{j=1}^{m} u_j\, x_i o E(e_j) = \sum_{j=1}^{m} E_{j,i}\, u_j = \sum_{\{j : dg x_j \leqslant dg x_i\}} E_{j,i}\, u_j \qquad (u \in \mathfrak{h})$$

qui montre que $dg(x_i o E) \leqslant dg x_i$.

Enfin si E est un automomorphisme, cette dernière inégalité appliquée à E et E^{-1} donne l'égalité des degrés.

3.6. Lemme. - *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{h}$ telles que*

$$\mathfrak{h}_\ell = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_\ell) \oplus (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_\ell) \,, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant p \,.$$

Alors le groupe nilpotent $(\mathfrak{h}, x)$ est le produit amalgamé des sous-groupes $(\mathfrak{a}, x)$ et $(\mathfrak{b}, x)$. De plus les projections (au sens de (3.1.)) de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont polynomiales.

Preuve. - Elle se fait par récurrence sur la longueur de la série centrale de $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h}$ est abélienne la proposition est évidente. Supposons donc qu'elle soit vérifiée pour les algèbres de Lie nilpotentes de longueur strictement inférieure à k et soit $\mathfrak{h}$ de longueur k. Considérons alors $\mathfrak{h}_k$, l'homomorphisme Π de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_k$ et une section linéaire σ de Π telle que $\sigma \circ \Pi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ et $\sigma \circ \Pi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$. L'hypothèse de récurrence s'applique à $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_k$: pour tout élément u de $\mathfrak{h}$, l'élément $\Pi(u)$ de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_k$ s'écrit donc de façon unique comme produit d'élément de $\Pi(\mathfrak{a})$ et $\Pi(\mathfrak{b})$; de plus

$$\Pi(u) = \overline{\rho}_1\,(\Pi(u)) \times \overline{\rho}_2(\Pi(u)) \,,$$

où $\overline{\rho}_1$ et $\overline{\rho}_2$ sont des applications polynomiales de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_k$ respectivement sur $\Pi(\mathfrak{a})$ et $\Pi(\mathfrak{b})$.

Posons alors $\tau_1(u) = \sigma \circ \rho_1 \circ \Pi(u)$ et $\tau_2(u) = \sigma \circ \rho_2 \circ \Pi(u)$; l'élément $y = \tau_1(u) \times \tau_2(u)$ a même image que u par Π, il s'ensuit que $z = u-y$, appartient à $\mathfrak{h}_k$ qui est contenu dans le centre de $\mathfrak{h}$. Mais

$$\mathfrak{h}_k = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_k) \oplus (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_k) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_k) \times (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_k) \,;$$

et si $p_{\mathfrak{a}}$ (resp. $p_{\mathfrak{b}}$) désigne la projection de $\mathfrak{h}_k$ sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_k$ (resp. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_k$) il vient,

$$u = \tau_1(u) \times \tau_2(u) + p_{\mathfrak{a}}(z) + p_{\mathfrak{b}}(z)$$

où $p_{\mathfrak{a}}(z)$ et $p_{\mathfrak{b}}(z)$ appartiennent au centre de $\mathfrak{h}$.
D'où

$$\begin{aligned} u &= \tau_1(u) \times \tau_2(u) \times p_{\mathfrak{a}}(z) \times p_{\mathfrak{b}}(z) \\ &= (\tau_1(u) \times p_{\mathfrak{a}}(z)) \times (\tau_2(u) \times p_{\mathfrak{b}}(z)) \\ &= (\tau_1(u) + p_{\mathfrak{a}}(z)) \times (\tau_2(u) + p_{\mathfrak{b}}(z)). \end{aligned}$$

En posant

$$\rho_1(u) = \tau_1(u) + p_{\mathfrak{a}}(u-\tau_1(u) \times \tau_2(u))$$

$$\rho_2(u) = \tau_2(u) + p_{\mathfrak{b}}(u-\tau_1(u) \times \tau_2(u)) ,$$

ρ_1 et ρ_2 sont des applications polynomiales et tout élément u de $\mathfrak{h}$ s'écrit de façon unique comme produit d'éléments de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sous la forme

$$u = \rho_1(u) \times \rho_2(u) .$$

Remarque. - Cette démonstration montre en fait que si on a seulement

$$\mathfrak{h}_\ell = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_\ell) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_\ell) \quad , \quad \ell \in \{1,\dots,p\} ,$$

(sommes non nécessairement directes), il existe des applications ρ_1 et ρ_2 polynomiales de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ telles que $u = \rho_1(u) \times \rho_2(u) \quad \forall\, u \in \mathfrak{h}$.
Le couple (ρ_1, ρ_2) n'est pas unique si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \neq (0)$.

3.7. Soit $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{h}$) une sous-algèbre nilpotente (resp. un idéal nilpotent) d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$.

Considérons la représentation adjointe de $\mathfrak{L}$ dans l'idéal $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et désignons par Θ l'ensemble de ses poids. Nous avons ([25]), avec les notations de (1.0.),

i) Les sous-espaces $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_\theta$ sont stables par $\mathfrak{L}$

ii) $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\theta \in \Theta} \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_\theta$

iii) $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_\theta , \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\theta'}] \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\theta+\theta'}$, $(\theta, \theta' \in \Theta)$

(avec la convention $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\theta+\theta'} = (0)$ si $\theta+\theta' \notin \Theta$).

Définition. - Une partition $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ de Θ est dite stable par addition et conjugaison si :

a) Pour tout $\theta \in \Theta_-$ (resp. Θ_+) la forme linéaire conjuguée $\overline{\theta}$ appartient à Θ_- (resp. Θ_+).

b) $\left.\begin{array}{l} \theta + \theta' \in \Theta \\ \theta, \theta' \in \Theta_- \ (\text{resp. } \Theta_+) \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta + \theta' \in \Theta_-$ (resp. Θ_+).

c) Dans le cas où la forme linéaire nulle appartient à Θ, on convient qu'elle appartient à Θ_+.

Soit $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ une telle partition de Θ et posons

$$\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\theta \in \Theta_-} \mathfrak{h}_\theta^{\mathbb{C}} \quad , \quad \mathfrak{h}_+^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\theta \in \Theta_+} \mathfrak{h}_\theta^{\mathbb{C}} .$$

En vertu de iii) et de l'hypothèse b), $\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h}_+^{\mathbb{C}}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. De l'hypothèse a), il résulte que $\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h}_+^{\mathbb{C}}$ sont les complexifiées de deux sous-algèbres $\mathfrak{h}_-$ et $\mathfrak{h}_+$ de $\mathfrak{h}$. A toute partition $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ de Θ stable par addition et conjugaison, nous avons donc associé une décomposition de $\mathfrak{h}$ en somme directe de deux sous-algèbres $\mathfrak{h}_-$ et $\mathfrak{h}_+$.

Soit $\mathcal{M}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{h}$. Appelons Λ l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$. Λ est un sous-ensemble de Θ. A toute partition $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ de Θ stable par addition et conjugaison, correspond la partition $\{\Lambda \cap \Theta_-, \Lambda \cap \Theta_+\}$ de Λ stable par addition et conjugaison ; notons $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \oplus \mathcal{M}_+$ la décomposition de $\mathcal{M}$ en somme directe de deux algèbres associée à cette dernière. Il est alors clair que l'on a :

$$\mathcal{M}_- = \mathcal{M} \cap \mathfrak{h}_- \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_+ = \mathcal{M} \cap \mathfrak{h}_+ .$$

Soit $(\mathfrak{h}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la série centrale descendante de l'idéal nilpotent $\mathfrak{h}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\mathfrak{h}_i$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{h}$. Nous avons donc d'après ce qui précède (en faisant $\mathcal{M} = \mathfrak{h}_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$),

$$\mathfrak{h}_i = (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_-) \oplus (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_+) , \quad 1 \leqslant i \leqslant p .$$

D'après le lemme (3.6.), il s'ensuit que muni du produit $\times$ définit par la formule (3.3.), $\mathfrak{h}$ est un groupe nilpotent qui est le produit amalgamé des sous-groupes $\mathfrak{h}_-$ et $\mathfrak{h}_+$. De plus les projections associées à ce produit amalgamé sont polynomiales.

4. DECOMPOSITION DE G ASSOCIEES A UNE PARTITION DE Ξ STABLE PAR ADDITION ET CONJUGUAISON

4.0. - Nous reprenons les notàtions du paragraphe 1 : on désigne par $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{S}$ une décomposition de Lévi de $\mathfrak{g}$; par $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{K}$ une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{S}$; on obtient la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{K}$, où $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{A}$ est une sous-algèbre résoluble et $\mathfrak{K}$ une sous-algèbre compacte de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{M}$ le nilradical de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{C}$ une sous-algèbre de Cartan du centralisateur $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{R}$. Nous avons (prop. (1.7)) $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} + \mathfrak{C}$ et par suite

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{h} + (\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{A}),$$

où $\mathfrak{h} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ est le nilradical de $\mathfrak{D}$.

Ξ désigne l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$.

4.1. - Décomposition de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{g}$ associée à une partition de Ξ. Considérons la représentation adjointe Π de $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Tout élément de Ξ est nul sur $\mathfrak{h}$ et sa restriction à $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{A}$ fournit un poids de Π ; nous identifions Ξ et l'ensemble des poids de Π . Soit $\{\Xi_-, \Xi_+\}$ une partition de Ξ stable par addition et conjugaison ; notons $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{h}_+$ la décomposition de $\mathfrak{h}$ associée à cette partition (voir (3.7)) .

Posons $\mathfrak{D}_- = \mathfrak{h}_-$ et $\mathfrak{D}_+ = (\mathfrak{h}_+ + \mathfrak{C}) \oplus \mathfrak{A}$. Des relations $[\mathfrak{C}, \mathfrak{S}] = (0)$, $[\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{A}, \mathfrak{h}_-] \subset \mathfrak{h}_-$, $[\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{A}, \mathfrak{h}_+] \subset \mathfrak{h}_+$ et $[\mathfrak{C}, \mathfrak{C}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{h}_+$, il résulte que $\mathfrak{D}_-$ et $\mathfrak{D}_+$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{D}$. Nous obtenons ainsi les décompositions

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{D}_+ \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{E}_+ ,$$

où $\mathfrak{E}_+ = \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{K}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$.

4.2. Proposition. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Désignons par* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G *; par* $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{S}$ *une décomposition de Lévi de* $\mathfrak{g}$ *et par* $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{K}$ *une décomposition d'Iwasawa de* $\mathfrak{S}$ *. Nous obtenons la décomposition* $\mathfrak{g} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{K}$ *, où* $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{A}$ *est une sous-algèbre résoluble et* $\mathfrak{K}$ *une sous-algèbre compacte de* $\mathfrak{g}$ *.*

Appelons Ξ *l'ensemble des poids de la représentation adjointe de* $\mathfrak{D}$ *dans la complexifiée* $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ *de son nilradical* $\mathfrak{h}$ *. Soit* $\{\Xi_-, \Xi_+\}$ *une partition stable par addition et conjuguaison de* Ξ *et notons* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{D}_+$ *la décomposition de* $\mathfrak{D}$ *associée à cette partition (voir (4.1)).*

Désignons par N , A , K , P , D_- *et* D_+ *les sous-groupes de Lie connexes de* G *ayant respectivement* $\mathcal{N}$, $\mathfrak{A}$, $\mathcal{K}$, $\mathfrak{P}$, $\mathcal{D}_-$ *et* $\mathcal{D}_+$ *pour algèbres de Lie. Soit* Γ' *le sous-groupe fermé de* G *formé des éléments qui normalisent à la fois* N , A , K *et* P *(voir prop. (1.7)). Posons* $E_+ = D_+K\,\Gamma'$; E_+ *est une sous-variété de* G *, qui la réunion d'un nombre fini de sous-variétés ouvertes isomorphes à* D_+K.

Alors l'application qui au couple (a,b) *associe le produit* ab *est un isomorphisme de variétés analytiques de* $D_- \times E_+$ *sur* G . *En outre* D_- *est nilpotent simplement connexe.*

Désignons par D le sous-groupe de Lie connexe de G ayant $\mathcal{D}$ pour algèbre de Lie. Pour prouver la proposition (4.2) nous commençons par établir la proposition :

4.3. <u>Proposition</u>. - D *est le produit amalgamé (déf. (3.1)) des sous-groupes* D_- *et* D_+ *(qui sont donc fermés dans* D *). En outre* D_- *est nilpotent simplement connexe.*

<u>Preuve</u>. - Désignons par M , P , A et N les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathcal{M}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{N}$ pour algèbre de Lie. Il est clair que l'on a

$$D_- = \exp \mathfrak{h}_- \quad \text{et} \quad D_+ = (\exp \mathfrak{h}_+)\, P\, A\ .$$

$M\,N$ est le nilradical de D . Nous savons que ((3.7)) le nilradical $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{D}$ est, pour le produit $\times$ défini par la formule (3.3), le produit amalgamé des sous-groupes $\mathfrak{h}_-$ et $\mathfrak{h}_+$; de la formule de Campbell-Hausdorff, il s'ensuit que l'on a

$$M\,N = \exp \mathfrak{h} = (\exp \mathfrak{h}_-)\ (\exp \mathfrak{h}_+)\ .$$

L'application analytique $\eta : \begin{array}{l} D_- \times D_+ \longrightarrow D \\ (d_-,d_+) \longmapsto d_-\,d_+ \end{array}$ est donc surjective (puisque $D = M\,N\,P\,A$).

Remarquons à présent que :

i) si $X \in \mathfrak{h}_-$, ad X (et par suite $(\mathrm{Ad}\ g - I)$ pour $g \in D_-$) envoie chaque $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\gamma}$, $\gamma \in \Xi$, dans la somme directe des $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\gamma'}$, tels que $\gamma' - \gamma \in \Xi_-$ et $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{h}_-$ (voir (3.7)).

ii) Si $X \in \mathfrak{h}_+$, ad X (et par suite $(\mathrm{Ad}\ g - I)$ pour $g \in D_+$) envoie chaque $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\gamma}$, $\gamma \in \Xi$, dans la somme directe des $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{\gamma'}$, tels que $\gamma' - \gamma \in \Xi_+ \cup \{0\}$ et $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{h}_+$.

iii) Si $X \in \mathfrak{h}$ est tel que $\exp X$ appartient au centre de D , nous avons $\mathrm{Ad}\,(\exp X)|_{\mathcal{D}} = \mathrm{Exp}\,(\mathrm{ad}\ X)|_{\mathcal{D}} = I$; d'où $\mathrm{ad}\ X|_{\mathcal{D}} = 0$ (i.e. X appartient au centre de $\mathcal{D}$) et par suite $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}_o^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{h}_+$.

De ces trois remarques il résulte que $D_- \cap D_+ = \{e\}$: en effet si $g \in D_- \cap D_+$, des remarques i) et ii) il résulte que $\mathrm{Ad}\ g = I$; d'après iii) nous avons alors nécessairement $g = e$. On en déduit que l'application η est bijective.

D'après le lemme (3.2) , D est alors le produit amalgamé des sous-groupes fermés D_- et D_+ .

Montrons que D_- est simplement connexe. On sait ([11]) que tout groupe de Lie nilpotent connexe possède un plus grand sous-groupe compact qui est le plus grand sous-groupe compact du centre et qui est tel que le groupe quotient correspondant soit simplement connexe. De plus comme le centre d'un groupe de Lie nilpotent connexe est connexe ([14], ch. XVI, th. 1.1), ce sous-groupe compact maximum est donc connexe.

Appelons K_1 (resp. K_2) le sous-groupe compact maximum de D_- (resp. du nilradical $M\ N$ de D) . Nous avons $K_1 \subset K_2$; pour montrer que D_- est simplement connexe on est amené à montrer que K_1 est réduit à $\{e\}$.

Le groupe des automorphismes du tore K_2 est discret ([14], ch. III, prop. 3.2) . Comme K_2 est distingué dans D et D est connexe, il s'ensuit que K_2 est contenu dans le centre de D . D'après la remarque iii) on a alors nécessairement $K_2 \subset D_+$ et par suite $K_1 = \{e\}$. La proposition est prouvée.

4.4. <u>Preuve de la proposition (4.2)</u> . - D'après la proposition (4.3) l'application $\eta : D_- \times E_+ \longrightarrow G$ est surjective (puisque $G = D\ K\ \Gamma'$).
$(a,b) \longmapsto ab$

En outre nous avons :

$$D \cap K\ \Gamma' = D \cap P\ K = D \cap (P(K \cap D)) = P$$

(puisque $D \cap K \subset D \cap K \subset P$ (prop. (1.7))). On en déduit que η est injective : en effet soit $d_-\,(d_+k) = d'_-\,(d'_+k')$ avec $d_-\,,\ d'_- \in D_-$, d_+ , $d'_+ \in D_+$ et $k, k' \in K\ \Gamma'$; nous avons $d_-\,d_+ = d'_-\,d'_+\,x$ avec $x \in D \cap K\ \Gamma' \subset P \subset D_+$; d'où $d_-^{-1}\,d'_- \in D_- \cap D_+ = \{e\}$ et par suite $d_- = d'_-$, $d_+\,k = d'_+\,k'$.

Comme $\mathfrak{g} = \mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{K}$, l'application η est un isomorphisme de variétés analytiques d'un voisinage $V \times W$ de $D_- \times E_+$ contenant (e,e) sur un ouvert U de G contenant e . Soit $g = d\ K \in G$ avec $d \in D$ et $k \in K\ \Gamma'$. La restriction de η^{-1} à l'ouvert $X = d\ U\ k$, contenant g , se décompose en

$$X \longrightarrow U \xrightarrow{\eta^{-1}} V \times W \longrightarrow D_- \times E_+$$

$$x \longmapsto d^{-1}\,x\,k^{-1} \qquad (v,w) \longmapsto (\rho_-(dv)\ ,\ \rho_+(dv)wk)\ ,$$

où ρ_- et ρ_+ désignent les projections associées au produit amalgamé $D = D_-\,D_+$

(proposition (4.3)). Il s'ensuit que la restriction de η^{-1} à l'ouvert X est analytique. Par suite η est un isomorphisme de variétés analytiques de $D_- \times E_+$ sur G . La proposition (4.2) est démontrée.

4.5. Remarque. - Soit $\mathfrak{g} = (\mathcal{M}+\mathfrak{S}^1) \oplus \mathcal{N}^1 \oplus \mathfrak{a}^1 \oplus \mathcal{K}^1$ une décomposition de $\mathfrak{g}$ obtenue par le même procédé que celle $\mathfrak{g} = (\mathcal{M}+\mathfrak{S}) \oplus \mathcal{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathcal{K}$. Nous savons (remarque (1.11)) que la nouvelle décomposition se déduit de l'ancienne par un automorphisme intérieur, $\mathrm{Ad}\, x$, $x \in G_0$. La famille Ξ est alors remplacée par la famille d'homomorphismes de $\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{R} \oplus \mathcal{N}^1 \oplus \mathfrak{a}^1$ dans $\mathbb{C}$ additif , $\Xi^1 = \{\lambda \circ \mathrm{Ad}\, x^{-1} , \lambda \in \Xi\}$. Posons $\Xi^1_- = \{\lambda \circ \mathrm{Ad}\, x^{-1} , \lambda \in \Xi_-\}$ et $\Xi^1_+ = \{\lambda \circ \mathrm{Ad}\, x^{-1} , \lambda \in \Xi_+\}$. La décomposition de $\mathfrak{g}$ (resp. G) associée à la partition $\{\Xi^1_-,\Xi^1_+\}$ se déduit de celle associée à la partition $\{\Xi_-,\Xi_+\}$ par l'automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ (resp. de G) associé à x .

5. DECOMPOSITION, MODULO m_G, DE G

5.0.- Nous reprenons les notations du paragraphe 1 : on considère les décompositions $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{s}$ (Lévi), $\mathfrak{s} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{K}$ (Iwasawa) et $\mathfrak{s} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \tilde{\mathfrak{N}} \oplus \mathfrak{m}$ (Bruhat). On pose $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{N}$. On désigne par Σ l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{s}$; par W la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ qui a servi à définir $\mathfrak{N}$ et par Σ_1 (resp. $\Sigma_2 = -\Sigma_1$) l'ensemble des éléments de Σ négatifs (resp. positifs) sur W. On note $\mathcal{M}$ le nilradical de $\mathfrak{R}$ et on choisit une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{P}$ du centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{R}$. Nous avons (voir (4.0))

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{h} + (\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{a}) ,$$

où $\mathfrak{h} = \mathcal{M} \oplus \mathfrak{N}$ est le nilradical de $\mathfrak{D}$.

On désigne par R, N, A, $\tilde{N}$, K, P, S et D les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{D}$ pour algèbre de Lie. On note Γ le centralisateur de A dans K et Γ' l'intersection des normalisateurs des sous-groupes N, A, K et P.

On appelle $N_o(D)$ et $N(D)$ les normalisateurs de D respectivement dans G_o et G ; nous avons $N_o(D) = D\,\Gamma$ et $N(D) = D\,\Gamma'$.

Soit Θ l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Comme $[\mathfrak{P}, \mathfrak{s}] = (0)$, Σ s'identifie à un sous ensemble de Θ. Pour tout $\theta \in \Theta$, nous notons $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\theta}$ (voir (1.0)) le sous-espace de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ formé des éléments qui pour chaque H de $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{a}$ sont annulés par une puissance de $(\mathrm{ad}\, H - \theta(H)\, I)$.

5.1. <u>Définitions</u>. - Nous disons qu'une partition $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ de Θ est adaptée à la chambre de Weyl W si elle est stable par addition et conjuguaison, et si Σ_1 (resp. $\Sigma_2 = -\Sigma_1$) est contenu dans Θ_- (resp. Θ_+) :

En outre nous disons que $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ est stable par automorphismes intérieurs si pour tout γ de Θ_- (resp. Θ_+), $\gamma \circ \mathrm{Ad}\, g$ appartient à Θ_- (resp. Θ_+), pour tout élément g du normalisateur $N(D)$ de D dans G. Si G est connexe cette définition est trivialement satisfaite (voir lemme (2.8)).

5.2. <u>Proposition</u>. - *Avec les notations de (5.0), soit* $\{\Theta_-, \Theta_+\}$ *une partition de* Θ *adaptée à la chambre de Weyl* W *et stable par automorphismes intérieurs. Posons*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_- = \bigoplus_{\theta \in \Theta_-} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\theta} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_+ = \bigoplus_{\theta \in \Theta_+} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\theta} .$$

Alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_-$ *et* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_+$ *sont deux sous-algèbres de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ *qui sont les complexifiées de* *deux sous-algèbres* $\mathfrak{g}_-$ *et* $\mathfrak{g}_+$ *de* $\mathfrak{g}$ *telles que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+$.

D'autre part désignons par $(G_0)_-$ *et* $(G_0)_+$ *les sous-groupes de Lie connexes de* G_0 *ayant respectivement* $\mathfrak{g}_-$ *et* $\mathfrak{g}_+$ *pour algèbres de Lie et posons* $G_- = (G_0)_-$, $G_+ = (G_0)_+ \Gamma'$. *Alors* G_- *et* G_+ *sont des sous-groupes fermés de* G *et l'application qui au couple* (g_-, g_+) *associe le produit* $g_- g_+$ *est un isomorphisme de variétés analytiques de* $G_- \times G_+$ *sur une sous-variété ouverte de* G *dont le complémentaire est de mesure de Haar nulle.*

Dans le cas semi-simple nous obtenons :

5.3. Proposition. - *Soit* S *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe de l'unité est semi-simple. Alors avec les notations de (5.0), l'application qui à* $(n, a, \gamma, \tilde{n})$ *associe le produit* $n a \gamma \tilde{n}$ *est un isomorphisme de variétés analytiques de* $N \times A \times \Gamma' \times \tilde{N}$ *sur une sous-variété ouverte de* S *dont le complémentaire est de mesure de Haar nulle.*

Dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini ce résultat est bien connu (lemme de Bruhat, voir par exemple [13], p. 47).

Les sections de (5.4) à (5.7) sont consacrées à la preuve de la proposition (5.2). Nous commençons par établir une proposition et un lemme.

5.4. Proposition. - *L'application qui au couple* (g,x) *associe le produit* gx *est un isomorphisme de variétés analytiques de* $N(D) \times \tilde{N}$ *sur une sous-variété ouverte de* G *dont le complémentaire est de mesure de Haar nulle.*

Preuve. - Notons d'abord que $N(D) \cap \tilde{N} = \{e\}$: en effet soit $x \in N(D) \cap \tilde{N}$, écrivons $x = \exp X$ avec $X \in \tilde{\mathfrak{N}}$. Puisque x normalise D et $[\mathfrak{a}, \tilde{\mathfrak{N}}] \subset \tilde{\mathfrak{N}}$, il s'ensuit que

$$(\mathrm{Ad}\, x - I)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{Exp\ ad}\, X - I)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{D} \cap \tilde{\mathfrak{N}} = (0) .$$

En reprenant alors un raisonnement déjà utilisé pour prouver le lemme (1.13), on montre que l'on a $[X, \mathfrak{a}] = (0)$. Autrement dit $X \in \mathfrak{z}_0 \cap \tilde{\mathfrak{N}} = (0)$ (voir (1.2)) ; d'où $x = e$.

L'algèbre de Lie du groupe de Lie $N(D)$ est $\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{m}$. Comme on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{m} \oplus \tilde{\mathfrak{N}} ;$$

il est clair que l'application qui au couple (g,x) associe le produit $g\,x$ est un isomorphisme de variétés analytiques de $N(D) \times \tilde{N}$ sur une sous-variétés ouverte de G .

Il reste donc à prouver que le complémentaire dans G de la sous-variété ouverte

$N(D)\tilde{N}$ est de mesure de Haar nulle. Comme $N(D)\tilde{N}$ est une réunion finie de sous-variétés ouvertes isomorphes à $N_o(D)\tilde{N}$, on est amené à prouver que le complémentaire dans G_o de la sous-variété ouverte $N_o(D)\tilde{N}$ est de mesure de Haar nulle.

Soit R' l'image réciproque du centre de ${}_R\backslash^{G_o}$ par l'application naturelle de G_o sur ${}_R\backslash^{G_o}$. ${}_{R'}\backslash^{G_o}$ est un groupe de Lie connexe, semi-simple, de centre trivial. Nous avons $R' = R\,Z(S)$, où $Z(S)$ désigne le centre de S ; par suite R' est contenu dans $R\Gamma$ et donc dans $N_o(D)$. Si ξ' désigne l'application naturelle de G_o sur ${}_{R'}\backslash^{G_o}$, il s'ensuit alors que le complémentaire dans G_o de $N_o(D)\tilde{N}$ est l'image réciproque par ξ' du complémentaire dans ${}_{R'}\backslash^{G_o}$ de $\xi'(N_o(D)\tilde{N})$. Comme un borélien B de ${}_{R'}\backslash^{G_o}$ est de mesure de Haar nulle si et seulement si le borélien $\xi'^{-1}(B)$ de G_o est de mesure de Haar nulle, on est ramené à montrer la propriété dans le cas où G est un groupe de Lie connexe semi-simple de centre trivial.

La proposition (5.4) résulte alors du lemme de Bruhat ([13], p. 47).

5.5.- Désignons par Ξ (resp. Λ) l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ (resp. dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$). Ξ (resp. Λ) s'identifie à l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{S} \oplus \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ (resp. dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$) (voir (4.1)). Ξ et Λ s'identifient donc à des sous ensembles de Θ et nous avons

$$\Xi = \Lambda \cup \Sigma_1 \quad , \quad \Theta = \Xi \cup \Sigma_2 \cup \{0\} = \Lambda \cup \Sigma .$$

5.6. Lemme. - *Pour tout élément* λ *et* γ *respectivement de* Λ *et* Σ, *nous avons, avec les notations de (1.0) :*

$$[\mathcal{M}^{\mathbb{C}}_{\lambda} , \mathfrak{s}_{\gamma}] \subset \mathcal{M}^{\mathbb{C}}_{\lambda'} ,$$

où λ' *est un élément de* Λ *tel que la restriction à* $\mathfrak{S}$ *(resp. à* $\mathfrak{a}$*) de la forme linéaire* $\lambda'-\lambda$ *est nulle (resp. égale à* γ *).*

Pour tout automorphisme θ *de* $\mathfrak{g}$ *laissant stable* $\mathfrak{S} \oplus \mathfrak{a}$ *nous avons*

$$\mathcal{M}^{\mathbb{C}}_{\lambda\circ\theta^{-1}} = \theta(\mathcal{M}^{\mathbb{C}}_{\lambda}) \quad (\lambda \in \Lambda) .$$

Preuve. - Notons $\tilde{\gamma}$ la forme linéaire sur $\mathfrak{S} \oplus \mathfrak{a}$ dont la restriction à $\mathfrak{S}$ (resp. à $\mathfrak{a}$) est nulle (resp. égale à γ). Compte tenu que l'on a $[\mathfrak{S} , \mathfrak{S}] = (0)$, la première assertion du lemme découle de la formule de Leibnitz :

$$(\mathrm{ad}X-(\lambda(X)+\tilde{\gamma}(X))I)^n\,([v,w]) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k[(\mathrm{ad}X-\lambda(X)I)^k(v) \, , \, (\mathrm{ad}X-\tilde{\gamma}(X)I)^{n-k}(w)] ,$$

avec $X \in \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{a}$, v et $w \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

D'autre part, soient $\lambda \in \Lambda$ et $v \in \mathcal{M}_\lambda^{\mathbb{C}}$. Il existe un entier n tel que

$$(\mathrm{ad}\, X - \lambda(X)I)^n(v) = 0 , \quad \forall X \in \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q} .$$

Comme on a

$$\theta \circ \mathrm{ad}X \circ \theta^{-1} = \mathrm{ad}\, \theta(X) \qquad (X \in \mathfrak{g}) ,$$

nous avons pour tout $X \in \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}$,

$$0 = \theta \circ (\mathrm{ad}\, X - \lambda(X)I)^n(v) = (\mathrm{ad}\, \theta(X) - \lambda(X)I)^n\theta(v)$$

$$= (\mathrm{ad}\, \theta(X) - \lambda \circ \theta^{-1}(\theta(X))I)^n\theta(v) .$$

D'où $(\mathrm{ad}\, Y - \lambda \circ \theta^{-1}(Y)I)^n\theta(v) = 0$, $\forall Y \in \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}$; ce qui prouve que $\theta(v) \in \mathcal{M}^{\mathbb{C}}_{\lambda\circ\theta^{-1}}$. Le lemme est démontré .

5.7. <u>Preuve de la proposition (5.2)</u>. - Reprenons les notations de la proposition (5.2) . Les partitions $\{\Lambda \cap \Theta_- , \Lambda \cap \Theta_+\}$ et $\{\Xi \cap \Theta_- , \Xi \cap \Theta_+\}$ respectivement de Λ et Ξ sont stables par addition et conjugaison . Désignons respectivement par $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \oplus \mathcal{M}_+$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ les décompositions de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{D}$ associées à ces partitions (voir (3.7) et (4.1)) .

La partition $\{\Theta_- , \Theta_+\}$ de Θ étant adaptée à la chambre de Weyl W , nous avons : $\Theta_- = \Theta_- \cap \Xi$ et $\Theta_+ = (\Theta_+ \cap \Xi) \cup \Sigma_2 \cup \{0\}$, d'après (5.5) ; $[\mathcal{N} \oplus \mathfrak{m}, \mathcal{M}_-] \subset \mathcal{M}_-$ et $[\tilde{\mathcal{N}} \oplus \mathfrak{m}, \mathcal{M}_+] \subset \mathcal{M}_+$, d'après le lemme (5.6) ; en outre $\mathcal{N}$ est contenu dans $\mathcal{D}_-$ car Σ_1 est contenu dans $\Theta_- = \Theta_- \cap \Xi$.

Nous avons alors

$$\mathfrak{g}_- = \mathcal{D}_- = \mathcal{M}_- \oplus \mathcal{N}, \quad \mathcal{D}_+ = (\mathcal{M}_+ + \mathfrak{P}) \oplus \mathfrak{Q}$$

et

$$\mathfrak{g}_+ = \mathcal{D}_+ \oplus \tilde{\mathcal{N}} \oplus \mathfrak{m} .$$

Désignons par D_- et D_+ les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathcal{D}_-$ et $\mathcal{D}_+$ pour algèbre de Lie ; nous avons $D_- = (\exp \mathcal{M}_-)\, N$ et $D_+ = (\exp \mathcal{M}_+)\, P\, A$. D'après la proposition (4.3) , D est le produit amalgamé des sous-groupes D_- et D_+ . Nous avons alors

$$G_- = (G_0)_- = D_- , \quad (G_0)_+ = D_+ \tilde{N}\, \Gamma \quad \text{et} \quad G_+ = D_+ \tilde{N}\, \Gamma' .$$

Comme la partition $\{\Theta_- , \Theta_+\}$ de Θ est stable par automorphismes intérieurs , Γ' normalise (outre N , A , K , $\tilde{N}$ et P) les sous-groupes $(\exp \mathcal{M}_-)$ et $(\exp \mathcal{M}_+)$ (lemme (5.6)) ; G_+ est donc un sous-groupe de G .

Des relations

$N(D) \cap \tilde{N} = e$ (prop. (5.4)) , $D_- \cap D_+ = e$ et $D \cap \Gamma' = P \subset D_+$ (prop. (1.7)), il résulte que $G_- \cap G_+ = e$. G_- et G_+ sont des sous-groupes de Lie de G ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}_-$ et $\mathfrak{g}_+$; comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+$, il est alors clair que l'application qui au couple (g_- , g_+) associe le produit $g_- g_+$ est un isomorphisme de variétés analytiques de $G_- \times G_+$ sur la sous-variété ouverte $N(D) \tilde{N}$ de G dont le complémentaire est de mesure de Haar nulle (proposition (5.4)).

Pour achever la preuve de la proposition (5.2) , il nous reste à prouver que G_+ est un sous-groupe fermé de G .

G ayant un nombre fini de composantes connexes, il suffit de prouver que $(G_o)_+ = D_+ \tilde{N} \Gamma$ est fermé dans G_o .

Soit ξ' l'application naturelle de G_o sur $_{R'}\backslash^{G_o}$; $_{R'}\backslash^{G_o}$ est un groupe de Lie connexe semi-simple de centre trivial et nous savons que $\xi'(N A \Gamma)$ est fermé dans $_{R'}\backslash^{G_o}$. On en déduit que $R A \tilde{N} \Gamma$ est fermé dans G_o (noter que $R' \subset R\Gamma$) .

Comme il est clair que $R A \tilde{N} \Gamma$ est le produit amalgamé des sous-groupes (exp $\mathfrak{M}_-$) et $D_+ \tilde{N} \Gamma$, il s'ensuit que $D_+ \tilde{N} \Gamma$ est fermé dans G_o.

<u>Remarque</u>. - En passant, on notera que si on pose $\mathfrak{h}_o = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}_o^{\mathbb{C}}$, la sous-algèbre $(\mathfrak{h}_o + \mathfrak{P}) \oplus \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{D}$. Dans ce qui précède on pourrait alors échanger les rôles de $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{a}$ et $(\mathfrak{h}_o + \mathfrak{P}) \oplus \mathfrak{a}$ sans rien modifier.

6. THEORIE DE LA MESURE ET FONCTIONS HARMONIQUES

Nous désignons par G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et par e son élément unité.

G-espaces et théorie de la mesure. -

6.1.- Soient E et F deux espaces topologiques (resp. deux espaces de Banach) sur lesquels G opère ; nous disons qu'une application ϕ de E sur F est un G-homéomorphisme (resp. une G-isométrie) si c'est un homéomorphisme (resp. une isométrie) commutant avec les opérations de G. Nous appelons G-espace à gauche (resp. à droite), tout espace topologique E sur lequel G opère à gauche (resp. à droite) continûment.

Soit E un espace localement compact, nous notons $C(E)$ l'espace des fonctions continues bornées réelles sur E muni de la norme de la convergence uniforme, $M^1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E (i.e. l'ensemble des mesures de Radon positives de masse totale 1). La masse unité en un point x est un élément de $M^1(E)$ noté ε_x. L'intégrale d'une fonction borélienne f sur E par rapport à une mesure μ de $M^1(E)$ sera notée indifféremment $\int f(x)\,\mu(dx)$ ou $\langle\mu,f\rangle$.

Soit E un G-espace à gauche localement compact, $\mu \in M^1(G)$ et $\lambda \in M^1(E)$. Nous appelons convolution $\mu*\lambda$ de μ et λ, l'élément de $M^1(E)$ défini par :

$$\langle\mu*\lambda,f\rangle = \int_G \int_E f(g.x)\mu(dg)\lambda(dx) \qquad \text{(f fonction borélienne positive sur E) .}$$

Lorsque $\mu = \varepsilon_g$ $(g \in G)$ nous notons $g\lambda$ la mesure $\varepsilon_g*\lambda$. On note μ^n le produit de convolution $\mu*\dots*\mu$ (n facteurs) sur G.

6.2.- Soit $\mu \in M^1(G)$ et $\lambda \in M^1(E)$; nous disons que λ est μ-invariante si $\mu*\lambda = \lambda$.

Une mesure m de $M^1(E)$ est dite quasi-invariante si les mesures m et gm sont équivalentes pour tout g de G. Si E est un G-espace homogène, il existe des mesures quasi-invariantes sur E et deux quelconques d'entr'elles sont équivalentes ([19]) ; nous notons alors $L^\infty(E)$ l'ensemble des fonctions boréliennes sur E bornées m-presque sûrement, où m est une mesure quasi-invariante quelconque sur E.

Désignons par m_G une mesure de Haar à droite sur G . Une mesure μ de $M^1(G)$ est dite étalée (voir [1]) si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

a) Il existe un entier n tel que μ^n ne soit pas singulière par rapport à m_G .

b) Il existe un entier p tel que μ^p majore un multiple de m_G sur un sous-ensemble ouvert non vide de G .

Nous notons alors S_μ l'ensemble des points g de G pour lesquels on peut trouver une mesure de Haar m sur G et un entier p tels que la restriction de m à un voisinage de g soit majorée par μ^p ; S_μ est un semi-groupe ouvert non vide de G ([1]) .

Une mesure μ de $M^1(G)$ est dite apériodique si le sous-groupe fermé, G_μ , engendré par le support de μ est le groupe G entier.

6.3.- Nous appelons jauge ([12]) (resp. fonction sous additive) sur G , toute fonction borélienne positive δ sur G telle que

$$\forall (x,y) \in G\times G \text{ , } \delta(xy) \leqslant \delta(x)+\delta(y)+C \qquad (\text{resp. } \delta(xy) \leqslant \delta(x)+\delta(y)) \text{ ,}$$

où C désigne une constante positive.

Si G est compactement engendré, une jauge δ est dite principale s'il existe un voisinage compact V de e engendrant G tel que pour tout entier naturel n , $B_n = \{x : \delta(x) \leqslant n\} \subset V^n$. On sait que sur G il existe de telles jauges (par exemple si V est un voisinage compact de e engendrant G , l'application ρ définie par $\rho(x) = \inf \{n \in \mathbb{N}^* : x \in V^n\}$, en est une). Si δ_0 est une jauge principale, pour toute autre jauge nous avons ([12]),

$$\forall\, x \in G \qquad \delta(x) \leqslant C_1\delta_0(x) + C_1 \text{ .}$$

où C_1 est une constante positive.

Pour μ donnée dans $M^1(G)$ et α donné dans $\mathbb{R}_+$, la condition, $\int_G [\delta_0(x)]^\alpha \mu(dx) < +\infty$, est indépendante du choix de δ_0 ; dans ce cas nous dirons que μ possède un moment d'ordre α .

En fait, en modifiant légèrement la démonstration de ([20]) on montre qu'étant donné un voisinage compact V de e engendrant G , il existe des métriques (dites principales) invariantes à gauche (ou à droite, si l'on veut) telle que la boule de centre e et de rayon n soit contenue pour tout $n \geqslant 1$, dans V^n ; si d est alors une telle distance, dire que μ possède un moment d'ordre α c'est dire que

$$\int_G [d(e,x)]^\alpha \mu(dx) < +\infty \text{ .}$$

Fonctions harmoniques.-

6.4.- Soient E un G-espace à gauche localement compact, f une fonction borélienne sur E et $\lambda \in M^1(E)$. Nous notons $f*\lambda$ la fonction sur G définie par

$$f * \lambda(g) = \langle g\lambda, f \rangle = \int_E f(g.x)\, \lambda(dx) \qquad (g \in G) ,$$

lorsque le second membre est défini pour tout $g \in G$.

Soit $\mu \in M^1(G)$. Nous appelons fonction μ-harmonique bornée (sur G) toute fonction borélienne bornée f sur G telle que $f = f*\mu$, c'est-à-dire telle que

$$\int_G f(gg')\mu(dg') = f(g) \qquad (g \in G) ,$$

Nous désignons par E_μ l'ensemble des fonctions μ-harmoniques bornées (sur G) et par H_μ le sous ensemble de E_μ formé des fonctions uniformément continues à gauche (u.c.g.). Munis de la topologie de la convergence uniforme, E_μ et H_μ sont des espaces de Banach.

Soit E un G-espace à gauche et f une fonction sur E. Nous définissons

$$f^g : x \in E \longmapsto f(g.x) \qquad (g \in G \,,\, x \in E) .$$

Ainsi, G opère à droite sur E_μ et cette action induit sur H_μ une structure de G-espace à droite.

6.5.- Soient H un sous groupe fermé de G, ${}_H\backslash^G$ l'espace des classes modulo H à gauche (i.e. ${}_H\backslash^G = \{Hg, g \in G\}$) et p l'application naturelle de G sur ${}_H\backslash^G$. Soit $\mu \in M^1(G)$. Nous appelons fonction μ-harmonique bornée sur ${}_H\backslash^G$ toute fonction borélienne bornée f sur ${}_H\backslash^G$ telle que la fonction $f \circ p$ soit μ-harmonique bornée sur G.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de fonction sur G. Un élément h de G est appelé une période à gauche de $\mathcal{H}$ si

$$f(hg) = f(g) \qquad (g \in G \,,\, f \in \mathcal{H}) .$$

L'ensemble des périodes à gauche de $\mathcal{H}$ est évidemment un sous-groupe de G.

Soit $E^H_\mu = \{f \circ p, f$ μ-harmonique bornée sur ${}_H\backslash^G\}$. Un élément x de ${}_H\backslash^G$ est appelé une μ-période de ${}_H\backslash^G$ s'il est l'image par p d'une période à gauche de E^H_μ. Autrement dit x est une μ-période de ${}_H\backslash^G$ si pour toute fonction f μ-harmonique bornée sur ${}_H\backslash^G$ nous avons

$$f(x.g) = f(x) \qquad (g \in G) .$$

L'ensemble des μ-périodes de ${}_H\backslash^G$ est évidemment de la forme ${}_H\backslash^{G'}$, où G' est un sous-groupe de G contenant H .
(Noter que pour $H = \{e\}$, la notion de μ-période de G que l'on obtient est différente de celle de [1]) .

Si H' est un sous-groupe fermé de H , l'image par l'application naturelle s de ${}_{H'}\backslash^G$ sur ${}_H\backslash^G$ d'une μ-période de ${}_{H'}\backslash^G$ est une μ-période de ${}_H\backslash^G$. Si f est μ-harmonique sur ${}_{H'}\backslash^G$ et tout élément de ${}_{H'}\backslash^H$ est une μ-période de ${}_{H'}\backslash^G$, il est clair que f est la composée par s d'une fonction μ-harmonique sur ${}_H\backslash^G$. Enfin si H est distingué , f est μ-harmonique sur ${}_H\backslash^G$ signifie aussi que f est $p(\mu)$-harmonique sur ${}_H\backslash^G$.

<u>Marches aléatoires et fonctions harmoniques.</u>

6.6.- Soit Ω' l'espace $G^{\mathbb{N}}$ muni de la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées de Ω' dans G (muni de la tribu borélienne). Soient $\mu \in M^1(G)$ et $\mathcal{Q}$ la mesure de probabilité sur Ω' produit des mesures μ sur chaque facteur. Soit $\Omega = G^{\mathbb{N}}$, muni de la tribu $\mathfrak{F}$, produit des tribus boréliennes sur chaque facteur. Pour tout $g \in G$ appelons $\mathbb{P}_g$ la mesure de probabilité sur Ω , image de $\mathcal{Q}$ par l'application de Ω' dans Ω définie comme suit

$$(g_1,g_2,\ldots) \longmapsto (g,gg_1,gg_1g_2,\ldots)$$

où la $n^{\text{ième}}$ coordonnée est $gg_1\ldots g_n$ pour $n > 0$. On note X_n la $n^{\text{ième}}$ application coordonnée de Ω sur G .

La marche aléatoire droite de loi μ sur G est le quadruplet $(\Omega,\mathfrak{F},(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g\in G})$.

Soit E un G-espace à droite. Nous appelons chaîne de loi μ sur E la chaîne de Markov $\{\Omega,\mathfrak{F},(u_o.X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g\in G}\}$ (où $u_o \in E$) dont la probabilité de transition Q est définie par

$$Q(x,U) = \varepsilon_x * \mu(U) = \int_G 1_U(x.g)\,\mu(dg) .$$

On a une notion analogue pour un G-espace à gauche.

Nous allons à présent rappeler un résultat classique.

6.7.- Soit θ l'opérateur de translation sur $\Omega = G^{\mathbb{N}}$ définit par $\theta(\{x_o,\ldots,x_n,\ldots\}) = \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$. Un événement A de $\mathfrak{F}$ est dit invariant si $\theta^{-1}(A) = A$. Les ensembles invariants forment une tribu et une variable aléatoire Z est mesurable par rapport à cette tribu si et seulement si $Z\circ\theta = Z$. Une telle variable aléatoire est dite invariante. Deux ensembles invariants A et B sont dits équivalents si $\mathbb{P}_g\left[A \Delta B\right] = 0$, $\forall g \in G$.

On sait alors que ([23], ch. 3, prop. (3.2)) :

<u>Proposition</u>. - La formule $h(x) = \mathbb{E}_x\left[Z\right]$ établit une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalences de variables aléatoires invariantes et bornées Z , et les fonctions μ-harmoniques bornées sur G . On a de plus

$$\lim_{n\to+\infty} h(X_n) = Z \quad \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \quad \forall g \in G .$$

Nous utiliserons aussi le théorème suivant qui est une légère extension du théorème IV 1 de [1].

6.8. <u>Théorème</u>. - *Soient* G *un groupe L.C.D.,* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G *,* S_μ *le semi-groupe ouvert associé à* μ *et* $(\Omega, \mathfrak{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ *la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G *. Soit* H *un sous-groupe fermé de* G *. Soient* x *et* g *des éléments de* G *. Si pour* $\mathbb{P}_g$*-presque tout* ω *de* Ω *, il existe une suite* $\{h_n(\omega)\}_{n\geqslant 1}$ *d'éléments de* H *telle que la suite* $\{X_n^{-1}(\omega)\, h_n(\omega)\, x\, X_n(\omega)\}_{n\geqslant 1}$ *possède une valeur d'adhérence appartenant à* $S_\mu\, S_\mu^{-1}$ *, alors pour toute fonction* f μ*-harmonique bornée sur* ${}_H\backslash^G$ *nous avons*

$$f \circ p(xg) = f \circ p(g)$$

où p *désigne l'application naturelle de* G *sur* ${}_H\backslash^G$ *.*

Nous ne donnerons pas à cause de sa longueur la démonstration de ce théorème. Elle se calque aisément sur celle de [1], qui correspond au cas $H = \{e\}$, $g = e$.

7. DECOMPOSITIONS D'UN GROUPE DE LIE ASSOCIEES A UNE MESURE DE PROBABILITE

G désigne un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Nous reprenons les notations des paragraphes précédents.

7.1. Lemme. - (voir [26]) *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes, dont la composante connexe* G_o *de l'unité est semi-simple. Soient* $G = NA\mathcal{K}$ *une décomposition d'Iwasawa de* G *(voir (1.8)) et* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée. Désignons par* Q *la probabilité de transition de la chaîne de loi* μ *sur* $\mathcal{K}(\simeq {}_{NA}\backslash^{G})$ *(voir (6.6)). Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe un entier* n_o *et un réel* $\delta > 0$ *tels que pour tout borélien* W *de* $\mathcal{K}$ *vérifiant* $m(W) < \delta$ *on ait* $Q^n(k,W) < \varepsilon$ *pour tout entier* $n \geqslant n_o$ *et tout élément* k *de* $\mathcal{K}$ *, où* $m_{\mathcal{K}}$ *désigne une mesure de Haar à gauche sur* $\mathcal{K}$ *.*

Preuve. - Nous avons $G_o = NAK$ et $\mathcal{K} = KL$, où L est un sous-groupe compact de G (voir prop. (1.7)).

Si H est un groupe localement compact, on désigne par m_H une mesure de Haar à gauche sur H . Nous savons ([13]) que l'on a, moyennant des normalisations convenables,

$$m_{G_o} = m_{NA} * m_K .$$

Posons

$$m'_{NA} = \int_L \varepsilon_\ell * m_{NA} * \varepsilon_{\ell^{-1}} \, m_L(d\ell)$$

$$m'_K = \int_L \varepsilon_\ell * m_K * \varepsilon_{\ell^{-1}} \, m_L(d\ell)$$

$$m_{\mathcal{K}} = m'_K * m_L .$$

Il est facile de voir que m'_{NA} , m'_K , $m_{\mathcal{K}}$ et $m_G = m'_{NA} * m_{\mathcal{K}}$ sont respectivement des mesures de Haar à gauche sur NA , K , $\mathcal{K}$ et G .

Comme μ est étalée, on sait que pour n suffisamment grand nous avons

$$\mu^n = f_n . m_G + \nu_n \quad \text{avec} \quad \|\nu_n\| < \rho^n \quad (0<\rho<1)$$

où $f_n \in L^1(m_G)$ et ν_n est une mesure étrangère à m_G.

Soit $(\varphi_{n,p})_{p\geq 1}$ une suite croissante de fonctions bornées et à support compact convergeant simplement vers f_n . D'après le théorème de convergence dominée, nous avons $f_n - \varphi_{n,p} \xrightarrow[p\to+\infty]{L^1} 0$ et par suite

$$\|f_n \cdot m_G - \varphi_{n,p} \cdot m_G\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n assez grand pour que $\rho^n < \varepsilon/_3$; choisissons alors p de façon que $\|f_n \cdot m_G - \varphi_{n,p} \cdot m_G\| < \varepsilon/_3$. Il vient

$$Q^n(k,W) \leqslant 2\varepsilon/_3 + \int_G 1_W(\overline{kg})\ \varphi_{n,p}(g)\ m_G(dg) ,$$

où l'on désigne par $\overline{x}$ la composante sur K de $x \in G$,

$$\leqslant 2\varepsilon/_3 + \int_G 1_W(\bar{g})\ \ \varphi_{n,p}(k^{-1}g)\ m_G(dg)$$

$$\leqslant 2\varepsilon/_3 + \int_{NA}\int_K 1_W(k_1)\ \varphi_{n,p}(k^{-1}\ s\ k_1)\ m'_{NA}(ds)\ m_K(dk_1) .$$

Or $\varphi_{n,p}$ est une fonction bornée et à support compact ; désignons par F le support de $\varphi_{n,p}$ et posons $b = \sup\limits_{x\in G} |\varphi_{n,p}(x)| < +\infty$. F étant un compact de G , il existe des compacts U et V respectivement de NA et K tels que $F \subset UV$; il s'ensuit que pour $k \in K$, $kF \subset U'K$, où $U' = \bigcup\limits_{k\in K} k\,U\,k^{-1}$ est un compact de NA (car $Ad_{\mathfrak{g}}\ K$ est compact).

Nous avons alors

$$Q^n(k,W) \leqslant 2\varepsilon/_3 + b\ m'_{NA}(U')\ m_K(W)$$

et le lemme est prouvé.

Si dans le lemme (7.1) nous supposons que la mesure m_K est finie (i.e. K est compact), nous voyons que Q vérifie la condition de Doeblin ([6]) .
Nous avons alors :

7.2. <u>Corollaire</u>. - *Avec les notations du lemme (7.1), si* G_o *est de plus de centre fini, la probabilité de transition* Q *vérifie la condition de Doeblin pour la mesure de Haar du groupe compact* K .

Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de $M^1(G)$. Désignons par $(\Omega, \mathfrak{F}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g\in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G .

Un sous-groupe fermé C de G est dit récurrent si on a

$$\mathbb{P}_g\left[\lim_n \sup_n\{X_n \in C\}\right] = 1 \quad \text{pour tout} \quad g \in G .$$

On considère alors le temps d'arret $S_C = \inf\{n>0 : X_n \in C\}$, la probabilité de transition P_C sur G définie par

$$P_C(g,A) = \mathbb{P}_g[X_{S_C} \in A] \qquad (g \in G\ ,\ \ A \text{ borélien de } G)$$

et la mesure μ^C de $M^1(C)$ définie par

$$\mu^C(U) = \mathbb{P}_e[X_{S_C} \in U] \qquad (U \text{ borélien de } C) .$$

Nous avons (avec les notations de (6.4)) :

7.3. Lemme. - ([22]) *Soient* G *un groupe L.C.D. et* μ *une mesure de* $M^1(G)$. *Soit* C *un sous-groupe récurrent de* G . *Alors l'application*

$$j : E_{\mu^C} \longrightarrow E_\mu$$

$$f \longmapsto \tilde{f} : g \longmapsto \tilde{f}(g) = P_C f(g)$$

est une C*-isométrie de* E_{μ^C} *sur* E_μ *(qui envoie* H_{μ^C} *sur* H_μ *quand* C *est ouvert). De plus, pour* $\tilde{f} \in E_\mu$, $j^{-1}(\tilde{f})$ *est la restriction de* $\tilde{f}$ *à* C .

Preuve. - Soit $\tilde{f}$ une fonction μ-harmonique bornée sur G . D'après [23], nous savons que l'on a $P_C\tilde{f} = \tilde{f}$. Pour $h \in C$, il vient alors

$$\tilde{f}(h) = P_C\tilde{f}(h) = \mathbb{E}_h[\tilde{f}(X_{S_C})]$$

$$= \mathbb{E}_e[\tilde{f}(h\, X_{S_C})] = \int_C \tilde{f}(hx)\, \mu^C(dx) .$$

Autrement dit la restriction de $\tilde{f}$ à C est une fonction μ^C-harmonique bornée sur C .

Inversement, soit $f \in E_{\mu^C}$ (on a donc $P_Cf(h) = f(h)$, pour tout $h \in C$) et considérons la fonction sur G, $\tilde{f} = P_Cf$. $\tilde{f}$ est une fonction borélienne bornée. En outre nous avons

$$\int_G \tilde{f}(gg')\mu(dg') = \mathbb{E}_g[\tilde{f}(X_1)] = \mathbb{E}_g[\tilde{f}(X_1)1_C(X_1)] + \mathbb{E}_g[\tilde{f}(X_1)1_{C^c}(X_1)] .$$

Or

$$\tilde{f}(X_1)\, 1_C(X_1) = f(X_1)\, 1_C(X_1) \qquad (\text{puisque } f \text{ est } \mu^C\text{-harmonique})$$

$$= f(X_{S_C})\, 1_C(X_1) ,$$

et

$$\mathbb{E}_g[\tilde{f}(X_1)1_{C^c}(X_1)] = \mathbb{E}_g[\, \mathbb{E}_{X_1}(f(X_{S_C}))1_{C^c}(X_1)]$$

$$= \mathbb{E}_g[\, \mathbb{E}_g[f(X_{S_C} o\theta)|\mathfrak{F}_1]\, 1_{C^c}(X_1)]$$

où $\mathfrak{F}_1$ est la tribu engendrée par X_1 . (propriété de Markov)

$$= \mathbb{E}_g\left[f(X_{S_C}\circ\theta)\, 1_{C^c}(X_1)\right]$$

$$= \mathbb{E}_g\left[f(X_{S_C})\, 1_{C^c}(X_1)\right] .$$

D'où

$$\int_G \tilde{f}(gg')\mu(dg') = \mathbb{E}_g\left[f(X_{S_C})\right] = \tilde{f}(g) .$$

Autrement dit $\tilde{f}$ appartient à E_μ .

D'autre part soient $f \in E_{\mu^C}$ et $h \in C$; nous avons

$$\widetilde{f^h}(g) = \mathbb{E}_g\left[f^h(X_{S_C})\right] = \mathbb{E}_g\left[f(h\, X_{S_C})\right] = \mathbb{E}_{hg}\left[f(X_{S_C})\right] = \tilde{f}^h(g)$$

ce qui montre que j commute avec l'action de C .

Enfin, si C est ouvert dans G , les relations

$$\|j(f)^h - j(f)\|_\infty = \|j(f^h) - j(f)\|_\infty = \|f^h - f\|_\infty \quad , \quad f \in E_{\mu^C} \, , \; h \in C \, ,$$

montrent que f est uniformément continue à gauche si et seulement si $j(f)$ l'est. Ce qui achève la démonstration du lemme (7.3).

7.4. Corollaire. - *Soient* G *un groupe L.C.D. et* μ *une mesure de* $M^1(G)$. *Soient* C *un sous-groupe récurrent de* G *et* E *un* G*-espace localement compact (à gauche ou à droite) alors toute mesure* ν *de* $M^1(E)$ μ*-invariante est* μ^C*-invariante.*

Preuve. - Nous nous bornons à faire la démonstration pour un G-espace à gauche. Soit ν une mesure de $M^1(E)$. Désignons par $C_K(E)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur E . A tout $f \in C_K(E)$ associons la fonction $\psi_\nu(f)$ définie par

$$\psi_\nu(f) : g \in G \longmapsto \int_E f(g.u)\, \nu(du) ;$$

il est facile de voir que $\psi_\nu(f)$ est bornée et U.C.G. . Nous notons $\psi_\nu(f)|_C$ sa restriction à C .

Avec ces notations nous avons alors :

ν est μ-invariante $\Longleftrightarrow$ i) $\psi_\nu(f) \in H_\mu$, pour tout f de $C_K(E)$

ν est μ^C-invariante $\Longleftrightarrow$ ii) $\psi_\nu(f)|_C \in H_{\mu^C}$, pour tout f de $C_K(E)$.

D'après le lemme (7.3), nous avons i) $\Longrightarrow$ ii) ; ce qui établit le corollaire.

7.5. Lemme. - *Soient* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée. Alors il existe sur la frontière maximale* $B(G)$ *de* G *une unique mesure de probabilité* μ*-invariante (i.e. telle que* $\nu * \mu = \nu$) .

Preuve. - Notons d'abord que puisque $B(G)$ est compact, il existe toujours sur $B(G)$ une mesure de probabilité μ-invariante.

Le sous-groupe fermé, G_μ, engendré par le support de μ contient la composante connexe G_o de l'unité dans G. $B(G)$ est aussi une frontière maximale de G_μ (lemme (2.2)). Nous pouvons donc, quitte à remplacer G par G_μ, supposer que μ est apériodique.

Ecrivons $B(G) = {}_{H(G)}\backslash^{G}$; il revient alors au même de montrer que sur $B' = G/_{H(G)}$ il existe une unique mesure μ-invariante $\nu \in M^1(B')$ (i.e. telle que $\mu * \nu = \nu$). Nous allons prouver que l'on peut se ramener au cas où G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, le lemme résultera alors de la proposition II.4 de [1] .

$G_o\backslash^{G}$ est fini ; comme μ est apériodique, G_o est un sous-groupe récurrent de G (i.e. $\mathbb{P}_g[\lim_n \sup\{X_n \in G_o\}] = 1$, pour tout g de G). D'après le corollaire (7.4), si ν est une mesure, μ-invariante, de $M^1(B')$, ν est aussi μ^{G_o}-invariante. La mesure μ^{G_o} de $M^1(G_o)$ étant étalée, on est ramené à prouver le lemme pour un groupe de Lie connexe.

Soit alors R' le plus grand sous-groupe distingué résoluble de G ; ${}_{R'}\backslash^{G}$ est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial. B' est une frontière maximale (gauche) de ${}_{R'}\backslash^{G}$. Désignons par ξ' l'application naturelle de G sur ${}_{R'}\backslash^{G}$; si $\nu \in M^1(B')$ est μ-invariante, elle est aussi $\xi'(\mu)$-invariante. μ étant étalée, la mesure $\xi'(\mu)$ de $M^1({}_{R'}\backslash^{G})$ est étalée ([1] lemme IV.9). On est alors ramené à prouver le lemme dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial. Le lemme est donc prouvé.

7.6. Corollaire. - *Soient* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée. Alors la chaîne de loi* μ *sur la frontière maximale* $B(G)$ *de* G *est ergodique (i.e. possède une seule classe ergodique sans classe cyclique, voir [6], ch. 5, § 5).*

Preuve. - La chaine de loi μ sur $B(G)$ est aussi la chaine de loi $\xi'(\mu)$ sur $B(G)$ où ξ' désigne l'application naturelle de G sur ${}_{R'}\backslash^{G}$. D'après le corollaire (7.2) cette chaine vérifie la condition de Doeblin. En raison de l'unicité de la mesure μ-invariante sur $B(G)$ (lemme 7.5) il existe une seule classe ergodique. Cette classe ne peut pas contenir de sous classe cyclique ; car une telle sous classe deviendrait une classe ergodique pour la chaine de loi μ^d, où d désigne la période de cette sous classe ; ce qui contredirait le fait que μ^d possède une unique mesure invariante sur $B(G)$. (Voir [26], corollaire du lemme 1).

7.7. Lemme. - *Soient* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes ;* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *apériodique et étalée ; et* G_1 *un sous-groupe (fermé) de* G *contenant* G_o .

Alors il existe sur $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^G$ *une unique mesure de probabilité* μ*-invariante qui est la mesure produit* $\nu \otimes m$, *où* ν *est l'unique mesure* μ*-invariante de* $M^1(B(G))$ *(lemme (7.5)) et* m *la mesure de Haar normalisée sur* ${}_{G_1}\backslash^G$. *La chaine de loi* μ *sur* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^G$ *est donc ergodique.*

Preuve. - Comme pour le lemme (7.5) nous raisonnons sur les G-espaces à gauche. On est donc amené à montrer qu'il existe sur le G-espace homogène produit $B' \times G/_{G_1}$ (où $B' = G/_{H(G)}$) , une unique mesure de probabilité μ-invariante.

μ étant supposée apériodique, la composante connexe G_o de l'unité dans G est un sous-groupe récurrent de G . Si ν_1 est une mesure μ-invariante de $M^1(B' \times G/_{G_1})$, d'après le corollaire (7.4), ν_1 est aussi μ^{G_o}-invariante ; nous avons donc

$$\begin{aligned}(\mu^{G_o})^n * \nu_1(V\times W) &= \int_{G_o}\int_{B'\times G/_{G_1}} 1_V(g.x)\, 1_W(y)\, (\mu^{G_o})^n(dg)\, \nu_1(dx,dy)\\ &= \int_{B'\times G/_{G_1}} 1_W(y)\, \left(\int_{G_o} 1_V(g.x)(\mu^{G_o})^n(dg)\right) \nu_1(dx,dy)\\ &= \nu_1(V\times W)\ ,\end{aligned}$$

pour tout borélien V (resp. W) de B' (resp. de $G/_{G_1}$) et tout entier n .

Mais d'après le corollaire (7.6) la chaine de loi μ^{G_o} sur B' est ergodique ; nous avons alors ([6], ch. 5, § 5) ,

$$\sup_{b\in B'}\ \sup_{V} \left|(\mu^{G_o})^n * \varepsilon_b(V) - \nu(V)\right| < \alpha\, e^{-\beta n}$$

où α et β sont des réels > 0 et ν est l'unique mesure μ^{G_o}-invariante de $M^1(B')$.

Il s'ensuit alors que :

$$(\mu^{G_o})^n * \nu_1(V\times M) \longrightarrow \nu(V)\ \nu_1(B'\times W)\ .$$

Comme il est facile de voir que la projection de ν_1 sur $G/_{G_1}$ est nécessairement la mesure de Haar normalisée sur $G/_{G_1}$, il s'ensuit que $\nu_1 = \nu \otimes m$. D'après le lemme (7.5) et le corollaire (7.4) ν est aussi l'unique mesure μ-invariante de $M^1(B')$. La première assertion du lemme (7.7) est donc prouvée.

Pour prouver que la chaine de loi μ sur $B(G) \times {}_{G_1}\backslash G$ est ergodique, il suffit de reprendre la démonstration du corollaire (7.6). Le lemme (7.7) est prouvé.

7.8. Proposition. - *Soient* G_1 *un sous-groupe de* G *contenant* G_o *et* ρ *un* A-*cocycle* K-*invariant sur le* G-*espace homogène à droite* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^G$ *(voir définition (2.1)). Soit* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *apériodique et désignons par* $(\Omega, \mathfrak{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ *la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G.

Alors si ρ *n'est pas nul, nous avons l'alternative suivante :*
ou bien, pour tout u *de* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash G$, $\rho(u, X_n)$ *converge vers* $(-\infty)$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall\, g \in G$;
ou bien, pour tout u *de* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash G$, $\rho(u, X_n)$ *converge vers* $(+\infty)$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall\, g \in G$;
ou bien, pour tout u *de* $B(G) \times {}_{G_1}\backslash G$, $\lim_n \sup \rho(u, Xn) = +\infty$
et $\lim_n \inf \rho(u, X_n) = -\infty$ $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall\, g \in G$.

Preuve. - Désignons par ζ_1 l'application naturelle de G sur ${}_{G_1}\backslash^G$; par u_o l'élément de $B(G)$ stable par $N(D)$, (lemme (2.3)) et par v_o l'élément $(u_o, \zeta_1(e))$ de $B(G) \times {}_{G_1}\backslash^G$. Pour tout réel δ, posons

$$f_\delta(g) = \mathbb{P}_g\left[\lim_n \sup \rho(v_o, X_n) > \delta\right] = \mathbb{P}_e\left[\lim_n \sup \rho(v_o, gX_n) > \delta\right] \quad (g \in G) ;$$

f_δ est une fonction μ-harmonique bornée (voir (6.7)).

Notons $[D,D]$ le sous-groupe de D engendré par les commutateurs $x\, y\, x^{-1}\, y^{-1}$, x et $y \in D$. $[D,D]\Gamma$ est un sous-groupe de G contenu dans $N_o(D)$.
Pour $h \in [D,D]\,\Gamma$ et $y \in G$ nous avons :

$$\rho(v_o, hy) = \rho(v_o, h) + \rho(v_o.h, y) = \rho(v_o, h) + \rho(v_o, y)$$

or si $h = x\gamma$ avec $x \in [D,D]$ et $\gamma \in \Gamma$ il vient

$$\rho(v_o, h) = \rho(v_o, x) = \phi(x) = 0$$

où ϕ désigne l'homomorphisme de D dans $\mathbb{R}$ additif associé à ρ (lemme (2.4)) d'où

$$\rho(v_o, hy) = \rho(v_o, y) \qquad (h \in [D,D]\,\Gamma,\ g \in G) .$$

Il s'ensuit alors que pour tout réel δ la fonction μ-harmonique bornée f_δ vérifie

$$f_\delta(hg) = f_\delta(g) \qquad (h \in [D,D]\,\Gamma,\ g \in G) .$$

Admettons un instant qu'une telle fonction μ-harmonique bornée sur G soit constante. D'après la proposition (6.7) nous avons alors $f_\delta = 0$ ou $f_\delta = 1$ pour tout réel δ , c'est-à-dire que l'on a

ou bien $\rho(v_o,X_n)$ converge vers $(-\infty)$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$

ou bien il existe $\delta_o \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_n \sup \rho(v_o,X_n) > \delta_o$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$.

Dans le second cas, de $\rho(v_o,X_n) = \rho(v_o,dX_n) - \rho(v_o,d)$ $(d \in D)$, il résulte que l'on a pour tout d de D

$$\lim_n \sup \rho(v_o,X_n) > \delta_o - \rho(v_o,d) = \delta_o - \phi(d) \ , \ \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \quad \forall g \in G \ .$$

Mais ρ étant non nul, l'homomorphisme ϕ de D dans $\mathbb{R}$ additif qui lui est associé est non nul. D étant connexe, il s'ensuit donc que $\phi(D) = \mathbb{R}$; et par suite

$$\lim_n \sup \rho(v_o,X_n) = +\infty \quad \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \quad \forall g \in G \ .$$

Enfin l'égalité

$$\rho(v_o,kX_n) = \rho(v_o.k,X_n) \quad (k \in K)$$

montre qu'on est dans le même cas pour tous les éléments u de $B(G) \times {}_{G_1}\backslash G$.

En recommençant alors le raisonnement avec les fonctions

$$f'_\delta(g) = \mathbb{P}_g\left[\lim_n \inf \rho(v_o,X_n) < \delta\right] \quad (\delta \in \mathbb{R} \ , \ g \in G)$$

on obtient la proposition (7.8).

Cette proposition résulte donc des résultats:

7.9. Lemme. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *apériodique et étalée. Alors toute fonction* μ-*harmonique bornée* f *sur* G *telle que* $f(hg) = f(g)$ $(h \in [D,D] \ , \ g \in G)$ *est la composée par l'application naturelle de* G *sur* ${}_D\backslash G$ *d'une fonction* μ-*harmonique bornée sur* ${}_D\backslash G$.

Preuve. - μ étant étalée, on sait ([1], prop. 1.6) que f est continue. Il s'ensuit que l'on a

$$f(hg) = f(g) \quad (h \in \overline{[D,D]} \quad g \in G) \ .$$

Autrement dit f est la composée par l'application naturelle de G sur ${}_{\overline{[D,D]}}\backslash G$ d'une fonction μ-harmonique bornée $\overline{f}$ sur ${}_{\overline{[D,D]}}\backslash G$.

Appelons p l'application naturelle de G sur ${}_D\backslash G$ et considérons une section mesurable s de p à valeurs dans K . Tout $g \in G$ s'écrit alors

$$g = d(g)\,(sop(g))$$

avec $d(g) = g(sop(g))^{-1} \in D$ et $sop(g) \in K$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur

G . Ecrivons $X_n = D_n K_n$ avec $D_n = d(X_n)$ et $K_n = \mathrm{sop}(X_n)$. Posons

$$U_n = D_n\, d\, D_n^{-1}\, d^{-1} \in [D,D] .$$

Nous avons

$$X_n^{-1} U_n d X_n = K_n^{-1} d K_n \subset \bigcup_{k \in K} k^{-1} d k , \quad \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \quad \forall g \in G .$$

Désignons par S_μ le semi-groupe ouvert associé à μ . $S_\mu S_\mu^{-1}$ est un ouvert de G contenant e . Soit V un voisinage compact de e contenu dans $S_\mu S_\mu^{-1}$. Comme $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} K$ est compact, $W = \bigcap_{k \in K} k^{-1} V k$ est un voisinage ouvert de e dans G .
Pour tout d appartenant à $D \cap W$ nous avons alors

$$X_n^{-1} U_n d X_n \subset \bigcup_{k \in K} k^{-1} W k \subset V \subset S_\mu S_\mu^{-1} , \quad \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \quad \forall g \in G .$$

D'après le théorème (6.8) les éléments de $W \cap D$ sont des μ-périodes sur $\frac{}{[D,D]}\backslash^G$. D étant connexe, il s'ensuit que tous les éléments de D sont des μ-périodes sur $\frac{}{[D,D]}\backslash^G$. Le lemme (7.9) est prouvé.

7.10. Corollaire. - *Avec les notations du lemme (7.9), toute fonction* f μ-*harmonique bornée sur* G *telle que* $f(hg) = f(g)$ $(h \in [D,D]\,\Gamma$, $g \in G)$ *est constante.*

Preuve. - D'après le lemme (7.9), f est la composée, par l'application naturelle de G sur $N_o(D)\backslash^G$, d'une fontion $\hat{f}$ μ-harmonique bornée sur $N_o(D)\backslash^G$. Or $N_o(D)\backslash^G$ est G-homéomorphe au G-espace produit $B(G) \times {}_{G_o}\backslash G$. D'après le lemme (7.7) , il s'ensuit que la chaine de loi μ sur $N_o(D)\backslash^G$ est ergodique et est donc, en particulier, une chaine récurrente au sens de Harris. On sait alors que $\hat{f}$ et par suite f sont constantes (voir [23]).

Remarque. - Dans la démonstration du lemme (7.9), la condition "apériodique" a été nécessaire pour savoir que la chaine de loi μ sur $B(G) \times {}_{G_o}\backslash^G$ est ergodique. Mais on sait (corollaire (7.6)) que la chaine de loi μ sur $B(G)$ est ergodique sans cette condition. Il s'ensuit alors que si μ est étalée, toute fonction μ-harmonique bornée sur G telle que

$$f(hg) = f(g) \qquad (h \in [D,D]\,\Gamma' , \ g \in G)$$

est constante.

Il est alors facile de voir que pour un A-cocycle ρ sur $B(G)$, la proposition (7.8) reste valable sans la condition d'apériodicité.

7.11. Définition. - Soient G un groupe L.C.D. tel que $G_o \backslash G$ soit compact et μ une mesure de $M^1(G)$. Soient E un G-espace compact à droite et ρ un A-cocycle sur E (définition (2.1)). Nous disons que ρ est μ-négatif strict si pour tout u de E, $\rho(u,X_n)$ converge vers $(-\infty)$, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$. Dans le cas contraire ρ est dit μ-positif.

7.12. Proposition. - *Soit* (G,E,ρ) *comme dans la définition (7.11). Supposons que* μ *possède un moment d'ordre 1 et que la chaine de loi* μ *sur* E *soit ergodique (i.e. qu'elle vérifie la condition de Doeblin et possède une seule classe ergodique sans classe cyclique, voir* [6]) *; désignons par* ν *l'unique mesure de probabilité* μ*-invariante sur* E *et posons* $a_\rho = \int_G \int_E \rho(u,g)\, \nu(du)\, \mu(dg)$.

Alors nous avons :

$$a_\rho < o \text{ (resp. } >o) \iff \lim_n \rho(u,X_n) = -\infty \text{ (resp. } +\infty), \ \mathbb{P}_x\text{-p.s.} \quad \forall x \in G .$$

$$a_\rho = o \iff \liminf_n \rho(u,X_n) = -\infty \ \textit{et} \ \limsup_n \rho(u,X_n) = +\infty , \ \mathbb{P}_x\text{-p.s.} \ \forall x \in G .$$

Preuve. - La chaine de loi μ sur E étant ergodique, nous savons ([6]) que $\frac{1}{n}\rho(u,X_n)$ converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, vers a_ρ. Le seule cas non trivial est alors celui où $a_\rho = o$.

Ecrivons $X_n = X_o Y_1 \dots Y_n$, où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes et de loi μ. Pour tout $u \in E$, le couple $(u.X_n , \rho(u.X_{n-1}, Y_n))$ est une chaine de Markov homogène dont la probabilité de transition $\tilde{P}$ est définie par

$$\tilde{P}f(u,\alpha) = \int_G f(u.g , \rho(u,g))\, \mu(dg) \quad (u \in E , \alpha \in \mathbb{R} , f \text{ borélienne bornée sur } E \times \mathbb{R}) .$$

Nous avons alors $\tilde{P}f(u,\alpha) = \tilde{P}f(u,o)$ et la chaine considérée est donc semi-markovienne (voir [16]). Ayant remarqué que

$$(u.X_n , \rho(u,X_n)) = (u.X_n , \rho(u,X_o) + \sum_{p=1}^{n} \rho(u.X_{p-1} , Y_p)) ,$$

la proposition (7.12) résulte alors du corollaire de la proposition 12 de [16].

7.13. Proposition. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe de l'unité dans* G *est semi-simple et de centre fini. Alors toute famille discriminante d'*A*-cocycles associée à* G *(voir § 2) est une famille d'*A*-cocycles* μ*-négatifs stricts pour toute mesure* μ *de* $M^1(G)$ *étalée.*

Preuve. - Nous reprenons les notations des paragraphes précédents. Considérons la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ (resp. $G_o = NAK$, $\mathcal{G} = \mathfrak{I} = \mathcal{N} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathcal{K}$) de G

(resp. de G_o, $\mathcal{G}$) . Ξ est la famille des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$ dans $\mathcal{N}$. Tout élément de Ξ est nul sur $\mathcal{N}$ et sa restriction à $\mathcal{Q}$ est un poids de la représentation adjointe de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{N}$ (i.e. un élément de Σ_1 (1.2)). Nous identifions Ξ et Σ_1 .

Posons

$$(\Sigma_1)_- = \{\lambda \in \Sigma_1 : \rho_\lambda \text{ est } \mu\text{-négatif strict}\}$$

et

$$(\Sigma_1)_+ = \{\lambda \in \Sigma_1 : \rho_\lambda \text{ est } \mu\text{-positif}\} .$$

$\{(\Sigma_1)_-, (\Sigma_1)_+\}$ est une partition stable par addition et conjuguaison de Σ_1 ; soit $\mathcal{N} = \mathcal{N}_- \oplus \mathcal{N}_+$ la décomposition de $\mathcal{N}$ associée à cette partition de Σ_1 (voir (3.7)). Muni du produit $\times$ défini par la formule (3.3), $\mathcal{N}$ est le produit amalgamé des sous algèbres $\mathcal{N}_-$ et $\mathcal{N}_+$. Comme N est nilpotent simplement connexe, il s'ensuit que N est le produit amalgamé des sous-groupes fermés $N_- = (\exp \mathcal{N}_-)$ et $N_+ = (\exp \mathcal{N}_+)$.

Nous avons alors le lemme :

Lemme. - *Pour toute mesure* μ *étalée et apériodique, les fonctions* μ*-harmoniques bornées sur* ${}_{N_-\Gamma'}\backslash^G$ *sont constantes. (*Γ' *désigne le sous-groupe de* G *formé des éléments qui normalisent à la fois* N , A *et* K , *voir prop. (1.7)).*

Preuve du lemme. - Par une méthode identique à celle que nous utiliserons pour démontrer la proposition (10.1), on montre que les fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_{N_-}\backslash^G$ sont les composées par l'application naturelle de ${}_{N_-}\backslash^G$ sur ${}_N\backslash^G$ des fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_N\backslash^G$.
Le lemme est alors une conséquence de la remarque qui suit le corollaire (7.10).

Ceci dit, considérons la décomposition de Bruhat $G = N A \tilde{N} \Gamma'$ mod. m_G , de G (voir proposition (5.3)) et désignons par β l'application naturelle de G sur la frontière maximale (droite) $F = {}^G/_{A\tilde{N}\Gamma'}$ de G . D'après la proposition (5.3) l'image de N par β est un ouvert de F dont le complémentaire est de mesure nulle pour une quelconque mesure quasi-invariante sur F .

Désignons par ν l'unique mesure μ-invariante de $M^1(F)$. μ étant étalée, on sait ([1]) que ν est la restriction à un ouvert de F d'une mesure quasi-invariante ; $\beta(N)$ est donc de ν-mesure égale à 1 .

L'applicatiion
$$N_- \times N_+ \longrightarrow N \quad \text{est un isomorphisme de variétés analytiques.}$$
$$(n_-, n_+) \longmapsto n_- n_+$$

Désignons par $C_K(N_+)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur N_+

et par $m_{\Gamma'}$ la mesure de Haar normalisée sur Γ' (noter que puisque G_o est supposé être de centre fini, Γ' est un sous-groupe compact de G) . Considérons la fonction borélienne bornée sur F définie par

$$f(\beta(n_-n_+)) = \int_{\Gamma'} \phi(\gamma n_+\gamma^{-1})\, m_{\Gamma'}(d\gamma) \quad \text{où} \quad \phi \in C_K(N_+)$$

$$f(u) = 0 \quad \text{si} \quad u \in F \ , \ u \notin \beta(N) \ .$$

Pour tout $u \in \beta(N)$ et tout $h \in N_-\Gamma'$, nous avons $f(h.u) = f(u)$: en effet écrivons $u = \beta(n_-n_+)$ et $h = n'_-\gamma'$ avec n_- , $n'_- \in N_-$, $n_+ \in N_+$ et $\gamma' \in \Gamma'$; il vient

$$f(h.u) = f\circ\beta(n'_-\gamma' n_- n_+) = f\circ\beta(n'_-(\gamma' n_- \gamma'^{-1})(\gamma' n_+ \gamma'^{-1}))$$

$$= \int_{\Gamma'} \phi(\gamma\gamma' n_+ \gamma'^{-1}\gamma^{-1})\, m_{\Gamma'}(d\gamma) = \int_{\Gamma'} \phi(\gamma n_+ \gamma^{-1})\, m_{\Gamma'}(d\gamma)$$

$$= f(u) \ .$$

La fonction $f*\nu$ qui à $g \in G$ associe $\int_F f(g.u)\,\nu(du)$ est alors une fonction μ-harmonique bornée telle que $f*\nu(hg) = f*\nu(g)$, $h \in N_-\Gamma'$ et $g \in G_o$. D'après ce qui précède, $f*\nu$ est donc constante. Or on sait que l'on peut trouver une suite a_n d'éléments de A telle que la suite $a_n^{-1}\, x\, a_n$ converge vers e pour tout élément x de N . (Il suffit de choisir un élément H dans la chambre de Weyl W (voir § 1) et de poser $a_n = \exp(nH)$) . D'après le théorème de convergence dominée, il résulte alors que $f*\nu(g\, a_n^{-1})$ converge vers $f\circ\beta(g)$, pour tout g appartenant à G_o . $f*\nu$ étant constante, on en déduit que $f\circ\beta$ est constante pour toute fonction ϕ de $C_K(N_+)$. On a alors nécessairement $N_+ = \{e\}$, c'est-à-dire $\Sigma_1 = (\Sigma_1)_-$. La proposition est démontrée.

7.14. Corollaire. - *Avec les notations de la proposition (7.13), supposons que* μ *possède en outre un moment d'ordre 1, alors nous avons*

$$a_\lambda = \iint \rho_\lambda(u,g)\,\nu(du)\,\mu(dg) < 0 \ , \quad (\lambda \in \Xi) \ ,$$

où ν *désigne l'unique mesure* μ*-invariante de* $M^1(B(G))$ *(lemme (7.5)).*

Preuve. - Compte-tenu du corollaire (7.6) et de la proposition (7.12), le corollaire résulte immédiatement de la proposition (7.13).

7.15. Corollaire. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Alors les éléments du sous ensemble* $\{\rho_\lambda\ ,\ \lambda \in \Sigma_1\}$ *(voir (5.5)) de la famille discriminante d'*A*-cocycles* $\{\rho_\lambda\ ,\ \lambda \in \Xi\}$ *associée à* G *(voir § 2) sont* μ*-négatifs stricts, pour toute mesure* μ *de* $M^1(G)$ *étalée.*

<u>Preuve</u>. - Nous savons que $B(G)$ est une frontière maximale du groupe de Lie $R'\backslash^G$ dont la composante connexe est semi-simple et de centre trivial. D'autre part, Σ_1 est l'ensemble des éléments de Ξ qui sont nuls sur $\mathfrak{R} \oplus \mathfrak{N}$ et dont la restriction à $\mathfrak{A}$ donne un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{N}$. Il est alors clair que $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Sigma_1\}$ n'est autre que l'ensemble des composés par (I,ξ') d'une famille discriminante d' A-cocycles sur $B(G)$ associée à ${}_{R'}\backslash^G$. Le corollaire (7.15) résulte alors de la proposition (7.13).

7.16. <u>Remarques</u>. - Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe de l'unité dans G est semi-simple (non nécessairement de centre fini). D'après la remarque (2.10) et le corollaire (7.15), il résulte que l'espace vectoriel des A-cocycles K-invariants sur la frontière maximale $B(G)$ de G possède une base formée d'éléments μ-négatifs stricts, pour tout mesure μ de $M^1(G)$ étalée et apériodique.

Dans [10] Furstenberg avait conjecturé l'existence, pour un groupe de Lie G connexe semi-simple de centre fini, d'une base de l'espace vectoriel des A-cocycles K-invariants sur la frontière maximale $B(G)$ de G formée d'éléments μ-négatifs stricts pour toute mesure μ de $M^1(G)$ de "classe B_∞" (i.e. ayant une densité bornée et à support compact par rapport à la mesure de Haar sur G). On a donc résolu et étendu cette conjecture.

D'autre part, la proposition (7.13) et le corollaire (7.14) étendent le corollaire du théorème 1 de [26] qui suppose que μ possède un moment d'ordre 2 et est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

7.17. <u>Décomposition de G associée à une mesure μ étalée et apériodique de $M^1(G)$</u>. - Soient G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes ; $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$ une famille discriminante d' A-cocycles associée à G ; et μ une mesure de $M^1(G)$ étalée et apériodique. Posons

$$\Xi_-^\mu = \{\lambda \in \Xi : \rho_\lambda \text{ est } \mu\text{-négatif strict}\}$$

et

$$\Xi_+^\mu = \{\lambda \in \Xi : \rho_\lambda \text{ est } \mu\text{-positif}\} .$$

Des relations $\rho_{\lambda+\lambda'} = \rho_\lambda + \rho_{\lambda'}$ $(\lambda , \lambda' \in \Xi , \lambda+\lambda' \in \Xi)$, $\rho_{\bar\lambda} = \overline{\rho_\lambda}$ $(\lambda \in \Xi)$, il résulte, via la proposition (7.8), que $\{\Xi_-^\mu , \Xi_+^\mu\}$ est une partition de Ξ stable par addition et conjuguaison. Nous notons alors

$$M = M_-^\mu M_+^\mu \quad , \quad D = D_-^\mu D_+^\mu \quad \text{et} \quad G = D_-^\mu E_+^\mu \quad \text{avec} \quad E_+^\mu = D_+^\mu K$$

les décompositions de M, D et G associée à cette partition (voir § 4).

D'autre part si α est un élément de Ξ de la forme $\lambda-\gamma$ avec $\lambda \in \Xi$ et $\gamma \in \Sigma_1$ nous avons $\rho_\alpha = \rho_\lambda - \rho_\gamma$; d'après ce qui précède et le corollaire (7.15), on en déduit que $\{\Xi_-^\mu , \Xi_+^\mu \cup \Sigma_2 \cup \{0\} \}$ est une partition de $\Theta = \Xi \cup \Sigma_2 \cup \{0\}$ adaptée à la chambre de Weyl W (déf. (5.1)). D'après la définition même des ρ_λ, $\lambda \in \Xi$, il est clair que la partition $\{\Xi_-^\mu \ \Xi_+^\mu\}$ est stable par automorphismes intérieurs (i.e. $\gamma \circ \mathrm{Ad}g \in \Xi_-$ (resp. Ξ_+) pour tous $\gamma \in \Xi_-$ (resp. Ξ_+) et $g \in N(D)$, normalisateur de D dans G) ; comme tout automorphisme de $\mathcal{G}$ laissant stable $\mathcal{D}$ permute les éléments de Σ_1 (démonstration analogue à celle du lemme (2.8)) et par suite ceux de $\Sigma_2 = -\Sigma_1$, on en déduit que cette partition de Θ est stable par automorphismes intérieurs. Nous notons alors

$$G = G_-^\mu G_+^\mu \quad \text{avec} \quad G_-^\mu = D_-^\mu = M_-^\mu N \quad \text{et} \quad G_+^\mu = D_+^\mu N \Gamma' = (M_+^\mu P A) N \Gamma' ,$$

la décomposition, modulo m_G, de G associée à cette partition (voir § 5).

7.18. Remarque. - Pour une mesure μ de $M^1(G)$ donnée, les décompositions de G associées à μ dépendent du choix de la décomposition

$$\mathcal{G} = (\mathcal{M}+\mathcal{P}) \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K} .$$

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{M}+\mathcal{P}^1) \oplus \mathcal{N}^1 \oplus \mathcal{A}^1 \oplus \mathcal{K}^1$ un autre choix de cette décomposition. On sait (remarque (1.11)) que ce nouveau choix se déduit du précédent par un automorphisme intérieur, $\mathrm{Ad}\, x$, avec $x \in G_0$. La famille Ξ est remplacée par $\Xi^1 = \{\lambda \circ \mathrm{Ad}\, x^{-1} , \lambda \in \Xi\}$ et la famille d' A-cocycles $\{\rho_\lambda \ \lambda \in \Xi\}$ par la famille $\{\rho_\lambda \circ (J_d, I_d) , \lambda \in \Xi\}$ où x s'écrit $d\,k$ avec $d \in D$ et $k \in K$. (Voir lemme (2.12)). Nous avons

$$\rho_\lambda \circ (J_d, I_d)(u,g) = \rho_\lambda(u,g) + \rho_\lambda(u.g \ , \ d) - \rho_\lambda(u,d) ,$$

pour tous éléments u de $B(G)$ et g de G.

Il s'ensuit que l'on a l'équivalence entre :

i) $\{\forall\, u \in B(G) \ ; \ \rho_\lambda(u,X_n) \longrightarrow (-\infty) \ , \ \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \ \ \forall\, g \in G\}$

ii) $\{\forall\, u \in B(G) \ ; \ [\rho_\lambda \circ (J_d, I_d)] \ (u,X_n) \longrightarrow (-\infty) \ , \ \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \ \ \forall\, g \in G\}$.

D'après la remarque (4.5) les décompositions de G obtenues avec ce nouveau choix se déduisent des précédentes par conjuguaison par $x \in G_0$. La décomposition de G associée à μ est donc unique à conjuguaison par un élément de G_0 près.

8. EXISTENCE ET DESCRIPTION D'UNE μ-FRONTIERE HOMOGENE MAXIMALE

Nous désignons par G un groupe localement compact à base dénombrable.

8.1. - Soit E un G-espace à gauche. On note ([7]) $C_u(E)$ l'ensemble des fonctions f boréliennes bornées sur E telles que l'application $g \in G \longmapsto \sup_{x \in E} |f(g.x)-f(x)|$ soit continue en e (et donc U.C.G.). Muni de la norme de la convergence uniforme, $C_u(E)$ est un espace de Banach. Si E est un G-espace localement compact homogène, $C_u(E)$ est contenu dans $C(E)$, espace des fonctions continues sur E.

8.2. - Nous appelons μ-espace de G tout couple (E,ν) composé d'un G-espace à gauche localement compact E et d'une mesure ν, μ-invariante (i.e. telle que $\mu*\nu = \nu$), portée par E. Deux μ-espaces de G, (E,ν) et (E',ν') sont dits G-isomorphes s'il existe un G-homéomorphisme ϕ de E sur E' envoyant ν sur ν'. Un μ-espace de G, (E,ν), est appelé une μ-frontière de G ([9]) si la suite de mesure de probabilité sur E, $X_n\nu$, converge, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, vers une mesure ponctuelle, où $(\Omega, \mathfrak{F}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g\in G})$ désigne la marche aléatoire droite sur G de loi μ ; si E est homogène (resp. compact), nous disons que la μ-frontière est homogène (resp. compacte).

8.3. - On sait ([8]) que tout couple (G,μ) possède, à G-isomorphisme près, un unique μ-espace compact, (Π_μ,ν) telle que l'application $f \longmapsto f*\nu$ (voir (6.4)) soit une G-isométrie de $C(\Pi_\mu)$ sur H_μ ; en outre ([1]) si μ est étalée, cette application est une G-isométrie de $L^\infty(\Pi_\mu,\varepsilon)$ sur E_μ, où ε est une mesure quasi-invariante sur Π_μ. Π_μ et ν sont appelés respectivement espace et noyau de Poisson de μ sur G. Si Π_μ est métrisable, alors (Π_μ,ν) est une μ-frontière compacte de G. Dans le cas où G est soit un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini ([8]), soit un groupe de Lie connexe de type rigide ([1]), soit un groupe "localement produit direct de tels groupes" ([4]), (Π_μ,ν) est une μ-frontière compacte et <u>homogène</u> pour toute mesure μ étalée sur G.

Dorénavant, G désigne un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. On désigne par G_o la composante connexe de l'unité dans G et par R le radical de G_o. On note ξ l'application naturelle de G sur ${}_R\backslash^G$ et m_G une mesure de Haar sur G.

8.4. <u>Théorème</u>. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes* *connexes. Pour toute mesure* μ *de* $M^1(G)$ *étalée et ayant un moment d'ordre 1, il existe un espace homogène* $\Lambda_\mu(G)$ *de* G *(unique à un* G*-homéomorphisme près) et une mesure* $\nu \in M^1(\Lambda_\mu)$ *,* μ*-invariante, tels que*

i) (Λ_μ, ν) *est une* μ*-frontière homogène de* G .

ii) L'application $f \longmapsto f{*}\nu$ *est une* G*-isométrie de* $L^\infty(\Lambda_\mu)$ *sur l'espace de Banach,* E_μ *, des fonctions* μ*-harmoniques bornées, envoyant* $C_u(\Lambda_\mu)$ *sur le sous-espace ,* H_μ *, de* E_μ *formé des éléments uniformément continus à gauche.*

8.5. Description de Λ_μ. -

1) Supposons que μ soit de plus apériodique et considérons la décomposition $G = G_-^\mu G_+^\mu$, modulo m_G , associée à μ (voir (7.17)) . $\Lambda_\mu(G)$ est alors un revêtement à fibre dénombrable du G-espace homogène $G/_{G_+^\mu}$. Plus précisément, soit $M = M_-^\mu M_+^\mu$ une décomposition de M associée à μ (voir (7.17)) ; en reprenant les notations antérieures, nous avons $G_+^\mu = M_+^\mu PAN\Gamma'$; alors

$$\Lambda_\mu(G) = {}^G/_{M_+^\mu PAN\Gamma'_\mu} ,$$

où Γ'_μ est un sous-groupe distingué de Γ' contenant Γ'_o .

Nous avons $\Lambda_{\xi(\mu)}({}_R\backslash^G) = {}^{\xi(G)}/_{\xi(AN\Gamma'_\mu)}$; autrement dit $\Lambda_\mu(G)$ est homéomorphe en tant qu'espace topologique à $M_-^\mu \times \Lambda_{\xi(\mu)}({}_R\backslash^G)$.

2) Si μ n'est pas apériodique, soit G_μ le sous-groupe fermé de G engendré par le support de μ . Désignons par s une section de l'application naturelle de G sur $G/_{G_\mu}$ (noter que $G/_{G_\mu}$ est fini). Posons (voir [1] prop. IV.1) :

$$\sigma(g,x) = [s(g.x)]^{-1} \; gs(x) \qquad (g \in G \; , \; x \in G/_{G_\mu}) \; ;$$

puis

$$g.(x,y) = (g.x, \sigma(g,x).y) \qquad (g \in G \; , \; (x,y) \in G/_{G_\mu} \times \Lambda_\mu(G_\mu)) \; .$$

Ainsi $G/_{G_\mu} \times \Lambda_\mu(G_\mu)$ est muni d'une structure de G-espace. Nous avons alors

$$\Lambda_\mu(G) = G/_{G_\mu} \times \Lambda_\mu(G_\mu) \; .$$

Les paragraphes 9 et 10 sont consacrés à la démonstration du théorème (8.4). Ce théorème sera ensuite étendu au cas des groupes L.C.D. (voir § 13).

8.6. Définition. - Nous disons qu'une μ-frontière homogène, (Λ,ν) , de G est maximale, si pour toute autre μ-frontière homogène (E,λ) de G , il existe une application surjective continue de Λ sur E , commutant avec les opération de G et envoyant ν sur λ .

8.7. Proposition. - *Soient* (G,μ) *vérifiant les hypothèses du théorème (8.4) et* (Λ_μ,ν) *la* μ*-frontière homogène de* G *associée à* (G,μ) *par ce théorème. Alors* (Λ_μ,ν) *est une* μ*-frontière homogène maximale de* G .

9. CONVERGENCE DE CERTAINES COMPOSANTES DE X_n

Dans ce qui suit G désigne un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes ; et μ une mesure de $M^1(G)$ étalée , apériodique , possèdant un moment d'ordre 1 .

9.0. Bref rappel des notations antérieures : On désigne par $\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{S}$ une décomposition de Lévi de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G ; par $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{K}$ une décomposition d'Iwasawa de la sous-algèbre de Lévi $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{g}$; on obtient la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{K}$, où $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre résoluble et $\mathfrak{K}$ une sous-algèbre compacte de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{M}$ le nilradical de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{P}$ une sous-algèbre de Cartan du centralisateur $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{R}$. Nous avons $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} + \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{h} + (\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{a})$, où $\mathfrak{h} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ est le nilradical de $\mathfrak{D}$.

Soit Ξ (resp. Λ) l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{M}^{\mathbb{C}}$) . A la mesure μ correspond la partition $\{\Xi_-^{\mu} , \Xi_+^{\mu}\}$ de Ξ définie par :

$$\Xi_-^{\mu} = \{\lambda \in \Xi : \quad a_\lambda = \iint \rho_\lambda(u , g) \quad \nu(du) \quad \mu(dg) < o\}$$

$$\Xi_+^{\mu} = \{\lambda \in \Xi : \quad a_\lambda = \iint \rho_\lambda(u , g) \quad \nu(du) \quad \mu(dg) \geq o\} \quad ,$$

où ν désigne l'unique mesure μ-invariante sur $B(G)$ (voir (7.17.)) . Cette partition est stable par addition et conjuguaison . De plus si Σ_1 (resp. Θ) désigne l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{D}$ dans $(\mathfrak{h}/\mathfrak{M})^{\mathbb{C}}$ (resp. dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$) , $\{\Xi_- , \Xi_+ \cup (-\Sigma_1) \cup \{0\} \}$ est une partition de Θ adaptée à la chambre de Weyl W (qui a servi à définir la décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{K}$ de $\mathfrak{S}$ (voir (1.2.)) et stable par automorphismes intérieurs . (voir (7.17.)) .

$\{\Lambda \cap \Xi_- , \Lambda \cap \Xi_+\}$ est alors une partition stable par addition et conjuguaison de Λ , soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_-^{\mu} \oplus \mathfrak{M}_+^{\mu}$ la décomposition de $\mathfrak{M}$ associée à cette partition (voir (3.7.)) . Les décompositions de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{D}$ associées à la partition $\{\Xi_-^{\mu} , \Xi_+^{\mu}\}$ sont alors (voir §4 et 5)

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_-^{\mu} \oplus \mathfrak{h}_+^{\mu} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{h}_-^{\mu} = \mathfrak{M}_-^{\mu} \oplus \mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_+^{\mu} = \mathfrak{M}_+^{\mu}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_-^{\mu} \oplus \mathfrak{D}_+^{\mu} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{D}_-^{\mu} = \mathfrak{h}_-^{\mu} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_+^{\mu} = (\mathfrak{h}_+^{\mu} + \mathfrak{P}) \oplus \mathfrak{a}$$

Nous savons que , muni du produit $\times$ défini par la formule (3.3.) , $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{M}$) est un groupe nilpotent qui est le produit amalgamé des sous-algèbres $\mathfrak{h}_-^{\mu}$ et $\mathfrak{h}_+^{\mu}$ (resp. $\mathfrak{M}_-^{\mu}$ et $\mathfrak{M}_+^{\mu}$) ; en outre les projections ρ_- et ρ_+ (resp. ρ'_- et ρ'_+) associées à ce produit amalgamé sont polynomiales (voir (3.7.)) .

Désignons par M , P , N , A , K , D , D^μ_- et D^μ_+ les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement pour algèbre de Lie $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^\mu_-$ et $\mathcal{D}^\mu_+$. Notons Γ le centralisateur de A dans K et Γ' l'intersection des normalisateurs dans G de N , A , K et P .

$K\Gamma'$ est alors un sous-groupe fermé de G ayant un nombre fini de composantes connexes ; on choisit un de ses sous-groupes compacts maximaux qui sont conjugués deux à deux , soit L . En posant $\mathcal{K} = KL$, on obtient la décomposition $G = D\mathcal{K}$, où D est un sous-groupe fermé résoluble connexe , l'image de $\mathcal{K}$ par la représentation adjointe de G est compacte et $D \cap \mathcal{K}$ est contenu dans P .

D'autre part , posons $M^\mu_- = \exp \mathcal{M}^\mu_-$ et $M^\mu_+ = \exp \mathcal{M}^\mu_+$. M^μ_- et $D^\mu_- = M^\mu_- N$ sont des sous-groupes fermés simplement connexes de G . M (resp. D) est le produit amalgamé des sous-groupes M^μ_- et M^μ_+ (resp. D^μ_- et $D^\mu_+ = M^\mu_+ PA$) .

Enfin , en posant $G^\mu_- = D^\mu_-$ et $E^\mu_+ = D^\mu_+ \mathcal{K} = D^\mu_+ K \Gamma'$, l'application

$$\begin{aligned} \eta : G^\mu_- \times E^\mu_+ &\longrightarrow G \\ (d , g) &\longmapsto dg \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés analytiques ; nous notons p_- et p_+ les projections de G sur G^μ_- et E^μ_+ telles que $g = p_-(g)\, p_+(g)$ pour tout g de G .

Nous allons à présent construire une décomposition de G un peu plus fine que celle $G = D_- D_+ \mathcal{K}$ obtenue ci-dessus . Nous omettons l'indice "μ" .

9.1.- $\mathcal{H}_+$ est un idéal nilpotent de $\mathcal{D}_+$ et Ξ_+ est l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{D}_+$ dans $\mathcal{H}_+$. Posons $\Xi_0 = \{\lambda \in \Xi \ ; \ a_\lambda = 0\}$ et $\Xi^*_+ = \{\lambda \in \Xi \ ; \ a_\lambda > 0\}$, $\{\Xi^*_+ , \Xi_0\}$ est alors une partition de Ξ_+ stable par addition et conjuguaison ; notons respectivement

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}^*_+ , \quad \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}^*_+ \quad \text{et} \quad D_+ = D_0\, D^*_+$$

les décompositions de $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{D}_+$ et D_+ associées à cette partition de Ξ_+ .
Comme on a

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \in \Xi_0 \\ \lambda' \in \Xi_- \quad (\text{resp. } \Xi^*_+) \\ \lambda + \lambda' \in \Xi \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lambda + \lambda' \in \Xi_- \ (\text{resp. } \Xi^*_+) ,$$

il s'ensuit que $\mathcal{H}_0$ (resp. $\mathcal{D}_0$, D_0) normalise $\mathcal{H}_-$ et $\mathcal{H}^*_+$ (resp. $\mathcal{D}_-$ et $\mathcal{D}^*_+$, D_- et D^*_+) .

$\mathcal{H}$ est alors somme directe des trois sous-algèbres $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}^*_+$. Muni du produit $\times$ défini par la formule (3.3.) , $\mathcal{H}$ est le produit amalgamé des sous-groupes $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}^*_+$; en outre les projections ρ_- , ρ_0 et ρ_+ associées à ce produit amalgamé sont polynomiales .

D est le produit amalgamé des sous-groupes D_- , D_0 et D^*_+ ; D_- et D^*_+ sont simplement connexes et D_0 normalise D_- et D^*_+ (on notera que D_- et D^*_+ jouent des rôles symétriques) . Nous avons $D_- = \exp \mathcal{H}_-$, $D_0 = (\exp \mathcal{H}_0)\, PA$ et

$D_+^* = \exp \mathfrak{h}_+^*$.

Tout élément g de G s'écrit alors sous la forme $g = d_- d_o d_+ k$ avec $d_- \in D_-$, $d_o \in D_o$, $d_+ \in D_+^*$ et $k \in K$. Comme $D \cap K$ est contenu dans P , les composantes d_- et d_+ sont uniquement définies par g . Si d est un élément D , nous noterons respectivement $\mathfrak{p}_-(d)$, $\mathfrak{p}_o(d)$ eet $\mathfrak{p}_+^*(d)$ les éléments de D_- , D_o et D_+^* tels que $d = \mathfrak{p}_-(d)\ \mathfrak{p}_o(d)\, \mathfrak{p}_+^*(d)$.

9.2. Théorème. - *Soient* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée apériodique et possédant un moment d'ordre* 1 . *Alors avec les notations de* (9.1.) *nous avons*

i) Pour tout g *de* G *, la composante* $\mathfrak{p}_-(X_n g)$ *de* $X_n g$ *sur* $D_-(=G_-)$ *converge ,* $\mathbb{P}_x$ - p.s. $\forall x \in G$ *, vers une v.a. indépendante de* g .

ii) Pour tout g *de* G *, la composante* $\mathfrak{p}_+(gX_n)$ *de* gX_n *sur* D_+^* *converge ,* $\mathbb{P}_x$ - p.s. $\forall x \in G$ *, vers une v.a. indépendante de* G .

La démonstration de ii) étant analogue à celle de i) , nous ne donnerons que la preuve détaillée de i) . Nous dirons ensuite quelques mots sur la preuve de ii) .

Nous commençons par introduire les éléments nécessaires à cette démonstration . On peut oublier (9.1.) et n'avoir en tête que les notations de (9.0.) .

9.3.- Fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$ invariantes à droite par $\mathfrak{h}_+$: Le groupe $G_- = D_- = \exp \mathfrak{h}_-$ est nilpotent simplement connexe ; G_- est donc isomorphe au groupe $(\mathfrak{h}_-, \times)$. $\mathfrak{h}_-$ apparaît comme un D-espace homogène à gauche D-homéomorphe à D/D_+ ; l'action de D sur $\mathfrak{h}_-$ étant définie par

$$d.u = \exp_{G_-}^{-1} \circ \mathfrak{p}_-(d \exp u) \quad (d \in D\ ,\ u \in \mathfrak{h}_-) .$$

Etendons cette définition à G en posant

$$g.u = \exp_{G_-}^{-1} \circ \mathfrak{p}_-(g \exp u) \quad (g \in G\ ,\ u \in \mathfrak{h}_-) .$$

Comme en général , E_+ n'est pas un sous-groupe de G , G n'opère pas ainsi sur $\mathfrak{h}_-$; c'est-à-dire que l'on a pas $(g_1 g_2).u = g_1.(g_2.u)$, $g_1, g_2 \in G$, $u \in \mathfrak{h}_-$. Cependant nous avons

$$(*) \quad (dg).u = d.(g.u) \quad (d \in D\ ,\ g \in G\ ,\ u \in \mathfrak{h}_-) .$$

Il suffit en effet de remarquer que puisque $D_+ E_+ \subset E_+$, on a

$$\mathfrak{p}_-(dg) = \mathfrak{p}_-(d\, \mathfrak{p}_-(g)) \quad (d \in D\ ,\ g \in G).$$

Considérons l'ensemble $\mathfrak{J}$ des fonctions polynomiales , à valeurs complexes , sur $\mathfrak{h}$ qui sont invariantes à droite par $\mathfrak{h}_+$ (i.e. $T \in \mathfrak{J}$ si $T \circ R_c = T$, $\forall c \in \mathfrak{h}_+$ (voir §3)) . Soit $T \in \mathfrak{J}$ et $u \in \mathfrak{h}$; écrivons $u = \rho_-(u) \times \rho_+(u)$. Nous avons

$$T(u) = T(\rho_-(u) \times \rho_+(u)) = T(\rho_-(u)) .$$

car T est invariant par $\mathfrak{h}_+$; il s'ensuit que l'on a $T = T_{\mathfrak{h}_-} \circ \rho_-$, où où $T_{\mathfrak{h}_-}$ désigne la restriction à $\mathfrak{h}_-$ de T . Par suite $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$ de la forme $T' \circ \rho_-$ où T' est une fonction polynomiale sur $\mathfrak{h}_-$.

Pour $T \in \mathfrak{J}$ et $g \in G$ définissons

$$T.g : u \in \mathfrak{h} \longrightarrow T(g.\rho_-(u)) .$$

De la relation $(*)$ il résulte que si $g = dk$ avec $d \in D$ et $k \in K$ nous avons

$$T.g = (T.d).k .$$

D'autre part comme $D = (\exp \mathfrak{h})\, PA$, écrivons $d = (\exp v)\, \chi$ avec $v \in \mathfrak{h}$ et $\chi \in PA$; nous avons pour tout u de $\mathfrak{h}$

$$d \exp u = \exp v(\chi(\exp u)\chi^{-1})\, \chi$$
$$= \exp v(\exp \operatorname{Ad} \chi (u))\, \chi$$

$\mathfrak{h}$ étant un idéal de $\mathfrak{D}$, $\operatorname{Ad} \chi (u) \in \mathfrak{h}$; d'après la formule de Campell-Hausdorff nous avons

$$d \exp u = \exp (v \times \operatorname{Ad} \chi (u))\, \chi$$
$$= \exp (\rho_-(v \times \operatorname{Ad} \chi (u)) \times \rho_+ (v \times \operatorname{Ad} \chi (u)))\, \chi$$
$$= (\exp \rho_-(v \times \operatorname{Ad} \chi (u)))\, (\exp \rho_+(v \times \operatorname{Ad} \chi (u))\, \chi .$$

Par suite

$$p_-(d \exp u) = \exp (\rho_-(v \times \operatorname{Ad} \chi (u)))$$

et

$$d.\rho_-(u) = \exp_{G_-}^{-1} \circ p_-(d \exp (\rho_- (u))) = \rho_-(v \times \operatorname{Ad} \chi (\rho_-(u))) .$$

Or

$$\operatorname{Ad} \chi (u) = \operatorname{Ad} \chi (\rho_-(u) \times \rho_+(u))$$
$$= \operatorname{Ad} \chi (\rho_-(u)) \times \operatorname{Ad} \chi (\rho_+(u))$$

car $\operatorname{Ad} \chi$ est un automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$.

Comme $\mathfrak{h}_-$ et $\mathfrak{h}_+$ sont stables par $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{a}$, il s'ensuit que

$$\operatorname{Ad} \chi (\rho_-(u)) \in \mathfrak{h}_- \quad \text{et} \quad \operatorname{Ad} \chi (\rho_+ (u)) \in \mathfrak{h}_+ .$$

Autrement dit nous avons

$$\rho_-(\operatorname{Ad} \chi (u)) = \operatorname{Ad} \chi \circ \rho_- (u)$$
$$\rho_+(\operatorname{Ad} \chi (u)) = \operatorname{Ad} \chi \circ \rho_+ (u) .$$

Finalement nous obtenons

$$d.\rho_-(u) = \rho_-(v \times \operatorname{Ad} \chi (\rho_-(u)))$$
$$= \rho_-(v \times \rho_-(\operatorname{Ad} \chi (u)))$$
$$= \rho_-(v \times \operatorname{Ad} \chi (u)) .$$

D'où l'on déduit

$$(**) \quad T.d = T \circ L_v \circ \operatorname{Ad} \chi \circ \rho_- = T \circ L_v \circ \operatorname{Ad} \chi \quad (T \in \mathfrak{J}) \quad \text{(voir §3)} .$$

On voit donc que $T.d$ est un élément de $\mathfrak{J}$; D opère donc à droite sur $\mathfrak{J}$; $\mathfrak{J}$ est un D-espace à droite .

On notera qu'en général $T.k$ n'est pas un polynôme pour $k \in K$. C'est seulement une fonction analytique f sur $\mathfrak{h}$ définie par

$$f : u \longmapsto T(\exp_{G_-}^{-1} \circ p_- (k \exp u))$$

et vérifiant $f(u_- \times u_+) = f(u_-)$ $(u_- \in \mathfrak{h}_-,\ u_+ \in \mathfrak{h}_+)$.

La raison en est que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathcal{D}$ mais n'est pas en général un idéal de $\mathfrak{g}$. Dans le cas où $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire quand $\mathfrak{g}$ est moyennable , on voit facilement que le groupe G opère sur $\mathfrak{J}$; $\mathfrak{J}$ est alors un G-espace à droite .

Pour tout entier naturel r , appelons $\mathfrak{J}_r$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{J}$ formé des éléments de degré inférieur ou égal à r . D'après la relation (✱✱) et le lemme (3.5.) , les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{J}_r$, $r \in \mathbb{N}$, de $\mathfrak{J}$ sont invariants par les opérations de D .

Choisissons une base adaptée (voir §3) $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}$ qui triangularise simultanément les éléments de $\mathrm{ad}(\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{A})|_{\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}}$ et $\mathrm{Ad}\ PA|_{\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}}$. Pour $\lambda \in \Xi$, désignons par ϕ_λ le poids de la représentation adjointe de D dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, dont λ est la différentielle en e (voir (2.9.)) . Si $x \in PA$ dans la base choisie de $\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Ad}\, x$ est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont $\{\phi_\lambda(x)\ ,\ \lambda \in \Xi_-\}$.

Considérons l'ensemble $\mathbb{N}^m$. Si $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^m$ nous posons

$$\|\ell\| = (\ell_1 + \ldots + \ell_{i_1} + 2(\ell_{i_1+1} + \ldots + \ell_{i_2}) + \ldots + p(\ell_{i_{p-1}+1} + \ldots + \ell_m)$$

(voir §3) et nous ordonnons $\mathbb{N}^m$ par la relation d'ordre total définie par

$$\ell < \ell' \iff \begin{cases} \|\ell\| < \|\ell'\| \\ \|\ell\| = \|\ell'\| \text{ avec le premier } i \text{ tel que } \ell_i \neq \ell'_i \\ \qquad \text{vérifie } \ell_i < \ell'_i \end{cases} \qquad (\ell\ ,\ \ell' \in \mathbb{N}^m)$$

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ le système de fonctions coordonnées associé à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$. Pour $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{N}^m$, nous notons x^ℓ la fonction monome $x_1^{\ell_1} \ldots x_m^{\ell_m}$; nous avons $\mathrm{dg}\ x^\ell = \|\ell\|$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$; nous choisissons pour base de $\mathfrak{J}_r$ la base ordonnée $\{1\ ,\ x^\ell \circ \rho_-\ ,\ \ell \in \mathbb{N}^m - \{0\}\ ,\ \|\ell\| \leq r\}$. Nous notons $\mathfrak{J}_r^*$ le sous-espace de $\mathfrak{J}_r$ engendré par $\{x^\ell \circ \rho_-\ ,\ \ell \in \mathbb{N}^m - \{0\}\ ,\ \|\ell\| \leq r\}$.

Soit $T_1 \in \mathfrak{J}$; nous avons pour $d = (\exp v)\, x \in D$ avec $v \in \mathfrak{h}$ et $x \in PA$,

$$\begin{aligned} T_1 . d &= T_1 \circ L_v \circ \mathrm{Ad}\, x \\ &= (T_1 + T_2) \circ \mathrm{Ad}\, x \text{ , où } T_2 \in \mathfrak{J} \text{ avec } \mathrm{dg}\ T_2 < \mathrm{dg}\ T_1 \end{aligned}$$

(lemme (3.5.)) . Par suite

$$T_1 . d = T_1 \circ \mathrm{Ad}\, x + T_2 \circ \mathrm{Ad}\, x$$

avec

$$\begin{aligned} \mathrm{dg}\ T_2 \circ \mathrm{Ad}\, x &= \mathrm{dg}\ T_2 \quad \text{(lemme (3.5.))} \\ &< \mathrm{dg}\ T_1 \end{aligned}$$

Ecrivons $T_1 = T'_1 \circ \rho_-$ où T'_1 est la restriction de T_1 à $\mathfrak{h}_-$; nous avons

$$T_1 \circ \mathrm{Ad}\, \chi = T'_1 \circ \rho_- \circ \mathrm{Ad}\, \chi$$
$$= T'_1 \circ \mathrm{Ad}\, \chi \circ \rho_- \text{ (car nous avons vu que } \rho_- \circ \mathrm{Ad}\chi = \mathrm{Ad}\chi \circ \rho_-) .$$

Il est alors clair que dans la base ordonnée choisie de $\mathfrak{J}_r$, l'action d'un élément d de D est représenté par une matrice $M(d)$ triangulaire supérieure ayant 1 puis des produits de la forme $\phi_{\lambda_1}(d) \dots \phi_{\lambda_s}(d)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \Xi_-$ (les poids λ_i ne sont pas nécessairement distincts) , pour éléments diagonaux . Plus précisément , notons ϕ_{λ_i} le poids qui est associé au vecteur propre e_i de la représentation adjointe de PA dans $\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}$; les ϕ_{λ_i} ne sont pas tous distincts et la famille $\{\phi_{\lambda_i}\ 1 \leq i \leq m\}$ n'est autre que l'ensemble des restrictions à PA des poids $\{\phi_\lambda,\ \lambda \in \Xi_-\}$. Alors pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{N}^m$ la fonction polynomiale $x^\ell \circ \rho_-$ de $\mathfrak{J}$ est pour l'action de D , un vecteur presque propre associé au poids $\phi_{\lambda_1}^{\ell_1} \dots \phi_{\lambda_m}^{\ell_m}$.

Nous allons à présent établir un lemme qui nous servira pour montrer le théorème..

9.4. Lemme. - *Soient* $(A_i)_{i \geq 0}$ *une suite de matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre* q *et* $\Pi_k = A_k \dots A_0$. *Si les éléments diagonaux* $(\delta_i^j)_{1 \leq j \leq q}$ *des* A_i *sont tels que* $\lim_k \sqrt[k]{|\delta_k^j \dots \delta_0^j|} = a_j$ *avec* $0 < a_j$, *pour tout* $j \in \{1, \dots, q\}$, *et si* $\overline{\lim_k} \|A_k\|^{\frac{1}{k}} \leq 1$, *alors* $\lim_k \|\Pi_k\|^{\frac{1}{k}}$ *existe et vaut* $a = \sup_{1 \leq j \leq q} a_j$.

Preuve. - Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension q des matrices A_i .

Si $q = 1$, le lemme est trivial ; supposons qu'il soit vrai pour des matrices d'ordre strictement inférieur à ℓ et considérons des matrices $(A_i)_{i \geq 0}$ d'ordre ℓ . Posons

$$A_i = \left[\begin{array}{c|c} d_i & w_i \\ \hline 0 & B_i \end{array}\right] \quad (i \geq 0) .$$

Nous avons

$$\Pi_k = \left[\begin{array}{c|c} \prod_{i=0}^{k} d_i & W_k \\ \hline 0 & B_k \dots B_0 \end{array}\right]$$

avec $W_k = \sum_{s=0}^{k} d_k \dots d_{s+1}\, w_s\, B_{s-1} \dots B_1$; d'où

$$\|W_k\| \leq \sum_{s=0}^{k} |d_k| \dots |d_{s+1}|\, \|w_s\|\, \|B_{s-1} \dots B_o\| .$$

D'après les hypothèses faites nous avons

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists s_0 \in \mathbb{N}^* , \ \forall s \geq s_0 \quad b - \varepsilon < \|B_s \ldots B_0\|^{1/s} < b + \varepsilon$$

$$a_1 - \varepsilon < |d_s \ldots d_0|^{1/s} < a_1 + \varepsilon$$

$$\|w_s\|^{1/s} < 1 + \varepsilon$$

où $b = \sup\limits_{2 \leq j \leq q} a_j$.

D'où pour $k > s_0$,

$$\|W_k\| \leq |d_k| \ldots |d_0| (\sum_{s=0}^{k} (|d_0| \ldots |d_s|^{-1} \|w_s\| \, \|B_{s-1} \ldots B_0\|))$$

$$\leq |d_k| \ldots |d_0| (\sum_{s=0}^{s_0} (\qquad) + \sum_{s_0+1}^{k} (\qquad))$$

$$\leq (a_1 + \varepsilon)^k \, (C'(\varepsilon) + \sum_{s=1}^{k} (a_1 - \varepsilon)^{-s} \, (b + \varepsilon)^{s-1} \, (1 + \varepsilon)^s)$$

où $C'(\varepsilon)$ est une constante ne dépendant que de ε .

$$\leq (a_1 + \varepsilon)^k \, [C'(\varepsilon) + \frac{1 + \varepsilon}{(a_1 - \varepsilon) - (b + \varepsilon)(1 + \varepsilon)} (1 - (\frac{(b + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{a_1 - \varepsilon})^k)]$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit , il vient

$$\overline{\lim_k} \|W_k\|^{1/k} \leq \begin{cases} (a_1 + \varepsilon) \dfrac{(b + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{a_1 - \varepsilon} & \text{si } \dfrac{(b + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{a_1 - \varepsilon} > 1 \\[2ex] a_1 + \varepsilon & \text{si } \dfrac{(b + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{a_1 - \varepsilon} < 1 \end{cases}$$

Par suite $\overline{\lim_k} \|W_k\|^{1/k} \leq \sup \{a_1 , b\} = a$ et donc $\lim\limits_k \|\Pi_k\|^{1/k} = a$. Le lemme est démontré .

9.5. Démonstration du i) du théorème (9.2.) . Appelons p l'application naturelle de G sur $_D\backslash^G$ et considérons une section mesurable s de p à valeurs dans K . Tout $g \in G$ s'écrit alors

$$g = d(g) \, (sop(g))$$

avec $d(g) = g(sop(g))^{-1} \in D$ et $sop(g) \in K$.

Ecrivons $X_n = X_o Y_1 \ldots Y_n$ où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes et de loi μ . Posons

$$d_i = d(Y_i) \ , \ k_i = sop(Y_i) \quad i \in \{1 , \ldots , n , \ldots \}$$

$$D_i = d(X_i) \ , \ K_i = sop \, (X_i) \quad i \in \{0 , \ldots , n , \ldots \} .$$

Nous avons

$$Y_i = d_i\, k_i \quad \text{avec} \quad d_i \in D \quad \text{et} \quad k_i \in K \qquad i \in \{1 , \ldots , n, , \ldots \}$$

$$X_i = D_i\, K_i \quad \text{avec} \quad D_i \in D \quad \text{et} \quad K_i \in K \qquad i \in \{0 , \ldots , n , \ldots \} .$$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathfrak{J}_r$. Nous avons

$$T.X_n(u) = (T.D_n)(K_n.\rho_-(u)) = M(D_n)(T)\ (K_n.\rho_-(u))\ (u \in \mathfrak{h}) .$$

$M(D_n)$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont 1 et des produits de la forme $\phi_{\lambda_1}(D_n) \ldots \phi_{\lambda_t}(D_n)$, où $\lambda_1 , \ldots , \lambda_t \in \Xi_-$.

Soit $\lambda \in \Xi$, nous avons (voir (2.4.) et (2.9.)) .

$$\operatorname{Log} |\phi_\lambda(D_n)| = \tau_\lambda(v_o , X_n) ,$$

où u_o est l'élément de $B(G)$ stable par $N(D)$ (lemme (2.3.)) et $v_o = (u_o , \zeta(e))$.

D'après le lemme (7.7.) , il s'ensuit que

$$\frac{1}{n} \log |\phi_\lambda(D_n)| = \frac{1}{n}\tau_\lambda(v_o , X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}_g\text{-p.s.}\forall g \in G} a_\lambda = \int_G \int_{G_o\backslash G} \int_B \tau_\lambda((u , x) , g)dx\ \nu(du)\mu(dg)$$

où ν désigne l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $B(G)$ et dx la mesure de Haar normalisée sur $G_o\backslash G$.

Nous avons :

$$a_\lambda = \int_B \int_G \rho_\lambda(u , g)\nu(du)\mu(dg) \qquad (\text{voir } (2.9.)) .$$

D'après la définition de la partition $\{\Xi_- , \Xi_+\}$ de Ξ associée à la mesure μ de $M^1(G)$ (voir (7.17.)) , dire que $\lambda \in \Xi_-$ c'est-à-dire que l'A-cocycle ρ_λ est μ-négatif strict ou encore (proposition (7.12.)) que $a_\lambda < 0$.

Autrement dit , les éléments diagonaux de $M(D_n)$ sont 1 et des éléments δ_n^i tels que $\lim_n |\delta_n^i|^{1/n}$ existe et est strictement inférieur à 1 , $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$.

D'autre part , pour $g \in G$, posons ,

$$\delta(g) = \sup_{k \in K} \sup_{x \in D \cap K} \log \|M(d(kg)x)\| = \sup_{k \in K} \sup_{x \in D \cap K} \log \|M(d(kgk^{-1})x)\|$$

Nous avons $\delta(gk) = \delta(g)\ (g \in G , k \in K)$ δ est indépendante du choix de la section mesurable s . Comme l'image de K par la représentation adjointe de G est compacte , $M(D \cap K)$ est un groupe compact de matrices et , pour chaque $g \in G$, $\{kgk^{-1} , k \in K\}$ est un compact de G . Il s'ensuit que δ est une fonction continue de G dans $\mathbb{R}_+$. [La continuité résultant du fait que l'on sait aussi que (voir démonstration du lemme (2.4.)) si (g_n) est une suite d'éléments de G convergeant vers $g = dk \in G$ avec $d \in D$ et $k \in K$, alors nous pouvons écrire $g_n = d_n k_n$ où $d_n \in D$, $k_n \in K$ sont respectivement des suites de D et K

convergeant vers d et k] .

δ définit alors une fonction continue sous additive de G ; il est en effet facile de vérifier que l'on a

$$\delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2) \qquad (g_1 , g_2 \in G) .$$

Nous avons

$$D_n = D_o d(K_o d_1) \dots d(K_{n-1} d_n) x_n \qquad \text{avec } x_n \in D \cap K$$

par suite

$$M(D_n) = M(x_n)\, M(d(K_{n-1} d_n)) \dots M(d(K_o d_1))\, M(D_o)$$

(comme D opère à droite $\mathcal{J}_r$, nous avons $M(d_1 d_2) = M(d_2)\, M(d_1)$ $(d_1, d_2 \in D))$. $M(D_n)$ est donc le produit de $(n+2)$ matrices triangulaires supérieures . Pour $r \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\operatorname{Log} \| M(d(K_r d_{r+1})) \| \leq \delta(Y_{r+1}) .$$

Or μ ayant un moment d'ordre 1 , nous avons $\int_G \delta(g)\mu(dg) < +\infty$ ((6.3.)) ; c'est-à-dire

$$\sum_{r \geq 1} \mu(\{g \in G : \delta(g) \geq r\alpha\}) < +\infty \qquad \forall \alpha > 0$$

il s'ensuit que

$$\sum_{r \geq 1} \mathbb{P}_g [\{\operatorname{Log} \| M(d(K_r d_{r+1})) \| \geq r\alpha\}] < +\infty \quad \forall \alpha > 0 , \forall g \in G ,$$

qui implique

$$\mathbb{P}_g [\lim_r \sup \| M(K_r\, d_{r+1}) \| \geq e^{r\alpha}] = 0 \qquad \forall \alpha > 0 , \quad \forall g \in G ,$$

C'est-à-dire $\lim_r \sup \| M(K_r\, d_{r+1}) \|^{1/r} \leq 1$ $\mathbb{P}_g$ - p.s. $\forall\, g \in G$

Posons alors , pour $r \geq 0$,

$$M(d(K_r d_{r+1})) = \left[\frac{1}{o} \,\middle|\, \frac{B_r}{Q_r} \right] ; \quad M(x_r) = \left[\frac{1}{o} \,\middle|\, \frac{B(x_r)}{Q(x_r)} \right] \quad \text{et} \quad M(D_r) = \left[\frac{1}{o} \,\middle|\, \frac{Z_r}{\pi_r} \right]$$

La suite des matrices (Q_r) , $r \geq o$, vérifie , $\mathbb{P}_g$ - p.s. $\forall g \in G$, les hypothèses du lemme (9.4.) ; il s'ensuit que , $\lim_n \sup \| Q_n \dots Q_o \|^{1/n}$ existe et est strictement inférieure à 1 , $\mathbb{P}_g$ - p.s. $\forall g \in G$.

$M\,(D \cap K)$ étant compact , il existe un réel positif C tel que

$$\sup_{r \in \mathbb{N}} \| Q(x_r) \| \leq C \quad \text{et} \quad \sup_{r \in \mathbb{N}} \| B(x_r) \| \leq C$$

Il s'ensuit que : d'une part $\lim_n \sup \| \pi_n \|^{1/n}$ existe et est strictement inférieure à 1 , $\mathbb{P}_g$ - p.s. $\forall g \in G$; d'autre part ,

$$Z_n = Z_o + B_o \pi_o + B_1 Q_o \pi_o + \dots + B_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_o \pi_o + B(x_n) Q_{n-1} \dots Q_o \pi_o$$

converge , $\mathbb{P}_g$ - p.s. $\forall g \in G$, vers une matrice Z_∞ .

En conclusion , si $T = \sum_{\{\ell \in \mathbb{N}^m \,:\, \|\ell\| \leq r\}} t_\ell \, x^\ell \circ \rho_-$, nous avons montré que

$$T.D_n = \sum_{\{\ell\in\mathbb{N}^m \,:\, \|\ell\| \leq r\}} t_\ell^{(n)} \, x^\ell \circ \rho_- \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{\lim_n} \, | t_\ell^{(n)} |^{1/n} < 1 & \text{si} \quad \ell \neq 0 \\ t_0^{(n)} \longrightarrow [1 \, Z_\infty] \, [t_\ell] = t_0^\infty \end{cases}$$

Si nous remarquons alors que pour tout $u \in \mathfrak{h}$,

$$K \, . \, \rho_- (u) = \{\exp_{G_-}^{-1} \circ p_- (k \exp u \, k^{-1}) \, , \, k \in K\}$$

est un compact de $\mathfrak{h}_-$, on en déduit que

$$T.X_n(u) = T.D_n(k_n.u) \longrightarrow t_0^\infty \qquad \mathbb{P}_g\text{-p.s.} \quad \forall g \in G$$

ce qui montre que pour tout $T \in \mathfrak{J}$, la suite de fonctions analytiques $T.X_n$, converge $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, vers une fonction constante (i.e. $\lim_n T.X_n(u)$ est indépendant de $u \in \mathfrak{h}$) .

Le résultat cherché s'obtient alors en prenant pour T les coordonnées $(x_i \circ \rho_-)_{1 \leq i \leq m}$.

9.6. <u>Preuve du ii) du théorème (9.2)</u>. - Nous reprenons les notations de (9.0) et (9.1) . La démonstration de ii) étant analogue à celle de i) , nous n'entrons pas dans les détails .

Le groupe $D_+^* = \exp \mathfrak{h}_+^*$ est nilpotent simplement connexe ; D_+^* est donc isomorphe au groupe $(\mathfrak{h}_+^* , \times)$. $\mathfrak{h}_+^*$ apparaît alors comme un D-espace homogène à droite D-homéomorphe à ${}_{D_-D_0}\backslash^D$; l'action de D sur $\mathfrak{h}_+^*$ étant définie par

$$u.d = \exp_{D_+^*}^{-1} \circ p_+^* \, ((\exp u) \, d) \qquad (u \in \mathfrak{h}_+^* \, , \, d \in D)$$

Etendons cette définition à G en posant

$$u.g = \exp_{D_+^*}^{-1} \circ p_+^* \, ((\exp u) \, g) \qquad (u \in \mathfrak{h}_+^* \, , \, g \in G)$$

On vérifie que l'on a

$$(*) \quad u.(dg) = (u.d).g \qquad (d \in D, \, g \in G) \, .$$

Considérons l'ensemble $\mathfrak{J}'$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$, à valeurs complexes , qui sont invariantes à gauche par $\mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{h}_0$ (i.e. $T \in \mathfrak{J}'$ si $T \circ L_c = T$, $\forall c \in \mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{h}_0$ (voir § 3). $\mathfrak{J}'$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$ de la forme $T' \circ \rho_+^*$, où T' est une fonction polynomiale sur $\mathfrak{h}_+^*$.

Pour $T \in \mathfrak{J}'$ et $g \in G$, on définit

$$g.T : u \in \mathfrak{h} \longrightarrow T(\rho_+^*(u).g)$$

De (*) il résulte que l'on a $(dg).T = d.(g.T) \quad (d \in D \, , \, g \in G)$.

En outre , si $d = (\exp v)\, x \in D$ avec $v \in \mathfrak{h}$ et $x \in PA$, on vérifie que

$$(**) \quad d.T = T \circ Adx^{-1} \circ R_v$$

Pour tout entier naturel r , appelons $\mathfrak{J}'_r$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{J}'$ formé des éléments de degré inférieur ou égal à r ; $\mathfrak{J}'$ et les sous-espaces $\mathfrak{J}'_r$, $r \in \mathbb{N}$, sont alors des D-espaces à gauche .

Choisissons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $(\mathfrak{h}^*_+)^{\mathbb{C}}$ qui triangularise inférieurement tous les éléments de $ad(\mathfrak{S} \oplus \mathfrak{a})\big|_{(\mathfrak{h}^*_+)^{\mathbb{C}}}$ et partant ceux de $Ad\, PA\big|_{(\mathfrak{h}^*_+)^{\mathbb{C}}}$. Si $x \in PA$, dans cette base , Adx est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont $\{\phi_\lambda(x)\ ,\ \lambda \in \Xi^*_+\}$.

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base de $(\mathfrak{h}^*_+)^{\mathbb{C}}$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ nous choisissons pour base de $\mathfrak{J}'_r$ la base ordonnée $\{1\ ,\ x^\ell \circ \rho^*_+\ ,\ \ell \in \mathbb{N}^m - \{o\}\ ,\ \|\ell\| \leq r\}$ (voir (9.3.)) . Il est clair que dans cette base l'action d'un élément d de D est représenté par une matrice $M'(d)$ triangulaire supérieure ayant 1 puis des produits $\phi_{\lambda_1}(d^{-1}) \ldots \phi_{\lambda_s}(d^{-1})$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Xi^*_+$ pour éléments diagonaux . [$\phi_{\lambda_1}(d^{-1}) \ldots \phi_{\lambda_s}(d^{-1})$ et non $\phi_{\lambda_1}(d) \ldots \phi_{\lambda_s}(d)$ car dans $(**)$ c'est Adx^{-1} qui intervient et non Adx] .

Si on écrit alors $X_n = D_n K_n$ avec $D_n \in D$ et $K_n \in K$ (voir (9.5.)) $M'(D_n)$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont 1 puis des produits de la forme $\phi_{\lambda_1}(D_n^{-1}) \ldots \phi_{\lambda_s}(D_n^{-1})$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Xi^*_+$. Or si $\lambda \in \Xi^*_+$, on a

$$\log|\phi_\lambda(D_n^{-1})| = -\log|\phi_\lambda(D_n)| = -\tau_\lambda(v_o, X_n) \longrightarrow -a_\lambda < o .$$

Par suite , les éléments diagonaux de $M'(D_n)$, autres que 1 , convergent exponentiellement vers zéro . La fin de la preuve de ii) est alors claire .

D'après le théorème (9.2.) nous savons que pour tout $g \in G$, la composante $\not{p}_-(X_n g)$, de $X_n g$ sur G_- converge $\mathbb{P}_x$- p.s. $\forall x \in G$. Il s'ensuit que pour tout $h \in G$ et tout $g \in G$ la composante , $\not{p}_-(hX_n g)$, de $hX_n g$ sur G_- converge $\mathbb{P}_x$- p.s. $\forall x \in G$. Nous avons alors :

9.7. <u>Théorème.</u> - *Soient* (G, μ) *comme dans le théorème* (9.2.) . *Considérons les décompositions* $G = G^\mu_- E^\mu_+$ *et* $G = G^\mu_- G^\mu_+$ *modulo* m_G , *associées à* μ (voir (7.17.)) . *Pour tout* $g \in G$, *nous savons* (théorème (9.2.)) *que la composante de* gX_n *sur* G^μ_- *dans la décomposition* $G = G^\mu_- E^\mu_+$ *converge ,* $\mathbb{P}_x$ - p.s. $\forall x \in G$, *vers une variable aléatoire* $Z(g\ ,\ .)$ *à valeurs dans* G^μ_- . *Si on identifie* G^μ_- *à un ouvert de* G/G^μ_+ , *alors nous avons*

$$Z(g\ ,\ .) = g.Z(e\ ,\ .) \qquad \mathbb{P}_x \text{ - p.s. } \forall x \in G .$$

Pour prouver le théorème (9.7.), nous commençons par établir la proposition :

9.8. Proposition. - *Soit* (G, μ) *comme dans le théorème* (9.2.). *Soient* $G = G_-^{\mu} E_+^{\mu}$ *une décomposition de* G *associée à* μ (voir (7.17.)) *et* $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ *la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G. *Ecrivons* $X_n = X_n^- X_n^+$ *avec* $X_n^- \in G_-^{\mu}$, $X_n^+ \in E_+^{\mu}$. *Alors il existe un sous-ensemble mesurable* Ω' *de* Ω, *de* $\mathbb{P}_x$*-mesure* 1 *pour tout élément* x *de* G, *sur lequel* $p_-(u X_n^+)$, $u \in \tilde{N}$, *converge uniformément sur tout compact de* $\tilde{N}$ *vers l'élément neutre* e *de* G.

Nous reprenons les notations de (9.5.) et nous désignons par A_n la composante de $D_n = d(X_n)$ sur A dans la décomposition $D = RNA$ (voir lemme (1.5.)).
Posons

$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \frac{1}{n} \tau_\lambda(v_o, X_n) \longrightarrow a_\lambda \quad , \quad \forall \lambda \in \Xi_-\}$;

Ω_1 est de $\mathbb{P}_x$-mesure 1, pour tout x de G, et nous avons

9.9. Lemme. - *Pour tout* ω *de* Ω_1, $A_n^{-1}(\omega)\, u\, A_n(\omega)$, $u \in \tilde{N}$, *converge uniformément sur tout compact de* $\tilde{N}$ *vers* e.

Preuve du lemme (9.9.). - Ecrivons $u = \exp(\sum_{\lambda \in \Sigma_1} u_\lambda)$ avec $u_\lambda \in \mathcal{I}_{(-\lambda)}$ (voir (1.2.)).

Nous avons :

$$\begin{aligned} A_n^{-1}\, u\, A_n &= \exp(\sum_{\lambda \in \Sigma_1} \mathrm{Ad}\, A_n^{-1}((u_\lambda)) \\ &= \exp(\sum_{\lambda \in \Sigma_1} |\phi_\lambda\ (A_n^{-1})|^{-1}\, u_\lambda) \\ &= \exp(\sum_{\lambda \in \Sigma_1} \phi_\lambda\ (A_n)\, u_\lambda) \end{aligned}$$

Or sur Ω_1, $\frac{1}{n} \log |\phi_\lambda\ (A_n)| = \frac{1}{n} \tau_\lambda\ (v_o, X_n)$ converge vers $a_\lambda < o$, car $\lambda \in \Sigma_1 \subset \Xi_-$. Le lemme (9.9.) est donc prouvé.

9.10. Preuve de la proposition (9.8.). - Reprenons les notations de (9.0.) et (9.1.).

Nous avons

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{h}_+ \quad \text{avec} \quad \mathfrak{h}_- = \mathcal{M}_- \oplus \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_+ = \mathcal{M}_+ \quad .$$

Nous savons que $\mathcal{M}_+$ se décompose en somme directe de deux sous-algèbres $\mathcal{M}_o$ et $\mathcal{M}_+^*$ telles que D_+ soit le produit amalgamé des sous-groupes $D_o = (\exp \mathcal{M}_o)\, PA$ et $D_+^* = \exp \mathcal{M}_+^*$; en outre D_o normalise D_- et D_+^*. Si

d est un élément de D , nous notons respectivement $\mathfrak{p}_-(d)$, $\mathfrak{p}_o(d)$ et $\mathfrak{p}^*_+(d)$ les éléments de D_- , D_o et D^*_+ tels que $d = \mathfrak{p}_-(d)\ \mathfrak{p}_o(d)\ \mathfrak{p}^*_+(d)$.

Avec les notations de (9.5.) , posons $d^o(g) = \mathfrak{p}_o(d(g))$; nous avons

$$\mathfrak{p}_o(D_n) = d^o(X_n) = d^o(X_n^+) = d^o(D_o)\ d^o(\mathfrak{p}^*_+(D_o)K_o d_1)\ \ldots\ d^o(\mathfrak{p}^*_+(D_{n-1})K_{n-1}d_n)$$
$$(\text{mod. } D \cap K)$$

Soit C un compact de $\tilde{N}$. Pour tout élément u de C , posons

$v_p(u) = (A_{p-1}^{-1}\ u\ A_{p-1}\ d^o\ (\mathfrak{p}^*_+(D_{p-1})\ K_{p-1}\ d_p)\ (A_p^{-1}\ u^{-1}\ A_p)$

et

$v_o(u) = u\ d^o(D_o)\ (A_o^{-1}\ u^{-1}\ A_o)$

Nous avons alors $v_p \in D_+$, $o \leq p \leq n$ et

$$u\ \mathfrak{p}_o\ (D_n) = v_o\ \ldots\ v_n\ (A_n^{-1}\ u\ A_n)\quad \text{mod. } (D \cap K) .$$

[En effet : la deuxième assertion est évidente ; quant à la première , si nous écrivons

$d^o(\mathfrak{p}^*_+(D_{p-1})K_{p-1}d_p) = r_p a_p$ avec $r_p \in (\exp \mathcal{M}_o)P$ et $a_p \in A$

Nous avons

$v_p = ([A_{p-1}^{-1}\ u\ A_{p-1}]\ r_p\ [A_{p-1}^{-1}\ u^{-1}\ A_{p-1}])\ a_p$ (car $A_p = A_{p-1}\ a_p$) ; Comme $[\tilde{\mathcal{N}}, \mathcal{M}_+] \subset \mathcal{M}_+$ et $[\mathcal{G}, \mathfrak{s}] = (o)$, on en déduit que $v_p \in D_+$]

L'action de $V_n = v_o \ldots v_n \in D_+$ sur $\mathfrak{J}_r$ est représentée par la matrice $M(V_n)$ de la forme $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_1(V_n) \end{array}\right]$. En effet si $T \in \mathfrak{J}^*$ et $c \in \mathfrak{h}$ nous avons

$$T \circ L_c = T' + T(c) \quad \text{où } T' \in \mathfrak{J}^* \ ;$$

par suite si $c \in \mathfrak{h}_+$, nous avons $T(c) = T(o) = 0$; autrement dit $T \circ L_c \in \mathfrak{J}^*$.

Pour tous éléments d et h respectivement de D et $\exp \mathfrak{h}$, les matrices $M(d)$ et $M(dh)$ ont les mêmes éléments diagonaux . Il s'ensuit que , pour tout $p \in \{o, \ldots , n\}$, les éléments diagonaux de $M(v_p)$ sont ceux de $M(d(\mathfrak{p}^*(D_{p-1})\ K_{p-1}\ d_p))$.

Par suite , la diagonale de la matrice $M(V_n)$ est le produit par la diagonale d'un élément de $M(D \cap K)$ de la diagonale de la matrice $M(D_n)$. $M_1(V_n)$ est donc une matrice triangulaire supérieure dont les racines enièmes des modules des éléments diagonaux sont indépendants de u et convergent sur Ω_1 vers des éléments strictement inférieure à 1 (voir (9.5.)) .

Admettons un instant que nous ayons montré qu'il existe un sous ensemble Ω_2 de Ω_1 , de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout élément x de G , sur lequel on ait $\overline{\lim_p}\ (\sup_{u \in C}\ (\| M(v_p(u)) \|)\ )^{1/p} \leq 1$, pour tout compact C de $\tilde{N}$.

La preuve du lemme (9.4.) nous montre alors que sur Ω_2 $\overline{\lim_n}\ (\sup_{u \in C}\ (\| M_1(V_n(u)) \|)\ )^{1/n}$ existe et est strictement inférieure à 1 , pour tout compact C de $\tilde{N}$.

Soit $T \in \mathfrak{J}_r$, nous avons pour tout $v \in \mathfrak{h}$,

$$T.uX_n^+(v) = T.u\,\mathfrak{p}_o(D_n)\mathfrak{p}_+^*(D_n)K_n(v)\ .$$

Or $u\,\mathfrak{p}_o(D_n) = V_n(u)\,(A_n^{-1}\,u\,A_n)$, mod $D \cap K$

Comme $D \cap K$ est contenu dans P et comme P commute avec S , il s'ensuit qu'il existe une suite x_n d'éléments de $D \cap K$ telle que

$$u\,\mathfrak{p}_o(D_n) = V_n\,x_n\,(A_n^{-1}\,u\,A_n)\ .$$

D'où

$$T.u\,X_n^+(v) = T.V_n\,x_n\,(A_n^{-1}\,u\,A_n)\,\mathfrak{p}_+^*\,(D_n)\,K_n\,(v)$$
$$= M\,(x_n)\,M\,(V_n)\,T\,((A_n^{-1}\,u\,A_n)\,\mathfrak{p}_+^*\,(D_n)\,K_n\,.\,\rho_-(v))$$

Posons alors

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega_1 : \lim_n \mathfrak{p}_+^*\,(D_n)\ \text{existe}\} \cap \Omega_2\ .$$

Ω' est de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 , pour tout élément x de G . Soit $\omega \in \Omega'$ et C un compact quelconque de $\tilde{N}$. Comme $K.\rho_-(v)$ est compact , comme $\mathfrak{p}_+^*\,(D_n(\omega))$ converge et comme $A_u^{-1}(\omega)\,u\,A_n\,(\omega)$ converge vers e uniformément sur C (lemme (9.9.)) ,

$$(A_n^{-1}(\omega)\,u\,A_n(\omega))\,\mathfrak{p}_+^*\,(D_n(\omega))K_n\,(\omega)\,.\,\rho_-(v)\ ,$$

reste dans un compact de $\mathfrak{h}_-$ quand u décrit C et n décrit $\mathbb{N}$. Il s'ensuit donc que pour tout $v \in \mathfrak{h}$ et tout $\omega \in \Omega'$ $T.u\,X_n^+(\omega)\,(v)$ converge uniformément sur C vers $T(o)$.

En prenant pour T les coordonnées $(x_i \circ \rho_-)$, $1 \le i \le m$, on en déduit que pour tout $\omega \in \Omega'$, la composante sur G_- de $uX_n^+(\omega)$ converge uniformément sur C sur e .

Pour terminer la preuve de la proposition (9.8.) on est donc amené à prouver qu'il existe un sous-ensemble Ω_2 de Ω_1 , de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout élément x de G , sur lequel on ait

$$\overline{\lim_p}\ (\sup_{u \in C}\ (\|M(v_p(u))\|\ )^{1/p} \le 1\ ,$$

pour tout compact C de $\tilde{N}$.

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à la longueur p de la série centrale descendante de l'algèbre de Lie nilopotente $\mathfrak{h}$. Si d est un élément de D , on note $M(d)$ (resp. $M'(d)$) l'action de d sur l'espace vectoriel $\mathfrak{J}_r$ (resp $\mathfrak{J}'_r$) des polynomes , de degré inférieur ou égal à r , invariants à droite par $\mathfrak{h}_+$ (resp. invariants à gauche par $\mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{h}_o$) .

9.11. <u>Lemme</u>. - *Il existe des réels positifs* α *et* β *tels que pour tout* $d \in D$,

$$\|M\,(\mathfrak{p}_o(d))\| < \beta\ \ (\sup\,\{1\ ,\ \|M(d)\|\ ,\ \|M'(d)\|\})^{\alpha}$$

Preuve du lemme (9.11.). - Si r est un entier positif supérieur ou égal à longueur p de la série centrale de $\mathfrak{h}$, nous avons

$$[\mathfrak{p}_-(d)]^{-1} = \exp\left(- \sum_{i=1}^{m} [M(d)\,(x_i \circ \rho_-)](o).e_i\right),$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ désigne la base de $\mathfrak{h}_-^{\mathbb{C}}$ considérée en (9.3.) ; et de même

$$[\mathfrak{p}_+^*(d)]^{-1} = \exp\left(- \sum_{i=1}^{m} [M'(d)\,(x_i \circ \rho_-)](o).e_i\right),$$

où

$(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ désigne la base de $(\mathfrak{h}_+^*)^{\mathbb{C}}$ considérée en (9.6.).

Nous avons $D_- = \exp \mathfrak{h}_-$ et $D_+^* = \exp \mathfrak{h}_+^*$; vue la façon dont $\exp \mathfrak{h}$ agit sur $\mathfrak{I}_r$ (voir formule (**) de (9.3.)), il est alors clair qu'il existe deux constantes positives α' et β' telles que

$$\|M(\mathfrak{p}_-(d))^{-1}\| < \beta' \,(\sup\,\{1\,,\,\|M(d)\|\})^{\alpha'}$$
$$\|M(\mathfrak{p}_+^*(d))^{-1}\| < \beta' \,(\sup\,\{1\,,\,\|M\,(d)\|\})^{\alpha'}$$

Le lemme (9.11.) résulte alors de l'inégalité,

$$\|M(\mathfrak{p}_o(d))\| < \|M[(\mathfrak{p}_-(d))^{-1}]\|\;\|M(d)\|\;\|M[(\mathfrak{p}_+^*(d))^{-1}]\| .$$

Posons

$$\delta_1(g) = \sup_{k \in K}\ \sup_{x \in D \cap K} (\|M\,(d(kg)x)\|)$$

et

$$\delta_2(g) = \sup_{k \in K}\ \sup_{x \in D \cap K} (\|M'\,(d(kg)x)\|)$$

δ_1 et δ_2 sont alors deux fonctions sous-multiplicatives continues positives sur G (i.e. $\delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1)\,\delta(g_2)$, pour g_1, $g_2 \in G$).

D'autre part, posons pour $y \in PA$

$\sigma(y) = \inf\,\{\|M(hy)\| \;:\; h \in PA \cap \exp \mathfrak{h}\}$;

puis pour $d = (\exp m)\, y \in D$ avec $m \in \mathfrak{h}$ et $y \in PA$,

$$\sigma(d) = \sigma(y)$$

Comme $\exp \mathfrak{h}$ est distingué dans D, on définit ainsi une fonction multiplicative continue positive sur D telle que

$$\sigma(hd) = \sigma(d) \qquad (d \in D\,,\ h \in \exp \mathfrak{h}) .$$

En posant alors

$$\delta_3(g) = \sup_{k \in K}\ \sup_{x \in D \cap K} \sigma(d(kg)x) ,$$

on obtient une fonction sous-multiplicative continue positive de G.

μ possède un moment d'ordre 1. Il s'ensuit que l'on a, $\mathbb{P}_x$ - p.s. $\forall x \in G$,

$$\overline{\lim_p}\ \delta_i\,(Y_p)^{1/p} \leq 1 \qquad i \in \{1\,,\,2\,,\,3\} ,$$

où les Y_i , $i \geqslant 1$, sont des v.a. indépendantes de loi μ .

Posons

$\Omega_2 = \{\omega \in \Omega_1 : \overline{\lim_p}\, \delta_i\, (Y_p(\omega))^{1/p} \leq 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$, et $\overline{\lim_p}\ \mathscr{P}^*_+\, (D_p(\omega))$ existe $\}$

Ω_2 est de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout élément x de G . Sur Ω_2 nous avons

i) $\overline{\lim_p}\, \| M\, (d(K_{p-1} d_p))\, \| < \overline{\lim_p}\, \delta_1(Y_p)^{1/p} \leq 1$

ii) $\overline{\lim_p}\, \| M'(d(K_{p-1} d_p))\, \| < \overline{\lim_p}\, \delta_2(Y_p)^{1/p} \leq 1$

iii) $\overline{\lim_p}\, \sigma(d(K_{p-1} d_p))^{1/p} < \overline{\lim_p}\, \delta_3(Y_p)^{1/p} \leq 1$

De i) , ii) et du lemme (9.11.) , il résulte que sur Ω_2 on a

$$\overline{\lim_p}\ \| M\, (d^o\, (\mathscr{P}^*_+\, (D_{p-1})\, K_{p-1} d_p))\| \leq 1$$

D'autre part , de i) et iii) il résulte que sur Ω_2 ,
$d(K_{p-1}\, d_p)$ s'écrit sous la forme $h_p y_p$ où h_p et y_p sont respectivement des suites d'éléments de $\exp \mathfrak{h}$ et $P\, A$ telles que

$$\overline{\lim_p}\, \| M(h_p\, y_p)\|^{1/p} \leq 1 \quad \text{et} \quad \overline{\lim_p}\, \| M(y_p)\|^{1/p} \leq 1$$

Mais comme $M(y_p^{-1}) = (M(y_p))^{-1}$ on a aussi

$$\overline{\lim_p}\, \| M\, (y_p^{-1})\| \leq 1$$

On en déduit que sur Ω_2 , $d^o(\mathscr{P}^*_+(D_{p-1})\, K_{p-1} d_p)$ s'écrit $(\exp m_p)\, y_p$, où m_p et y_p sont respectivement des suites d'éléments de $\mathcal{M}_o$ et $P\, A$ telles que $\overline{\lim_p}\, \| M(\exp m_p)\|^{1/p} \leq 1$ et $\overline{\lim_p}\, \| M(y_p)\|^{1/p} \leq 1$. Nous avons alors

$$v_p(u) = (\exp m'_p(u)\ y_p) ,$$

où $m'_p(u) = [\, Ad((A_{p-1}^{-1}\ u\ A_{p-1})]\ (m_p)$.

Comme sur Ω_1 , $A_{p-1}^{-1}\, u\, A_{p-1}$ converge uniformément sur C vers e (lemme (9.9.)) , il est alors clair , vue la façon dont $\exp \mathfrak{h}$ agit sur $\mathfrak{J}_r$, (voir formule (**) de (9.3.)) que l'on a sur Ω_2 ,

$$\overline{\lim_p}\, (\sup_{u \in C}\ \| M\, (m'_p(u))\|)^{1/p} \leq 1$$

et par suite

$$\overline{\lim_p}\, (\sup_{u \in C}\ \| M\, (v_p\, (u))\|)^{1/p} \leq 1$$

La preuve de la proposition (9.8.) est achevée .

9.12. Lemme. - *Pour tout* $g \in G$, *nous avons*

$$gZ(e\ ,\ .) \in G_- G_+\ ,\ \mathbb{P}_x\text{-p.s.}\ \ \forall_x \in G\ ,$$

Preuve. - μ étant étalée, pour n assez grand nous avons

$$(*) \quad \mu^n = f_n \cdot m_G + \nu_n \quad \text{avec} \quad \|\nu_n\| \leqslant \rho^n \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

où $f_n \in L^1(m_G)$ et ν_n est une mesure étrangère par rapport à m_G.

Pour tout entier p il est facile de voir que l'on a

$$\mathbb{P}_x[gZ(e\,,\,.) \notin G_-G_+] = \iint 1_{g^{-1}(G_-G_+)^c}(Z(X_p(\omega)\,,\,\omega'))d\,\mathbb{P}_x(\omega)\,d\,\mathbb{P}e(\omega')\,.$$

Soit

$$B = \{(\omega\,,\,\omega') \in \Omega \times \Omega \;:\; X_p(\omega)\,Z(e\,,\,\omega') \in G_-G_+\}\,;$$

nous avons, pour p assez grand,

$$\int 1_{B^c}(\omega,\omega')\,d\,\mathbb{P}_x(\omega) = \varepsilon_x * \mu^p((G_-G_+)^c(Z(e\,,\,\omega'))^{-1})$$

$$= \varepsilon_x * \nu_p((G_-G_+)^c(Z(e\,,\,\omega'))^{-1})$$

$$\leqslant \rho^p\,;$$

d'où

$$\mathbb{P}_x[gZ(e\,,\,.) \notin G_-G_+] \leqslant \rho^p + \iint 1_B(\omega,\omega')\,1_{g^{-1}(G_-G_+)^c}(Z(X_p(\omega)\,,\,\omega'))d\,\mathbb{P}_x(\omega)d\,\mathbb{P}_e(\omega')$$

Soit Ω' le sous-ensemble de Ω intervenant dans la proposition (9.8.). D'après cette proposition, il est clair que pour tout $(\omega\,,\,\omega') \in B \cap (\Omega \times \Omega')$, $\lim_n \not{p}_-(X_p(\omega)Z(e\,,\,\omega')X_n^+(\omega'))$ converge vers la composante sur G_- de $X_p(\omega)\,Z(e\,,\,\omega')$ dans la décomposition G_-G_+. D'autre part pour tout $\omega \in \Omega$, $\lim_n \not{p}_-(X_p(\omega)X_n(.))$ existe et vaut $Z(X_p(\omega)\,,\,.)$ $\mathbb{P}_x$-p.s.. Nous pouvons donc supposer, quitte à remplacer B par un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{P}_x \otimes \mathbb{P}_e$-mesure égale, que pour tout $(\omega\,,\,\omega') \in B$

i) $\lim_n \not{p}_-(X_p(\omega)\,X_n(\omega'))$ existe et vaut $Z(X_p(\omega)\,,\,\omega')$

ii) $\lim_n \not{p}_-(X_p(\omega)Z(e\,,\,\omega')X_n^+(\omega'))$ existe et est égale à la composante sur G_- de $X_p(\omega)Z(e,\omega')$ dans la décomposition G_-G_+. Mais ces limites sont alors nécessairement égales et on en déduit que l'on a :

$$\iint 1_B(\omega\,,\,\omega')1_{g^{-1}(G_-G_+)^c}(Z(X_p(\omega)\,,\,\omega'))d\,\mathbb{P}_x(\omega)\,d\,\mathbb{P}_e(\omega')$$

$$= \iint 1_B(\omega\,,\,\omega')1_{(g^{-1}(G_-G_+)^c \cap G_-)G_+}(X_p(\omega)Z(e\,,\,\omega'))d\,\mathbb{P}_x(\omega)d\,\mathbb{P}_e(\omega')$$

$$\leqslant \varepsilon_x * \mu^p * \lambda_e\;[(g^{-1}(G_-G_+)^c \cap G_-)G_+]\,,$$

où λ_e désigne la loi de la v.a. $Z(e\,,\,.)$ par rapport à la probabilité $\mathbb{P}_e$

$$\leqslant \varepsilon_x * \mu^p * \lambda_e\,[G_-G_+ \cap g^{-1}(G_-G_+)^c]$$

$$\leqslant \varepsilon_x * \nu_p * \lambda_e\,[G_-G_+ \cap g^{-1}(G_-G_+)^c]$$

$$\leqslant \rho^p$$

D'où $\mathbb{P}_x[gZ(e\,,\,.) \notin G_-G_+] \leq 2\,\rho^p$, pour tout p assez grand ; autrement dit nous avons $\mathbb{P}_x[gZ(e\,,\,.) \notin G_-G_+] = 0$ et le lemme (9.12.) est prouvé .

9.13. Lemme.- *Pour tout* $g \in G$,

$$G(g) = \{y \in G : g\,\mathfrak{p}_-(y) \notin G_-G_+\}$$

est de mesure de Haar nulle .

Preuve. - Comme pour la démonstration de la proposition (5.4.) , on se ramène à prouver le lemme dans le cas d'un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini . Dans ce cas la décomposition $G = G_-G_+$ n'est autre que la décomposition de Bruhat $G = NA\tilde{N}\Gamma$ avec $G_- = N$ et $G_+ = A\tilde{N}\Gamma$ (voir prop. (5.3.)) .

Posons alors $N(g) = \{u \in N : gu \notin NA\tilde{N}\Gamma\}$. Nous avons $G(g) = N(g)\,A\,K$. Pour montrer que $G(g)$ est de mesure de Haar nulle , on est donc amené à prouver que $N(g)$ est de mesure de Haar nulle dans N .

D'après le lemme de Bruhat , l'application $(n\,,\,a,\,,\,\tilde{n}\,,\,\gamma) \longmapsto na\tilde{n}\gamma$ est un isomorphisme de variétés analytiques de $N \times A \times \tilde{N} \times \Gamma$ sur un ouvert de G dont le complémentaire , $(NA\tilde{N}\Gamma)^c$, est une réunion finie de sous-variétés de G de dimensions strictement plus petites . On en déduit que pour tout $g \in G$, $(gNA\tilde{N}\Gamma)^c = g(NA\tilde{N}\Gamma)^c$ est une réunion finie de sous variétés de G de dimensions strictement plus petites .

Or nous avons

$$NA\tilde{N}\Gamma \cap (g^{-1}\,NA\tilde{N}\Gamma)^c = N(g)\,A\tilde{N}\Gamma\ ,$$

il s'ensuit que $N(g)A\tilde{N}\Gamma$ est de mesure de Haar nulle dans G ; et par suite $N(g)$ est de mesure de Haar nulle dans N . Le lemme (9.13.) est prouvé .

9.14. Preuve du théorème (9.7.). - Soit $x \in G$. Ecrivons $X_n = X_n^- X_n^+$ avec $X_n^- \in G_-$ et $X_n^+ \in E_+$. Nous avons , (pour n assez grand) ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x[gX_n^- \notin G_-G_+] &= \mathbb{P}_x[X_n \in G(g)] \qquad (x\,,\,g \in G) \\ &= \varepsilon_x * \mu^n(G(g)) \\ &= \varepsilon_x * \nu_n(G(g)) \qquad \text{(lemme (9.13.)} \\ &\leqslant \rho^n . \end{aligned}$$

Par suite $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}_x[gX_n^{-1} \notin G_-G_+] < +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli , il existe un sous-ensemble $\Omega'_{g\,,\,x}$ de Ω de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 tel que

$$\forall\omega \in \Omega'_{g\,,\,x}\ ,\ \exists\, n_o(\omega) \in \mathbb{N}\ ,\quad \forall n \geqslant n_o(\omega)\quad g\,X_n^-(\omega) \in G_-G_+ .$$

En tenant compte du lemme (9.12.) , il s'ensuit qu'il existe , pour tout couple

$(g\ ,\ x) \in G \times G$, un sous-ensemble mesurable $\Omega_{g\ ,\ x}$ de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 tel que pour tout ω de $\Omega_{g\ ,\ x}$,

i) $\exists\, n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0(\omega) \qquad gX_n^-(\omega) \in G_-G_+$

ii) $\lim_n X_n^-(\omega) = Z(e\ ,\ \omega)$ et $gZ(e\ ,\ \omega) \in G_-G_+$.

Pour $\omega \in \Omega_{g\ ,\ x}$ écrivons

$gX_n^-(\omega) = d_n^-(g\ ,\ \omega)d_n^+(g\ ,\ \omega)\gamma_n(g\ ,\ \omega)\tilde{u}_n(g\ ,\ \omega)$ avec $d_n^- \in D_-$, $d_n^+ \in D_+$, $\gamma_n \in \Gamma'$ et $\tilde{u}_n \in \tilde{N}$;

$gZ(e\ ,\ \omega) = d^-(g\ ,\ \omega)d^+(g\ ,\ \omega)\ (g\ ,\ \omega)\tilde{u}(g\ ,\ \omega)$ avec $d^- \in D_-$, $d^+ \in D_+$, $\gamma \in \Gamma'$ et $\tilde{u} \in \tilde{N}$.

Nous pouvons évidemment choisir les décompositions de $gX_n^-(\omega)$ et $gZ(e\ ,\ \omega)$ de façon que les suites d_n^- , d_n^+ , γ_n et $\tilde{u}_n$ convergent respectivement vers d^- , d^+ , γ et $\tilde{u}$. Nous avons alors (en allégeant l'écriture)

$$g\ X_n = d_n^-\ d_n^+\ \gamma_n\ \tilde{u}_n\ X_n^+ \ .$$

D'après la proposition (9.8.) , $\mathcal{P}_-(\tilde{u}_n X_n^+)$ converge vers e . Comme les suites d_n^+ et γ_n d'éléments respectivement de D_+ et Γ' sont convergentes , on en déduit que $\mathcal{P}_-(d_n^+\ \gamma_n\ \tilde{u}_n\ X_n^+)$ converge vers e .

$\mathcal{P}_-(g\ X_n)$ converge donc vers d^- et le théorème (9.7.) est démontré .

10. FONCTIONS μ-HARMONIQUES BORNEES SUR ${}_{G_-^\mu}\backslash G$

10.1. Proposition. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et* R *son radical . Soient* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée apériodique et* $M = M_-^\mu M_+^\mu$ *une décomposition du nilradical* M *de* R *en produit amalgamé de sous-groupes associée à* μ (voir (7.17.)) . *Alors les fonctions* μ*-harmoniques bornées sur* ${}_{M_-^\mu}\backslash^G$ *sont les composées par l'application naturelle de* ${}_{M_-^\mu}\backslash^G$ *sur* ${}_R\backslash^G$ *des fonctions* $\xi(\mu)$*-harmoniques bornées sur* ${}_R\backslash^G$ *, où* ξ *désigne l'application naturelle de* G *sur* ${}_R\backslash^G$

Preuve. - On reprend les notations des paragraphes précédents qui ont été résumées en (9.0.) . On omet l'indice "μ" .

Désignons par $\mathcal{M}$ l'algèbre de Lie de M . Soit $\mathcal{H}$ la famille des sous-groupes fermés de M contenant M_- . Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des éléments X de $\mathcal{H}$ tels que les fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_X\backslash^G$ soient les composées par l'application naturelle de ${}_X\backslash^G$ sur ${}_R\backslash^G$ des fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_R\backslash^G$.

Nous allons montrer que $\mathcal{H} = \mathfrak{B}$. Donc en particulier $M_- \in \mathfrak{B}$ et la proposition sera prouvée .

Montrons d'abord que $\mathfrak{B}$ contient M . Soit $(\Omega , \mathfrak{F} , (X_n)_{n \in \mathbb{N}} , (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G . Ecrivons (voir (9.5.)) $X_n = D_n K_n$ avec $D_n \in D$ et $K_n \in K$. Soit $p \in P$ et posons $U_n = D_n\, p\, D_n^{-1}\, p^{-1}$; comme P commute avec S , U_n est à valeurs dans M . Nous avons

$$X_n^{-1}\, U_n\, p\, X_n = K_n^{-1}\, p\, K_n \subset \bigcup_{k \in K} k^{-1}\, p\, k .$$

$\mathrm{Ad}_{\mathcal{G}} K$ étant compact , d'après le théorème (6.8.) il s'ensuit qu'il existe un voisinage de e dans P contenu dans le groupe des μ-périodes (pour les détails voir la démonstration du lemme (7.9.)) . P étant connexe , c'est P tout entier qui est contenu dans ce groupe ; par suite $\mathfrak{B}$ contient M .

Supposons que $\mathfrak{B}$ contiennent tous les éléments de $\mathcal{H}$ de dimension strictement supérieure à ℓ , avec $\ell < \dim \mathcal{M}$, et soit $X \in \mathcal{H}$ de dimension ℓ . Désignons par χ l'algèbre de Lie de X , χ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{M}_-$. Puisque $\ell < \dim \mathcal{M}$, χ ne peut contenir $\mathcal{M}$. Soit $(e_i)_{1 \le i \le m}$ une base ordonnée de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ qui triangularise simultanément les éléments de $\mathrm{ad}_{\mathcal{M}^{\mathbb{C}}} \mathcal{D}$ et partant ceux de $\mathrm{Ad}_{\mathcal{M}^{\mathbb{C}}} D$. Notons e_{i_0} le premier vecteur de cette base n'appartenant pas à $\chi^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}$ le sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ engendré par le vecteur e_{i_0} . Posons

$$\mathfrak{z} = \{t + \overline{t} \ \text{ avec } \ t \in \mathfrak{z}^{\mathbb{C}}\} \quad \text{et} \quad \chi' = \chi \oplus \mathfrak{z} .$$

Il est clair que l'image de e_{i_0} dans $\mathcal{M}/_{\mathcal{M} \cap \chi}$ est un vecteur propre pour la représentation adjointe de $\mathcal{D}$ (resp. D) dans $\mathcal{M}/\mathcal{M} \cap \chi$. Par conséquent il existe $\lambda \in \Lambda \cap \Xi_+$ (car χ contient $\mathcal{M}_-$) tel que pour tout Y de $\mathcal{D}$,

$$[Y , e_{i_0}] = \lambda(Y) e_{i_0} \quad \text{modulo} \quad \mathcal{M}^{\mathbb{C}} \cap \chi^{\mathbb{C}} .$$

Il s'ensuit que χ' est une sous-algèbre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{M}_-$, de dimension strictement supérieure à ℓ ; en outre nous avons

$$[\mathfrak{h} , \mathfrak{k}] \subset \chi \quad \text{et donc} \quad [\mathcal{M} , \mathfrak{k}] \subset \chi \quad (\text{puisque } \mathcal{M} \subset \mathfrak{h}) .$$

Reprenons les notations de (9.5.) , nous avons $X_n = D_n K_n$ avec $D_n \in D$ et $K_n \in K$. Soit $x = t + \overline{t}$ avec $t \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Considérons la variable aléatoire ,

$$U_n = D_n [\exp(\phi_\lambda(D_n^{-1})t + \phi_{\overline{\lambda}}(D_n^{-1})\overline{t})] D_n^{-1} \exp(-x)$$

$$= \exp[\phi_\lambda(D_n^{-1}) . \mathrm{Ad}\, D_n(t) + \phi_{\overline{\lambda}}(D_n^{-1}) . \mathrm{Ad}\, D_n(\overline{t})] \exp(-x)$$

$$= \exp[\phi_\lambda(D_n^{-1}) . \mathrm{Ad}\, D_n(t) + \overline{\phi_\lambda(D_n^{-1}) . \mathrm{Ad}\, D_n(t)}] \exp(-x)$$

Comme $\mathrm{Ad}\, D_n(t) = \phi_\lambda(D_n).t + V_n(t)$ avec $V_n(t) \in \mathcal{M}^{\mathbb{C}} \cap \chi^{\mathbb{C}}$, il s'ensuit que l'on a

$$U_n = \exp(x + V_n(t) + \overline{V_n(t)}) \exp(-x)$$

$$= \exp[(x + W_n(x)) \times (-x)] ,$$

où $W_n(x) = V_n(t) + \overline{V_n(t)} \in \mathcal{M} \cap \chi$.

De l'inclusion $[\mathcal{M} , \mathfrak{k}] \subset \chi$, il résulte alors que U_n est une variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{M} \cap \chi$.

Nous avons alors

$$X_n^{-1} U_n \exp x\, X_n = K_n^{-1} \exp(\phi_\lambda(D_n^{-1})t + \overline{\phi_\lambda(D_n^{-1})t}) K_n$$

$$= \exp(\alpha_n + \overline{\alpha}_n) ,$$

en posant $\alpha_n = \phi_\lambda(D_n^{-1}). \mathrm{Ad}\, K_n^{-1}(t)$.

Avec les notations du sous paragraphe (9.5.) nous avons

$$\|\alpha_n\| \leqslant \delta\, e^{-\tau_\lambda (v_0 , X_n)} \|t\|$$

où δ est une constante > 0 (on notera que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} K$ est compact) .

Comme $\lambda \in \Xi_+$, nous savons que l'on a ou bien $\tau_\lambda = 0$; ou bien $\limsup_n \tau_\lambda (v_0 , X_n) = +\infty$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$. Dans le premier cas la suite $\{X_n^{-1} U_n \exp x\, X_n\}_{n \geqslant 1}$ possède , $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, une valeur d'adhérence dans $S_\mu S_\mu^{-1}$ pour x voisin de 0 ; dans le second cas cette suite possède , $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, e comme valeur d'adhérence . Comme $\exp \mathfrak{k}$ est connexe , dans les deux cas il s'ensuit (théorème (6.8.)) que pour toute fonction f μ-harmonique bornée sur $_X\backslash^G$ nous avons

$$f \circ p(x'g) = f \circ p(g) \quad (x' \in X' = \exp \chi' = X \exp \mathfrak{k} , g \in G)$$

où $p : G \longrightarrow {}_X\backslash^G$.

μ étant étalée , toute fonction μ-harmonique bornée est continue ([1]) ;

$f \circ p$ est donc continue et on en déduit que

$$f \circ p(x'g) = f \circ p(g) \quad (x' \in \overline{X'} , \ g \in G) ,$$

ce qui montre que les fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_X\backslash^G$ sont les composées par l'application naturelle de ${}_X\backslash^G$ sur ${}_{\overline{X'}}\backslash^G$ des fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_{\overline{X'}}\backslash^G$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure que $X \in \mathfrak{B}$. Nous venons donc de prouver par récurrence que $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$ et la proposition (10.1.) est démontrée .

10.2. Corollaire. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes . Soient* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée apériodique et* $G = G_-^\mu E_+^\mu$ *une décomposition de* G *associée à* μ (voir §7). *Alors les fonctions* μ-*harmoniques bornées sur* ${}_{G_-^\mu}\backslash^G$ *sont les composées par l'application naturelle de* ${}_{G_-^\mu}\backslash^G$ *sur* ${}_D\backslash^G$ *des fonctions* μ-*harmoniques bornées sur* ${}_D\backslash^G$.

Preuve. - Nous avons $G_-^\mu = M_-^\mu \, N$. D'après la proposition (10.1.),, les fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_{G_-^\mu}\backslash^G$ sont les composées par l'application naturelle de ${}_{G_-^\mu}\backslash^G$ sur ${}_{RN}\backslash^G$ des fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_{RN}\backslash^G$. Comme $[D , D] \subset RN$, le corollaire (10.2.) résulte alors du lemme (7.9.) .

10.3.- Nous allons à présent étudier les fonctions μ-harmoniques bornées sur ${}_D\backslash^G$. μ est une mesure de $M^1(G)$ étalée et apériodique .

Quitte à remplacer G par ${}_R\backslash^G$, on peut supposer que G est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe G_o de l'unité est semi-simple . Nous notons $G = NAK$ et $G = NA\tilde{N}\Gamma'$ (resp. $G_o = NAK$ et $G_o = NA\tilde{N}\Gamma$) des décompositions d'Iwasawa et de Bruhat de G (resp. de G_o) . Si y est un élément de G , nous notons $\overline{y}$ sa composante sur K pour la décomposition d'Iwasawa .

Dans le cas où G_o est de centre fini , K et Γ' sont des sous-groupes compacts de G , et la chaine de loi μ sur K ($\sim {}_{NA}\backslash^G$) vérifie la condition de Doeblin (cor. (7.2.)) . D'après [6] , nous savons alors que K se décompose en un ensemble transient et une réunion finie de classes ergodiques; pour tout élément g de G , $\overline{g X_n}$ finit par rentrer , $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, dans une classe ergodique et y reste .

Dans le cas général (i.e. que G_o peut avoir un centre infini) , la chaine de loi μ sur K ne vérifie plus la condition de Doeblin . Cependant , Rosenberg a prouvé ([24]) que , pour la chaine de loi μ , K se décompose en un ensemble transient et en une réunion dénombrable de classes ergodiques ; pour tout élément g de G , $\overline{g X_n}$ finit par rentrer , $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, dans une classe ergodique et y reste .

Plaçons nous dans le cas général et notons E_i , $i \in I$, les différentes classes ergodiques de la chaine de loi μ sur K , où I est un sous-ensemble , fini ou infini , de $\mathbb{N}$. Comme nous avons $\overline{\gamma y} = \gamma \overline{y}$ ($\gamma \in \Gamma'$, $y \in G$) , (car Γ' normalise à la fois N , A et K) , les éléments de Γ' permutent les classes ergodique ; c'est-à-dire que pour tout $i \in I$ et tout $\gamma \in \Gamma'$, il existe $r(i , \gamma) \in I$ tel que

$$\gamma E_i = E_{r(i , \gamma)} .$$

Notons aussi que puisque la chaine de loi μ sur ${}_{NA\Gamma}\backslash^G$ est ergodique (lemme (7.7.)) , pour tout i et $j \in I$ il existe $\gamma_{i , j} \in \Gamma$ tel que $E_j = \gamma_{i , j} E_i$ (voir [26] , §5) .

Soit E_{i_o} , $i_o \in I$, une classe ergodique de la chaine de loi μ sur K et choisissons un élément x de E_{i_o} . Pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω , $\overline{X_n(\omega)} \in E_{i_o}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre si $g \in G$, nous savons que pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω , $\overline{gX_n(\omega)}$ finit par rentrer dans une classe ergodique $E_{i(g , \omega)}$, $i(g , \omega) \in I$, et y reste .

Ecrivons $X_n = N_n A_n K_n$ avec $N_n \in N$, $A_n \in A$ et $K_n \in K$. Pour tout $g \in G$, la composante de gX_n sur N converge , $\mathbb{P}_x$-p.s. , vers une variable aléatoire $Z(g , .)$. D'après (9.14.) , nous avons pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω

i) $\exists\, l(\omega) \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq l(\omega)$, $gN_n(\omega) = u_n(g , \omega)\, a_n(g , \omega)\, \gamma_n(g ,\omega)\, \tilde{u}_n(g , \omega)$
avec $u_n \in N$, $a_n \in A$, $\gamma_n \in \Gamma'$ et $\tilde{u}_n \in \tilde{N}$.

ii) Les suites u_n , a_n , γ_n , $\tilde{u}_n$ convergent respectivement vers u , a , γ , $\tilde{u}$ tels que $gZ(e , \omega) = u(g , \omega)\, a(g , \omega)\, \gamma(g , \omega)\, \tilde{u}(g , \omega)$.

On a alors , $\mathbb{P}_x$-presque sûrement , $\overline{g X_n} = \gamma_n \overline{A_n^{-1} \tilde{u}_n A_n \overline{X}_n}$, avec $\gamma_n(g , .) \longrightarrow \gamma(g , .)$ et $A_n^{-1} \tilde{u}_n A_n \longrightarrow e$ ((lemme (9.9.)) .

μ étant étalée , chaque classe ergodique de la chaine de loi μ sur K ($\tilde{\ }_{NA}\backslash^G$) contient un ouvert de K . En effet si E est une classe ergodique , il existe une unique mesure de probabilité μ-invariante θ portée par E . D'après [1] on sait que θ est la restriction à un ouvert de K d'une mesure quasi-invariante sur K . E contient donc un ouvert de K . De ce qui précède , il résulte alors que l'on a :

$$E_{i(g , .)} = \gamma(g , .)\, E_{i_o} = E_{r(i_o , \gamma(g , .))} , \mathbb{P}_x\text{-p.s.} .$$

Soit f une fonction μ-harmonique bornée sur K ($\tilde{\ }_{NA}\backslash^G$) . Pour $i \in I$, la restriction , f_{E_i} , de f à E_i est une fonction harmonique bornée pour la chaine de loi μ restreinte à E_i . Or cette chaine est une chaine récurrente au sens de Harris (voir [6] et [23]) pour la mesure de Haar sur K , on sait alors (voir [23]) que f_{E_i} est m_K-p.s. constante. Mais μ étant étalée, f et par suite f_{E_i}, $i \in I$, sont continues ([1]) ; il s'ensuit donc que f est constante sur chaque classe ergodique. Posons $f_{E_i} = a_i \in \mathbb{R}$; pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω de Ω, il existe $\ell(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq \ell(\omega)$

$$f(\overline{gX_n(\omega)}) = f(\gamma(g, \omega)x) = a_{r(i_o, \gamma(g, \omega))}.$$

Soit $\Gamma'_\mu = \{\gamma \in \Gamma' : r(i_o, \gamma) = i_o\}$; Γ'_μ est un sous-groupe distingué de Γ' contenant Γ'_o. Désignons par t l'application naturelle de Γ' sur $\Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$ et posons

$$\hat{f}(t(\gamma)) = f(\gamma x) \qquad (\gamma \in \Gamma', x \in E_{i_o}).$$

Alors $\hat{f}$ est une fonction continue sur $\Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$ et nous avons

i) $f(\overline{g}) = \mathbb{E}_x [\lim_n \overline{f(gx^{-1}X_n)}] = \mathbb{E}_x [\hat{f}\circ t(\gamma(gx^{-1}, .))]$ $(g \in G)$

ii) Soit $g \in G$, pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω,

$$\exists\, \ell(\omega) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \ell(\omega) \qquad \overline{f(gX_n(\omega))} = \hat{f}\circ t(\gamma(g, \omega)).$$

Pour $i \in I$, notons τ_i l'élément de $\Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$ dont un quelconque représentant γ_i dans Γ' vérifie $\gamma_i E_{i_o} = E_i$. Nous avons alors

$$f(\overline{g}) = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{P}_x [t(\gamma(gx^{-1}, .)) = \tau_i].$$

10.4. <u>Démonstration du théorème (8.4.)</u>. - Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Soient μ une mesure de $M^1(G)$ étalée, apériodique, possèdant un moment d'ordre 1 et $G = G_-^\mu E_+^\mu$ une décomposition de G associée à μ. Dans la suite nous omettons l'indice "μ".

Nous identifions E_+ et ${}_{G_-}\backslash^G$; nous désignons par q l'application naturelle de G sur ${}_{G_-}\backslash^G$ et par η l'homéomorphisme de $G_- \times {}_{G_-}\backslash^G$ sur G. Posons

$$g.(u, v) = \eta^{-1}(g.\eta(u, v)) \quad (g \in G, (u, v) \in G_- \times {}_{G_-}\backslash^G);$$

$G_- \times {}_{G_-}\backslash^G$ est alors un G-espace, G-homéomorphe à G.

Soit f une fonction μ-harmonique bornée u.c.g., nous savons que pour tout g de G, $\lim_n f(gX_n)$ existe, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$. D'après le théorème (9.2.), la composante de gX_n sur G_- converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, vers une variable aléatoire $Z(g, .)$. Posons $X_n = X_n^- X_n^+$ avec $X_n^- \in G_-$ et $X_n^+ \in E_+$. Pour tout x et $g \in G$, il existe un sous-ensemble mesurable $\Omega_{g,x}$ de Ω de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 tel que :

i) $\forall \omega \in \Omega_{g,x}$, $\lim_n X_n^-(\omega)$ existe et est égal à $Z(e, \omega)$

ii) $\forall \omega \in \Omega_{g,x}$, les limites $\lim_n f(g X_n(\omega))$ et $\lim_n f(gZ(e, \omega)X_n^+(\omega))$ existent et sont égales pour tout $g \in G$ (on notera que f est u.c.g.).

G étant séparable , soit $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans G . Posons pour $x \in G$,

$$\Omega_x = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Omega_{g_i , x}$$

f étant u.c.g. nous avons alors

i) $\mathbb{P}_x[\Omega_x] = 1$

ii) $\forall \omega \in \Omega_x$, $\lim_n X_n^-(\omega)$ existe et est égal à $Z(e , \omega)$

iii) $\forall \omega \in \Omega_x$, les limites $\lim_n f(gX_n(\omega))$ et $\lim_n f(gZ(e , \omega)X_n^+(\omega))$ existent et sont égales pour tout g de G .

En particulier , pour ω donné on peut choisir $g = g' Z(e , \omega)^{-1}$ où g' est un élément quelconque de G ; on voit alors que $\lim_n f(g' X_n^+(\omega))$ existe pour tout $\omega \in \Omega_x$ et tout $g' \in G$.

Soit $\tilde{f}$ la fonction $f \circ \eta^{-1}$, nous avons alors

i) $\tilde{f} \in C_u(G_- \times {}_{G_-}\backslash^{G})$

ii) $\forall \omega \in \Omega_x$ les limites $\lim_n \tilde{f}(v , q(g X_n(\omega)))$ et $\lim_n \tilde{f}(v , q(gZ(e , \omega) X_n^+(\omega)))$ existent et sont égales pour tout $(v , g) \in G_- \times G$.

Considérons la fonction ϕ définie sur $G_- \times {}_{G_-}\backslash^{G}$ par

$$\phi(v , q(g)) = \mathbb{E}_g [\lim_n \tilde{f}(v , q(X_n))] \quad (v \in G_- , g \in G) .$$

Pour tout $v \in G_-$, $\phi(v , .)$ est une fonction μ-harmonique bornée sur ${}_{G_-}\backslash^{G}$.
Désignons par ξ l'application naturelle de G sur ${}_{R}\backslash^{G}$. D'après le corollaire (10.2.) il existe une fonction $\overline{\phi}$ définie sur $G_- \times {}_{\xi(D)}\backslash^{\xi(G)}$ (noter que ${}_{\xi(D)}\backslash^{\xi(G)}$ et ${}_{D}\backslash^{G}$ sont homéomorphes) telle que

$$\overline{\phi} \ (v , p\circ \xi(g)) = \phi \ (v , q(g)) \quad (v \in G_- , g \in G) ,$$

où p désigne l'application naturelle de $\xi(G)$ sur ${}_{\xi(D)}\backslash^{\xi(G)}$.

Soit $v \in G_-$ et $g \in G$ fixés . D'après la proposition (6.7.) nous avons

$$\lim_n \overline{\phi} \ (v , p\circ \xi(gX_n)) = \lim_n \tilde{f} \ (v , q(gX_n)) , \ \mathbb{P}_x\text{-p.s. } \forall x \in G .$$

Désignons par I_y l'automorphisme intérieur de G , $g \longmapsto y^{-1} gy$. Il est alors facile de voir que si le théorème (8.4.) est vérifié pour un élément de $\{I_y(\mu) , y \in G\}$ il l'est pour tous . Il suffit en effet de remarquer que f est μ-harmonique bornée sur G si et seulement si $f \circ I_{y^{-1}}$ est $I_y(\mu)$-harmonique bornée sur G . Reprenons pour $\xi(G)$ les notations de (10.3.) , quitte à remplacer μ par $I_y(\mu)$, $y \in G$, nous pouvons supposer que $\xi(e) \in E_{i_0}$. D'après (10.3.) nous savons alors que pour $\mathbb{P}_e$-presque tout ω de Ω , il existe $\ell(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \ell(\omega)$,

$$\overline{\phi} \ (v , p\circ\xi(gX_n) \ (\omega))) = \hat{f}(v , t(\gamma(g , \omega))) ,$$

où $\hat{f}$ est une fonction définie sur $G_- \times \Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$.

Nous avons pour tout couple (v , g) de $G_- \times G$,

$$\overline{\phi}(v , po\xi(g)) = \phi(v , q(g)) = \mathbb{E}_g [\lim_n \tilde{f}(v , q(X_n))] = \mathbb{E}_g [\lim_n f(vX_n^+)] .$$

D'où

$$\sup_{(v , g) \in G_- \times G} |\overline{\phi}(hv , po\xi(g)) - \overline{\phi}(v , po\xi(g))| \leqslant \sup_{g \in G} |f^h(g) - f(g)| = \|f^h - f\|_\infty .$$

Comme f est u.c.g. , il s'ensuit que pour tout $\overline{\gamma} \in \Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$ et tout $g \in G$ les fonctions

$$v \longmapsto \hat{f}(v , \overline{\gamma}) \text{ et } v \longmapsto \overline{\phi}(v , po\xi(g)) \quad (v \in G_-) ,$$

sont u.c.g. $\tilde{f}$ appartenant à $C_u(G_- \times_{G_-} \backslash^G)$ et G étant séparable , il résulte alors qu'il existe , pour tout $g \in G$, un sous-ensemble mesurable $\Omega'_g \subset \Omega_e$ de $\mathbb{P}_e$-mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega'_g$

$$\lim_n \overline{\phi} (v , po\xi(gX_n(\omega))) = \lim_n \tilde{f} (v , q(gX_n(\omega))) = \hat{f}(v , t(\gamma(g , \omega))) , \quad \forall v \in G_- .$$

En outre comme $\Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$ est discret , la fonction $\hat{f}$ est continue sur $G_- \times \Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$.

Soit $g \in G$ et $\omega \in \Omega'_g$ nous avons , en posant $gX_n(\omega) = (gX_n(\omega))^- (gX_n(\omega))^+$ avec $(gX_n(\omega))^- \in G_-$ et $(gX_n(\omega))^+ \in E_+$,

$$\begin{aligned} \lim_n f(gX_n(\omega)) &= \lim_n f((gX_n(\omega))^- (gX_n(\omega))^+) \\ &= \lim_n f(Z(g , \omega) (gX_n(\omega))^+) \\ &= \lim_n \tilde{f}(Z(g , \omega) , q(gX_n(\omega))) \\ &= \lim_n \overline{\phi} (Z(g , \omega) , po\xi(gX_n(\omega))) \\ &= \hat{f}(Z(g , \omega) , t(\gamma(g , \omega))) . \end{aligned}$$

Considérons la décomposition $G = G_- G_+$, modulo m_G , associée à μ (voir (7.17.)) ; nous avons avec les notations des paragraphes précédents

$$G_+ = M_+ PA\tilde{N}\Gamma' \quad (\text{et } E_+ = M_+ PAK\Gamma' = M_+ PA\,K) .$$

Posons $H_+ = M_+ PA\tilde{N}\Gamma'_\mu$; $G \times \Gamma'/_{\Gamma'_\mu}$ est homéomorphe à un ouvert de $G/_{H_+}$. Soit $U(g , \omega)$ (resp. $U(e , \omega)$) l'élément de $G/_{H_+}$ correspondant à $(Z(g , \omega)$, $t(\gamma(g , \omega)))$ (resp. à $(Z(e , \omega) , t(e))$) . D'après le théorème (9.7.) , nous avons

$$U(g , .) = g.U(e , .) \quad \mathbb{P}_e\text{-p.s.} ;$$

et par suite , en restreignant au besoin Ω'_g , nous avons

$$(*) \quad \lim_n f(gX_n(\omega)) = \overline{f}(g.U(e , \omega)) \quad \forall \omega \in \Omega'_g$$

où $\overline{f}$ est une fonction continue (car $\hat{f}$ l'est) définie sur l'ouvert X de $G/_{H_+}$ image de $G_-\Gamma'$ par l'application naturelle de G sur $G/_{H_+}$.

Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de e dans G tel que pour tout g de V_ε et tout w de X avec $g.w \in X$ on ait

$$|\overline{f}(g . w) - \overline{f}(w)| < \varepsilon .$$

f étant u.c.g. , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de e dans G tel que pour tout $g \in V_\varepsilon$ on ait $\|f^g - f\|_\infty < \varepsilon$. Soit $g \in V_\varepsilon$ et $y \in G$ nous avons pour tout $\omega \in \Omega'_y \cap \Omega'_{gy}$

$$|\overline{f}(gy.U(e , \omega)) - \overline{f}(y . U(e , \omega))| = \lim_n |f(gyX_n(\omega)) - f(yX_n(\omega))| \leq \|f^g - f\|_\infty < \varepsilon .$$

D'où , pour tout $g \in V_\varepsilon$ et tout $y \in G$, nous avons

$$|\overline{f}(g . (y.w)) - \overline{f}(y.w)| < \varepsilon$$

pour ν-presque tout w , où ν désigne la loi de variable aléatoire $U(e , .)$ définie sur $(\Omega , \mathfrak{F} , \mathbb{P}_e)$.

Or ν est une mesure μ-invariante sur $G/_{H_+}$; d'après [1] , on sait que ν est la restriction à un ouvert de $G/_{H_+}$ (contenu dans X) d'une mesure quasi-invariante . $\overline{f}$ étant continue sur X , il s'ensuit que pour tout g de V_ε on a $|\overline{f}(g.w) - \overline{f}(w)| < \varepsilon$ pour tout $w \in X$ tel que $g.w \in X$.

Soit $w \in G/_{H_+}$; w est l'image dans $G/_{H_+}$ d'un élément x de G . Comme $\{g \in G : gx \notin G_-G_+\}$ est de mesure de Haar nulle , on peut trouver une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de G convergeant vers e telle que $g_n x \in G_-G_+$, pour tout entier naturel n . Nous avons alors $g_n.w \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $g_n \longrightarrow e$. D'après ce qui précède il s'ensuit que la suite réelle $(\overline{f}(g_n.w))_{n \geq 0}$ est de Cauchy ; posons $\overline{f}(w) = \lim_n \overline{f}(g_n.w)$. Il est facile de voir que cette limite est indépendante du choix de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que l'on définit ainsi une fonction de $C_u(G/_{H_+})$ qui prolonge $\overline{f}$; nous notons encore $\overline{f}$ cette fonction .

De la relation (*) il s'ensuit que

$$f(g) = \mathbb{E}_g [\lim_n f(X_n)] = \mathbb{E}_e [\lim_n f(gX_n)] = \mathbb{E}_e [\overline{f}(g.U(e , .))] ,$$

soit en notant ν la loi de la variable aléatoire $U(e , .)$ définie sur $(\Omega , \mathfrak{F} , \mathbb{P}_e)$

$$(**) \quad f(g) = \int_{G/_{H_+}} \overline{f}(g.w)\, \nu(dw) .$$

De (*) et (**) il résulte que l'on a $\|f\|_\infty = \|\overline{f}\|_\infty$. On en déduit donc que l'application $\overline{f} \longmapsto \overline{f} * \nu$ de $C_u(G/_{H_+})$ sur H_μ est une G-isométrie . Le fait que l'application $\overline{f} \longmapsto \overline{f} * \nu$, où $\overline{f} \in L^\infty(G/_{H_+})$ soit une G-isométrie de $L^\infty(G/_{H_+})$ sur E_μ se montre alors en reprenant la démonstration du théorème I.3. de [1] . Le théorème (8.4.) est démontré dans le cas où μ est apériodique . Le cas général se déduit aisément de ce cas particulier , en reprenant la démonstration de la proposition IV.1. de [1] .

11. COMPARAISON DE Λ_μ ET DE L'ESPACE DE POISSON Π_μ

11.1. Définition. - Soit G un groupe L.C.D. et M un G-espace localement compact ; nous appelons G-compactification de M, tout couple $(\tilde{M},\varepsilon)$ formé d'un G-espace compact $\tilde{M}$ et d'une application ε de M dans $\tilde{M}$ qui est un G-homéomorphisme de M sur un sous-espace G-invariant et partout dense de $\tilde{M}$. Par abus de langage, nous disons aussi que $\tilde{M}$ est une G-compactification de M, en sous-entendant l'application ε.

11.2. Familles discriminantes restreintes d'A-cocycles associées à G. - Soient G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Xi\}$ la famille discriminante d'A-cocycles obtenue pour la décomposition $G = DK$ de G (voir § 2). Ξ est la réunion des ensembles de poids, Λ et Σ_1, de la représentation adjointe de $\mathcal{D}$ respectivement dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ (voir (5.5)). Nous savons que la famille $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Sigma_1\}$ est composée d'éléments strictement négatifs pour toute mesure de $M^1(G)$ étalée (corollaire (7.15)).

Soit Λ_0 l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}/[\mathcal{M},\mathcal{M}]^{\mathbb{C}}$. Nous savons que tout élément de Λ est une somme d'éléments de Λ_0 et par suite tout élément de $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda\}$ est une somme d'éléments de $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda_0\}$. Nous disons que $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda_0\}$ est une famille discriminante restreinte d'A-cocycles associée à G. Il est facile de voir (cf. (2.12)) que toute autre famille discriminante restreinte d'A-cocycles s'écrit $\{\rho_\lambda \circ (J_d,I_d),\lambda \in \Lambda_0\}$, où d est un élément de D, I_d l'automorphisme intérieur de G, $g \longmapsto d^{-1}gd$ et J_d l'homéomorphisme de $B(G)$ sur lui-même qui à $u \in B(G)$ associe $\dot{u}.d$.

11.3. Théorème. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Soit* $\mu \in M^1(G)$ *étalée ; désignons par* Π_μ *(resp.* $\Pi_{\xi(\mu)}$*) l'espace de Poisson de* μ *(resp.* $\xi(\mu)$*) sur* G *(resp.* ${}_R\backslash^G$*). Soit* $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda_0\}$ *une famille discriminante restreinte d'* A*-cocycles associée au sous-groupe fermé* G_μ *engendré par le support de* μ *(voir (11.2)). Alors si pour tout* $\lambda \in \Lambda_0$, ρ_λ *est* μ*-positif (voir (7.11)), les* G*-espaces* Π_μ *et* $\Pi_{\xi(\mu)}$ *sont* G*-homéomorphes.*

Supposons de plus que μ *possède un moment d'ordre 1. Alors l'espace de Poisson* Π_μ *de* μ *est homogène, (et coïncide avec* Λ_μ*), si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

i) Les $\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda_0$ *, sont tous* μ*-positifs.*

ii) $Z({}_R\backslash^G) \cap T_{\xi(\mu)} T^{-1}_{\xi(\mu)}$ *est d'indice fini dans le centre* $Z({}_R\backslash^G)$ *de* ${}_R\backslash^G$ *, où*

$T_{\xi(\mu)}$ *désigne le semi-groupe fermé de* ${}_R\backslash^G$ *engendré par* $\xi(\mu)$.
Lorsque l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, Π_μ *est une* G-*compactification (définition (11.1)),* *non métrisable,* *de* Λ_μ

La preuve du théorème (11.3) résultera des trois lemmes suivants.

11.4. Lemme. - *Soit* M *un* G-*espace homogène localement compact. Alors il existe une* G-*compactification* $(\tilde{M},\varepsilon)$ *de* M , *unique à un* G-*isomorphisme près, telle que l'application* $f \longmapsto f \circ \varepsilon$ *soit une* G-*isométrie de* $C(\tilde{M})$ *sur* $C_u(M)$. *Les sous-espaces* $\varepsilon(M)$ *et* $\tilde{M}-\varepsilon(M)$ *de* $\tilde{M}$ *sont* G-*invariants et* $\tilde{M}$ *n'est homogène que si* M *est compact.*

Preuve. - Nous donnons une démonstration brève de ce lemme qui est à rapprocher de la compactification de Cech d'un espace localement compact ([17]). Soit

$$C_u^1(M) = \{f \in C_u(M) \ ; \ 0 \leqslant f \leqslant 1\} \ ;$$

considérons $F = [0,1]^{C_u^1(M)}$, l'application

$$\begin{aligned} \varepsilon : M &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto (f(x))_{f \in C_u^1(M)} \end{aligned}$$

et l'adhérence $\tilde{M}$ de $\varepsilon(M)$ dans F . G opère sur F de la façon suivante

$$g \in G \ , \quad y = (y_f)_{f \in C_u^1(M)} \in F \ , \quad g.y = (y_{f^g})_{f \in C_u^1(M)} \ .$$

On montre que cette action de G induit sur $\tilde{M}$ une structure de G-espace et que le couple $(\tilde{M},\varepsilon)$ constitue une G-compactification de M ayant la propriété voulue.

L'unicité de $\tilde{M}$ à un G-isomorphisme près découle du corollaire de la proposition I.1 de [1].

Enfin $\varepsilon(M)$ est G-invariant ; si $g \in G$ et L_g désigne l'homéomorphisme $\begin{aligned} \tilde{M} &\longrightarrow \tilde{M} \\ x &\longmapsto g.x \end{aligned}$, L_g laisse $\varepsilon(M)$ et par suite $\tilde{M}-\varepsilon(M)$ invariants.

11.5. Lemme. - *Soit* G *un groupe L.C.D. et* $\mu \in M^1(G)$. *Soient* (M,ν) *et* (M',ν') *deux* μ-*espaces homogènes de* G *tels que l'application* $f \longmapsto f*\nu$ *(resp.* $f \longmapsto f*\nu'$*) de* $C_u(M)$ *(resp.* $C_u(M')$*) dans* H_μ *soit une* G-*isométrie. Alors les* μ-*espaces homogènes* (M,ν) *et* (M',ν') *sont* G-*homéomorphes.*

Preuve. - Soit $(\tilde{M},\varepsilon)$ (resp. $(\tilde{M}',\varepsilon'))$ une G-compactification de M (resp. M'). $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$ (resp. $\varepsilon(\nu)$ et $\varepsilon'(\nu')$) sont alors deux versions de l'espace de Poisson (resp. du noyau de Poisson) de μ. D'après [1], il existe donc un G-homéomorphisme $\tilde{\phi}$ de $\tilde{M}$ sur $\tilde{M}'$ tel que $\tilde{\phi}(\varepsilon(\nu)) = \varepsilon'(\nu')$. Il s'ensuit que $\{x \in M : \tilde{\phi}(\varepsilon(x)) \in \varepsilon'(M')\}$ est non vide. Par suite M et M' étant homogène, nous avons $\tilde{\phi}(\varepsilon(M)) = \varepsilon'(M')$ et l'application $\phi = \varepsilon'^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varepsilon$ est un G-homéomorphisme de M sur M' envoyant ν sur ν'.

11.6. Lemme. - *Soit* G *un groupe L.C.D. compactement engendré et* M *un* G-*espace homogène, alors* $\dot{C}_u(M)$ *est séparable si et seulement si* M *est compact. D'autre part, pour toute* G-*compactification* $(\tilde{M},\varepsilon)$ *de* M, *l'espace* $\varepsilon(M)$ *est séquentiellement fermé dans* $\tilde{M}$.

Preuve. - Soit x_o un point de M et H le sous-groupe de stabilité de x_o ; M est alors G-homéomorphe à $G/_H$. Si $g \in G$ nous notons $\bar{g}$ l'image de g par l'application naturelle de G sur $G/_H$.

Soit d une distance principale sur G (voir (6.3)) ; on définit

$$\delta(\bar{g}) = \inf_{h \in H} d(e,gh) \quad (g \in G) .$$

δ est une application continue de $G/_H$ dans $\mathbb{R}_+$ qui est bornée si et seulement si $G/_H$ est compact ; en effet si δ est majorée strictement par un entier k, du fait que d est principale, il s'ensuit que G est contenu dans V^kH où V est un voisinage compact de e engendrant G.

D'autre part pour $(g,u) \in G\times G$, nous avons

$$\delta(\overline{gu}) = \inf_{h \in H} d(e,guh) \leqslant \inf_{h \in H} (d(e,g)+d(e,uh)) = d(e,g)+\delta(\bar{u})$$

et

$$\delta(\bar{u}) = \inf_{h \in H} d(e,(g^{-1}g)uh) \leqslant \inf_{h \in H} (d(e,g^{-1})+d(e,guh)) = d(e,g)+\delta(\overline{gu}) .$$

Autrement dit, nous avons

$$(1) \qquad |\delta(g.\bar{u}) - \delta(\bar{u})| \leqslant d(e,g) .$$

Si M est compact, $C_u(M)$ est séparable ; supposons donc que M n'est pas compact. Si $C_u(M)$ était séparable, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $M(\sim G/_H)$ on pourrait extraire (par le procédé diagonal) une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\geqslant 1}$ convergerait pour toute fonction f de $C_u(M)$. Mais nous allons construire, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de M telle que $\lim_n \delta(x_n) = +\infty$, une fonction ψ de $C_u(M)$ telle que la suite $(\psi(x_n))_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

Soit U un voisinage compact symétrique de e dans G et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $G/_H$ telle que $\delta(x_n) \to +\infty$. Quitte à remplacer la suite donnée par une sous-suite, nous pouvons supposer que

(2) $$\delta(x_{n+1}) \geqslant \delta(x_n) + \sup_{g \in U} d(e,g) .$$

Posons $B_n = \{x \in G/_H : \delta(x) \leqslant \delta(x_n)\}$. Il est facile de voir, utilisant les relations (1) et (2) ci-dessus, que l'on a :

(3) $$U.(B_{n+1}-B_n) \subset B_{n+2} - B_{n-1} .$$

Définissons alors la fonction :

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta(x_{2n+1})-\delta(x)}{\delta(x_{2n+1})-\delta(x_{2n})} & \text{si } x \in B_{2n+1} - B_{2n} , \quad n \geqslant 1 \\[2ex] \dfrac{\delta(x)-\delta(x_{2n-1})}{\delta(x_{2n})-\delta(x_{2n-1})} & \text{si } x \in B_{2n} - B_{2n-1} , \quad n \geqslant 1 \\[2ex] 0 & \text{si } x \in B_1 . \end{cases}$$

Nous avons, pour tout $n \geqslant 1$, $\psi(x_{2n-1}) = 0$ et $\psi(x_{2n}) = 1$, donc $(\psi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre, en utilisant les relations (1), (2) et (3), que ψ appartient à $C_u(G/_H)$.

D'autre part soient $(\tilde{M},\varepsilon)$ la G-compactification de $M(\tilde{\approx} G/_H)$ du lemme (11.4) et $(\varepsilon(x_n))_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\varepsilon(M)$ convergeant vers un élément $x = (x_f)_{f \in C_u^1(M)}$ de $\tilde{M}$. D'après ce qui précède la suite $(\delta(x_n))_{n\geq 1}$ ne peut tendre vers l'infini. Il s'ensuit donc que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une valeur d'adhérence y dans M et par suite nous avons nécessairement $\varepsilon(y) = x$. $\varepsilon(M)$ est donc séquentiellement fermé dans $\tilde{M}$.

11.7. <u>Démonstration du théorème (11.3)</u>. - D'après ((8.5), 2)) et la proposition IV 1 de [1], nous pouvons supposer que μ est apériodique. Si les élément de $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda_0\}$ sont μ-positifs, nous avons alors $M_-^\mu = \{e\}$; d'âprès la proposition (10.1), les G-espaces Π_μ et $\Pi_{\xi(\mu)}$ sont G-homéomorphes.

Supposons que μ possède un moment d'ordre 1. Nous savons que $\tilde{\Lambda}_\mu$, (lemme (11.4)) est une version de l'espace de Poisson de μ .

D'après (10.4) , Λ_μ est compact si et seulement si nous avons :

i) $M_-^\bullet = \{e\}$;

ii) la chaîne de loi μ sur K possède un nombre fini de classes ergodiques.

Or la première (resp. la deuxième) condition est satisfaite si et seulement si les ρ_λ , $\lambda \in \Lambda_0$, sont μ-positifs (resp. $Z(_R\backslash^G) \cap T_{\xi(\mu)} T_{\xi(\mu)}^{-1}$ est d'indice fini dans le centre $Z({}_R\backslash^G)$ de ${}_R\backslash^G$, (voir [24])). D'autre part si Λ_μ n'est pas compact, du lemme (11.6) il s'ensuit que Π_μ , dont une version est $\tilde{\Lambda}_\mu$, n'est ni homogène ni métrisable.

11.8. <u>Démonstration de la proposition (8.7)</u>. - Soient (G,μ) vérifiant les hypothèses du théorème (8.4) et (Λ_μ,ν) la μ-frontière homogène de G associée à (G,μ) par ce théorème. Soit (E,λ) une quelconque μ-frontière homogène de G .

Pour tout $f \in C_u(E)$, $f*\lambda$ est un élément de H_μ ; notons $j(f)$ l'unique élément de $C_u(\Lambda_\mu)$ tel que

$$f * \lambda = j(f) * \nu \quad ;$$

on définit ainsi une application linéaire j de $C_u(E)$ dans $C_u(\Lambda_\mu)$, commutant avec les opérations de G .

Désignons par Z (resp. Z') la variable aléatoire à valeurs dans Λ_μ (resp. dans E) telle que $X_n.\nu$ (resp. $X_n.\lambda$) , converge vaguement, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, vers ε_Z (resp. $\varepsilon_{Z'}$) . Pour tout $g \in G$, nous avons, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$,

$$f(g.Z') = f^g(Z') = \lim_n f^g * \lambda(X_n)$$

et

$$j(f)(g.Z) = j(f^g)(Z) = \lim_n j(f^g) * \nu(X_n) \ .$$

Mais G étant séparable et les fonctions f et $j(f)$ appartenant respectivement à $C_u(E)$ et $C_u(\Lambda_\mu)$, nous avons, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$,

$$f(g.Z') = \lim_n f^g * \lambda(X_n) \ , \quad \forall g \in G$$

et

$$j(f)(g.Z) = \lim_n j(f^g) * \nu(X_n) \ , \quad \forall g \in G \ ;$$

D'où, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$,

(*) $$f(g.Z') = j(f)(g.Z) \ , \quad \forall g \in G \ .$$

Λ_μ et E étant homogènes, de (*) il résulte que j conserve la norme et vérifie

$$j(f_1 f_2) = j(f_1) j(f_2) \qquad f_1 \ , \ f_2 \in C_u(E) \ .$$

j est donc un isomorphisme d'algèbre de $C_u(E)$ sur son image.

Désignons par $(\tilde{\Lambda}_\mu,\varepsilon)$ (resp. $(\tilde{E},\eta)$) une G-compactification de Λ_μ (resp. de E) , (déf. (11.1)), $\tilde{\Lambda}_\mu$ et $\varepsilon(\nu)$ sont respectivement des versions de l'espace de Poisson et du noyau de Poisson de μ . $(\tilde{E},\eta(\lambda))$ est une μ-frontière compacte de G . D'après ce qui précède, l'application qui à $f \in C(\tilde{E})$ associe l'unique élément $\tilde{j}(f) \in C(\tilde{\Lambda}_\mu)$ tel que

(**) $$f * \eta(\lambda) = \tilde{j}(f) * \varepsilon(\nu) \ ,$$

est un isomorphisme d'algèbre de $C(\tilde{E})$ sur son image. L'application duale de $\tilde{j}$ envoie alors les caractères de $C(\tilde{\Lambda}_\mu)$ sur ceux de $C(\tilde{E})$; il existe donc une application continue $\tilde{\phi}$, de $\tilde{\Lambda}_\mu$ dans $\tilde{E}$, commutant avec les opérations de G, telle que $\tilde{j}(f) = f\circ\tilde{\phi}$, pour tout élément f de $C(\tilde{E})$. La relation (**) s'écrit alors

$$f * \eta(\lambda) = f\circ\tilde{\phi} * \varepsilon(\nu) = f * \tilde{\phi}(\varepsilon(\nu)) \ ;$$

ce qui montre que $\tilde{\phi}$ envoie $\varepsilon(\nu)$ sur $\eta(\lambda)$.

Comme $\tilde{\phi}$ envoie $\varepsilon(\nu)$ sur $\eta(\lambda)$, nous avons $\tilde{\phi}(\varepsilon(\Lambda_\mu)) \cap \eta(E) \neq \emptyset$; par suite, Λ_μ et E étant homogènes, nous avons $\tilde{\phi}(\varepsilon(\Lambda_\mu)) = \eta(E)$ et l'application $\phi = \eta^{-1}_{|\eta(E)}\circ\tilde{\phi}\circ\varepsilon$ est une application surjective de Λ_μ sur E, commutant avec les opérations de G et envoyant ν sur λ. La proposition (8.7) est prouvée.

12. CAS D'UN GROUPE DE LIE LOCALEMENT PRODUIT DIRECT D'UN GROUPE DE LIE MOYENNABLE ET D'UN GROUPE DE LIE SEMI-SIMPLE

G désigne un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Nous reprenons les notations du paragraphe 1.

12.1. Famille discriminante d'homomorphismes associée à G. - Appelons Δ l'ensemble des poids de la représentation adjointe du radical $\mathcal{R}$ de $\mathcal{G}$ dans le nilradical $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}$. Par un raisonnement en tout point semblable à celui du lemme (2.8), on montre que pour tout automorphisme θ de $\mathcal{G}$ et tout α de Δ, $\alpha \circ \theta \in \Delta$. En particulier $\alpha \circ \mathrm{Ad}\, g = \alpha$, pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $g \in G_0$.

Tout élément α de Δ est la différentielle en e d'un poids ϕ_α de la représentation adjointe du radical R de G dans $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$. Nous avons alors :

i) Pour tout automorphisme σ de G_0, $\phi_\alpha \circ \sigma = \phi_{\alpha \circ d\sigma}$. En particulier $\phi_\alpha(grg^{-1}) = \phi_\alpha(r)$ $(g \in G_0,\ r \in R)$.

ii) ϕ_α prend la valeur 1 pour tout élément du nilradical de R.

Soit $G_0 = R\,S$ une décomposition de Lévi de G_0, composante connexe de l'unité dans G. Posons alors $\phi_\alpha(g) = \phi_\alpha(r)$, pour $g = r\,s \in G_0$ avec $r \in R$ et $s \in S$. Il est facile de vérifier (utilisant i) et ii)) que l'on définit ainsi un homomorphisme continu ϕ_α de G_0 dans $\mathbb{C}$ multiplicatif. En outre un petit calcul utilisant le théorème de Lévi-Malcev, montre que cet homomorphisme est indépendant du choix du sous-groupe de Lévi S.

A tout $\alpha \in \Delta$, on a donc associé un homomorphisme ϕ_α de G_0 dans $\mathbb{C}$ multiplicatif.

G possède des sous-groupes compacts maximaux deux à deux conjugués et si L est l'un quelconque d'entr'eux nous avons $G = G_0\, L$. Choisissons un tel sous-groupe L de G et posons pour $g = g_0\, l \in G$, avec $g_0 \in G_0$ et $l \in L$,

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(g) &= \int_L \mathrm{Log}\,|\phi_{\alpha\circ \mathrm{Ad}\, l}(g_0)|\, dl \\ &= \int_L \mathrm{Log}\,|\phi_\alpha(l g_0 l^{-1})|\, dl ,\end{aligned}$$

d'où dl est la mesure de Haar normalisée sur L.

On vérifie que l'on définit ainsi un homomorphisme Ψ_α de G dans $\mathbb{R}$ additif indépendant du choix du sous-groupe compact L. En outre, si s désigne une section, à valeurs dans L, de l'application naturelle ζ de G sur $_{G_0}\backslash^{G}$, on voit facilement que l'on a

$$\Psi_\alpha(g) = \frac{1}{\mathrm{card}\ {}_{G_o}\backslash^G} \sum_{x \in {}_{G_o}\backslash^G} \mathrm{Log}|\phi_{\alpha o \mathrm{Ad}\ s(x)}(g_o)| \quad (g = g_o\, l \in G \text{ avec } g_o \in G_o \text{ et } l \in L) .$$

12.2. - Soit Δ_o le sous ensemble de Δ formé des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{R}$ dans $(\mathcal{M}/[\mathcal{M},\mathcal{M}])^{\mathbb{C}}$. Tout élément α de Δ est alors une somme d'éléments de Δ_o . Il s'ensuit que tout élément de la famille d'homomorphismes $\{\Psi_\alpha , \alpha \in \Delta\}$ associée à G est une somme d'éléments de $\{\Psi_\alpha , \alpha \in \Delta_o\}$. $\{\Psi_\alpha , \alpha \in \Delta_o\}$ sera appelée la famille discriminante restreinte d'homomorphismes associée à G .

12.3. - Appelons Λ (resp. Σ_1) l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ (resp. dans $(\mathfrak{h}/\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$) . (Voir (5.5)).

Soit R' le plus grand sous-groupe résoluble distingué de G_o ; ${}_{R'}\backslash^{G_o}$ est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial. Nous notons ξ' l'application naturelle de G sur ${}_{R'}\backslash^G$ et (I,ξ') l'application qui au couple (u,g) de $B(G) \times G$ associe le couple $(u,\xi'(g))$ de $B(G) \times {}_{R'}\backslash^G$.

Nous avons :

12.4. <u>Proposition</u>. - *La famille* $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Sigma_1\}$ *n'est autre que l'ensemble des composés par l'application* (I,ξ') *de la famille d'* A*-cocycles sur* $B(G)$ *associée au groupe de Lie* ${}_{R'}\backslash^G$ *(voir (2.9)).*

Tout A*-cocycle* ρ_λ, $\lambda \in \Lambda$, *est la somme d'un homomorphisme* Ψ_α, $\alpha \in \Delta$, *(voir (12.1)) et du composé par* (I,ξ') *d'un* A*-cocycle sur* $B(G) \times {}_{R'}\backslash^G$ *(qui n'appartient pas nécessairement à la famille d'* A*-cocycles sur* $B(G)$ *associée à* ${}_{R'}\backslash^G$) . *Les deux familles* $\{\rho_\lambda , \lambda \in \Lambda\}$ *et* $\{\Psi_\alpha , \alpha \in \Delta\}$ *coïncident si et seulement si l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G *est le produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre moyennable (i.e. extension compacte de son radical).*

<u>Preuve</u>. - Nous reprenons les notations antérieures. $R' \cap S$ est un sous-groupe résoluble distingué du groupe semi-simple connexe S , par suite $R' \cap S$ est discret et est donc contenu dans le centre $Z(S)$ de S .

Comme $Z(S) \subset \Gamma \subset K$, il s'ensuit que $R' \cap N A = \{e\}$ et la restriction, $\xi'_{|NA}$, de ξ' à $N A$ est un homéomorphisme de $N A$ sur son image. D'autre part ${}_{R'}\backslash^G = \xi'(N)\xi'(A)\xi'(K)$ est une décomposition d'Iwasawa de ${}_{R'}\backslash^G$ et il est facile de voir que le normalisateur de $\xi'(N A)$ dans ${}_{R'}\backslash^G$ n'est autre que $\xi'(N A \Gamma')$.

Soit $\lambda \in \Xi$; λ est la différentielle en e d'un poids ϕ_λ de la représentation adjointe de D dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ vérifiant (voir (2.9))

$$\phi_\lambda(x\, d\, x^{-1}) = \phi_\lambda(d) \qquad (d \in D\ ,\ x \in N\, A\, \Gamma')\ .$$

Posons $\overline{\phi_\lambda} = \phi_\lambda \circ \xi'^{-1}_{|NA}$. D'après le lemme (2.4), à l'homomorphisme $\mathrm{Log}\,|\overline{\phi_\lambda}|$ de ${}_{R'}\backslash^G$ dans $\mathbb{R}$ additif se trouve associé un A-cocycle $\overline{\rho_\lambda}$ sur $B(G) \times {}_{R'}\backslash^G$.

Comme tout élément de Ξ appartenant à Σ_1 s'identifie à un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{N}$, il est clair que $\{\overline{\rho_\lambda}\ ,\ \lambda \in \Sigma_1\}$ n'est autre que la famille d' A-cocycles sur $B(G)$ associée au groupe ${}_{R'}\backslash^G$ (voir (2.9)).

D'autre part soit λ un élément de Ξ appartenant à Λ . La restriction, $\lambda_{|\mathfrak{R}}$, de λ à $\mathfrak{R}$ est un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{M}^{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire un élément de Δ ; notons Ψ_λ l'homomorphisme qui lui est associé (voir (12.1)). Il est alors clair que l'on a

$$\rho_\lambda = \Psi_{\lambda_{|\mathfrak{R}}} + \overline{\rho_\lambda} \circ (I,\xi')\ .$$

Comme on sait que $\mathfrak{a}$ agit de façon semi-simple sur $\mathfrak{R}$, il est clair que les deux familles $\{\rho_\lambda\ ,\ \lambda \in \Lambda\}$ et $\{\Psi_\alpha\ ,\ \alpha \in \Delta\}$ coïncident si et seulement si on a $[\mathfrak{a},\mathfrak{M}] = (0)$. Si $\mathfrak{g}$ est le produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre moyennable, cette condition est satisfaite. Réciproquement supposons que l'on ait $[\mathfrak{a},\mathfrak{M}] = (0)$. Soit $\mathfrak{s}$ un facteur simple non compact de $\mathfrak{S}$ et considérons $\mathfrak{J} = \{X \in \mathfrak{s} : [X,\mathfrak{M}] = (0)\}$. $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathfrak{s}$; comme $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s} \neq (0)$ est contenu dans $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{s}$ est simple, nous avons $\mathfrak{J} = \mathfrak{s}$. Par suite si on écrit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, où $\mathfrak{S}_1$ est une algèbre de Lie semi-simple compacte et $\mathfrak{S}_2$ une algèbre de Lie semi-simple sans facteur compact, nous avons $[\mathfrak{S}_2\ ,\mathfrak{M}] = (0)$ et donc $[\mathfrak{S}_2\ ,\mathfrak{R}] = (0)$. $\mathfrak{g}$ est alors le produit direct d'une algèbre moyennable $\mathfrak{R} \oplus \mathfrak{S}_1$ et d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{S}_2$.

La proposition (12.4)) est prouvée.

12.5. Définitions. - Une partition $\{\Lambda_-\ ,\ \Lambda_+\}$ de Λ est dite induite par une partition $\{\Delta_-\ ,\ \Delta_+\}$ de Δ si Λ_- (resp. Λ_+) est le sous ensemble de Λ formé des éléments λ dont la restriction, $\lambda_{|\mathfrak{R}}$, à $\mathfrak{R}$ appartient à Δ_- (resp. Δ_+) .

Une partition $\{\Delta_-\ ,\ \Delta_+\}$ de Δ est dite stable par automorphismes intérieurs si pour tout $\alpha \in \Delta_-$ (resp. Δ_+) et tout g de G , $\alpha \circ \mathrm{Ad}\, g \in \Delta_-$ (resp. Δ_+) . Si G est connexe cette condition est toujours satisfaite (car $\alpha \circ \mathrm{Ad}\, g = \alpha$, $\forall\, g \in G_0$, $\forall\, \alpha \in \Delta$, voir (12.1)).

12.6. Proposition. - *Soit* $\{\Delta_-\ ,\ \Delta_+\}$ *une partition de* Δ *stable par addition, conjuguaison et automorphismes intérieurs ; notons* $\{\Lambda_-\ ,\ \Lambda_+\}$ *la partition de* Λ *induite par cette partition de* Δ *. Alors* $\{\Lambda_-\ ,\ \Lambda_+ \cup \Sigma_1\}$ *est une partition de* Ξ *stable par addition et conjuguaison ; la décomposition de* G *associée à cette par-*

tition de Ξ *(proposition (4.2)) est une décomposition de* G *en produit amalgamé de deux sous-groupes.*

Preuve. - $\{\Lambda_-, \Lambda_+\}$ est une partition de Λ stable par addition et conjuguaison ; soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_- \oplus \mathcal{M}_+$ la décomposition de $\mathcal{M}$ associée à cette partition de Λ (voir (3.7)). Comme la partition $\{\Lambda_-, \Lambda_+\}$ est induite par une partition de Δ, d'après le lemme (5.6) il s'ensuit que $\mathcal{M}_-$ et $\mathcal{M}_+$ sont stables par $\mathcal{S}$.

Désignons par $\mathcal{D} = \mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ et $\mathcal{G} = \mathcal{D}_- \oplus \mathcal{E}_+$ les décompositions de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ associées à la partition $\{\Lambda_-, \Lambda_+ \cup \Sigma_1\}$ de Ξ (voir (4.1)). Nous avons $\mathcal{D}_- = \mathcal{M}_-$, $\mathcal{D}_+ = (\mathcal{M}_+ + \mathcal{P}) \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{N}$ et $\mathcal{E}_+ = (\mathcal{M}_+ + \mathcal{P}) \oplus \mathcal{S}$. $\mathcal{E}_+$ est donc une sous-algèbre de $\mathcal{G}$.

Soit $G = D_- E_+$ la décomposition de G associée à la partition $\{\Lambda_-, \Lambda_+ \cup \Sigma_1\}$ (voir proposition (4.2)). Nous avons

$$D_- = \exp \mathcal{M}_- \quad \text{et} \quad E_+ = (\exp \mathcal{M}_+)\, P\, S\, \Gamma' .$$

Comme la partition $\{\Delta_-, \Delta_+\}$ de Δ est supposée stable par automorphismes intérieurs, nous avons (lemme (5.6)) $\mathrm{Ad}\, k\, (\mathcal{M}_-) \subset \mathcal{M}_-$ et $\mathrm{Ad}\, k\, (\mathcal{M}_+) \subset \mathcal{M}_+$ pour tout $k \in \Gamma'$. Par suite Γ' normalise les sous-groupes $\exp \mathcal{M}_-$ et $\exp \mathcal{M}_+$ de G. On en déduit que E_+ est un sous-groupe de G ; G est le produit amalgamé des sous-groupes G_- et E_+ (proposition (4.2)).

On notera que si $\mathcal{G}$ est le produit direct d'une algèbre de Lie moyennable et d'une algèbre de Lie semi-simple, toute partition $\{\Lambda_-, \Lambda_+\}$ de Λ est induite par une partition de Δ.

12.7. Proposition. - *Soient* G *un groupe L.C.D. et* Ψ *un homomorphisme continu de* G *dans* $\mathbb{R}$ *additif. Soit* μ *une mesure* $M^1(G)$ *(non nécessairement étalée) et désignons par* $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ *la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G.

Alors si la mesure $\Psi(\mu)$ *n'est pas la mesure de Dirac au point zéro de* $\mathbb{R}$ *on a l'alternative suivante :*

ou bien, $\Psi(X_n)$ *converge vers* $(-\infty)$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall\, g \in G$;

ou bien, $\Psi(X_n)$ *converge vers* $(+\infty)$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall\, g \in G$;

ou bien, $\lim_n \sup \Psi(X_n) = +\infty$ *et* $\lim_n \inf \Psi(X_n) = -\infty$, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall\, g \in G$.

Si μ *possède en outre un moment d'ordre* 1, *alors nous sommes respectivement dans le premier, deuxième ou troisième cas suivant que* $\int_G \Psi(g)\, \mu(dg)$ *est négatif strict, positif strict, ou nul.*

Preuve. - Le résultat énoncé ci-dessus est bien connu. Dans le cas où μ est étalée il se déduit des propositions (7.8) et (7.12). Dans le cas où μ n'est pas étalée, une démonstration analogue à celle de la proposition (7.8), faisant toutefois appel au théorème de Choquet-Deny sur les fonctions harmoniques sur les groupes abéliens, permet de prouver la première assertion de la proposition (12.6). D'autre part si μ possède un moment d'ordre 1, d'après la loi des grands nombres $\frac{1}{n}\ \Psi(X_n)$ converge, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, vers $\alpha = \int_G \Psi(g)\ \mu(dg)$. Si $\alpha < o$ (resp. $\alpha > o$), on est alors dans le premier (resp. le deuxième) cas. Si $\alpha = o$, on sait (voir par exemple [23]) que la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$, $\Psi(X_n)$, est récurrente (i.e. revient une infinité de fois, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, dans tout ouvert de $\mathbb{R}$). On est alors dans le troisième cas.

Dorénavant G désigne un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est le produit direct d'une algèbre de Lie moyennable et d'une algèbre de Lie semi-simple. Les deux familles $\{\rho_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ et $\{\Psi_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ coïncident donc.

12.8. <u>Décomposition de G associée à une mesure μ de $M^1(G)$</u>. - Posons

$$\Delta_-^\mu = \{\alpha \in \Delta : \Psi_\alpha \text{ est } \mu\text{-négatif strict}\}$$

et

$$\Delta_+^\mu = \{\alpha \in \Delta : \Psi_\alpha \text{ est } \mu\text{-positif}\} .$$

La partition $\{\Delta_-^\mu, \Delta_+^\mu\}$ de Δ est stable par addition, conjuguaison et automorphisme intérieur (définition (12.5)).

Si μ possède un moment d'ordre 1 nous avons

$$\Delta_-^\mu = \{\alpha \in \Delta : \int_G \Psi_\alpha(g)\ \mu(dg) < o\}$$

$$\Delta_+^\mu = \{\alpha \in \Delta : \int_G \Psi_\alpha(g)\ \mu(dg) \geqslant o\}$$

A toute mesure $\mu \in M^1(G)$ se trouve donc associée (voir proposition (12.6)) une décomposition de G en produit amalgamé de deux sous-groupes. Nous la noterons $G = M_-^\mu\ T_+^\mu$.

Nous avons alors :

i) Pour toute mesure μ *de* $M^1(G)$ *apériodique, possédant un moment d'ordre 1 (non nécessairement étalée), la composante de* $X_n g$ *sur* M_-^μ *converge,* $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, *et la limite est indépendante de* $g \in G$.

[Comme $\mathcal{M}_-$ et $\mathcal{M}_+$ sont stables par $\mathcal{S}$, i) résulte du théorème (9.1) dans le cas où μ est étalée ; en fait, cette dernière condition n'est pas nécessaire car nous avons

$$\alpha \in \Delta_-^\mu \Longleftrightarrow \int_G \Psi_\alpha(g)\ \mu(dg) < o ,$$

sans pour cela supposer que μ est étalée. (Voir proposition (12.7))] .

D'autre part nous avons :

12.9. Théorème. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes qui est localement le produit direct d'un groupe de Lie moyennable et d'un groupe de Lie semi-simple. Soient* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée, apériodique, possèdant un moment d'ordre 1 et* $G = M_-^{\mu} T_+^{\mu}$ *une décomposition, en produit amalgamé de sous groupes, associée à* μ *(voir (12.8)). Alors* $\Lambda_\mu(G)$ *(voir théorème (8.4)) est en tant que* G*-espace le produit direct des* G*-espaces* $G/_{T_+^\mu} \times \Lambda_{\xi(\mu)}({}_R\backslash^G)$ *, où* R *désigne le radical de la composante connexe* G_o *de l'unité dans* G *et* ξ *l'application naturelle de* G *sur* ${}_R\backslash^G$ *. En outre si* $(\Omega, \mathfrak{F}, (X_n)_{n\in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g\in G})$ *désigne la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G *, pour tout* $x \in G/_{T_+^\mu}$ *,* $X_n.x$ *converge,* $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g\in G$*, et la v.a. limite ne dépend pas de* x *.*

En particulier si G *est moyennable (i.e.* ${}_R\backslash^G$ *est compact), nous avons* $\Lambda_\mu(G) = G/_{T_+^\mu}$ *et* ν *(voir théorème (8.4)) est l'unique mesure de probabilité* μ*-invariante sur* $\Lambda_\mu(G)$.

Preuve. - Le fait que $X_n.x$ converge, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g\in G$, pour tout élément x de $G/_{T_+^\mu}$ et que cette limite soit indépendante de x est une conséquence de *i)*.

Reprenons les notations antérieures. Nous avons

$$T_+^\mu = M_+^\mu P S \Gamma' \quad \text{et} \quad S = NA\tilde{N}\Gamma \text{ (modulo } m_S) .$$

Nous savons (voir (8.5)) que $\Lambda_\mu(G) = G/_{M_+^\mu PAN\Gamma'_\mu}$, où Γ'_μ est un sous groupe de Γ' contenant Γ'_o et que $\Lambda_{\xi(\mu)}({}_R\backslash^G) = \xi(G)/_{\xi(AN\Gamma'_\mu)}$.

Des hypothèses faites sur G , il résulte que les sous groupes fermés M_-^μ et M_+^μ de G sont stables par les éléments de $S\Gamma'$. Le G-espace $G/_{M_+^\mu PAN\Gamma'_\mu}$ est alors G-homéomorphe au produit direct des G-espaces $G/_{T_+^\mu} \times \Lambda_{\xi(\mu)}({}_R\backslash^G)$.

Si G est moyennable, ${}_R\backslash^G$ est compact ; comme μ est apériodique, il s'ensuit que $\Lambda_{\xi(\mu)}({}_R\backslash^G)$ est réduit à un point et donc $\Lambda_\mu = G/_{T_+^\mu}$. Soient ν' une mesure μ-invariante de $M^1(\Lambda_\mu)$ et f une fonction continue à support compact sur Λ_μ ; la fonction $f*\nu'$ est μ-harmonique bornée et il s'ensuit que $f*\nu'(X_n)$ converge, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, quand n tend vers l'infini. Mais

$$f*\nu'(X_n) = \int_{\Lambda_\mu} f(X_n.x)\ \nu'(dx)$$

et on sait que $X_n.x$ converge, $\mathbb{P}_g$-p.s. $\forall g \in G$, vers une variable aléatoire de loi ν, par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_e)$, indépendante de $x \in \Lambda_\mu$. D'après le théorème de convergence dominé il s'ensuit alors que

$$\nu'(f) = \mathbb{E}_e\left[f*\nu'(X_n)\right] \longrightarrow \nu(f) \;;$$

ce qui montre que $\nu' = \nu$; il existe donc sur Λ_μ une unique mesure de probabilité μ-invariante. Le théorème (12.9) est démontré.

Nous obtenons pour ces groupes la caractérisation :

12.10. <u>Corollaire</u>. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes tel que* ${}_R\backslash^G$ *soit de centre fini. Soit* $\{\Psi_\alpha, \alpha \in \Delta_o\}$ *la famille restreinte d'homomorphismes de* G *dans* $\mathbb{R}$ *additif associée à* G *(voir (12.1)).* *Soit* μ *une mesure de* $M^1(G)$ *étalée, possèdant un moment d'ordre 1 et vérifiant*

$$\int_G \Psi_\alpha(g)\ \mu(dg) = o \ , \quad \forall \alpha \in \Delta_o \ .$$

(Ce qui est le cas si μ *est symétrique !).*

Alors nous avons les équivalences :

i) l'espace de Poisson Π_μ *de* μ *est métrisable ;*

ii) Π_μ *est homogène ;*

iii) Π_μ *est* G*-homéomorphe à* $\Pi_{\xi(\mu)}$;

iv) l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ *de* G *est le produit direct d'une algèbre moyennable et d'une algèbre semi-simple.*

<u>Preuve</u>. - D'après la proposition (12.4), la condition iv) de ce corollaire équivaut à :

v) les familles $\{\Psi_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ et $\{\rho_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ sont identiques.

Donc si iv) est vérifiée, les éléments $\rho_\lambda, \lambda \in \Lambda$, sont tous μ-positifs et d'après le théorème (11.3) on a donc iv) $\Longrightarrow$ iii).

Comme il est clair que iii) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ i), il nous faut donc prouver que i) $\Longrightarrow$ iv).

Supposons que iv) ne soit pas vérifiée ; c'est-à-dire que l'action adjointe de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$ soit non triviale (voir (12.4)). Pour $\lambda \in \Lambda$, écrivons

$$\rho_\lambda = \Psi_\lambda + \overline{\rho}_\lambda o(I,\xi') \qquad \text{(voir (12.4))}$$

et posons

$$a_\lambda = \iint \rho_\lambda(u,g)\ \nu(du)\ \mu(dg) \quad \text{et} \quad \overline{a}_\lambda = \iint \overline{\rho}_\lambda(u,g)\ \nu(du)\ \mu(dg) \ ,$$

où ν désigne l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur la frontière maximale $B(G)$ de G. L'action adjointe de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{M}$ étant semi-simple, il s'ensuit que l'on a

(*) $$\sum_{\lambda \in \Lambda} \overline{a}_\lambda = o .$$

D'autre part comme $[\mathfrak{a}, \mathfrak{M}] \neq (o)$, il est clair (voir (12.4)) qu'il existe $\gamma \in \Sigma_1$ tel que $[\mathfrak{z}_\gamma , \mathfrak{M}] \neq (o)$ et par suite il existe des éléments λ_1 et λ_2 de Λ tels que

$$\lambda_1|_{\mathfrak{R}} = \lambda_2|_{\mathfrak{R}} \quad \text{et} \quad \lambda_2|_{\mathfrak{a}} = \lambda_1|_{\mathfrak{a}} + \gamma .$$

Autrement dit il existe des éléments λ_1 et λ_2 de Λ tels que

(**) $$\overline{a}_{\lambda_2} = \overline{a}_{\lambda_1} + a_\gamma .$$

Du fait que $a_\gamma < o$ (corollaire (7.15)), il résulte de (*) et (**) qu'il existe des éléments λ de Λ pour lesquels $\overline{a}_\lambda < o$. D'après l'hypothèse $\int_G \Psi_\alpha(g)\, \mu(dg) = o$, $\forall\, \alpha \in \Delta$, il s'ensuit alors qu'il existe des A-cocycles ρ_λ , $\lambda \in \Lambda$, qui sont μ-négatifs stricts. D'après le théorème (11.3), i) n'est donc pas vérifié.

Nous retrouvons donc le résultat de [4] :

12.11. <u>Corollaire</u>. - *Soit* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes tel que* $_R\backslash^G$ *soit de centre fini. Alors* G *est de type* (T) *(i.e. l'espace de Poisson* Π_μ *est homogène pour toute mesure de* $M^1(G)$ *étalée ; voir* [1]*) si et seulement si l'algèbre de Lie de* G *est le produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre moyennable telle que les valeurs propres de* adX *soient imaginaires pures pour tout élément* X *de son radical.*

13. CAS DES GROUPES L.C.D.

13.1. Lemme. - *Tout groupe L.C.D. tel que* ${}_{G_o}\backslash^{G}$ *soit compact possède une frontière maximale* $B(G)$ *unique à* G*-homéomorphisme près. Tout sous groupe compact distingué de* G *opère trivialement sur* $B(G)$.

Preuve. - On sait ([21]) qu'il existe des sous groupes compacts distingués, C , arbitrairement petits tels que ${}_C\backslash^G$ soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Pour un tel groupe C de G ; notons $B({}_C\backslash^G) = {}_{H({}_C\backslash^G)}\backslash^G$, la frontière maximale de ${}_C\backslash^G$. $H({}_C\backslash^G)$ possède la propriété de point fixe.

Soit $H(G)$, l'image réciproque de $H({}_C\backslash^G)$ par l'application naturelle de G sur ${}_C\backslash^G$; posons $B(G) = {}_{H(G)}\backslash^G$. $B({}_C\backslash^G)$ qui est un ${}_C\backslash^G$-espace à droite, est aussi, de façon évidente, un G-espace à droite, G-homéomorphe à $B(G)$. D'après ([1] lemme II.8), $H(G)$ possède la propriété de point fixe. Par suite, ([1], corollaire 1 de la proposition II.2), $B(G)$ est une frontière maximale de G et toute frontière maximale de G est G-homéomorphe à $B(G)$. Il s'ensuit d'une part que $B({}_C\backslash^G)$ est indépendant (à G-homéomorphisme près) du choix du sous groupe compact distingué C et d'autre part que tout sous groupe compact distingué de G opère trivialement sur toute frontière maximale de G . Le lemme (13.1) est prouvé.

13.2. Lemme. - *Soient* G *un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes ;* C *un sous groupe compact distingué de* G *et* p *l'application naturelle de* G *sur* ${}_C\backslash^G$ *. Alors l'application*

$$\{\rho_\lambda\ ,\ \lambda \in \Xi\ \ (\textit{resp. } \Lambda_o)\} \longmapsto \{\rho_\lambda o(I,p)\ ,\ \lambda \in \Xi\ \ (\textit{resp. } \Lambda_o)\}\ ,$$

établit une correspondance biunivoque entre les familles discriminantes (resp. discriminantes restreintes) d' A*-cocycles sur* $B(G)$ *associées à* ${}_C\backslash^G$ *, et celles associées à* G *. De plus si* $\{\Psi_\alpha\ ,\ \alpha \in \Delta\ \ (\textit{resp. } \Delta_o)\}$ *désigne la famille discriminante restreinte) d'homomorphismes associée à* ${}_C\backslash^G$ *, alors celle associée à* G *est* $\{\Psi_\alpha op\ ,\ \alpha \in \Delta\ \ (\textit{resp. } \Delta_o)\}$.

Preuve. - Reprenons les notations du paragraphe 2. Considérons la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{K}$ et notons $\mathfrak{h}$ le nilradical de $\mathfrak{D}$.

Soit $\mathfrak{C}$ l'algèbre de Lie de C ; $\mathfrak{C}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Désignons par dp la différentielle en e de l'application naturelle p de G sur ${}_C\backslash^G$.

Notons Ξ (resp. $\bar{\Xi}$) l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{D}$

dans $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ (resp. de $dp(\mathfrak{D})$ dans $(dp(\mathfrak{h}))^{\mathbb{C}}$. Nous allons montrer que

$$\{\lambda \in \Xi : \mathrm{Re}\lambda \neq o\} = \{\bar{\lambda}odp \ , \ \bar{\lambda} \in \bar{\Xi}\}$$

Soit λ un élément de Ξ. Il existe alors un idéal $\mathfrak{w}$ de $\mathfrak{D}$ contenu dans $\mathfrak{h}$ et un élément H de $\mathfrak{h} - \mathfrak{w}$ tels que, tout X de $\mathfrak{D}$,

(*) $$[X,H] = \lambda(X).H \quad \mathrm{mod.}\ \mathfrak{w}.$$

Si $\mathrm{Re}\lambda \neq o$, H ne peut appartenir à $(\mathfrak{k}+\mathfrak{w}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{w}$. En effet supposons que H appartienne à $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{w}$ et écrivons $H = H_1 + H_2$ avec $H_1 \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ et $H_2 \in \mathfrak{w}$; de la relation (*) il résulte que

$$\forall X \in \mathfrak{D},\ [X,H_1] = \lambda(X).H_1 \quad \mathrm{mod.}\ \mathfrak{w} ;$$

et par suite

$$\forall X \in \mathfrak{D}\ ,\ \mathrm{Ad}\exp H_1(X) = \mathrm{Exp}\ \mathrm{ad}\ H_1(X) = e^{\lambda(X)}.H_1 \quad \mathrm{mod.}\ \mathfrak{w} \ ;$$

Comme $\mathrm{Ad}\exp H_1$ est un élément du groupe compact $\mathrm{Ad}\, C$, on a alors nécessairement $|e^{\lambda(X)}| = 1$, pour tout $X \in \mathfrak{D}$ (i.e. $\mathrm{Re}\lambda = o$).

Nous avons alors, pour tout X de $\mathfrak{D}$,

$$[dp(X)\ ,\ dp(H)] = dp([X,H]) = \lambda(X).dp(H) \quad \mathrm{mod.}\ dp(\mathfrak{w})\ ,$$

où $dp(H)$ est un élément de $dp(\mathfrak{h}) - dp(\mathfrak{w})$.

On en déduit que λ s'écrit $\bar{\lambda}odp$, où $\bar{\lambda}$ est un élément de $\bar{\Xi}$.

Inversement soit $\bar{\lambda}$ un élément de $\bar{\Xi}$. Il existe un idéal $\bar{\mathfrak{w}}$ de $dp(\mathfrak{D})$ contenu dans $dp(\mathfrak{h})$ et un élément $dp(H)$ de $dp(\mathfrak{h}) - \bar{\mathfrak{w}}$ tels que, pour tout X de $\mathfrak{D}$,

$$[dp(X),dp(H)] = \bar{\lambda}(dp(X)).dp(H) \quad \mathrm{mod.}\ \bar{\mathfrak{w}}\ ,$$

il s'ensuit que l'on a, pour tout X de $\mathfrak{D}$,

$$[X,H] = \bar{\lambda}odp(X).H \quad \mathrm{mod.}\ \mathfrak{w}\ ,$$

où $\mathfrak{w} = dp^{-1}(\bar{\mathfrak{w}}) \cap \mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{D}$ contenu dans $\mathfrak{h}$ et H est un élément de $\mathfrak{h} - \mathfrak{w}$. Autrement dit $\bar{\lambda}odp$ appartient à Ξ.

La première assertion du lemme (13.2) est alors claire. La deuxième assertion se montre de la même façon.

13.3. <u>Familles discriminantes et discriminantes restreintes d'A-cocycles associées à G.</u> - Soit C un sous groupe compact distingué de G tel que le quotient ${}_C\backslash^G$ soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Comme C opère trivialement sur $B(G)$ (lemme (12.1)), l'application $\rho \longmapsto \rho(I,p)$, où p désigne l'application naturelle de G sur ${}_C\backslash^G$, établit une correspondance biunivoque entre les A-cocycles sur $B(G) \times {}_C\backslash^G$ et les A-cocycles, C-invariants, sur $B(G) \times G$. Nous appelons alors famille discriminante (resp. discriminante restreinte) d'A-cocycles associée à G , l'image par cette application d'une quelconque famille discriminante (resp. discriminante restreinte) d'A-cocycles sur $B(G)$ associée à ${}_C\backslash^G$. D'après le lemme (13.2), cette définition est indépendante du choix du sous groupe compact distingué C . D'après le lemme (2.12) si $\{\rho_\lambda\ ,\ \lambda \in \Xi$ (resp. Λ_o)$\}$ est une famille discriminante (resp. discriminante restreinte) d'A-cocycle associée à G , toute autre famille discriminante (resp. discriminante restreinte) s'écrit $\{\rho_\lambda o(J_x, I_x)\ ,\ \lambda \in \Xi$ (resp. Λ_o)$\}$, pour un certain élément x de G_o , où

$$J_x : B(G) \longrightarrow B(G) \qquad , \qquad I_x : G \longrightarrow G$$
$$u \longmapsto u.x \qquad\qquad\qquad g \longmapsto x^{-1}gx$$

13.4. Théorème. - *Soit* G *un groupe L.C.D. tel que* ${}_{G_o}\backslash^G$ *soit compact. Alors avec les mêmes hypothèses sur la mesure* μ *de* $M^1(G)$ *, les théorèmes (8.4) et (11.3) s'appliquent au couple* (G,μ) .

Preuve. - Soit S_μ le semi-groupe ouvert associé à μ (voir (6.2)). $S_\mu S_\mu^{-1}$ est un voisinage ouvert de e dans G . Considérons un sous-groupe compact distingué C de G contenu dans $S_\mu S_\mu^{-1}$ tel que ${}_C\backslash^G$ soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. D'après le théorème (6.8) les fonctions μ-harmoniques bornées sur G sont les composées par l'application naturelle p de G sur ${}_C\backslash^G$ des fonctions $p(\mu)$-harmoniques sur ${}_C\backslash^G$. Le théorème (13.4) résulte alors des théorèmes (8.4) et (13.3) que l'on applique au couple $({}_C\backslash^G\ ,\ p(\mu))$.

13.5. - Soit G un groupe L.C.D. tel que ${}_{G_o}\backslash^G$ soit compact. S'il existe un sous-groupe compact distingué C de G tel que ${}_C\backslash^G$ soit un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre moyennable (i.e. extension compacte de son radical $\mathfrak{R}$) , nous disons que G vérifie l'hypothèse (H_1) . Si de plus $\mathfrak{g}$ est le produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre moyennable de type (R) (i.e. que les valeurs propres de $ad_{\mathfrak{R}} X$ sont imaginaires pures pour tout $X \in \mathfrak{R}$) , nous disons que G vérifie l'hypothèse (H_2) .

13.6. Famille discriminante et discriminante restreinte d'homomorphismes associée à G . - Soit C un sous-groupe compact distingué de G tel que ${}_C\backslash^G$ soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes . Tout homomorphisme de G dans $\mathbb{R}$ additif s'annulant sur C , l'application $\Psi \longrightarrow \Psi op$, établit une correspondance biunivoque entre les homomorphismes sur ${}_C\backslash^G$ et ceux sur G . Nous appelons alors famille discriminante (resp. discriminante restreinte) d'homomorphismes associée à G, l'image par cette application, de la famille discriminante (resp. discriminante restreinte) d'homomorphismes associée à ${}_C\backslash^G$. D'après le lemme (13.2), cette définition est indépendante du choix du sous-groupe compact distingué C.

13.7. <u>Proposition</u>. - *Soit* G *un groupe L.C.D. tel que* ${}_{G_o}\backslash^G$ *soit compact. Alors* G *vérifie l'hypothèse* (H_1) *(resp.* (H_2)*) si et seulement si toute famille discriminante restreinte d'*A*-cocycles associée à* G *coïncide avec la famille discriminante restreinte d'homomorphismes associée à* G *(resp. est réduite à* (0)*)*.

<u>Preuve</u>. - La proposition (13.7) résulte de la proposition (12.4).

Nous obtenons alors pour les groupes vérifiant l'hypothèse (H_1) (resp. (H_2)) la caractérisation :

13.8. <u>Corollaire</u>. - *Soit* G *un groupe L.C.D. tel que* ${}_{G_o}\backslash^G$ *soit compact et* ${}_R\backslash^G$ *soit de centre fini, où* R *désigne le radical de* G_o, *composante connexe de l'unité dans* G. *Soit* $(\{\Psi_\alpha, \alpha \in \Delta_o\}, \mu)$ *vérifiant l'hypothèse de (12.10). Alors nous avons les équivalences :*

i) l'espace de Poisson Π_μ *de* μ *est métrisable ;*

ii) Π_μ *est homogène ;*

iii) Π_μ *est* G*-homéomorphe à* $\Pi_{\xi(\mu)}$;

iv) G *vérifie l'hypothèse* (H_1).

13.9. <u>Corollaire</u>. - *Soit* G *comme dans le corollaire (13.8). Alors* G *est de type (T) si et seulement si* G *vérifie l'hypothèse* (H_2).

14. THEOREME CENTRAL LIMITE SUR LES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

14.0. Introduction. - Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe G_o de l'unité est semi-simple de centre quelconque. Soit μ une mesure de probabilité sur G. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la $n^{\text{ième}}$ convolée, μ^n, de μ.

Soit $G = NA\mathcal{K}$ et $G = NA\tilde{N}\Gamma'$ mod. m_G, (resp. $G_o = NAK$ et $G_o = NA\tilde{N}\Gamma$ mod. m_{G_o}) des décompositions d'Iwasawa et de Bruhat de G (resp. de G_o). Posons $B_o = K \cap NA\tilde{N}$ et désignons par W la chambre de Weyl qui a servi à déterminer N (voir (1.2)). Alors nous savons (voir [26]) que m_G-presque tout élément g de G s'écrit de façon unique.

$$g = x\,\tilde{a}\,k \quad \text{avec} \quad x \in B_o \ , \quad \tilde{a} \in \exp W \quad \text{et} \quad k \in \mathcal{K} .$$

Dans le cas d'un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et d'une mesure μ absolument continue par rapport à la mesure de Haar, Virtser ([26]) a étudié le comportement de μ^n dans la représentation

$$G = B_o\,(\exp W)\,K \quad \text{mod. } m_G .$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G et écrivons

$$X_n = x_n\,(\exp h_n)\,k_n \quad \text{avec} \quad x_n \in B_o \ , \quad h_n \in W \quad \text{et} \quad k_n \in K$$

Virtser montre que pour toute loi $\mathbb{P}_g$, $g \in G$, k_n (resp. x_n) se comporte comme la chaine de loi μ sur ${}_{AN}\backslash^{G}$ (resp. sur la frontière maximale droite ${}^{G}/_{A\tilde{N}\Gamma}$ de G) et h_n est asymptotiquement gaussienne. De plus pour presque tous les éléments g de G, (plus précisément pour les éléments g dont l'image dans ${}_{AN}\backslash^{G}$ appartient à une sous-classe cyclique ou à une classe ergodique sans classe cyclique de la chaine de loi μ sur ${}_{AN}\backslash^{G}$) ; les v.a. x_n, h_n et k_n sont asymptotiquement indépendantes, pour la loi $\mathbb{P}_g$.

Notre étude est faite directement dans la représentation d'Iwasawa. Soit μ une mesure de $M^1(G)$ étalée apériodique et possèdant un moment 2. Ecrivons

$$X_n = N_n\,(\exp H_n)\,K_n \quad \text{avec} \quad N_n \in N \ , \quad H_n \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad K_n \in \mathcal{K} \ ,$$

où $\mathfrak{a}$ désigne l'algèbre de Lie de A. K_n n'est autre que la chaine de loi μ sur $\mathcal{K}$ identifié à ${}_{AN}\backslash^{G}$. Nous montrons que : pour tout $x \in G$, la composante N_n, converge $\mathbb{P}_x$-p.s., vers une v.a. dont la loi est équivalente à la mesure de Haar de N ; H_n est asymptotiquement gaussienne pour toute loi $\mathbb{P}_g$, $g \in G$. De plus pour presque tous les éléments g de G, les trois composantes sont asymptotiquement indépendantes, pour la loi $\mathbb{P}_g$. Ce résultat permet de retrouver celui de Virtser et de le préciser. En particulier on montre que la composante x_n converge dans B_o, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$.

14.1. - Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes dont la composante connexe G_o de l'unité est semi-simple. Soit μ une mesure de $M^1(G)$ que nous supposons apériodique (i.e. que le sous-groupe fermé engendré par le support de μ est égal à G). Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_g)_{g \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G ; pour tout $g \in G$, nous avons

$$X_n = g\, Y_1 \ldots Y_n \quad , \quad \mathbb{P}_g\text{-p.s.} ,$$

où $\{Y_i\}_{i \geqslant 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et de loi μ.

Désignons par $G = NA\mathcal{K}$ (resp. $G_o = NAK$) une décomposition d'Iwasawa de G (voir (1.8)) (resp. de G_o). A est un groupe de Lie abélien simplement connexe ; si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie de A, l'application, $\exp_A$, est un isomorphisme analytique du groupe additif de $\mathfrak{a}$ sur A. Ecrivons,

$$X_n = N_n\,(\exp H_n)\, K_n \quad \text{avec} \quad N_n \in N ,\ H_n \in \mathfrak{a} \ \text{et} \ K_n \in \mathcal{K} .$$

Soient Γ' l'intersection des normalisateurs dans G de N, A et K ; et Γ le centralisateur de A dans K. Nous savons (voir § 1) que Γ' rencontre les différentes composantes connexes de G, est contenu dans $\mathcal{K}$ et son intersection avec K est Γ. En outre $NA\Gamma'$ et $NA\Gamma$ sont respectivement les normalisateurs de NA dans G et G_o.

D'autre part, soit $r = \dim \mathfrak{a}$. Dans la suite nous désignons par h_i, $i \in \{1,\ldots,r\}$ un système de fonctions coordonnées par rapport à une certaine base de $\mathfrak{a}$ et par $\| \ \|$ une norme sur $\mathfrak{a}$.

14.2. <u>Comportement de</u> N_n. - Si μ est étalée apériodique et possède un moment d'ordre 1, nous savons (théorème (9.2)) que N_n converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$, vers une v.a. N_∞ à valeurs dans N. De plus nous avons :

<u>Lemme</u>. - *Pour tout élément* g *de* G, *la loi* λ_g *de la v.a.* N_∞, *par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}_g$, *est équivalente à la mesure de Haar* m_N *de* N.

<u>Preuve</u>. - Soit $Z(G_o)$ le centre de G_o ; $Z(G_o)$ est discret et contenu dans K. Soit p l'application naturelle de G sur $Z(G_o)\backslash G$; quitte à remplacer le couple (G,μ) par $(p(G),p(\mu))$, nous pouvons supposer que G_o est de centre trivial ; $\mathcal{K}$ est alors compact.

Considérons la décomposition de Bruhat de G, $G = N\tilde{A}N\Gamma'$ mod. m_G ; et notons β l'application naturelle de G sur $G/_{\tilde{A}N\Gamma'}$. La restriction, β_N, de β à N

est un homéomorphisme de N sur un ouvert de ${}^G/_{AN\tilde{\Gamma}'}$, de $\beta(m_K)$-mesure 1 ([26]). D'après le théorème (9.7) nous avons $\beta(\lambda_g) = \varepsilon_g * \beta(\lambda_e)$ et $\beta(\lambda_e)$ est l'unique mesure de probabilité μ-invariante de la frontière maximale droite ${}^G/_{AN\tilde{\Gamma}'}$ de G . Or la chaine de loi μ sur ${}^G/_{AN\tilde{\Gamma}'}$ est ergodique et la probabilité de transition de cette chaîne vérifie la condition de Doeblin pour la mesure $\beta(m_K)$ (voir corollaires (7.2) et (7.6)). D'après [23] nous savons qu'alors $\beta(\lambda_e)$ est équivalente à $\beta(m_K)$. $\beta(\lambda_e)$ est donc une mesure quasi-invariante sur ${}^G/_{AN\tilde{\Gamma}'}$. Le lemme s'en déduit immédiatement.

14.3. <u>Comportement de</u> H_n . - Si (k,g) est un élément de $K\times G$, on désigne par $H(k,g)$ la composante sur $\mathfrak{a}$ (dans la décomposition $G = N(\exp \mathfrak{a})K$) de l'élément kg de G . Il est facile de voir que l'on a

$$H(\gamma k,g) = \mathrm{Ad}\,\gamma(H(k,g)) \ . \quad (\gamma\in\Gamma' \ , \ k\in K \ , \ g\in G) \ ,$$

(i.e. $\exp H(\gamma k,g) = \gamma(\exp H(k,g))\,\gamma^{-1}$) ;

en particulier

$$H(\gamma k,g) = H(k,g) \qquad (\gamma\in\Gamma \ , \ k\in K \ , \ g\in G) \ .$$

Considérons alors l'application naturelle β de G sur ${}_{NA\Gamma}\backslash^G$ et posons

$$\overline{H}(u,g) = H(k,g) \qquad (u\in {}_{NA\Gamma}\backslash^G \ , \ g\in G) \ ,$$

où $k\in K$ avec $\beta(k) = u$.

Pour tout couple (u,g) de ${}_{NA\Gamma}\backslash^G\times G$, $\overline{H}(u,g)$ est bien défini et on vérifie que l'on a

$$\overline{H}(u,g_1g_2) = \overline{H}(u,g_1) + \overline{H}(u.g_1,g_2) \qquad (u\in {}_{NA\Gamma}\backslash^G \ ; \ g_1,g_2\in G) \ .$$

D'où nous avons

$$H_n = \overline{H}(\beta(e)\ , X_o) + \sum_{i=1}^{n} \overline{H}(\beta(X_{i-1})\ , Y_i) \ .$$

Si μ est apériodique et étalée, nous savons (lemme (7.7)) que la chaîne de loi μ sur ${}_{NA\Gamma}\backslash^G$ est ergodique. (On notera que ${}_{NA\Gamma}\backslash^G$ est G-homéomorphe au G-espace produit $B(G)\times {}_{G_o}\backslash^G$, où $B(G)$ désigne la frontière maximale de G) . Supposons de plus que

$$(*) \qquad \int_{NA\Gamma\backslash G}\int_G \|\overline{H}(u,g)\|^2\,\nu(du)\,\mu(dg) < +\infty \ ,$$

où ν désigne l'unique mesure μ-invariante de $M^1({}_{NA\Gamma}\backslash^G)$. Ce qui est le cas si μ possède un moment d'ordre 2 . [En effet la fonction

$$F(g) = \sup_{u\in {}_{NA\Gamma}\backslash^G} \|\overline{H}(u,g)\| \qquad (g\in G) \ ,$$

est une fonction sous-additive positive continue de G . Si μ possède un moment d'ordre 2 , nous savons alors (voir (6.3)) que $\int_G (F(g))^2 \mu(dg) < +\infty$ et la condition (*) est vérifiée] . Alors d'après ([6], ch. 5, § 7), pour toute probabilité $\mathbb{P}_g$, $g \in G$, le vecteur H_n de $\mathfrak{a}$ est asymptotiquement gaussien, de moyenne $n\, e_\mu$, de matrice de covariance $n\, \sigma_\mu$, où

$$e_\mu = \int_{NA\Gamma\backslash G} \int_G \overline{H}(u,g)\ \nu(du)\ \mu(dg)$$

et la matrice de covariance σ_μ est non dégénérée (voir [26] prop. 1). Plus précisément, désignons par ϕ_n la loi gaussienne sur $\mathfrak{a}$ de paramètres $\{ne_\mu, n\sigma_\mu\}$, alors pour tout $g \in G$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que pour tout entier n supérieur à n_0 , on ait

$$\sup_V \ \left| \mathbb{P}_g\ [H_n \in V] - \phi_n(V) \right| < \varepsilon \ ,$$

où V est un borélien de $\mathfrak{a}$ de la forme $\{H \in \mathfrak{a} : h_i(H) < a_i\ ,\ i \in \{1,\dots,r\}\}$ pour des réels quelconques a_i , $i \in \{1,\dots,r\}$.

14.4. Comportement de K_n . - K_n n'est autre que la marche de loi μ sur K identifié à ${}_{NA}\backslash^G$. Si nous supposons que la mesure μ de $M^1(G)$ est étalée, nous savons (voir (10.3)) que cette chaine possède un nombre dénombrable de classes ergodiques, soit E_i , $i \in I$, où I est un sous-ensemble fini ou infini de $\mathbb{N}$; et pour tout élément g de G , K_n finit par rentrer, $\mathbb{P}_g$-p.s. dans une classe ergodique et y reste.

Si $g \in G$, on note $\overline{g}$ sa composante sur K pour la décomposition d'Iwasawa. Comme on a $\overline{\gamma g} = \gamma\overline{g}$ ($\gamma \in \Gamma'$, $g \in G$), les éléments de Γ' permutent les classes ergodiques ; c'est-à-dire que pour tout $i \in I$ et tout $\gamma \in \Gamma'$, il existe $r(i,\gamma) \in I$ tel que $\gamma E_i = E_{r(i,\gamma)}$.

Si de plus μ est apériodique, on sait que la chaîne de loi μ sur ${}_{NA\Gamma}\backslash^G$ est ergodique (lemme (7.7)). On en déduit (voir [26], § 5) que si A et B sont deux classes ergodiques (ou deux sous-classes cycliques) pour la chaîne de loi μ sur K , il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma A = B$. Si Γ est connexe, la chaîne de loi μ sur K est ergodique (voir [26], § 5). Dans le cas général, Γ possède un nombre fini de composantes connexes ; appelons s le plus petit entier tel que pour tout élément γ de Γ , on ait $\gamma^s \in \Gamma_0$, composante connexe de l'unité dans Γ ; alors la période d'une quelconque classe ergodique de la chaîne de loi μ sur K est un diviseur de s (voir [26], § 5).

14.5. Indépendance asymptotique. - Soit μ une mesure de $M^1(G)$ étalée, apériodique, possèdant un moment d'ordre 2 . Soit g un élément de G dont la composante, $\overline{g}$, sur K appartient : soit à une sous-classe cyclique C_0 d'une classe ergodique E_{i_o} de la chaîne de loi μ sur K ($i_o \in I$) ; soit à une classe ergodique E_{i_o} sans classe cyclique de cette chaîne. Dans le premier cas, nous notons C_n la sous-classe cyclique de E_{i_o} contenant, $\mathbb{P}_g$-p.s. , K_n ; nous avons $C_{n+d} = C_n$, où d est la période de la classe ergodique E_{i_o} ; nous désignons par ν_{C_n} l'unique mesure de $M^1(C_n)$ μ^d-invariante. Dans le second cas, on convient que $C_n = C_o = E_{i_o}$ $n \in \mathbb{N}$, et $\nu_{C_n} = \nu_{i_o}$ est l'unique mesure μ-invariante sur E_{i_o} .

Avec les notations de (14.2) et (14.3) nous avons alors :

14.6. Théorème : *Soit* (G,μ,g) *comme en (14.5). Soient* U *un borélien de* N *tel que* $m_N(\partial U) = 0$; T *un borélien quelconque de* K *et* $V = \{H \in \mathfrak{a} : h_i(H) < a_i \ , \ i \in \{1,\dots,r\}\}$, *où les* a_i *sont des réels. Alors nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{V,T} \left| \mathbb{P}_g\{X_n \in U(\exp V)\, T\} - \lambda_g(U)\, \phi_n(V)\, \nu_{C_N}(T)\right| = 0 .$$

Preuve. - Nous savons que la composante N_n converge $\mathbb{P}_g$-p.s. vers une v.a. N_∞ dont la loi λ_g (par rapport à la probabilité $\mathbb{P}_g$) est équivalente à la mesure de Haar m_N (voir (14.2)). Par suite, pour tout borélien U de N tel que $m_N(\partial U) = 0$, nous avons :

$$\lim_n \mathbb{E}_g \left[|1_U(N_\infty) - 1_U(N_n)|\right] = 0 .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons un entier $n_1(\varepsilon)$ tel que $\forall\, n \geqslant n_1(\varepsilon)$ $\mathbb{E}_g \left[|1_U(N_\infty) - 1_U(N_n)|\right] < \varepsilon$

Soit $i \in \{0,\dots,d-1\}$, pour tout $k \in C_i$, $\{\overline{kY_1\dots Y_{pd}}\}_{p\geqslant 1}$ est une chaîne ergodique sur C_i , nous avons donc ([6])

$$\sup_{k\in C_i} \ \sup_{\{\text{borélien } T \text{ de } C_i\}} \left|\mathbb{P}_k\left[\overline{X}_{pd} \in T\right] - \nu_{C_i}(T)\right| < \alpha\, e^{-\beta p}$$

où α et β sont deux constantes > 0 .

Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons un entier $p_1(\varepsilon)$ tel que $\alpha e^{-\beta p_1(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, écrivons $X_n = X_{n_1(\varepsilon)}\, U_m\, T_{p_1(\varepsilon)\,d}$ avec

$n = n_1(\varepsilon) + m + p_1(\varepsilon)d$, $U_m = Y_{n_1+1}\dots Y_{n_1+m}$ et $T_{p_1 d} = Y_{n_1+m+1}\dots Y_{n_1+m+p_1 d}$.

Posons $U_m = N_m^1 A_m^1 K_m^1$ avec $N_m^1 \in N$, $A_m^1 \in A$, $K_m^1 \in K$ et $A_m^1 = \exp H_m^1$ avec $H_m^1 \in \mathfrak{a}$. Nous savons que N_m^1 converge $\mathbb{P}_g$-p.s. vers une variable aléatoire N_∞^1 de loi λ_e .

Considérons la décomposition de Bruhat $G = NA\tilde{N}\Gamma'$. Comme X_{n_1} et U_m sont des v.a. indépendantes pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbb{P}_g\left[X_{n_1} N_m^1 \notin NA\tilde{N}\Gamma'\right] = \int \varepsilon_g * \mu^{n_1}(dx)\ \mathbb{P}_e\left[xN_m \notin NA\tilde{N}\Gamma'\right]$$

et

$$\mathbb{P}_g\left[X_{n_1} N_\infty^1 \notin NA\tilde{N}\Gamma'\right] = \int \varepsilon_g * \mu^{n_1}(dx)\ \mathbb{P}_e\left[xN_\infty \notin NA\tilde{N}\Gamma'\right] .$$

D'après le lemme (9.11) et (9.13) il s'ensuit que pour $\mathbb{P}_g$-presque tout ω de Ω , il existe $m_o(\omega)$ tel que

i) $\forall\ m \geqslant m_o(\omega)$, $X_{n_1} N_m^1 \in NA\tilde{N}\Gamma'$

ii) $\lim_n X_{n_1}(\omega)\ N_m^1(\omega) = X_{n_1}(\omega)\ N_\infty^1(\omega) \in NA\tilde{N}\Gamma'$.

On peut alors trouver un compact Q_ε^1 de l'ouvert $NA\tilde{N}\Gamma'$ de G et un entier $m_1(\varepsilon)$ tel que

$$P_g\left[\{X_{n_1} N_m^1 \in Q_\varepsilon^1 ,\ \forall\ m \geqslant m_1\} \cap \{\lim X_{n_1} N_m^1 = X_{n_1} N_\infty^1 \in Q_\varepsilon^1\}\right] > 1 - \varepsilon/2 .$$

D'autre part, choisissons un compact Q_ε^2 de G (que nous pouvons supposer vérifier $Q_\varepsilon^2 = \bigcup_{k \in K} k\, Q_\varepsilon^2\, k^{-1}$) tel que $\mathbb{P}_g\left[T_{p_1 d} \in Q_\varepsilon^2\right] > 1 - \varepsilon/2$. Posons

$$\Omega_\varepsilon = \{X_{n_1} N_m^1 \in Q_\varepsilon^1 ,\ \forall\ m \geqslant m_1\} \cap \{\lim_n X_{n_1} N_m^1 = X_{n_1} N_\infty^1 \in Q_\varepsilon^1\} \cap \{T_{p_1 d} \in Q_\varepsilon^2\} \quad ;$$

nous avons $\mathbb{P}_g(\Omega_\varepsilon) > (1 - \varepsilon/2)^2 > 1 - \varepsilon$ (car $T_{p_1 d}$ est indépendant de X_{n_1} et de U_m) .

Sur Ω_ε nous avons, $X_{n_1} N_m^1 = u_m a_m \gamma_m \tilde{u}_m$, où u_m , a_m , γ_m et $\tilde{u}_m$ sont des suites qui convergent respectivement vers des éléments u, a, γ et $\tilde{u}$ en restant dans un compact fixé respectivement de N , A , Γ' et $\tilde{N}$. D'où

$$X_n = u_m a_m (\gamma_m A_m^1 \gamma_m^{-1})\ \gamma_m\ \left[(A_m^1)^{-1}\ \tilde{u}_m\ A_m^1\right] K_m^1\ T_{p_1 d} .$$

Désignons par s une section de l'application naturelle ζ de G sur $G_o\backslash G$, à valeurs dans Γ' . Comme Γ centralise A , nous avons sur Ω_ε

$$\gamma_m A_m^1 \gamma_m^{-1} = s \circ \zeta(X_{n_1} N_m^1)\ A_m^1 (s \circ \zeta(X_{n_1} N_m^1))^{-1}$$

$$= s \circ \zeta(X_{n_1})\ A_m^1 (s \circ \zeta(X_{n_1}))^{-1} ;$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Ad} \gamma_m(H_m^1) = \operatorname{Ad} s \circ \zeta(X_{n_1})(H_m^1) = H(s \circ \zeta(X_{n_1}) , U_m) .$$

D'autre part, nous savons (lemme (9.9) que $(A_m^1)^{-1}\ x\ A_m^1$, $x \in \tilde{N}$, converge, $\mathbb{P}_g$-p.s., vers e , uniformément sur tout compact de $\tilde{N}$. Comme on a

$$H_n = \exp_A^{-1} a_m + H(s \circ \zeta(X_{n_1}) , U_m) + H(e, \gamma_m((A_m^1)^{-1} \tilde{u}_m A_m^1) K_m^1 T_{p_1 d}) ,$$

on en déduit qu'il existe un sous-ensemble de Ω_ε de même $\mathbb{P}_g$-mesure et une constante $\gamma(Q_\varepsilon^1 , Q_\varepsilon^2)$ tels que sur ce sous-ensemble, que nous noterons toujours Ω_ε , on ait, pour $m \geqslant m_1$,

$$\|H_m - H(s \circ \zeta(X_{n_1}) , U_m)\| < \gamma$$

D'après (14.3), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_2(\varepsilon)$ tel que $\forall\, m \geqslant m_2$

$$\sup_V \sup_{y \in G_o\backslash G} |\mathbb{P}_g(H(s(y),U_m) \in V) - \phi_m(V)| < \varepsilon/2$$ (noter que $G_o\backslash G$ est fini),

$$\sup_V |\mathbb{P}_g(H(s(X_{n_1}) , U_m) \in V) - \phi_m(V)| < \varepsilon/2 ,$$

et

$$\sup_V |\mathbb{P}_g[H_n \in V] - \phi_n(V)| < \varepsilon$$

D'autre part, comme la matrice de covariance σ_μ est non dégénérée, il existe un entier $n_2(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$

$$\sup_V \sup_{i \in \{1,\dots,r\}} \mathbb{P}_g[a_i - \gamma \leqslant h_i(H_n) \leqslant a_i + \gamma] < \varepsilon/r .$$

Ceci dit, soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons

$$n > \sup \{n_2(\varepsilon) , n_1(\varepsilon) + \sup \{m_1(\varepsilon) , m_2(\varepsilon)\} + p_1(\varepsilon)\, d\}$$

et posons $n = n_1(\varepsilon) + m + p_1(\varepsilon)\, d$. Nous avons :

a) $$\sup_{V,T} |\mathbb{P}_g[N_n \in U , H_n \in V , K_n \in T] - \mathbb{P}_g[N_{n_1} \in U , H_n \in V , K_n \in T] | \leqslant \mathbb{E}_g [|1_U(N_n) - 1_U(N_{n_1})|] < 2\varepsilon ,$$

d'après le choix de $n_1(\varepsilon)$.

b) $$(\{H_n \in V\} \,\Delta\, \{H(s \circ \zeta(X_{n_1}) , U_m) \in V\}) \cap \Omega_\varepsilon \subset \bigcup_{i \in \{1,\dots,r\}} \{a_i - \gamma \leqslant h_i(H_n) \leqslant a_i + \gamma\} ,$$

puisque $m > m_1$. Par suite

$$\sup_{V,T} | \mathbb{P}_g[N_{n_1} \in U , H_n \in V , K_n \in T] - \mathbb{P}_g[N_{n_1} \in U , H(s \circ \zeta(X_{n_1}) , U_m) \in V , K_n \in T]|$$

$$\leqslant \sup_V \mathbb{P}_g[\{H_n \in V\} \,\Delta\, \{H(s \circ \zeta(X_{n_1}) , U_m) \in V\}]$$

$$< \varepsilon + r \sup_{i \in \{1,\dots,r\}} \sup_V \mathbb{P}_g[\{a_i - \gamma \leqslant h_i(H_n) \leqslant a_i + \gamma\}]$$

$$< 2\,\varepsilon ,$$ puisque $n > n_2(\varepsilon)$.

c) $\sup\limits_{V,T} \left| \mathbb{P}_g\left[N_{n_1} \in U \text{ , } H(s \circ \zeta(X_{n_1}) \text{ , } U_m) \in V \text{ , } K_n \in T\right] - \mathbb{P}_g\left[N_{n_1} \in U \text{ ,}\right.\right.$

$\left.\left. H(s \circ \zeta(X_{n_1}) \text{ , } U_m) \in V\right] \nu_{C_n}(T)\right| = \sup\limits_{V,T} \left| \mathbb{E}_g\left[1_U(N_{n_1}) \, 1_V(H(s \circ \zeta(X_{n_1}),U_m))\right.\right.$

$\left.\left.\mathbb{E}_g \left[1_T(K_n) \mid \mathfrak{F}_{n_1+m}\right] - \nu_{C_n}(T))\right]\right|$,

où $\mathfrak{F}_{n_1+m}$ désigne la tribu engendrée par les v.a. $X_o,\ldots,X_{n_1+m}$

$\leqslant \sup\limits_T \mathbb{E}_g \left[\left| \mathbb{E}_g|1_T(K_n) \mid \mathfrak{F}_{n_1+m}\right] - \nu_{C_{n_1+m}}(T)\right|\right]$ (noter que $C_{n_1+m} = C_n$)

$\leqslant \sup\limits_T \mathbb{E}_g \left[\left| \mathbb{E}_{X_{n_1+m}} |1_T(K_{p_1d})\right| - \nu_{C_{n_1+m}}(T)\right|\right]$ (propriété de Markov)

$\leqslant \sup\limits_{k \in C_{n_1+m}} \sup\limits_T \left| \mathbb{P}_k(\overline{X}_{p_1d} \in T) - \nu_{C_{n_1+m}}(T)\right|$

$\leqslant \sup\limits_{i \in \{0,\ldots,d-1\}} \sup\limits_{k \in C_i} \sup\limits_T \left| \mathbb{P}_k(\overline{X}_{p_1d} \in T) - \nu_{C_i}(T)\right|$

$< \varepsilon$; d'après le choix de $p_1(\varepsilon)$.

d) $\sup\limits_V \left| \mathbb{P}_g\left[N_{n_1} \in U \text{ , } H(s \circ \zeta(X_{n_1}) \text{ , } U_m) \in V\right] - \mathbb{P}_g\left[N_{n_1} \in U\right] \mathbb{P}_g\left[H_n \in V\right]\right|$

$= \sup\limits_V \left|\int_\Omega 1(N_{n_1}(\omega)) \left[\mathbb{P}_g\left[H(s \circ \zeta(X_{n_1}(\omega)) \text{ , } U_m) \in V\right] - \mathbb{P}_g\left[H_n \in V\right]\right] d\,\mathbb{P}_g(\omega)\right.$

car X_{n_1} et U_m sont des v.a. indépendantes

$\leqslant \sup\limits_{y \in G_o \setminus G} \sup\limits_V \left| \mathbb{P}_g\left[H(s(y) \text{ , } U_m) \in V\right] - \mathbb{P}_g\left[H_n \in V\right]\right|$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \sup\limits_V \left| \mathbb{P}_g(H(s \circ \zeta(X_{n_1}) \text{ , } U_m) \in V) - \mathbb{P}_g(H_n \in V)\right|$ (puisque $m > m_2$)

$< \varepsilon + \sup\limits_V \mathbb{P}_g \left[\{H_n \in V\} \,\Delta\, \{H(s \circ \zeta(X_1) \text{ , } U_m) \in V\}\right]$

$< 3\varepsilon$ (d'après b)).

e) $\left| \mathbb{P}_g\left[N_{n_1} \in U\right] - \lambda_g(U)\right| < \mathbb{E}_g\left[\left|1_U(N_{n_1}) - 1_U(Z)\right|\right] < \varepsilon$,

d'après le choix de $n_1(\varepsilon)$. Et

$$\sup_V \left| \mathbb{P}_g\left[H_n \in V\right] - \phi_n(V)\right| < \varepsilon \quad \text{car} \quad m > m_2(\varepsilon) \text{ .}$$

De a), b), c), d) et e) il résulte alors que l'on a,

$$\sup_{V,T} \left| \mathbb{P}_g\left[N_n \in U \,,\, H_n \in V \,,\, K_n \in T\right] - \lambda_g(U)\, \phi_n(V)\, \nu_{c_n}(T)\right| < 10\,\varepsilon \,.$$

Le théorème (14.6) est prouvé.

14.7. Remarque. - Dans ce qui précède, on s'est donné une décomposition d'Iwasawa et on a étudié le comportement asymptotique, dans cette représentation, de la loi de la marche aléatoire droite de loi μ sur G. Supposons que pour une mesure donnée, on s'intéresse seulement au comportement de μ^n. On peut alors trouver une décomposition d'Iwasawa $N\,A\,K$ de G telle que l'élément neutre e de G appartienne : soit à une sous-classe cyclique d'une classe ergodique de la chaîne de loi μ sur K ; soit à une classe ergodique sans classe cyclique de cette chaîne. En fait, si $N\,A\,K$ est une quelconque décomposition d'Iwasawa de G, la décomposition d'Iwasawa, $(gNg^{-1})\,(gAg^{-1})\,(gKg^{-1})$, vérifie cette propriété pour m_G-presque tout élément de g de G. Pour une telle décomposition d'Iwasawa, nous avons alors, avec la notation du théorème (14.6),

$$\lim_n \sup_{V,T} \left|\mu^n(U(\exp V)T) - \lambda_g(U)\, \phi_n(V)\, \nu_{c_n}(T)\right| = 0 \,.$$

14.8. Théorème. - *Soient* (G,μ) *comme en (14.5) et* $(\Omega, \mathcal{G}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ *la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G. *Considérons les décompositions* $G = N\,A\,K$ *(Iwasawa) et* $G = B_0(\exp W)\,K \mod m_G$ *(voir (14.0)).* x *désignant un élément quelconque de* G, *pour* $\mathbb{P}_x$*-presque tout* ω *de* Ω, $X_n(\omega)$ *s'écrit, à partir d'un certain rang,*

$$x_n(\omega)\,(\exp h_n(\omega))\, k_n(\omega) \,,$$

où $\{h_n(\omega)\}$ *et* $\{k_n(\omega)\}$ *sont des suites d'éléments respectivement de* W *et* K, $\{x_n(\omega)\}$ *est une suite d'éléments de* B_0 *convergeant vers un élément* $x_\infty(\omega)$ *de* B_0. *De plus si* ν_x *désigne la loi de* x_∞ *par rapport à* $\mathbb{P}_x$, *l'image de* ν_x *par l'application naturelle de* G *sur* ${}^G/_{A\tilde{N}\Gamma'}$, *s'écrit* $\varepsilon_x * \nu$, *où* ν *désigne l'unique mesure* μ*-invariante de* $M^1({}^G/_{A\tilde{N}\Gamma'})$.

D'autre part, soient U *et* T *des boréliens respectivement de* B_0 *et* K *tels que* $m_K(\Gamma(\partial U)) = 0$ *et* $m_K(\partial T) = 0$. *Alors si* g *est un élément de* G *comme en (14.5) nous avons*

$$\lim_n \sup_V \left| \mathbb{P}_g\left[X_n \in U(\exp V)T\right] - \nu_g(U)\, \phi_n(V)\, \nu_{c_n}(T)\right| = 0 \,,$$

où ϕ_n, ν_{c_n} *et* V *sont comme dans le théorème (14.6).*

Preuve : Reprenons les notations des paragraphes 1 et 2 : désignons par $\mathcal{G} = \mathcal{N} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathcal{K}$ la décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ qui correspond à celle $G_0 = N\,A\,K$ de G_0 ; par Σ_1 l'ensemble des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{N}$. Pour tout $\lambda \in \Sigma_1$, on note ϕ_λ le poids de la représentation adjointe de A dans $\mathcal{N}$ dont la différentielle en e est λ. Nous avons alors :

14.9. Lemme. - *(D'après Virtser, [26] lemme 4). Soient* $\{a_n\}$ *une suite d'éléments de* A *telle que :*

i) $\operatorname{Log} |\phi_\lambda(a_n)| \to -\infty \quad \forall \lambda \in \Sigma_1$

ii) $\displaystyle\sup_n \frac{\operatorname{Log} |\phi_\lambda(a_n)|}{\operatorname{Log} |\phi_{\lambda'}(a_n)|} < +\infty \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Sigma_1$;

et C *un compact de* $\tilde{N}$ *tel que* $\tilde{u}\, a_n$ *appartienne à* $K(\exp W)K$ *pour tout entier naturel* n *et tout élément* $\tilde{u}$ *de* C.

Alors à partir d'un certain rang, nous pouvons écrire

$$\tilde{u}\, a_n = x_n(\tilde{u})\, a'_n(\tilde{u})\, k_n(\tilde{u}) \qquad (\tilde{u} \in C),$$

où $\{x_n(\tilde{u})\}$ *(resp.* $\{k_n(\tilde{u})\}$*) est une suite d'éléments de* B_0 *(resp.* K*) convergeant, uniformément sur* C, *vers* e, *et* $\{a'_n(\tilde{u})\}$ *est une suite d'éléments de* $\exp W$ *telle que* $\{a_n^{-1}(\tilde{u})\, a'_n(\tilde{u})\}$ *converge, uniformément sur* C, *vers* e.

Preuve. - Pour $\tilde{u} \in C$, écrivons $\tilde{u}\, a_n = x'_n\, a'_n\, k'_n$ avec $x'_n \in K$, $a'_n \in \exp W$ et $k'_n \in K$. Posons $B = K \cap NA\tilde{N}\Gamma$; B est un ouvert partout dense de K (voir [26]). Désignons par β l'application naturelle de K sur $K/_\Gamma$, $\beta(B_0) = \beta(B)$ est alors un ouvert partout dense de $K/_\Gamma$.

D'après la preuve du lemme 4 de [26], nous savons que la suite $\{x'_n\}$ a ses valeurs d'adhérence qui appartiennent nécessairement à Γ. Autrement dit la suite $\{\beta(x'_n)\}$ de $K/_\Gamma$ converge vers $\beta(e)$. A partir d'un certain rang nous avons donc $x'_n \in B$ et x'_n s'écrit $t_n\, \gamma_n$ avec $t_n \in B_0$ et $\gamma_n \in \Gamma$. Nous avons alors $\tilde{u}\, a_n = t_n\, a'_n(\gamma_n k_n)$ et nous pouvons appliquer les conclusions du lemme 4 de [26]. Le lemme (14.9) est établi.

Preuve du théorème 14.8. - Ecrivons $X_n = N_n(\exp H_n)K_n$ avec $N_n \in N$, $H_n \in \mathfrak{a}$ et $K_n \in \mathcal{K}$. Considérons la décomposition d'Iwasawa, $G_0 = KA\tilde{N}$, de G_0 et posons $N_n = y_n\, \tilde{u}_n\, \alpha_n$ avec $y_n \in K$, $u_n \in \tilde{N}$ et $\alpha_n \in A$. Remarquons que $y_n = N_n\, \alpha_n^{-1}\, \tilde{u}_n^{-1}$ appartient nécessairement à B_0. Soit $x \in G$. Comme N_n converge, $\mathbb{P}_x$-p.s., vers N_∞, les suites y_n, $\tilde{u}_n$ et α_n convergent $\mathbb{P}_x$-p.s. respectivement vers des variables aléatoires y , $\tilde{u}$ et α , à valeurs respectivement dans B_o , $\tilde{N}$ et A telles que $N_\infty = y\,\tilde{u}\,\alpha$.

μ étant étalée, il est facile de voir (cf. (9.13)) que l'on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_x[X_n \in B_o(\exp W)K] < +\infty$. Il existe alors un sous ensemble mesurable Ω' de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe un entier $n_o(\omega)$ pour lequel $\forall\, n \geqslant n_o(\omega)$.

$X_n(\omega) = x_n(\omega) \exp h_n(\omega)\, k_n(\omega)$ avec $x_n \in B_o$, $h_n \in W$ et $k_n \in K$.

Sur Ω' nous avons alors à partir d'un certain rang

$$\tilde{u}_n(\alpha_n \exp H_n) = (y_n^{-1}\, x_n)\,(\exp h_n)\,(k_n\, K_n^{-1}) .$$

Désignons par $\{\tau_\lambda\ ,\ \lambda \in \Sigma_1\}$ la famille d' A-cocycles sur $B(G) \times_{G_o} \backslash^G$ associée à G pour la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ et par v_o l'unique élément de $B(G) \times_{G_o} \backslash^G$ invariant par $NA\Gamma$ (voir § 2). Posons $\Omega'' = \{\omega \in \Omega' : \lim_n N_n(\omega) = N_\infty(\omega)$ $\frac{1}{n}\tau_\lambda(v_o, X_n(\omega)) \longrightarrow a_\lambda < 0\ ,\ \forall\, \lambda \in \Sigma_1\}$, Ω'' est de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 (voir (9.5)) . Pour tout $\omega \in \Omega''$ la suite $\alpha_n(\omega) \exp H_n(\omega)$ vérifie les hypothèses i) et ii) du lemme (14.9). En effet pour tout $\lambda \in \Sigma_1$, nous avons sur Ω'' ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\phi_\lambda(\alpha_n \exp H_n)| &= \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\phi_\lambda(\alpha_n)| + \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\phi_\lambda(\exp H_n)| \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\phi_\lambda(\alpha_n)| + \frac{1}{n}\ \tau_\lambda(v_o, X_n) \quad \text{(voir (2.9))} \\ &\longrightarrow\ a_\lambda < 0 . \end{aligned}$$

D'après le lemme (14.9), sur Ω'' , nous avons donc à partir d'un certain rang

$$\tilde{u}_n(\alpha_n \exp H_n) = t_n \exp(h_n)\, k'_n ,$$

où $\{t_n\}$ (resp $\{k'_n\}$) est une suite d'éléments de B_o (resp. de K) convergeant vers e , $\{h_n\}$ est une suite d'éléments de W telle que $(\alpha_n \exp H_n) \exp(-h_n)$ converge vers e .

On en déduit que sur Ω'' , nous avons à partir d'un certain rang

$$x_n = y_n\, t_n\, \gamma_n \quad \text{avec} \quad \gamma_n \in \Gamma$$

Mais comme $x_n \in B_o$ et $y_n\, t_n$ converge vers $y \in B_o$, les suites $\{x_n\}$ et $\{\gamma_n\}$ convergent respectivement vers y et e .

Soient ν_x(resp λ_x) la loi de la v.a. y (resp. N_∞) par rapport à $\mathbb{P}_x$. Comme les mesures images de ν_x et λ_x par l'application naturelle de G sur $G/_{A\tilde{N}\Gamma}$, sont identiques, la première assertion du théorème (14.8) est prouvée.

Soient U et T des boréliens respectivement de B_o et K tels que $m_K(\Gamma(\partial U)) = 0$ et $m_K(\partial T) = 0$.

Nous savons que sur Ω' , à partir d'un certain rang, on a :

i) $x_n = y_n t'_n$, où t'_n converge vers e et y_n converge vers une v.a. y dont la loi ν_x , par rapport à $\mathbb{P}_x$, vérifie $\nu_x(\partial U) = 0$.
(Car $m_K(\Gamma(\partial U)) = 0$ et l'image de ν_x par l'application naturelle de K sur $^K/_\Gamma$ est la restriction à un ouvert d'une mesure quasi-invariante de $^K/_\Gamma$) .

ii) $k_n = k''_n K_n$, où k''_n converge vers e et les mesures ν_{C_n} sont absolument continues par rapport à la mesure de Haar de K .

Il est clair alors que l'on a

$$\lim_n \sup_V |\mathbb{P}_x[x_n \in U , h_n \in V , k_n \in T] - \mathbb{P}_x[y_n \in U , h_n \in V , K_n \in T]|$$
$$\leqslant \lim_n \mathbb{P}_x[(x_n \in U , k_n \in T) \Delta (y_n \in U , K_n \in T)] = 0 .$$

D'autre part sur Ω'' , $H_n - h_n$ converge vers $\exp_A^{-1} \alpha$. Vu le comportement de H_n (voir (14.3)), il est alors clair que l'on a

$$\lim_n \sup_V |\mathbb{P}_x[(H_n \in V) \Delta (h_n \in V)]| = 0 .$$

On en déduit que l'on a

$$\lim_n \sup_V |\mathbb{P}_x[x_n \in U , h_n \in V , k_n \in T] - \mathbb{P}_x[y_n \in U , H_n \in V , K_n \in T]| = 0 .$$

Désignons par β l'application naturelle de $^{G_o}/_{A\tilde{N}\Gamma}(\tilde{\nu}K/_\Gamma)$. La restriction β_N (resp. β_{B_o}) de β à N (resp. à B_o) est un homéomorphisme de N (resp. B_o) sur son image qui est un ouvert partout dense de $^{G_o}/_{A\tilde{N}\Gamma}$. En notant alors que

$$\mathbb{P}_x[y_n \in U , H_n \in V , K_n \in T] = \mathbb{P}_x[N_n \in \beta_n^{-1} \circ \beta_{B_o}(U) , H_n \in V , K_n \in T] ,$$

la deuxième assertion du théorème résulte du théorème (14.6).

REFERENCES

[1] AZENCOTT R., *Espaces de Poisson des groupes localement compacts*. Lecture notes, Springer-Verlag n° 148, (1970).

[2] AZENCOTT R. et CARTIER P., *Martin boundaries of random walks on locally compact groups*. 6th Berkeley Symposium Proc. Math. Statist. Probab. 3, Univ. Calif. Press. (1972), p. 87-123.

[3] BIRGE L. et RAUGI A., Comptes Rendus 278, série A, (1974), 1287.

[4] BROWN I.D. et GUIVARC'H Y., *Espace de Poisson des groupes de Lie*. Extrait de Ann. Scient. de l'E.N.S., 4è série, t.7, fasc. 2, (1974).

[5] CHEVALLEY C., *Théorie des groupes de Lie*. Publ. de l'Inst. de Math. de l'Université de Nancago, I et IV.

[6] DOOB J.L., *Stochastic Processes*. John Wiley, New York, (1953).

[7] ELIE L. et RAUGI A., Comptes Rendus, 280, série A, (1975), p. 377.

[8] FURSTENBERG H., *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*. Ann. of Math., 77, (1963), 335-386.

[9] FURSTENBERG H., Amer. Math. Soc. Summer Inst. on Harmonic Analysis on Homogeneous spaces, Williamstown, Massachussets, (1972).

[10] FURSTENBERG H., *Non commuting random products*. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 108, (1963), 377-428.

[11] GUIVARC'H Y., *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques*. Bull. Soc. Math. France, 101, (1973), 333-379.

[12] GUIVARC'H Y., *Lois des grands nombres sur les groupes*. A paraître.

[13] HELGASON S., *Differential geometry and symetric spaces*. New York, Acad. Press, (1962).

[14] HOCHSCHILD G., *The structure of Lie groups*. Holden Day Inc, San Francisco, USA (1965).

[15] IWASAWA K., Ann. of Math., 50, n° 3, (1949).

[16] JACOD J., *Théorèmes de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes*. Ann. Inst. H. Poincaré, Vol. 7, n° 2, (1971), 83-129.

[17] KELLEY J., *General Topology*. New York, D-Van Nostrand Company, Inc. (1955)

[18] KESTEN , *The limit points of a normalised random walk*. Ann. Math. Statist. 41, (1970), 1173-1205.

[19] MACKEY G., *Induced representations of locally compact groups*. Ann. of Math. 55 (1952), 101-139.

[20] MONTGOMERY D. and ZIPPIN L., *Topological Transformation groups*. New York, Interscience publisher, (1955).

[21] RAUGI A., Comptes Rendus, 280, série A, (1975), 1309.

[22] RAUGI A., Comptes Rendus, 282, série A, (1976), 653.

[23] REVUZ D., *Markov chains*. North-Holland Mathematical Library, Vol. 11, (1975).

[24] ROSENBERG J., *Remarks on random walks on semi-simple Lie groups*. A paraître.

[25] Séminaire Sophus Lie, (1954-1955), Paris, exposé 9 (F. Bruhat).

[26] VIRTSER A.D., *Central limit theorem for semi-simple Lie groups*. Theory of probability and its applications, (1970, Vol. XV, 667-687.

Albert RAUGI
Mathématiques, Université de Rennes
35042 RENNES CEDEX