MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MICHEL KANTOR

Formes et opérateurs différentiels sur les espaces analytiques complexes

Mémoires de la S. M. F., tome 53 (1977), p. 5-80
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__53__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 53, 1977, p. 5-80.

FORMES ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS
SUR LES ESPACES ANALYTIQUES COMPLEXES

par

Jean-Michel KANTOR

"De la même façon, le calcul -
dont relevait le plaisir -"

TABLE DES MATIÈRES

-:-:-:-

INTRODUCTION.

Dans ses "Eléments de Géométrie algébrique", A. GROTHENDIECK propose un formalisme du calcul différentiel sur les schémas : faisceaux de jets, opérateurs différentiels, complexes de formes différentielles.

A l'origine de ce travail, notre propos était de confronter ce formalisme à l'étude locale des singularités d'espaces analytiques.

Dans la première partie de ce mémoire, nous étudions l'algèbre des opérateurs différentiels sur un espace analytique complexe X. Ayant défini le faisceau des fonctions analytiques sur X, et celui des fonctions différentiables, on peut construire l'algèbre des opérateurs différentiels sur X "à coefficients" dans chacun de ces faisceaux. L'outil principal de l'étude est la notion d'<u>image inverse</u> d'un opérateur différentiel : considérons un morphisme de variétés analytiques complexes

$$\pi : V \to W$$

qui soit, en dehors d'un vrai sous-ensemble analytique Z de V, un isomorphisme local. Soit P un opérateur différentiel sur W à coefficients (par exemple) holomorphes. On définit son image inverse. C'est un opérateur différentiel sur V-Z, à coefficients holomorphes, avec des <u>pôles</u> sur Z. On généralise cette notion au cas de morphismes d'espaces analytiques normaux, et aux opérateurs différentiels sur ces espaces à coefficients différentiables. Plusieurs cas particuliers sont envisagés :

a) Le morphisme π est un revêtement ramifié au desssus de $\mathbf{C}^n$.
L'étude se déduit alors d'un théorème de prolongement des opérateurs différentiels, et permet d'élucider la structure de l'anneau des germes d'opérateurs différentiels à coefficients méromorphes sur un germe d'espace analytique (chapitre II).

b) Le morphisme π est l'application quotient

$$\pi : V \to X = V/G$$

où V est une variété analytique complexe sur laquelle opère un groupe G proprement discontinu d'automorphismes. Le quotient X est muni d'une structure d'espace analytique normal. Un tel espace sera appelé singularité-quotient.

On décrit alors complètement la structure de l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels holomorphes en un point de X.

c) Le morphisme π est une résolution des singularités

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

construite par la méthode de Hironaka. On précise la nature des pôles sur le diviseur exceptionnel de l'image inverse d'un opérateur différentiel sur X .

Enfin, au chapitre IV, on étudie la topologie sur l'espace $\mathcal{E}(X)$ des fonctions différentiables sur l'espace analytique X , définie par les semi-normes.

$$f \in \mathcal{E}(X) \to \sup_{x \in K} |P(f)(x)|$$

où K parcourt la famille des compacts de X, et P la famille des opérateurs différentiels. Nous montrons que dans le cas des singularités-quotients (b)) cette topologie est une topologie d'espace de Fréchet, mais qu'en général ce n'est pas le cas.

Dans la seconde partie, nous étudions des complexes canoniques d'opérateurs différentiels d'ordre 1 sur l'espace analytique X , qui généralisent les complexes du "d" et du "$\bar{\partial}$" des variétés analytiques complexes.

L'étude locale de ces complexes nous conduit aux résultats suivants :

1°/ Pour le complexe de De Rham holomorphe d'une singularité isolée, on améliore le théorème de Bloom-Herrera en en donnant une nouvelle démonstration, utilisant le "bourgeonnement" (et non plus la résolution des singularités ni le théorème d'images directes de Grauert).

2°/ Si (X,x) est un germe de singularité isolée irréductible, les groupes d'homologie du complexe analytique de "$\bar{\partial}$" sont des $\mathcal{O}_{X,x}$-modules libres de type fini, non nuls en général.

3°/ Au chapitre II, nous étudions les complexes de torsion des complexes de formes différentielles. Supposons X plongé comme sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On établit un critère pour qu'une forme holomorphe sur U induise un élément de torsion dans le complexe de De Rham holomorphe de X. On en déduit la dimension (sur $\mathbb{C}$) des modules de torsion d'une singularité isolée d'hypersurface (généralisant un résultat de O. Zariski), et un théorème concernant les systèmes de Pfaff dans $\mathbb{C}^n$. D'autres résultats qui concernent le complexe du "$\bar{\partial}$" à coefficients distributions ont été publiés dans le cadre du Séminaire F. Norguet (1974-75), Springer (Lecture Notes n° 482).

Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à H. CARTAN pour ses nombreuses et patientes critiques qui ont guidé l'élaboration de ce travail. Je tiens aussi à remercier L. BOUTET de MONVEL, pour les encouragements et les suggestions qu'il m'a apportés, ainsi que C. HOUZEL.

CHAPITRE I : FORMALISME DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Dans tout notre travail, les espaces analytiques considérés sont réduits et dénombrables à l'infini.

On désigne par $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural de l'espace analytique (complexe) X. Soit $\mathcal{C}_X$ le faisceau des germes de fonctions continues sur X, à valeurs complexes. On définit le sous-faisceau $\mathcal{A}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$) des germes de fonctions analytiques-réelles (resp. différentiables), et les faisceaux d'opérateurs différentiels associés, dont on explicite une représentation locale .

I - FONCTIONS ANALYTIQUES REELLES ET DIFFERENTIABLES SUR X.

Théorème 1. Il existe un unique faisceau $\mathcal{A}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$) sur X vérifiant les propriétés suivantes :

1°) On a les injections de faisceaux

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{A}_X \subset \mathcal{E}_X \subset \mathcal{C}_X \ ;$$

où $\mathcal{C}_X$ désigne le faisceau des germes de fonctions continues à valeurs complexes sur X.

2°) Si X est lisse, $\mathcal{A}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$) coïncide avec le faisceau des germes de fonctions analytiques-réelles (resp. différentiables) à valeurs complexes .

3°) Pour tout morphisme d'espaces analytiques

$$f : X \to Y$$

le morphisme

$$f_* : \mathcal{C}_Y \to f_*(\mathcal{C}_X)$$

induit un morphisme

$$f_* : \mathcal{A}_Y \to f_*(\mathcal{A}_X) \qquad (\text{resp. } f_* : \mathcal{E}_Y \to f_*(\mathcal{E}_X))$$

qui est surjectif si f est une immersion fermée.

Définition 1. On appelle $\mathcal{A}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$) le faisceau des germes de fonctions analytiques-réelles (resp. différentiables) sur X.

Remarque: Désignons par $i : V \hookrightarrow X$ l'injection de la variété des points réguliers dans X. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_X \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & i_*(\mathcal{A}_V) \arrow[d] \\ \mathcal{C}_X \arrow[r, "i_*"] & i_*(\mathcal{C}_V) \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}_X \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & i_*(\mathcal{E}_V) \arrow[d] \\ \mathcal{C}_X \arrow[r, "i_*"] & i_*(\mathcal{C}_V) \end{tikzcd} \right)$$

on déduit, puisque V est dense dans X, que les morphismes

$$i_* : \mathcal{A}_X \to i_*(\mathcal{A}_V)$$
$$i_* : \mathcal{E}_X \to i_*(\mathcal{E}_V)$$

sont injectifs.

Démonstration:

a) Le faisceau $\mathcal{A}_X$, s'il existe, est unique; il suffit de le vérifier pour un ensemble analytique X d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, dont V désigne la variété des points réguliers. D'après les hypothèses, on a une suite exacte

$$0 \to J \to \mathcal{A}_U \xrightarrow{j_*} j_*(\mathcal{A}_X) \to 0$$

où j désigne l'immersion de X dans U. D'autre part, on déduit de l'injection canonique $i : V \hookrightarrow X$, une injection

$$i_* : \mathcal{A}_X \to i_*(\mathcal{A}_V)$$

et donc une injection

$$\varphi : j_*(\mathcal{A}_X) \to (j_* i_*)(\mathcal{A}_V) = \tilde{j}_*(\mathcal{A}_V) \quad , \ \tilde{j} = j \circ i \ .$$

On déduit alors du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & \mathcal{A}_U \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "\tilde{j}_*"'] & j_*(\mathcal{A}_X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ & & & \tilde{j}_*(\mathcal{A}_V) & \end{tikzcd}$$

que J est déterminé de manière unique comme noyau de $\tilde{j}_*$, ce qui détermine $j_*(\mathcal{A}_X)$ et donc aussi

$$\mathcal{A}_X = j^*(j_*(\mathcal{A}_X)) \ ;$$

le même argument s'appliquerait à $\mathcal{E}_X$.

b) Démontrons l'existence d'un faisceau $\mathcal{A}_X$, vérifiant les assertions du théorème. On construit d'abord ce faisceau pour X muni d'un plongement dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, la construction est alors immédiate d'après a).

Si X est muni de deux plongements dans des ouverts de $\mathbb{C}^n (\mathbb{C}^{n'})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & U \subset \mathbb{C}^n \\ & U' \subset \mathbb{C}^{n'} \end{tikzcd}$$

on montre que les faisceaux $\mathcal{A}_X$ ne dépendent pas du plongement considéré :localement on peut supposer n égal à la dimension de l'espace tangent de Zariski au point considéré. L'immersion φ' se factorise alors en

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & U \arrow[d, "\psi"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

où ψ est une immersion sur une sous-variété fermée de U' [1, Prop.2] ; le morphisme

$$\psi_* : \mathcal{A}_{U'} \to \psi_*(\mathcal{A}_U)$$

est donc surjectif. Il en résulte que les faisceaux $\mathcal{A}_{\varphi(X)}$ et $\mathcal{A}_{\varphi'(X)}$ sont isomorphes et donc que les faisceaux associés sur X par l'intermédiaire des deux plongements coïncident.

Enfin, supposons l'espace X muni d'un recouvrement ouvert (X) et de plongements

$$\varphi_\alpha : X_\alpha \to U_\alpha$$

dans des ouverts de $\mathbb{C}^n$.

Désignons par $\mathcal{A}_\alpha$ le faisceau défini sur X_α comme plus haut. Soient (α,β) deux indices du recouvrement. Le diagramme commutatif d'isomorphismes d'espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \cap X_\beta \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\beta"'] & \varphi_\alpha(X_\alpha \cap X_\beta) \arrow[d, "\theta_{\alpha\beta}"] \\ & \varphi_\beta(X_\alpha \cap X_\beta) \end{tikzcd}$$

définit un isomorphisme (de manière évidente)

$$\theta_{\alpha\beta} : \mathcal{A}_\beta|_{X_\alpha \cap X_\beta} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\alpha|_{X_\alpha \cap X_\beta}$$

et on a, pour un troisième indice γ du recouvrement

$$\theta_{\alpha\gamma} = \theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \qquad \text{dans } X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$$

On sait qu'on peut alors recoller les faisceaux $(\mathcal{A}_\alpha)$ en un faisceau $\mathcal{A}_X$ muni d'isomorphismes

$$\varphi_\alpha : \mathcal{A}_X|_{X_\alpha} \longrightarrow \mathcal{A}_\alpha$$

Le faisceau $\mathcal{A}_X$ est un sous-faisceau de $\mathcal{C}_X$ puisqu'il en est ainsi de chaque $\mathcal{A}_\alpha$. Pour vérifier la troisième propriété du théorème, il suffit de considérer une immersion de X dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. La propriété résulte alors de la construction précédente.

La construction du faisceau $\mathcal{E}_X$ est identique.

<u>Description locale</u>.

Soit (X,0) un germe d'espace analytique réduit à l'origine de $\mathbb{C}^n$, et $(f_1,..,f_n)$ un système de générateurs de l'idéal des germes de fonctions holomorphes nuls sur (X,0).

La description suivante des germes de fonctions analytiques-réelles et différentiables sur $(X,0)$ répond à une question de B. Malgrange [27,p.124].

Proposition 3.

1) Si $(X,0)$ est irréductible,

$$\mathcal{A}_{X,0} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_i,\bar{f}_j)_{i,j=1\ldots p}$$

2) Si $(X,0)$ est un germe d'ensemble analytique-réel cohérent,

$$\mathcal{E}_{X,0} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_i,\bar{f}_j)\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n,0}$$

Rappelons que X est cohérent si et seulement si les composantes irréductibles en un point restent irréductibles aux points suffisamment voisins (loc.cit.).

Démonstration. Soient (x,y) les coordonnées réelles de $\mathbb{C}^n$.

$$z = x + iy \ , \quad z_j = x_j + iy_j \quad , \quad j = 1,\ldots n$$

Désignons encore par (x,y) les coordonnées complexes de $\mathbb{C}^{2n}$, qui induisent les coordonnées réelles sur

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{C}^{2n} \ .$$

Enfin, soit $(\tilde{X},0)$ le complexifié du germe analytique-réel $(X,0)$. On a (loc.cit.):

(1) $\quad (\tilde{X},0) = (X,0) \times (\bar{X},0)$.

Définissons une application

$$M : \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n},0}$$

$$g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \qquad g(z,\bar{z}) = \Sigma\, a_{\alpha\beta} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta}$$

$$M(g) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n},0} \qquad M(g)(z,u) = \Sigma\, a_{\alpha\beta} z^{\alpha} u^{\beta}$$

D'après la définition du complexifié $\tilde{X}$ le germe g est nul sur $(X,0)$ si et seulement si le germe $M(g)$ est nul sur $(\tilde{X},0)$.

Or, l'idéal de définition de ce germe à l'origine de $\mathbb{C}^{2n}$ n'est autre que

$$J = (f_i(z),\ \bar{f}_j(u)).$$

La première assertion en résulte. Si le germe $(X,0)$ est cohérent, on sait (loc.cit. th.3) que tout germe de fonction différentiable nul sur $(X,0)$ est combinaison de germes de fonctions analytiques-réelles nulles sur $(X,0)$. La seconde assertion en résulte.

Topologies.

Désignons par (FN) la catégorie des espaces de Fréchet nucléaires, par (DFN) celle des duals forts d'espaces de Fréchet nucléaires.

Ces deux classes sont stables par sous-espaces fermés, quotients séparés, produits tensoriels topologiques complétés (les topologies inductives et projectives coïncident), et on a le théorème du graphe fermé pour chacun de ces espaces.

On appelle faisceau (FN) un faisceau F d'espaces vectoriels topologiques tels que pour tout ouvert U, F(U) soit un espace (FN).

Proposition 4. Soit $(X,\mathcal{O}_X)$ un espace analytique complexe réduit. Il existe une unique structure de faisceau (FN) sur tout faisceau analytique cohérent F sur X telle que

a) si F est libre, la topologie de F est celle de la convergence uniforme sur les compacts de X;

b) tout morphisme de faisceaux analytiques cohérents est continu.

L'espace des germes de F en un point de X, muni de la topologie limite inductive naturelle, est un espace (DFN).

Ce résultat est bien connu [pour a), cf. [12], Prop.2,p.88].

Corollaire. Si le germe (X,x) est irréductible, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est muni canoniquement d'une structure d'espace (DFN).

On peut en effet identifier, d'après la démonstration de la Proposition 3, l'anneau $\mathcal{A}_{X,x}$ et l'anneau $\mathcal{O}_{\tilde{X},x}$.

L'unicité de la topologie résulte du théorème du graphe fermé.

Proposition 5. Le faisceau $\mathcal{E}_X$ est un faisceau fin; il est muni d'une topologie canonique de faisceau de Fréchet telle que

1) Si X est lisse, la topologie de $\mathcal{E}_X$ est la topologie usuelle.

2) Pour tout morphisme d'espaces analytiques

$$f : X \to Y$$

le morphisme induit

$$f_* : \mathcal{E}_Y \to f_*(\mathcal{E}_X)$$

est continu.

Démonstration. Puisque X est paracompact, on peut supposer, pour démontrer que le faisceau $\mathcal{E}_X$ est fin, que X est plongé dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ comme sous-ensemble analytique fermé. Etant donnés deux compacts A et B de X, il existe une fonction différentiable dans U, valant 1 sur A, 0 sur B. Sa restriction est une fonction différentiable sur X, valant 1 sur A, 0 sur B; le faisceau $\mathcal{E}_X$ est donc fin.

On munit $\mathcal{E}_X$ d'une topologie de Fréchet construite par l'intermédiaire de plongements locaux. L'unicité de cette topologie est conséquence du théorème du graphe fermé.

Remarque: On définira sur $\mathcal{E}_X$ une topologie associée aux opérateurs différentiels et qui ne vérifiera pas 2) en général.

II -
OPERATEURS DIFFERENTIELS.

On définit la notion d'opérateur différentiel dans une situation "abstraite", et on montre qu'elle coïncide pour les espaces analytiques avec la définition en termes de jets introduite par A. Grothendieck [15].

Les anneaux considérés sont commutatifs, unitaires. Soit

$$f : A \to B$$

un morphisme d'anneaux. Considérons deux B-modules M et N.

I.1. Définition 1.

On appelle A-opérateur différentiel d'ordre au plus égal à k de M dans N une application A-linéaire

$$D : M \to N$$

telle que

a) Pour $k = 0$, D est B-linéaire.

b) Pour $k > 0$, et pour tout élément b de B, l'application

$$[D,b] : M \to N$$

$$[D,b](x) = D(bx) - bD(x)$$

est un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à $(k-1)$.

On désigne par $\mathrm{Diff}^k_{B/A}(M,N)$ l'ensemble des A-opérateurs différentiels d'ordre au plus égal à k de M dans N, et

$$\mathrm{Diff}_{B/A}(M,N) = \varinjlim_k \mathrm{Diff}^k_{B/A}(M,N) .$$

On appelle ordre de l'opérateur différentiel D le plus petit entier k tel que

$$D \in \mathrm{Diff}^k_{B/A}(M,N) .$$

Proposition 1. L'application A-linéaire

$$D: M \to N$$

est un A-opérateur différentiel d'ordre au plus égal à k si et seulement si pour toute famille $(a_o,\dots,a_k)$ de (k+1)-éléments de B, on a l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1) $[\dots [D,a_o], a_1,\dots,a_k] = 0$

2) $\sum_{H \subset I_{k+1}} (-1)^{\mathrm{card}(H)} (\prod_{i \notin H} a_i) D((\prod_{j \in H} a_j)t) = 0$

pour tout élément t de M, où $I_{k+1} = (0,\dots,k)$.

Démonstration par récurrence sur k.

Si N est muni d'une structure de (B,C)-module, alors $\mathrm{Diff}_{B/A}(M,N)$ est muni naturellement d'une structure de C-module.

Lemme 2. Soient (M,N,N') trois B-modules.

1) L'opération de composition induit une application

$$\mathrm{Diff}^k_{B/A}(M,N) \times \mathrm{Diff}^{k'}_{B/A}(N,N') \to \mathrm{Diff}^{k+k'}_{B/A}(M,N')$$

pour tout couple d'entiers (k,k').

2) Si P (resp. P') est un A-opérateur différentiel de M dans lui-même d'ordre au plus égal à k (resp.k'), l'application

$$[P,P'] = PP' - P'P$$

est un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à (k+k'-1).

Démonstration.

Si D_1 (resp. D_2) est un A-opérateur différentiel de M dans N (resp.de N dans N'), pour tout élément b de B, on a :

$$\begin{aligned}[D_2D_1,b] &= (D_2D_1)b - b(D_2D_1) \\ &= D_2[D_1,b] + [D_2,b]D_1\end{aligned}$$

On conclut par récurrence. La seconde assertion se démontre de la même manière.

Soit M un B-module.

Corollaire. L'application $N \to \mathrm{Diff}^k_{B/A}(M,N)$ (resp. $N \to \mathrm{Diff}_{B/A}(M,N)$), définit un foncteur covariant dans la catégorie des B-modules.

En effet, il suffit d'appliquer la première partie du lemme 2, avec k' = 0.

On aurait un résultat analogue pour N fixé, relativement à M.

On s'intéresse en particulier au cas où M = B.

Soit $\Delta : B \otimes_A B \to B$, l'application canonique; on désigne par I son noyau.

Notons:

$$B \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} B \otimes_A B \qquad \begin{aligned} p_1(x) &= x \otimes 1 \\ p_2(x) &= 1 \otimes x \end{aligned}$$

Définition 2. On appelle espace des jets d'ordre k de B sur A le quotient

$$\mathcal{P}^k_{B/A} = B \otimes_A B / I^{k+1} .$$

On munit $\mathcal{P}^k_{B/A}$ d'une structure de B-module par l'intermédiaire de p_1, et on note $d^k_{B/A}$ l'application (A-linéaire) composée

$$d^k_{B/A} : B \xrightarrow[p_2]{} B \otimes_A B \longrightarrow \mathcal{P}^k_{B/A} \quad .$$

C'est un A-opérateur différentiel d'ordre au plus égal à k.

Proposition 3. Le foncteur

$$N \to \mathrm{Diff}^k_{B/A}(B,N)$$

est représentable : pour tout B-module N,

$$\mathrm{Diff}^k_{B/A}(B,N) = \mathrm{Hom}_B(\mathcal{P}^k_{B/A},N).$$

Démonstration. Soit $D : B \to N$

un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à k. On pose :

$$D_1 : B \otimes_A B \to N$$

$$D_1(x \otimes y) = x\, D(y)$$

on a , pour (α,x,x',y) dans B

$$D(\alpha) = D_1(1 \otimes \alpha) \qquad \forall \alpha \in B$$

$$D_1(xx' \otimes y) = x\, D_1(x' \otimes y).$$

De plus, si b est un élément de B,

$$D_1((1\otimes b - b\otimes 1)x \otimes y) = x[D,b]\,(y)$$

pour (x,y) arbitraires. D'après la proposition 1, D_1 est nul sur l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$\alpha = (1\otimes b_o - b_o\otimes 1)\dots(1\otimes b_k - b_k\otimes 1), \quad b_i \in B$$

qui n'est autre que I^{k+1}. L'application D_1 se factorise à travers $\mathcal{P}^k_{B/A}$:

$$\tilde{D} : \mathcal{P}^k_{B/A} \to N \ ,$$

et on a :

$$D = \tilde{D} \circ d^k_{B/A} \quad .$$

La réciproque est immédiate.

Convention: Si l'anneau B est donné, on notera $\mathrm{Diff}^k_B(M,N)$, $\mathrm{Diff}_B(M,N)$ les modules d'opérateurs différentiels relatifs au sous-anneau premier.

Lemme 4. Soit P un A-opérateur différentiel de M dans N, d'ordre inférieur ou égal à k. Pour tout idéal $\mathcal{J}$ de B, et pour tout entier n,

$$P(\mathcal{J}^n M) \subset \mathcal{J}^{n-k} M \qquad \text{avec } \mathcal{J}^i = 0,\ i \leq 0$$

Corollaire. Soit $\mathcal{J}$ un idéal de B. Tout opérateur différentiel est continu pour la topologie $\mathcal{J}$-adique (sur M et N).

Démonstration du lemme par récurrence.

Proposition 4. Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{O}$) l'anneau des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{R}^n$ (resp. holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$). Tout opérateur différentiel de

$\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$) d'ordre au plus égal à k, s'écrit de manière unique dans un système de coordonnées (x_i) (resp. (z_i))

$$P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha ,$$

$$a_\alpha \in \mathcal{A} \text{ (resp. } \mathcal{O}\text{)},$$

$$D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} \qquad (\text{resp.} = (\frac{\partial}{\partial z_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial z_n})^{\alpha_n}) .$$

On appelle coefficients de P les germes (a_α) (ils sont relatifs au système de coordonnées).

Démonstration. Nous considèrons le cas analytique-réel.

a) Soit B l'anneau $\mathbb{C}[x_i]$ des polynômes de n variables. On a :

$$B \otimes_{\mathbb{C}} B = \mathbb{C}[x_i, x'_j] \qquad (i,j=1,\ldots,n)$$

et dans cet isomorphisme le noyau I de Δ s'identifie à l'idéal engendré par les $(x_i - x'_i)$. Il en résulte une base de $\mathcal{P}^k_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}}$, formée des polynômes

$$(x'-x)^\alpha \ , \ |\alpha| \leq k \qquad \text{(notations évidentes)},$$

et par dualité, une base de $\mathrm{Diff}^k_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X],\mathbb{C}[X])$ formée des opérateurs D^α avec

$$D^\alpha(x^\beta) = \binom{\beta}{\alpha} x^{\beta-\alpha} .$$

b) La restriction induit une application évidente

$$\phi : \mathrm{Diff}^k_{\mathcal{A}/\mathbb{C}}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \to \mathrm{Diff}^k_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X],\mathcal{A})$$

injective d'après le théorème de Krull. L'application ϕ est surjective :

D'après a) et [5, ch.I, par.2,N°10] , puisque $\mathcal{P}^k_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}}$ est libre de type fini,

$$\mathrm{Diff}^k_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X],\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}}(\mathcal{P}^k_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}},\mathcal{A}) \simeq \mathrm{Diff}^k_{\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X],\mathbb{C}[X]) \otimes_{\mathbb{C}[X]} \mathcal{A}$$

L'application ϕ est donc surjective, et tout opérateur différentiel sur $\mathcal{A}$ est combinaison linéaire finie à coefficients dans $\mathcal{A}$, des opérateurs (D^α).

Proposition 5. Soit $\mathcal{E}$ l'anneau des germes de fonctions différentiables à l'origine de $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie limite inductive d'espaces de Fréchet, et

$$P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

un opérateur différentiel continu. Il s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha \quad , \ a_\alpha \in \mathcal{E}$$

où k désigne l'ordre de P.

Démonstration. On remplace la référence au théorème de Krull par un argument de continuité : les coefficients (a_α) étant déterminés, on montre que P coïncide avec

$$\bar{P} = \Sigma\, a_\alpha D^\alpha$$

sur le sous-espace des polynômes, donc sur $\mathcal{E}$.

Remarque: Si P est une application induite par un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire de faisceaux, c'est un opérateur différentiel (théorème de Peetre).

III -

ANNEAUX DE LEIBNIZ .

Les anneaux que nous considèrerons vérifient la propriété particulière suivante, relativement aux opérateurs différentiels sur le sous-anneau premier.

Définition 1. On dit qu'un anneau B est un anneau de Leibniz si pour tout opérateur différentiel P d'ordre p, il existe une famille finie d'opérateurs différentiels $(P_i)_{i\in I}$ d'ordre au plus égal à p, tels que pour tout élément b dans B, il existe une famille $(b_i)_{i\, I}$ dans B, avec

(1) $$P(bx) = \sum_{i\in I} b_i\, P_i(x) \qquad \forall x \in B .$$

Remarque: Si P est d'ordre un, la condition est toujours vérifiée :

$$P(bx) = b\,P(x) + x\,P(b) - xb\,P(1).$$

Exemple: Soit B l'anneau des polynômes d'une infinité de variables sur $\mathbb{R}$

$$B = \varinjlim_n \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] \quad ;$$

B n'est pas de Leibniz; soit Δ l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial X_i}\right)^2$$

On vérifie que (1) ne peut avoir lieu.

Proposition 1. L'anneau des germes de fonctions holomorphes (resp. analytiques, différentiables) sur un germe d'espace analytique complexe est un anneau de Leibniz.

Démonstration. (Cas différentiable).

1°) Si P est un opérateur différentiel à coefficients différentiables dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, d'ordre k, on a (notations usuelles)

$$P = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha$$

et on connaît la formule de Leibniz

$$P(fg) = \sum_\beta D^\beta(f)\, P_\beta(g)$$

où P_β est défini par

(2) $$P_\beta = \frac{1}{\beta!}\,[P,x]_{(\beta)}$$

crochet β-uple avec les fonctions coordonnées (en un sens évident).

2°) Soient (X,0) le germe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ d'un ensemble analytique complexe, $\bar{P}$ un germe d'opérateur différentiel à coefficients différentiables sur (X,0), induit par un germe P sur $(\mathbb{C}^n,0)$.

D'après (2), les opérateurs P_β induisent des opérateurs différentiels $\bar{P}_\beta$ sur (X,0).

Soit f un germe de fonction différentiable sur (X,0) induit par un germe f_1. Soit $r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{X,0}$ la restriction. On a:

$$P(fg) = \sum_{\beta} r(D^{\beta}(f_1))\, \bar{P}_{\beta}(g),$$

ce qui démontre l'assertion.

Désignons par K un corps de Leibniz de caractéristique nulle, par $\mathcal{P}^m_K$ l'espace des jets d'ordre m sur K,

$$\mathcal{P}^m_K = \frac{K \otimes K}{I^{m+1}}$$

et posons

$$\Omega^1_K = I/I^2$$

(cette notation sera justifiée dans la Deuxième partie).

<u>Proposition</u> 2. Supposons Ω^1_K de dimension finie. Alors l'anneau K[X] est de Leibniz.

<u>Démonstration</u>.

1°) Pour tout m, l'espace $\mathcal{P}^m_K$ est filtré par les (I^r/I^{r+1}), et on a la suite exacte :

$$(\Omega^1_K)^{\otimes r} \to I^r/I^{r+1} \to 0$$

le gradué associé à $\mathcal{P}^m_K$ est de dimension finie. Il en est de même de $\mathcal{P}^m_K$. On a alors pour tout espace vectoriel E sur K,

$$\mathrm{Diff}^m(K,E) = \mathrm{Hom}_K(\mathcal{P}^m_K,E) = E \underset{K}{\otimes} \mathrm{Hom}_K(\mathcal{P}^m_K,K) = E \underset{K}{\otimes} \mathrm{Diff}^m(K).$$

En particulier, tout opérateur différentiel de K dans K[X] est combinaison linéaire à coefficients dans K[X] d'opérateurs de K.

2°) Soit D la K-dérivation canonique de K[X]. Notons D^m le m-ième itéré de D; (c'est un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à m), et posons, si P est un opérateur différentiel de K dans K[X]:

$$P \otimes D^m : K[X] \to K[X]$$

$$(P \otimes D^m)(aX^j) = P(a)\, D^m(X^j) \quad , \ j \in \mathbb{N},\ a \in K.$$

<u>Lemme 5</u>. Tout opérateur différentiel Δ sur K[X], d'ordre au plus égal à p, peut s'écrire de manière unique

$$\Delta = \sum_{0}^{p} \Delta_i \otimes D^i$$

où Δ_i désigne un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à (p-i).

<u>Démonstration</u>.

1°) On peut définir, pour toute famille (P_i) d'applications de K dans K[X] , additives, une application,

$$\tilde{P} = \sum_{0}^{\infty} P_i \otimes D^i$$

De plus, $\widetilde{P}$ est nul si et seulement si chaque P_i est nul, comme on le vérifie en appliquant successivement $\widetilde{P}$ aux monômes à coefficients dans K.

2°) Soit P un opérateur différentiel sur K[X]. On définit par récurrence une famille (P_i) d'applications de K dans K[X] telles que

$$P = \sum_{0}^{\infty} P_i \otimes D^i$$

On a:

$$[P,X] = \Sigma\ (i+1)\ P_{i+1} \otimes D^i .$$

Supposons démontrée l'assertion du lemme pour les opérateurs différentiels d'ordre p et supposons l'ordre de P au plus égal à (p+1). D'après l'hypothèse de récurrence, les $(P_{i+1})_{i\geq 0}$ sont des opérateurs différentiels d'ordre au plus égal à (p-(i -1)). Le lemme est donc démontré.

Il suffit alors, pour achever la démonstration de la proposition 2, de remarquer que les opérateurs (D^i) vérifient la condition (1), et d'appliquer aux opérateurs Δ_i le 1°).

IV -

FAISCEAUX D'OPERATEURS DIFFERENTIELS.

IV-1.

Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires sur l'espace topologique X, et $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ deux faisceaux de $\mathcal{B}$-modules.

Lemme 1. Pour tout entier k, le préfaisceau

$$U \to \mathrm{Diff}^k_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}\ (\mathcal{M}(U),\mathcal{N}(U))$$

est un faisceau, noté $\mathrm{Diff}^k_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}\ (\mathcal{M},\mathcal{N})$, et appelé faisceau des $\mathcal{A}$-opérateurs différentiels de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

En effet, ce préfaisceau est un sous-préfaisceau du faisceau $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\ (\mathcal{M},\mathcal{N})$. On vérifie par récurrence qu'il est un sous-faisceau de ce faisceau.

Définition 1. Soit X un espace analytique complexe.

a) On appelle faisceau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes (resp. analytiques) sur X, d'ordre au plus égal à k, le faisceau

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_X) = \mathrm{Diff}_{\mathcal{O}_X/\mathbb{C}}\ (\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

$$(\text{resp. } \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X) = \mathrm{Diff}_{\mathcal{A}_X/\mathbb{C}}\ (\mathcal{A}_X,\mathcal{A}_X))$$

b) On appelle faisceau des opérateurs différentiels à coefficients différentiables sur X, d'ordre au plus égal à k, le faisceau

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X) = \{P,\ P \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{E}_X/\mathbb{C}}\ (\mathcal{E}_X,\mathcal{E}_X)\quad ,\ P \text{ continu},\}$$

Remarques: 1) On montrera que les opérateurs différentiels à coefficients holomorphes ou analytiques sont continus; il en résulte des injections canoniques

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_X) \subset \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X) \subset \mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X) \quad .$$

2) Si X est lisse, l'hypothèse de continuité est toujours satisfaite par les morphismes de faisceaux (théorème de Peetre).

IV-2.

Soit $(X,0)$ un germe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ d'ensemble analytique.
Désignons par I l'idéal des germes de fonctions holomorphes nuls sur $(X,0)$, par I_a l'idéal des germes analytiques nuls sur $(X,0)$, par Diff^k (resp. Diff_a^k) l'ensemble des opérateurs différentiels holomorphes (resp. analytiques), d'ordre au plus égal à k à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Posons

$$\mathrm{Diff}^k(I) = \{P \in \mathrm{Diff}^k, P(I) \subset I\} \qquad \mathrm{Diff}_a^k(I_a) = \{P \in \mathrm{Diff}_a^k, P(I_a) \subset I_a\}$$

$$I\ \mathrm{Diff}^k = \{P \in \mathrm{Diff}^k,\ P(\mathcal{O}) \subset I\}.$$

$$I_a\ \mathrm{Diff}_a^k = \{P \in \mathrm{Diff}_a^k,\ P(\mathcal{A}_0) \subset I_a\} .$$

Soit

$$r : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}/I$$

$$(\text{resp. } r : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{X,0} = \mathcal{A}/I_a\ )$$

la surjection naturelle.

Théorème 2.

1) Tout opérateur différentiel P de $\mathrm{Diff}^k(I)$ (resp. $\mathrm{Diff}_a^k(I_a)$), induit un opérateur différentiel Δ sur $(X,0)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "P"] \arrow[d, dashed, "r"] & \mathcal{O} \arrow[d, dashed, "r"] \\ \mathcal{O}_{X,0} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{O}_{X,0} \end{tikzcd} \qquad (\text{ resp. } \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "r"] & \mathcal{A} \arrow[d, "r"] \\ \mathcal{A}_{X,0} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{A}_{X,0} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

2) On a :

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_{X,0}) = \mathrm{Diff}^k(I)\ /\ I\ \mathrm{Diff}^k$$

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_{X,0}) = \mathrm{Diff}_a^k(I_a)/I_a\ \mathrm{Diff}^k(I_a) .$$

Démonstration pour $\mathcal{A}_{X,0}$ (la démonstration dans le cas holomorphe est identique).

Choisissons un système de coordonnées locales à l'origine de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^{2n}$, soit $(x_i)_{i=1,..2n}$. Pour tout n-uple d'entiers α on pose

$$x^\alpha = x_1^{\alpha},\ldots,x_n^{\alpha_n} \quad .$$

1°) Si P est un opérateur différentiel sur l'anneau $\mathcal{A}$, qui conserve l'idéal I_a, il induit une application $\mathbb{C}$-linéaire $\Delta : \mathcal{A}_{X,0} \longrightarrow \mathcal{A}_{X,0}$

et pour tout germe analytique f, [P,f] induit

$$[\Delta, r(f)] : \mathcal{A}_{X,0} \to \mathcal{A}_{X,0}$$

Il en résulte par récurrence que Δ est un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à celui de P.

2°) Réciproquement, soit Δ un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à k sur $\mathcal{A}_{X,0}$. Choisissons des germes analytiques (a_α) à l'origine de $\mathbf{C}^n$ tels que

$$r(a_\alpha) = \Delta(r(x^\alpha)) \quad \forall \alpha, \ |\alpha| \leq k.$$

Il existe un opérateur différentiel P à coefficients analytiques à l'origine de $\mathbf{C}^n$, d'ordre au plus égal à k, tel que

$$P(x^\alpha) = a_\alpha \ , \ |\alpha| \leq k \ .$$

On a $r\,P(f) = \Delta(r(f))$, pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à k. En appliquant la proposition 1, on montre que cette égalité a encore lieu pour un polynôme f arbitraire. Soient alors g un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbf{C}^n$, et m un entier quelconque. On peut écrire, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_X$) désignant l'idéal maximal de $\mathcal{A}_{\mathbf{C}^n,0}$ (resp. $\mathcal{A}_{X,0}$)

$$g = f+h \ , \quad h \in \mathcal{M}^m$$

où f est un polynôme. On a :

$$r(P(g) - \Delta(r(g)) = r\,P(h) - \Delta(r(h)).$$

D'après le lemme 4, le second membre appartient à $\mathcal{M}_X^{m-k}$. Puisque m est quelconque, on a, d'après le théorème de Krull:

$$r\,P(g) = \Delta(r(g)).$$

En particulier, P laisse invariant I_a.

L'application

$$\mathrm{Diff}_a^k(I_a) \to \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_{X,0})$$

est surjective. Son noyau est formé des opérateurs différentiels dont l'image est contenue dans I_a.

Corollaire. Les opérateurs différentiels à coefficients holomorphes ou analytiques sur un germe d'espace analytique sont continus pour les topologies (DFN).

En effet, la propriété a lieu pour $\mathbf{C}^n$. De même, il résulte des représentations locales qu'on a les injections canoniques de faisceaux

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_X) \subset \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X) \ .$$

IV- 3. Opérateurs différentiels à coefficients différentiables.

Supposons X plongé comme sous-ensemble analytique d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal des germes de fonctions différentiables nuls sur (X,0), et désignons par $\mathrm{Diff}^k(J)$ l'ensemble des opérateurs différentiels dans $\mathcal{E}_o$ qui laissent invariant l'idéal $\mathfrak{J}$, et J Diff^k l'ensemble des opérateurs dont l'image est contenue dans $\mathfrak{J}$.

Proposition 3.

$$\mathrm{Diff}_o^k(\mathcal{E}_X) = \mathrm{Diff}^k(\mathfrak{J})/\mathfrak{J}\,\mathrm{Diff}^k$$

Démonstration. Un opérateur différentiel P à l'origine de $\mathbb{C}^n$, laissant invariant l'idéal J, induit un opérateur différentiel Δ sur $(X,0)$, la continuité étant assurée par celle de P. Réciproquement, si Δ est défini sur $\mathcal{E}_{X,0}$, on montre comme dans la démonstration du théorème 2 qu'il existe un opérateur différentiel P à l'origine de $\mathbb{C}^n$ tel que

$$r\,P(f) = \Delta(r(f)) \qquad r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{X,0}$$

pour tout polynôme f.

Soit g un germe différentiable à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Il existe un ouvert U où P est défini, et une suite (g_n) de polynômes qui converge sur U vers g. On a alors :

$$\left.\begin{array}{r} P(g_n) \to P(g) \\ r\,P(g_n) \to r\,P(g) \\ r(g_n) \to r(g) \end{array}\right\} \Longrightarrow r\,P(g) = \Delta(r(g))$$

La démonstration s'achève comme plus haut.

Remarques:

1) On a les inclusions canoniques de faisceaux $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_X) \subset \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X) \subset \mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X)$

2) On peut formuler un analogue global du résultat précédent:

Soient X plongé dans l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$, et $\mathrm{Diff}^k(J)$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre au plus égal à k sur U, qui laissent invariant le faisceau d'idéaux des germes de fonctions différentiables nulles sur X. D'après ce qui précède, on a un morphisme surjectif

$$\mathrm{Diff}^k(J) \to i_*\,\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X) \to 0$$

$$i : X \hookrightarrow U\,.$$

Puisqu'il s'agit de faisceaux fins, le morphisme est globalement surjectif. Ainsi tout opérateur différentiel à coefficients différentiables sur X peut être représenté par un opérateur différentiel sur U. La même remarque s'applique dans le cas analytique si X est cohérent comme ensemble analytique réel, puisque tout ouvert de $\mathbb{C}^n$ est de Stein pour les $\mathcal{A}$-faisceaux cohérents, d'après la suite exacte suivante et l'étude du paragraphe V :

$$0 \to \mathfrak{J}_a\,\mathrm{Diff}_a^k \to \mathrm{Diff}_a^k(\mathfrak{J}_a) \to i_*\,\mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X) \to 0$$

V - PARTIES PRINCIPALES ET OPERATEURS DIFFERENTIELS.

Soient Z un espace analytique, $\mathcal{F}_Z$ l'un des faisceaux $\mathcal{O}_Z$, $\mathcal{A}_Z$, $\mathcal{E}_Z$. Le morphisme diagonal associé à l'espace analytique X

$$\Delta : X \to X\times X$$

induit une suite exacte

$$0 \to J_X \to \Delta^*(\mathcal{F}_{X\times X}) \to \mathcal{F}_X \to 0$$

Définition 1. On appelle faisceau des parties principales d'ordre k à coefficients dans $\mathcal{F}_X$ le faisceau

$$\mathcal{F}_X^{(k)} = \Delta^*(\mathcal{F}_{X\times X}) / J_X^{k+1}$$

On munit ce faisceau d'une structure de $\mathcal{F}_X$-module, déduite de la première projection

$$p_1 : X\times X \to X$$

et on pose :

$$d_k : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X^{(k)}$$

$$d_k = p_2^*$$

où p_2 désigne la seconde projection.

Remarque. Le faisceau $\mathcal{O}_X^{(k)}$ est cohérent [15].

Le résultat suivant montre que le faisceau des parties principales d'ordre k représente le foncteur "opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à k", à coefficients dans $\mathcal{F}_X$ défini plus haut (Définition 2).

Théorème 1. Un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire de faisceaux

$$P : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X$$

est un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{F}_X$ d'ordre au plus égal à k si et seulement si il peut s'écrire

$$P = \tilde{P} \circ d_k \quad , \quad \tilde{P} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_X}(\mathcal{F}_X^{(k)}, \mathcal{F}_X)$$

Corollaire. Si X est cohérent, le faisceau $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X)$) est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules (resp. de $\mathcal{A}_X$-modules).

Démonstration.

1°) On a le diagramme commutatif

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & J_X & \to & \Delta^*(\mathcal{F}_{X\times X}) & \to & \mathcal{F}_X \\ & & & & \uparrow i & & \\ 0 & \to & I_X & \to & \mathcal{F}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_X & \to & \mathcal{F}_X \end{array}$$

où i est l'application naturelle

$$i : \mathcal{F}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{F}_X \to \Delta^*(\mathcal{F}_{X\times X})$$
$$i(f \otimes g) = f(x)g(y)$$

Lemme 1. $i: \mathcal{F}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{F}_X \to \Delta^*(\mathcal{F}_{X\times X})$ est injective.

Démonstration. Si X est régulier, le morphisme
$$i: \mathcal{E}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{E}_X \to \Delta^*(\mathcal{E}_{X\times X})$$
est injectif. L'assertion est alors vérifiée. Soient X quelconque, U un ouvert de X et V l'ensemble (dense) des points réguliers de U. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_X(U) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{E}_X(U) \arrow[r, "i_U"] \arrow[d, "r"] & \mathcal{E}_{X\times X}(U\times U) \arrow[d, dashed, "r'"] \\ \mathcal{E}_X(V) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{E}_X(V) \arrow[r, "i_{U\cap V}"] & \mathcal{E}_{X\times X}(V\times V) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont injectives, et $i_{U\cap V}$ l'est aussi. Il en résulte que i_U est injective. L'assertion en résulte.

On a donc, d'après (1)
$$I_X = J_X \cap (\mathcal{F}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{F}_X) \quad , \quad I_X^{k+1} \subset J_X^{k+1}$$
Désignons par $\mathcal{P}_X^k$ l'espace des jets d'ordre k définis en II ("**faisceautisé**") (Définition 2)
$$\mathcal{P}_X^k = \mathcal{F}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{F}_X \,/\, I_X^{k+1}$$
On déduit de l'application $\mathcal{F}_X$-linéaire
$$\mathcal{P}_X^k \to \mathcal{F}_X^{(k)}$$
que tout opérateur $\mathcal{F}_X$-linéaire
$$\tilde{P} : \mathcal{F}_X^{(k)} \to \mathcal{F}_X$$
définit un opérateur différentiel d'ordre au plus égal à k sur X, à coefficients dans $\mathcal{F}_X$ (dans le cas différentiable, on s'assure qu'on peut définir une structure naturelle de faisceau de Fréchet sur $\mathcal{E}_X^{(k)}$: l'idéal J_X est engendré par des fonctions analytiques, il est donc fermé ainsi que J_X^{k+1} dans $\Delta^*(\mathcal{E}_{X\times X})$ muni sur tout ouvert de X de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet.

De plus, $d_k : \mathcal{E}_X \to \mathcal{E}_X^{(k)}$ est continu.

Il suffit de vérifier cette assertion pour un ouvert U de C^n. Dans ce cas, $\mathcal{E}^{(k)}(U)$ est un $\mathcal{E}(U)$-module libre engendré par les éléments
$$(y-x)^{(\alpha)} \quad , \quad |\alpha| \leqslant k,$$
et l'application d_k est définie par :
$$d_k : f(x) \to \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha f(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$$
Le morphisme $\tilde{P}$ est continu puisque $\mathcal{E}_X$-linéaire et défini sur $\mathcal{E}_X^{(k)}$ qui est localement de type fini

Il en résulte que P est continu, donc définit un opérateur différentiel à coefficients différentiables sur X.

2°) Réciproquement, soit P un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathfrak{F}_X$. D'après la représentation locale (théorème 2, proposition 3), il est induit localement dans un plongement de X dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ par un opérateur différentiel P_1 dans U, à coefficients holomorphes, analytiques ou différentiables. On sait que P_1 se factorise à travers l'espace des parties principales sur U d'ordre k :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_U \arrow[rr, "P_1"] \arrow[dr] & & \mathfrak{F}_U \\
& \mathfrak{F}_U^{(k)} \arrow[ur, "\tilde{P}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

On constate que le noyau $\mathcal{I}$ de l'application naturelle

$$\mathfrak{F}_U^{(k)}(U) \to \mathfrak{F}_X^{(k)}(X)$$

est engendré par l'image de $(p_2^* \mathcal{J}, p_1^* \mathcal{J})$, où $\mathcal{J}$ désigne l'idéal noyau de

$$\mathfrak{F}_U(U) \to \mathfrak{F}_X(X)$$

L'image par $\tilde{P}_1$ de $\mathcal{I}$ est contenue dans $\mathcal{J}$ d'après l'hypothèse

$$P_1(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$$

Il en résulte qu'on peut compléter le diagramme précédent en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_U \arrow[rrr, "P_1"] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & \mathfrak{F}_U \arrow[ddd] \\
& \mathfrak{F}_U^{(k)} \arrow[urr, "\tilde{P}_1"'] \arrow[dr] & & \\
& & \mathfrak{F}_X^{(k)} \arrow[dr, "\tilde{P}"] & \\
\mathfrak{F}_X \arrow[urr] \arrow[rrr, "P"] & & & \mathfrak{F}_X
\end{tikzcd}
\qquad \tilde{P} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}_X}(\mathfrak{F}_X^{(k)}, \mathfrak{F}_X)$$

ce qui achève la démonstration. On remarque enfin que le faisceau $\mathrm{Diff}^k(\mathfrak{F}_X)$ est la restriction à X du faisceau $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ sur le complexifié $\tilde{X}$ de X supposé cohérent.

CHAPITRE II.

PROLONGEMENTS DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS . OPÉRATEURS À COEFFICIENTS MÉROMORPHES.

On étudie l'anneau des opérateurs différentiels sur le corps des germes de fonctions méromorphes sur un germe d'espace analytique irréductible.

I - OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR UN ANNEAU ET SON CORPS DES FRACTIONS.

Soient A un anneau commutatif unitaire sans diviseur de zéro, et k son corps des fractions. Les seuls opérateurs différentiels considérés sont ceux définis relativement au sous-anneau premier de A.

On suppose que le module

$$\Omega^1_A = I/I^2 \ , \ I = \mathrm{Ker}(A \otimes A \to A)$$

appelé module des différentielles de A, est de présentation finie.

On montre alors, comme au chapitre I (Prop.2, 1°) de la démonstration) qu'il en résulte que pour tout entier m le module $\mathcal{P}^m_A$ des jets d'ordre k est un A-module de présentation finie.

<u>Proposition 1</u>. On a, pour tout entier m,

$$\mathrm{Diff}^m(k) = k \underset{A}{\otimes} \mathrm{Diff}^m(A)$$

<u>Démonstration</u>. La construction du module des jets est compatible avec la localisation [15,16.4.15]. Il en résulte que l'espace des jets d'ordre m relatifs à k n'est autre que

$$\mathcal{P}^m_k = k \otimes \mathcal{P}^m_A$$

D'autre part, on sait que k est plat sur A. On a alors :

$$\mathrm{Diff}^m(k) = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{P}^m_k, k) = \mathrm{Hom}_k(k \otimes \mathcal{P}^m_A, k)$$

On sait alors, puisque le module $\mathcal{P}^m_A$ est de présentation finie [cf.5,ch.I,par.2,n°10], qu'on a :

$$\mathrm{Hom}_k(k \underset{A}{\otimes} \mathcal{P}^m_A, k) = k \underset{A}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{P}^m_A, A) = k \underset{A}{\otimes} \mathrm{Diff}^m(A)$$

<u>Définition.</u> Soit (X,x) un germe d'espace analytique irréductible.

On appelle germe d'opérateur différentiel <u>à coefficients méromorphes</u> sur (X,x) un opérateur différentiel sur le corps $\mathcal{M}_{X,x}$ des germes de fonction méromorphes sur (X,x).

Proposition 2.

1°) Soit Δ un germe d'opérateur différentiel à coefficients méromorphes sur (X,x). Il existe un germe non-nul de fonction holomorphe u tel que

$$P = u\Delta$$

soit un germe d'opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur (X,x).

2°) Tout germe d'opérateur différentiel

$$P : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

se prolonge en

$$\tilde{P} : \mathcal{M}_{X,x} \to \mathcal{M}_{X,x}$$

de manière unique.

Démonstration.

1°) Désignons par $\mathcal{O}^{(k)}_{X,x}$ le module des parties principales (holomorphes) d'ordre égal à k. D'après le chapitre I (par.V,Th.1), le module des opérateurs différentiels d'ordre au plus égal à k s'identifie au dual de $\mathcal{O}^{(k)}_{X,x}$, qui est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de présentation finie.

D'après la proposition 1, Δ est combinaison à coefficients dans $\mathcal{M}_{X,x}$. La première assertion en résulte.

2°) Soit P un germe d'opérateur différentiel holomorphe sur (X,x). On suppose (X,x) plongé dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, et soit $\mathcal{J}$ l'idéal de définition de (X,x). Il existe un opérateur P_1 à coefficients holomorphes dans U au voisinage de x, qui induit P. Soit

$$\alpha = f/g \ , \ \alpha \in \mathcal{M}_{X,x} \ ;$$

le germe α peut être représenté par un germe φ méromorphe au point x de U,

$$\varphi = f_1/g_1 \ , \quad g_1 \notin \mathcal{J} \ .$$

On pose

$$\bar{P}(\alpha) = r[P_1(f_1/g_1)]$$

où r désigne la restriction à X des germes de fonctions méromorphes sur U, et définies sur X. La définition précédente a un sens, puisque

$$\exists m \in \mathbb{N}, \quad g_1^m \, P_1(f_1/g_1) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \ .$$

L'opérateur $\bar{P}$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{M}_{X,x}$ qui prolonge P. Si $\breve{P}$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{M}_{X,x}$ prolongeant P, il peut être représenté à l'origine de $\mathbb{C}^n$ par un opérateur à coefficients méromorphes déterminés de manière unique.

D'où

$$P = \bar{P}.$$

Théorème 3. Soit (X,x) un germe d'espace analytique irréductible de dimension n. Il existe n dérivations (Δ_i) du corps $\mathcal{M}_{X,x}$ des germes de fonctions méromorphes sur (X,x), qui commutent entre elles, telles que si P est un opérateur différentiel d'ordre k sur (X,x) à coefficients méromorphes, P peut s'écrire, de manière unique, comme combinaison à coefficients méromorphes des monômes :

$$\Delta^{\alpha} = \Delta_1^{\alpha_1} \ldots \Delta_n^{\alpha_n} \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k .$$

L'algèbre graduée associée à l'anneau des opérateurs différentiels méromorphes est une algèbre de polynômes de n variables à coefficients dans $\mathcal{M}_{X,x}$.

Démonstration.

Le germe (X,x) peut être représenté comme germe de revêtement ramifié au dessus de $(\mathbb{C}^n,0)$. L'inclusion associée fait de $\mathcal{M}_{X,x}$ une extension algébrique séparable de l'anneau des germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$. On sait [39] que toute dérivation de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0}$ se prolonge de manière unique à $\mathcal{M}_{X,x}$. On en déduit un morphisme d'anneaux filtrés

$$\sigma : \mathrm{Diff}(\mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0}) \to \mathrm{Diff}(\mathcal{M}_{X,x})$$

tel que

$$\sigma(f) = r^*(f) \qquad \forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0}$$

$$\sigma(P)|_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0}} = P.$$

Le morphisme σ est donc injectif. Sa surjectivité est conséquence élémentaire du lemme suivant, qui résulte du fait que l'espace vectoriel des jets méromorphes $\mathcal{M}^{(p)}_{\mathbb{C}^n,0}$ est de dimension finie.

Lemme . $\mathrm{Diff}^p(\mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0}, \mathcal{M}_{X,x}) = \mathcal{M}_{X,x} \otimes_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0}} \mathrm{Diff}^p(\mathcal{M}_{\mathbb{C}^n,0})$

La démonstration du théorème s'achève en remarquant que σ est un morphisme d'anneaux qui induit un isomorphisme sur les algèbres-graduées associées.

CHAPITRE III

IMAGES INVERSES D'OPERATEURS DIFFERENTIELS.

On considère un morphisme d'espaces analytiques normaux :

$$\pi : X \to Y$$

On suppose que π est, en dehors d'un vrai sous-ensemble analytique Z de X, un isomorphisme local. On peut alors définir l'image inverse d'un opérateur différentiel sur Y. C'est un opérateur différentiel sur X - Z, ayant des pôles sur Z. Si π est un revêtement ramifié, notre étude se déduit partiellement du chapitre précédent; nous examinons le cas où Y est le quotient d'une variété X par un groupe, et celui où π est un morphisme de résolution.

I - CAS DES VARIETES.

I.1 - Les opérateurs différentiels considérés sont holomorphes, sauf mention particulière.

Soit :

$$\varphi : V \to W$$

un isomorphisme de variétés analytiques complexes. On peut associer, par transport de structure, un opérateur différentiel $\varphi^*(P)$ sur V à tout opérateur différentiel P sur W. Cet opérateur est déterminé de manière unique par

$$(1) \qquad \varphi^*(P)\ (g \circ \varphi) = P(g) \circ \varphi$$

pour tout ouvert U de W, et pour toute fonction holomorphe sur U.

Le caractère local de cette construction relativement à la source de l'application φ permet de définir l'image inverse de P même si φ n'est qu'un isomorphisme local :

$$\varphi : V \to W$$

un morphisme de variété analytiques complexes qui est, en dehors d'un vrai sous-ensemble (analytique) Z de V, un isomorphisme local. L'unique opérateur différentiel $\varphi^*(P)$ sur V - Z défini par (1) s'appelle l'image inverse de P.

Si P est une fonction f, son image inverse coïncide avec la composée avec φ de f. L'application φ^* ainsi définie est un morphisme d'anneaux.

Soit a un point de Z, b son image, et J le déterminant jacobien de φ calculé dans un système de coordonnées locales arbitraires au voisinage de a (et b).

Par hypothèse

$$J(x) \neq 0 \quad \forall\, x \notin Z$$

Supposons d'abord P holomorphe :

<u>Théorème 1</u> : Sous les hypothèses précédentes, l'image inverse d'un opérateur différentiel défini au voisinage de b s'écrit :

$$\varphi^*(P) = \frac{1}{J^{2k-1}}\, Q$$

où Q est un opérateur différentiel défini au voisinage de a, et k désigne l'ordre de P en b.

<u>Démonstration</u> :

On peut se ramener à un isomorphisme local sur U - Z, ou U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$:

Soient
$$\varphi : U \to V\ ,\quad \varphi(u) = z \qquad , \qquad \begin{array}{l} u = (u_1,\dots,u_n) \\ z = (z_1,\dots,z_n) \end{array}$$
$$D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}\ ,\quad i = 1,\dots,n\ .$$

On effectue le calcul explicite de l'image inverse de D_i, d'après (1) : Si

$$\varphi^*(D_i) = \sum_i b_i(u)\, \frac{\partial}{\partial u_i}$$

on doit avoir

$$\sum_i b_i(u)\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(z) = \delta_{ij} \quad (\delta_i\text{, symbole de Kronecker})$$

système d'équations linéaires en les b_i qui possède une solution holomorphe dans U - Z, telle que l'opérateur

$$J\ \ \varphi^*(D_i) = \Delta_i$$

soit holomorphe.

De même si

$$\bar{D}_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$\bar{J}(z)\ \varphi^*(\bar{D}_i) = \bar{\Delta}_i$

est défini dans U (à coefficients antiholomorphes).

Tout opérateur différentiel holomorphe P au voisinage de l'origine est combinaison linéaire à coefficients holomorphes des monômes D_i. Son image inverse $\varphi^*(P)$ s'écrit donc

$$\varphi^*(P) = \Sigma\ \varphi^*(a_\alpha)\ \Delta^\alpha$$

$$\Delta^\alpha = \Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_n^{\alpha_n} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant k$$

Il suffit donc de vérifier que l'opérateur

$$\tilde{\Delta}^\alpha = J^{2k-1}\ \Delta^\alpha$$

est holomorphe dès que

$$|\alpha| \leqslant k$$

C'est une récurrence facile sur l'ordre k.

Si P est analytique-réel (resp. différentiable) la démonstration précédente montre que l'on a

$$\varphi^*(P) = \frac{1}{|J|^{2(2k-1)}}\ Q$$

où Q est analytique-réel (resp. différentiable).

<u>Remarque</u> : Les coefficients de la partie principale de P sont de la forme suivante : si P est holomorphe (resp. analytique, différentiable)

$$b_\alpha = \frac{c_\alpha}{J^k}$$

$$\text{(resp.} \quad b_\alpha = \frac{c_\alpha}{J^i \bar{J}^{k-i}}\ )$$

où c_α est holomorphe (resp. analytique, différentiable).

Un opérateur P sera dit semi-méromorphe s'il existe une fonction analytique-réelle u telle que uP soit analytique-réel (resp. différentiable).

I.2

Considérons une immersion de variété analytiques complexes :

$$\pi : V \to W$$

Soit P un opérateur différentiel sur W. Existe-t-il un opérateur $\varphi^*(P)$ sur V vérifiant (1) ? Il est nécessaire que P satisfasse à la condition suivante :

Si π induit sur l'ouvert U un isomorphisme

$$\pi : U \to \pi(U) = U' \subset W'$$

où U' est une sous-variété d'un ouvert W' de W, alors P laisse stable l'idéal des germes de fonctions nulles sur U'.

Nous dirons que P se restreint à $\pi(V)$ si cette condition est vérifiée (si π est un plongement, la condition signifie exactement que P se restreint à la sous-variété de W image de π).

Théorème 2 : Soit :

$$\pi : V \to W$$

une application de variétés analytiques complexes qui est une immersion en dehors d'un vrai sous-ensemble analytique Z de V.

Si P est un opérateur différentiel sur W qui se restreint à $\pi(V)$, il possède une image inverse $\pi^*(P)$ définie sur V - Z, et qui se prolonge en un opérateur différentiel méromorphe (semi-méromorphe) selon que P est holomorphe (ou analytique-réel, différentiable).

L'ordre de l'image inverse est au plus égal à celui de P.

Démonstration :

Si l'opérateur différentiel P se restreint à $\pi(V)$, on peut lui appliquer la construction de I.1. On obtient ainsi un opérateur différentiel π (P) sur V - Z. Montrons (par exemple) que si P est holomorphe, l'opérateur obtenu est un opérateur différentiel méromorphe.

Il suffit de considérer le cas d'un germe

$$\pi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^q,0) \ , \quad \pi(z) = u$$
$$u = (u_1,\dots,u_n)$$
$$z = (z_1,\dots,z_q)$$

Dans le complèmentaire de Z, π est une immersion. Soit P un opérateur différentiel holomorphe sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^q$:

$$P = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(z) \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_q}\right)^{\alpha_q}$$

De l'hypothèse il résulte qu'il existe un unique opérateur différentiel holomorphe $\pi^*(P)$ sur le complémentaire de Z dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tel que :

$$\pi^*(P) = \sum_{|\beta|\leqslant k} b_\beta(u) \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)^{\beta_n}$$

$$\pi^*(P)\ (f \circ \pi) = P(f) \circ \pi \qquad \forall\, f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

Explicitons cette identité :

$$(2) \qquad \sum_{|\beta|\leqslant k} b_\beta(u) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\beta [f \circ \pi] = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(\pi(u))\{(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha f\}\ (\pi(u))$$

D'après la règle de dérivation composée, il existe des fonctions holomorphes

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\beta (f \circ \pi) = \sum c_{\beta,\nu}(u)\ \{(\frac{\partial}{\partial z})^\nu f\}\ (\pi(u))$$

le système (2) devient

$$\sum_{\beta,\nu} c_{\beta,\nu}(u)\ b_\beta(u)\{(\frac{\partial}{\partial z})^\nu f\}(\pi(z)) = \sum_\alpha a_\alpha(\pi(u))\{(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha f\}\ (\pi(u))$$

On doit donc avoir

$$a_\alpha\ (\pi(u)) = \sum_\beta c_{\beta,\alpha}(u)\ b_\alpha(u)$$

Ce système d'équations linéaires possède une solution unique en dehors de Z, qu'on peut obtenir par inversion de la matrice $(c_{\beta,\alpha})$. La solution est donc méromorphe sur Z.

<u>Remarque</u> : Pour n = q on retrouve comme cas particulier le théorème 1.

II- MORPHISMES D'ESPACES ANALYTIQUES.

II.1 Prolongement des opérateurs différentiels définis dans un ouvert.

Proposition 3 : Soient X un espace analytique complexe normal, Z un sous-espace analytique tel qu'en tout point x de X

$$\dim_x Z \leq \dim_x X - 2$$

Alors tout opérateur différentiel holomorphe P (resp. méromorphe) sur X - Z se prolonge, de manière unique, en un opérateur différentiel holomorphe (resp. méromorphe) sur X.

De plus, si a est un point de Z, et P est d'ordre k sur U - Z, où U est un voisinage de a, le prolongement est d'ordre k en a.

Démonstration :

On sait qu'une fonction holomorphe f sur X - Z se prolonge en une fonction holomorphe $\bar{f}$ sur X pourvu que X soit normal,et Z de codimension au moins deux [29 ; Proposition 4 p. 118]. Il en est de même pour les fonctions méromorphes [loc. cit. p. 133].

L'assertion est de nature locale sur X. Démontrons par récurrence sur k que si P est défini et d'ordre k dans le complémentaire de Z dans un voisinage U de a, alors P se prolonge de manière unique en un opérateur défini sur U et d'ordre k.

Soit ω un ouvert de U. On pose

$$\bar{P}(g) = \overline{P(g|\omega - Z)} \qquad \forall g \in \mathcal{O}(\omega)$$

L'opérateur $\bar{P}$ est bien un opérateur différentiel sur ω : pour toute fonction holomorphe h sur ω,

$$[\bar{P}, h] = \overline{[P, h|_{\omega - Z}]}$$

On conclut par récurrence.

La même démonstration peut être faite pour les fonctions méromorphes.

Enfin, on a

$$[\ [P, g_1], \ldots, g_{k+1}] = 0 \qquad g_1, \ldots, g_{k+1} \in \mathcal{O}(\omega - Z)$$

Si et seulement si on a

$$[\,[P,\ h_1],\dots,h_{k+1}] = 0$$

$$\forall\ h_1,\dots,h_{k+1} \in \mathcal{E}(\omega)$$

D'où résulte l'assertion sur l'ordre.

II.2 Images inverses.

Compte tenu des propriétés de prolongement des opérateurs différentiels, on a par exemple le résultat suivant, conséquence du théorème 2 :

Proposition 4 : Soit

$$\pi : X \to Y$$

un morphisme propre d'espaces analytiques normaux ; on suppose que π est, en dehors d'un vrai sous-ensemble analytique Z, une immersion.

Si P est un opérateur différentiel holomorphe sur Y, qui possède localement des restrictions aux sous-espaces analytiques images de l'immersion, alors P possède une image inverse $\pi^*(P)$, qui est un opérateur différentiel à coefficients méromorphes sur X

Les résultats précédents permettent d'énoncer un théorème de prolongement des opérateurs différentiels sur des corps de germes de fonctions méromorphes :

Soit

$$\pi : X \to Y$$

un revêtement ramifié de germes d'espaces analytiques normaux. Il induit une injection

$$r^* : \mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{O}_X$$

et une injection sur les corps de fonctions méromorphes

$$r^* : \mathcal{M}_Y \hookrightarrow \mathcal{M}_X$$

Théorème 3 : Tout opérateur différentiel P sur $\mathcal{H}_Y$ se prolonge de manière unique en un opérateur différentiel sur $\mathcal{H}_X$, de même ordre que P.

Démonstration :

1°) Soit P un opérateur différentiel sur $\mathcal{O}_Y$. Il se prolonge de manière unique en un opérateur différentiel sur $\mathcal{H}_Y$ (Ch. II, Proposition 2). Soit $\pi^*(P)$ son image inverse. Il définit un opérateur différentiel sur $\mathcal{H}_X$, dont on vérifie aisément qu'il prolonge P.

2°) D'après les résultats du chapitre II, tout opérateur différentiel Δ sur $\mathcal{H}_Y$ est combinaison à coefficients dans $\mathcal{H}_Y$ d'opérateurs holomorphes. Le prolongement de Δ est donc possible. Il est unique puisque bien déterminé sur l'ouvert de X sur lequel π est un isomorphisme local.

Remarque : On peut énoncer des résultats analogues pour les opérateurs à coefficients analytiques.

III
OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR LES SINGULARITES-QUOTIENTS.

III.1 - Nous étudions l'anneau des opérateurs différentiels holomorphes sur les espaces normaux définis comme quotients de variétés analytiques complexes V par un groupe proprement discontinu d'automorphismes G [9].

On peut supposer sans restreindre la généralité

$$V = \mathbb{C}^n \ , \ X = \mathbb{C}^n/G$$

où G est un sous-groupe fini de $Gl(n, \mathbb{C})$.

L'anneau $\mathcal{O}_{X,0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine de X est alors identique au sous-anneau de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ formé des germes de fonctions holomorphes invariantes par G, noté $\mathcal{O}^G$.

Soient $\mathcal{L}$ l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$, et G un sous-groupe fini de $Gl(n, \mathbb{C})$. Le groupe G agit sur $\mathcal{L}$ par automorphismes :

$$(3) \qquad \begin{aligned} &P \in \mathcal{L} \ , \ g \in G, \\ &P^g(f) = [P(f \circ g^{-1})] \circ g \end{aligned}$$

On note $\mathcal{D}^G$ le sous-anneau des opérateurs différentiels invariants. C'est un $\mathcal{O}^G$-module.

Soit $\mathcal{D}_X$ l'anneau des germes d'opérateurs différentiels holomorphes à l'origine de

$$X = \mathbb{C}^n/G$$

<u>Définition 2</u> : On dit qu'un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}$ <u>induit</u> un opérateur différentiel Δ sur X si Δ est la restriction de P à

$$\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}^G$$

<u>Définition 3</u> : On appelle <u>espace d'isotropie</u> de G l'ensemble des points de $\mathbb{C}^n$ dont le groupe d'isotropie est non-trivial.

C'est la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stricts de $\mathbb{C}^n$.

<u>Théorème 4</u> :

a) Pour qu'un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}$ induise un opérateur différentiel sur X, il faut et il suffit qu'il soit invariant par G.

b) L'anneau $\mathcal{D}^G$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathcal{D}_X$.

c) Pour que

$$\mathcal{D}^G = \mathcal{D}_X$$

il faut et il suffit que l'espace d'isotropie de G ne contienne aucun hyperplan.

<u>Démonstration</u> :

a) Si P est invariant par G, il résulte de (3) qu'il définit une application

$$\Delta : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

qui est un opérateur différentiel (on le vérifie par récurrence). Réciproquement, si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "P"] & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}_X = \mathcal{O}^G \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{O}_X = \mathcal{O}^G \arrow[u, hook, "i"] \end{tikzcd} \tag{4}$$

considérons l'application canonique

$$\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/G = X$$

On peut lui appliquer les résultats du paragraphe II. L'opérateur différentiel Δ à l'origine de $\mathbb{C}^n$ possède une image inverse $\pi^*(\Delta)$, méromorphe, qui est invariante par G. D'après (4) et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}^G \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

on a, en dehors du lieu singulier de π, donc partout :

$$P = \pi^*(\Delta)$$

Donc $\pi^*(\Delta)$ est holomorphe, et P invariant.

b) Il reste à montrer que l'application

$$\mathcal{D}^G \to \mathcal{D}_X$$

est injective : Soit P un opérateur invariant, nul sur les fonctions invariantes. Alors P est nul : considérons la moyenne sur le groupe :

$$m : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^G \quad m(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f^g$$

On a :

$$\begin{matrix} \forall f \in \mathcal{O} \\ \forall P \in \mathcal{D}^G \end{matrix} \qquad P(f) = P(m(f)).$$

D'où résulte l'assertion.

c) Il est clair que le lieu singulier de l'application π est contenu dans l'espace d'isotropie. Si celui-ci est de codimension au moins égale à deux, l'image inverse $\pi^*(\Delta)$ d'un opérateur différentiel holomorphe sur X est un opérateur holomorphe, puisque les pôles de ses coefficients appartiennent à un ensemble analytique de codimension au moins deux. Réciproquement supposons que l'espace d'isotropie de G contienne l'hyperplan:

$$H_1 = \{ z = (z_1,\dots,z_n) \ ; \ z_1 = 0 \}.$$

Soit G_1 le sous-groupe fini de G formé des automorphismes qui laissent H_1 ponctuellement invariant. Il est facile de voir que, à un changement de coordonnées près :

$$G_1 = \{ g \in G \quad g(z) = (\varepsilon z_1, z_2, \dots, z_n)\}$$
$$\varepsilon \text{ racine p-ième de l'unité.}$$

Considérons les opérateurs différentiels

(5) $$\Delta = \frac{1}{z_1^{p-1}} \frac{\partial}{\partial z_1} \quad , \tilde{\Delta} = m(\Delta)$$

<u>Lemme 5</u> : $\tilde{\Delta}$ induit un opérateur différentiel holomorphe sur X.

Si f est un germe de fonction invariante par G, elle est invariante par G_1 :

$$f \in \mathcal{O}^{G_1} \Longrightarrow f(z_1,z_2,\dots,z_n) = \tilde{f}(z_1^p, z_2,\dots,z_n)$$
$$\tilde{f} \in \mathcal{O}$$

D'où

$$\Delta(f) = p\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} \in \mathcal{O}$$

$$\tilde{\Delta}(f) \in \mathcal{O}^G$$

Cependant $\tilde{\Delta}$ n'est pas holomorphe au voisinage de l'origine : chaque automorphisme de G transforme H_1 en un hyperplan. Soit (H_i) les hyperplans distincts ainsi formés. On voit facilement d'après (5) que $\tilde{\Delta}$ s'écrit

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\Delta}_i$$

où $\tilde{\Delta}_i$ est un opérateur méromorphe, dont le coefficient principal est

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{h_i^{p-1}(z)} \qquad H_i = \{z \ ; \ h_i(z) = 0\}$$

III.2 - Propriétés algébriques de $\mathcal{D}_X$.

On peut se restreindre au cas où $\mathcal{D}_X$ est identique de $\mathcal{D}^G$, d'après le résultat suivant :

Théorème 5 : Si

$$X = \mathbb{C}^n/G$$

il existe un sous-groupe fini Γ de $Gl(n, \mathbb{C})$ tel que X soit isomorphe à $\mathbb{C}^n/\Gamma$ et que l'espace d'isotropie de Γ ne contienne aucun hyperplan.

En effet, d'après un résultat de C. CHEVALLEY [6, Ch IV, § 5, Th. 3] le quotient de $\mathbb{C}^n$ par le sous-groupe Γ distingué de G des éléments laissant invariants les points d'un hyperplan est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, et le groupe quotient

$$G_1 = G/\Gamma$$

agit sur $\mathbb{C}^n$. On a

$$\mathbb{C}^n/G \simeq (\mathbb{C}^n/\Gamma)/G/\Gamma \simeq \mathbb{C}^n/G_1$$

et l'espace d'isotropie de G_1 est l'image par la projection canonique des sous-espaces de l'espace d'isotropie de G de codimension au moins deux.

On est donc ramené à l'étude de l'anneau des invariants de $\mathcal{D}$ sous l'action d'un groupe fini.

Théorème 6 : Soit A un anneau filtré par une filtration positive croissante ; soit A_o le sous-anneau des éléments de filtration nulle. Enfin soit G un groupe fini d'automorphismes de A respectant la filtration, et dont l'ordre est inversible dans A.

Supposons l'anneau-gradué $Gr(A)$ associé à A noethérien à gauche, et soit A^G l'anneau des invariants de A sous l'action de G.

Il existe un nombre fini d'éléments (u_i) de A^G tels que les monômes en ces éléments engendrent A^G comme module à gauche sur A_o^G, et que les images de ces monômes engendrent $(Gr\ A)^G$ comme module à gauche sur A_o^G.

Démonstration :

D'après l'hypothèse sur l'ordre m de G, on peut définir une moyenne sur A :

$$\natural : A \to A^G$$

$$\natural(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g.x$$

Cette application induit une moyenne

$$\natural : \mathrm{Gr}\, A \to (\mathrm{Gr}\, A)^G$$

Soit I l'idéal engendré dans Gr A par les éléments homogènes de filtration strictement positif invariants par G.
D'après l'hypothèse, il existe un nombre fini de générateurs de I. Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ des représentants dans A de ces générateurs $(\bar{u}_i)$ qu'on peut supposer invariants par G, car

$$\bar{u}_i \in \mathrm{Gr}\, A^G \Longrightarrow \bar{u}_i = \natural(u_i)$$

Supposons démontré que tout élément de A^G de filtration au plus égale à k est combinaison linéaire de monômes formés à partir des u_i (l'assertion est triviale à l'ordre zéro), et soit u un élément de A^G de filtration au plus (k + 1) L'image de u dans l'anneau-gradué appartient à I :

$$\bar{u} = \Sigma\, \bar{\alpha}_i\, \bar{u}_i$$

On peut supposer les $\bar{\alpha}_i$ de degré strictement inférieur à (k + 1).
On a donc

$$u = \Sigma\, \alpha_i\, u_i + u'$$

où les α_i sont des représentants des $\bar{\alpha}_i$, les éléments (α_i, u') étant de filtration au plus égale à k.

Appliquons la moyenne aux deux membres de l'égalité précédente. On a, les u_i étant invariants par G,

$$\natural(u) = u = \Sigma\, \natural(\alpha_i\, u_i) + \natural(u')$$

$$= \Sigma\, \natural(\alpha_i)\, u_i + \natural(u')$$

On conclut par récurrence. La même démonstration montre que les $(\bar{u}_i)$ engendrent $(\mathrm{Gr}\, A)^G$ (le même résultat est valable pour une structure de module à droite).

Définition 4 : On dit qu'un anneau M est un anneau de type fini à gauche (resp. à droite) sur un sous-anneau N s'il existe un nombre fini d'éléments de M tels que les monômes en ces éléments engendrent le N-module à gauche (resp. à droite) M.

En appliquant le théorème 6 à

$$A = \mathcal{D}$$

filtré par l'ordre, et à G sous-groupe fini de $Gl(n, \mathbb{C})$, opérant dans A, on obtient, compte tenu des résultats précédents :

Théorème 7 : L'anneau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur un germe X de singularité-quotient et l'algèbre-graduée associée sont des anneaux de type fini sur $\mathcal{O}_X$.

Cette propriété a lieu relativement aux structures de modules à gauche et à droite.

Remarque : Ce théorème s'applique au cône de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

qui s'identifie au quotient de $\mathbb{C}^2$ par le groupe engendré par la symétrie par rapport à l'origine. Par contre, Bernstein-Gel'fand[2] [3] ont montré que l'anneau $\mathcal{D}_X$ au sommet du cône

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

n'est pas un $\mathcal{O}_X$-anneau de type fini.

IV -

RESOLUTION DES SINGULARITES.

L'opération d'image inverse des opérateurs différentiels possède, pour un morphisme de résolution des singularités de X "à la Hironaka", des propriétés particulières : les pôles des images inverses d'opérateurs différentiels sur X sont définis par des fonctions analytiques sur X. Nous donnons une démonstration explicite de ce résultat (remarqué indépendamment par D. Burns [8]).

III.1 - Soit X un espace analytique complexe.

Définition 1 : On appelle résolution des singularités de X un morphisme

$$\pi : \widetilde{X} \to X$$

d'une variété analytique complexe $\widetilde{X}$ sur X, tel que

a) π est propre

b) Si $S(X)$ désigne le lieu singulier de X, $\pi : \widetilde{X} - \pi^{-1}(S(X) \to X - S(X)$ est un isomorphisme.

c) L'ensemble

$$A = \pi^{-1}(S(X))$$

est un hypersurface localement réunion finie d'hypersurfaces lisses, n'ayant que des croisements normaux.

Théorème d'Hironaka : Soit X un espace analytique complexe dénombrable à l'infini. Il existe des résolutions des singularités de X.

La construction d'Hironaka [7] possède des propriétés supplémentaires, aussi nous introduisons la définition suivante :

Définition 2 : Soit X un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On appelle résolution d'Hironaka des singularités de X une résolution des singularités

$$(1) \qquad \begin{array}{l} \pi = \pi_k \circ \dots \circ \pi_1 \qquad \pi : \widetilde{X} \longrightarrow X \\ \pi_i : \check{X}_{i+1} \to \check{X}_i \qquad \widetilde{X}_{k+1} = \widetilde{X}\ , \quad \widetilde{X}_1 = X \end{array}$$

où π_i est induit par l'éclatement $\mathcal{E}_i$ d'une sous-variété d'une variété $\check{U}_i$ contenue dans le lieu singulier de l'espace analytique $\check{X}_i$, avec

$$\check{X}_1 = X \qquad \check{U}_1 = U$$

$$\begin{array}{ccccc} \check{U}_{k+1} & \xrightarrow{\mathcal{E}_k} \dots\dots & \check{U}_2 & \xrightarrow{\mathcal{E}_1} & U \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \check{X}_{k+1} & \longrightarrow \dots & \check{X}_2 & \longrightarrow & X \end{array}$$

$\check{X}_{i+1}$ transformé strict de $\check{X}_i$ suivant $\mathcal{E}_i$

La démonstration d'Hironaka montre que de telles résolutions existent [17].

Théorème 1 : Soit

$$\pi : \check{X} \to X$$

une résolution d'Hironaka des singularités de X espace analytique complexe réduit. En tout point x de X, il existe un germe de fonction holomorphe u non nul tel que si P est un opérateur différentiel holomorphe au voisinage de x, d'ordre k,

$$\pi^*(P) = \frac{1}{(u\circ\pi)^k} Q ,$$

où Q est un opérateur différentiel holomorphe d'ordre k au voisinage de $\pi^{-1}(x)$.

Démonstration :

1°) Il suffit de démontrer l'assertion pour un morphisme π comme en (1). Soit donc

$$\begin{tikzcd} \tilde{V} \arrow[r, "\theta"] & \check{U} \\ \tilde{X} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

où $\tilde{V}$, $\tilde{U}$ sont des variétés, $\tilde{X}$ est le transformé strict de X par l'éclatement θ d'une sous-variété lisse contenue dans le lieu singulier de X. Soient x un point de X, et $\tilde{P}$ un opérateur différentiel holomorphe en x. Il possède un représentant P dans un ouvert (encore noté $\tilde{U}$) qui est un opérateur différentiel holomorphe en x.

Introduisons un système de coordonnées locales qui identifie (localement) l'éclatement θ à l'éclatement de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^n$,

$$1 \leqslant k \leqslant n$$

$$\mathbb{C}^n = (z_1,\dots,z_k,\ z_{k+1},\dots,z_n)$$

Posons

$$p = n - k$$

L'éclaté de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^n$ est la variété définie dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{p-1}$ par les équations

$$z_i w_j = w_i z_j \qquad \begin{array}{l} i = k + 1,\dots,n \\ j = k + 1,\dots,n \end{array}$$

On vérifie alors que l'image inverse de l'opérateur

$$\Delta_i = z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

est holomorphe. Il en résulte comme au § I (démonstration du théorème 1) que si P est d'ordre h, et si

$$u = (z_{k+1} \dots z_n)^{2h-1} \quad ,$$

alors

$$\pi^*(u\ P) = Q$$

est holomorphe au voisinage de tout point de l'image inverse de l'ouvert où P est défini.

De plus, on peut supposer que u n'est pas identiquement nulle sur X (sinon on pourrait plonger X dans $\mathbb{C}^{n-1}$).

En appliquant successivement ce qui précède aux morphismes π_i de (1), on obtient, pour le morphisme de résolution d'Hironaka :

$$\begin{array}{ccc} \check{U} & \xrightarrow{\theta} & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \ni x \end{array}$$

un germe de fonction holomorphe u en x, non nul sur le germe de X, tel que pour tout opérateur différentiel d'ordre k P sur U,

$$Q = \pi^*(u^k\ P)$$

soit holomorphe.

Si P induit un opérateur différentiel sur X, Q induit un opérateur différentiel sur $\tilde{X}$; en effet soit g une fonction holomorphe sur $\check{U}$, nulle sur $\check{X}$. D'après l'isomorphisme

$$\pi : \tilde{X} - \pi^{-1}(S(X)) \to X - S(X)$$

on a

$$Q(g) = \{u^k P(g \circ \pi^{-1})\} \circ \pi$$

la fonction

$$g_1 = g \circ \pi^{-1}$$

est nulle sur $X - S(X)$, donc sur $\check{X} - \pi^{-1}(S(X))$ on a :

$$Q(g) = 0$$

et donc aussi sur $\tilde{\check{X}}$.

Le cas des opérateurs différentiels analytiques sur X serait étudié de la même manière.

CHAPITRE IV

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES SUR LES ESPACES ANALYTIQUES

Soit $\mathcal{E}(X)$ l'espace des fonctions différentiables sur un espace analytique X (dénombrable à l'infini).

On a défini sur $\mathcal{E}(X)$ une structure canonique de Fréchet (par l'intermédiaire de plongements locaux). Nous comparons cette topologie à celle de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs images par les opérateurs différentiels sur X. Nous montrons que les topologies coïncident pour les singularités-quotients, mais sont en général distinctes.

I - OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS DIFFERENTIABLES.

Soit (X,0) un germe d'ensemble analytique réel à l'origine de $\mathbb{R}^N$. Rappelons le résultat suivant [27].

Théorème 1 : Supposons (X,0) défini par l'idéal I de $\mathcal{A}_0$, et soit K l'idéal de $\mathcal{E}_0$ formé des germes de fonctions différentiables nulles sur (X,0).

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $K = \mathcal{E}_0 \otimes_{\mathcal{A}_0} I$

ii) (X,0) est cohérent.

De plus, si (X,0) est induit par le germe d'un ensemble analytique complexe $\tilde{X}$ de $\mathbb{C}^n$, chacune de ces propriétés équivaut à la suivante :

iii) Les composantes irréductibles de $\tilde{X}$ à l'origine restent irréductibles aux points voisins.

Supposons X analytique complexe vérifiant l'une des propriétés précédentes.

Soit $\mathcal{A}_X^{(k)}$ (resp. $\mathcal{E}_X^{(k)}$) le faisceau des parties principales d'ordre k sur X, à coefficients analytiques (resp. différentiables).

Lemme 1 : On a, en tout degré k,

$$\mathcal{E}_X^{(k)} = \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_X^{(k)}$$

Démonstration : Considérons les suites exactes

$$0 \to \mathcal{J}_{X,x} \to \mathcal{A}_{X \times X,(x,x)} \to \mathcal{A}_{X,x} \to 0$$

$$0 \to \tilde{\mathcal{J}}_{X,x} \to \mathcal{E}_{X \times X,(x,x)} \to \mathcal{E}_{X,x} \to 0$$

Le germe $X \times X$ est cohérent, d'après iii) ; d'après le théorème 1,

$$\tilde{\mathcal{J}}_{X,x} = \mathcal{E}_{X \times X,(x,x)} \otimes_{\mathcal{A}_{X \times X,(x,x)}} \mathcal{J}_{X,x}$$

L'espace des parties principales d'ordre k à coefficients analytiques est défini par la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{J}^{k+1}_{X,x} \to \mathcal{A}_{X \times X,(x,x)} \to \mathcal{A}^{(k)}_{X,x} \to 0$$

L'anneau des germes de fonctions différentiables à l'origine de $\mathbb{R}^n$ est fidèlement plat sur l'anneau des germes de fonctions analytiques [26, p.88]. Il en résulte [5, p.68, Corollaire de la Proposition 5] que l'anneau des germes de fonctions différentiables en un point de $X \times X$ est plat sur l'anneau des germes de fonctions analytiques.

La suite (2) reste donc exacte par tensorisation avec $\mathcal{E}_{X \times X}$. On obtient la suite exacte

$$0 \to \tilde{\mathcal{J}}^{k+1}_{X,x} \to \mathcal{E}_{X \times X,(x,x)} \to \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}^{(k)}_{X,x} \to 0$$

qui est équivalente à l'assertion du lemme.

<u>Théorème 2</u> : Pour tout ouvert U de X, et pour tout entier k,

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X(U)) = \mathcal{E}_X(U) \otimes_{\mathcal{A}_X(U)} \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X(U)).$$

En particulier, le préfaisceau

$$U \to \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}(U))$$

est un faisceau, qui coïncide avec le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients différentiables d'ordre au plus égal à k.

Démonstration :

1°) Soit x un point de X. D'après le lemme 1 et le théorème 1, paragraphe V, du chapitre I,

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_{X,x}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{X,x}}(\mathcal{E}^{(k)}_{X,x}, \mathcal{E}_{X,x})\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{X,x}}(\mathcal{E}_{X,x} \otimes_{\mathcal{A}_{X,x}} \mathcal{A}^{(k)}_{X,x}, \mathcal{E}_{X,x})\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{X,x}}(\mathcal{A}^{(k)}_{X,x}, \mathcal{E}_{X,x})\end{aligned}$$

On montre aisément, en identifiant l'anneau $\mathcal{A}_{X,x}$ à l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point x du complexifié, que $\mathcal{A}^{(k)}_{X,x}$ est un $\mathcal{A}_{X,x}$-module de présentation finie. D'autre part $\mathcal{E}_{X,x}$ est (fidèlement) plat sur $\mathcal{A}_{X,x}$. On a donc [5, p.38]

$$\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_{X,x}) = \mathcal{E}_{X,x} \otimes_{\mathcal{A}_{X,x}} \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_{X,x})$$

2°) Considérons alors le préfaisceau

$$U \to \mathcal{E}_X(U) \otimes_{\mathcal{A}_X(U)} \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X(U))$$

C'est un sous-préfaisceau de $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X(U))$. Il suffit alors de montrer que ce préfaisceau est un faisceau, puisque d'après le 1°) ses germes en un point coïncident avec ceux du faisceau $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{E}_X)$.

Soit U un ouvert de X, (U_i) un recouvrement ouvert, qu'on peut supposer localement fini, de U.

D'après les théorèmes A et B pour les espaces analytiques-réels [9], compte tenu du corollaire du théorème 1, paragraphe V du chapitre I, il existe un nombre fini d'opérateurs différentiels analytiques d'ordre au plus égal à k, (Δ_j), qui engendrent le faisceau $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_X)$ comme $\mathcal{A}_X$-module.

Soit

$$P_i \in \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{A}(U_i)} \mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}(U_i))$$

$$P_i = \sum_j \varphi_i \varepsilon_{i,j} \Delta_j \quad , \quad \varphi_{ij} \in \mathcal{E}(U_i)$$

et supposons que les P_i coïncident deux à deux sur $U_i \cap U_j$. Soit (θ_i) une partition de l'unité associée au recouvrement (U_i). On pose

$$P = \sum_j (\sum_i \theta_i \varphi_{ij}) \Delta_j$$

On a :

$$P \in \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathrm{Diff}^k((U))$$

$$P|_{U_i} = P_i$$

ce qui achève la démonstration.

Le théorème 2 a plusieurs conséquences. Il permet d'étendre les résultats du chapitre III. Ainsi on déduit du théorème 3 (ch. III) le corollaire :

<u>Corollaire</u> : Soit X un espace analytique complexe normal, cohérent en tant qu'espace analytique réel, et

$$\pi : Y \to X$$

un morphisme propre d'un espace analytique complexe normal sur X, qui est un isomorphisme local en dehors d'un vrai sous-ensemble analytique Z.

Soient P un germe d'opérateur différentiel à coefficients différentiables au point x de X, z un point de $\pi^{-1}(x)$ appartenant à Z. Il existe un germe de fonction <u>analytique</u> u non nul tel que

$$Q = u\, \pi^*(P)$$

soit un opérateur différentiel à coefficients différentiables au voisinage de z.

I.2 - <u>Topologie de Schwartz</u>.

On sait (Ch. I. I.3) que le faisceau $\mathcal{E}_X$ des germes de fonctions différentiables sur X est muni d'une structure canonique de faisceau de Fréchet. On introduit une nouvelle topologie :

<u>Définition 1</u> : On appelle topologie de Schwartz sur l'espace $\mathcal{E}(X)$ des fonctions différentiables sur X la topologie définie par la famille des semi-normes

$$f \mapsto |f|_{P,K} = \sup_{x \in K} |P(f)(x)|$$

où K parcourt la famille des compacts de X, et P celle des opérateurs différentiels à coefficients différentiables sur X.

On note $\mathcal{E}_{diff}$ (X) l'espace topologique ainsi défini, et $\mathcal{E}(X)$ l'espace de Fréchet introduit au Ch.I.

Proposition :

i) Pour tout couple d'ouverts

$$V \subset U$$

la restriction

$$\mathcal{E}_{diff}(U) \longrightarrow \mathcal{E}_{diff}(V)$$

est continue.

ii) Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_i$ d'un ouvert U de X,

$$\mathcal{E}_{diff}(U) = \varprojlim_{i} \mathcal{E}_{diff}(U_i)$$

(égalité entre espaces vectoriels topologiques).

iii) Pour tout ouvert U de X, on a les applications continues

$$\mathcal{E}(U) \xrightarrow{\text{Identité}} \mathcal{E}_{diff}(U) \xrightarrow{i} \mathcal{C}(U)$$

i désignant l'injection canonique.

iv) Si X est cohérent (en tant qu'espace analytique-réel), la topologie de Schwartz de $\mathcal{E}(X)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes.

Corollaire : L'espace X étant supposé cohérent, la topologie de $\mathcal{E}_{diff}(X)$ est une topologie de Fréchet si et seulement si elle coïncide avec la topologie usuelle.

Démonstration :

i) Considérons un couple d'ouverts

$$V \subset U$$

et soit donné un opérateur différentiel P sur V, et un compact K de V; il existe un opérateur différentiel Q sur U, égal à P au voisinage de K.

On a

$$\forall f \in \mathcal{E}_{diff}(V)$$

$$\sup_{x\in K} |P(f)(x)| = \sup_{x\in K} |Q(f)(x)|$$

On a donc, si $(U_i)_i$ est un recouvrement ouvert de U, une application continue:

$$\text{Identité} : \mathcal{E}_{diff}(U) \longrightarrow \varprojlim_i \mathcal{E}_{diff}(U_i)$$

Montrons qu'elle est bicontinue : soit K un compact de U. On peut construire un recouvrement ouvert de U, soit (U'_i), tel que U'_i soit relativement compact dans U_i. Soit $(U'_1,\ldots,U'_p)$ un sous-recouvrement fini de K, et

$$\mathcal{V} = \{f \in \varprojlim_i \mathcal{E}(U_i),\ \sup_{\bar{U}'_i}|P(f)(x)| < \varepsilon\}$$

$\mathcal{V}$ est un voisinage de 0 pour la topologie limite projective, et on a :

$$f \in \mathcal{V} \Longrightarrow \sup_K |P(f)(x)| < \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

ii) Montrons que la topologie de Schwartz est moins fine que la topologie canonique de Fréchet. Il suffit de considérer le cas où X est un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On a alors la suite :

$$\mathcal{E}(U) \xrightarrow{s} \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}_{diff}(X)$$

où s est l'application de restriction, il suffit de montrer que l'application composée est continue. Soit P un opérateur différentiel sur X. Il est induit par un opérateur différentiel P sur U, et on a :

$$|P(\dot{f})(x)| = |\bar{P}(f)(x)| \qquad \forall x \in K,\ f \in \mathcal{E}(U)$$
$$\dot{f} = s(f)$$

D'autre part l'injection

$$\mathcal{E}_{diff}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$$

est continue (prendre pour P la fonction 1)

iii) D'après le théorème 2, on peut définir la topologie de $\mathcal{E}_{diff}(X)$ par la famille des opérateurs différentiels à coefficients analytiques. Pour tout entier k, le module $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}(X))$ est de type fini sur $\mathcal{A}(X)$.

On peut définir la topologie de $\mathcal{E}(U)$ par la famille dénombrable de semi-normes

$$\sup_{x \in K_n} |P_{k,j}(f)(X)| \quad , \; k, \; n \in \mathbb{N}$$

où pour k fixé la famille finie $(P_{k,j})$ engendre le faisceau $\mathrm{Diff}^k(\mathcal{A}_U)$, et où (K_n) est une famille exhaustive de compacts.

Exemple : Il s'agit,pour simplifier,d'un espace analytique réel (les opérateurs différentiels sont définis comme dans le cas complexe).

Soit X le sous-ensemble analytique de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$xy = 0$$

Les opérateurs différentiels à l'origine de X sont les combinaisons linéaires des opérateurs

$$1, \; D_i = x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i, \; D_j = y\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j, \; i,j = 1,\ldots$$

les fonctions différentiables sur X s'identifient aux couples (f,g) de fonctions différentiables ayant même valeur à l'origine.

Montrons que la topologie de Schwartz sur $\mathcal{E}(X)$ coïncide avec la topologie de Fréchet : soit (f_n) une suite de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}$, de Cauchy pour la famille de semi-normes définies par les opérateurs (D_i).

Cette suite converge vers une fonction continue f, différentiable en dehors de l'origine. Il en résulte que les distributions (f_n) convergent vers la distribution définie par f.

Soit $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de la distribution f.

On a, pour toute fonction-test ψ (à support compact)

$$< f^{(k)}, \psi > = \lim \int f_n^{(k)} \; \psi = \lim \; (-1)^k \int f_n \; \psi^{(k)}$$

On peut supposer

$$\psi(o) = 0 \Longrightarrow \psi(x) = x \; \varphi(x)$$

$$<f^{(k)}, \psi> = \lim \int x\, f_n^{(k)} \varphi$$

Il résulte de l'hypothèse qu'on a (pour un compact K contenant l'origine),

$$|<f^{(k)}, \psi>| \leqslant C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

L'ordre des distributions-dérivées de f est borné (égal à un). Il en résulte [34, Cor. du th. XXI, p.85] que f est une fonction indéfiniment différentiable.

Remarque : En général, un morphisme d'espaces analytiques

$$\pi : X \to Y$$

n'induit pas un morphisme continu pour les topologies de Schwartz :

$$\pi_* : \mathcal{E}_Y \to \pi_* \mathcal{E}_X$$

II -
TOPOLOGIE DE SCHWARTZ SUR $\mathcal{E}(X)$: exemples.

Théorème 3 : Soit X une singularité-quotient, cohérente comme espace analytique réel. La topologie de Schwartz sur $\mathcal{E}(X)$ coïncide avec la topologie de Fréchet.

Démonstration :

On peut supposer, d'après le caractère local de la topologie de Schwartz,

$$X = \mathbb{C}^n/G$$

où G est un sous-groupe fini de $Gl(n, \mathbb{C})$, dont l'espace d'isotropie ne contient pas d'hyperplan. Le complexifié

$$\check{X} = X \times X$$

s'identifie au quotient de $\mathbb{C}^{2n}$ par un groupe $\check{G}$ vérifiant la même propriété. Il résulte alors du théorème de préparation différentiable que l'anneau des germes de fonctions différentiables à l'origine de X coïncide avec l'anneau des germes différentiables à l'origine de $\mathbb{R}^{2n}$ invariants par $\check{G}$.

Soient (f_i) une suite de Cauchy pour la topologie de Schwartz sur $\mathcal{E}(X)$, et

$$\pi : \mathbb{R}^{2n} \to X$$

la projection. La suite $(\pi^*(f_i))$ est encore de Cauchy, et converge vers une fonction g invariante, donc

$$g = \pi^*(f),\ f \in \mathcal{E}(X).$$

Montrons que

$$f_i \to f$$

dans $\mathcal{E}(X)$. D'après le théorème 2, il suffit de considérer un opérateur différentiel P à coefficients analytiques sur X, donc induit par un opérateur différentiel holomorphe sur $\tilde{X}$, qui n'est autre qu'un opérateur holomorphe sur $\mathbb{C}^{2n}$ invariant par $\tilde{G}$. Soit $\tilde{P}$ la restriction de cet opérateur à $\mathbb{R}^{2n}$.

On a :

$$\pi^*[P(f_i)] = \tilde{P}\ [\pi^*(f_i)] \to \tilde{P}(\pi^*(f)) \quad \text{dans } \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$$

Il en résulte, π étant propre, qu'on a :

$$P(f_i) \to P(f) \quad \text{dans } \mathcal{C}(X)$$

L'opérateur P étant arbitraire, la suite (f_i) converge dans $\mathcal{E}(X)$ pour la topologie de Schwartz.

II.2 - On considère la famille des espaces analytiques réels X ayant un point x tel que le germe (X,x) soit isomorphe au germe en son sommet du cône de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

(les mêmes résultats s'étendent à un cône dont la variété projective associée est une courbe de genre au moins égal à un).

Théorème 4 : L'espace $\mathcal{E}_{diff}(X)$ n'est pas complet.
Plus généralement, on obtient une famille d'espaces analytiques X pour lesquels la topologie de Schwartz est strictement moins fine que la topologie usuelle en considérant les produits $\tilde{X} = X \times Y$

où Y est un espace analytique quelconque : la projection

$$X \times Y \to X$$

identifie $\mathcal{E}_{diff}(X)$ à un sous-espace fermé de $\mathcal{E}_{diff}(X \times Y)$, qui ne peut donc être un espace de Fréchet.

Démonstration : D'après (I.2, prop. 1), il suffit de considérer le cas du cône cubique à l'origine de $\mathbb{R}^3$:

$$C = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$$

(2) $$\mathcal{A}_{C,0} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{C},0}$$

où $\tilde{C}$ désigne le cône cubique de $\mathbb{C}^3$ défini par la même équation.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit par homothétie sur $\tilde{C}$. Il en résulte une action sur l'anneau des opérateurs différentiels holomorphes, qui induit une action de $\mathbb{R}^*$ sur l'anneau des opérateurs différentiels analytiques :

$$\lambda \in \mathbb{R}^* \qquad f \in \mathcal{A}_{C,0} \qquad f^\lambda(x) = f(\lambda x)$$

$$P \in \mathrm{Diff}^k\,(\mathcal{A}_{C,0})$$

$$P^\lambda(f) = [P(f^{\lambda^{-1}})]^\lambda$$

Un opérateur différentiel analytique est dit homogène de force k si l'on a :

$$P^\lambda = \lambda^k\, P \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Pour cela, il est nécessaire et suffisant que P soit induit par un opérateur différentiel homogène de force k à l'origine de $\mathbb{R}^3$. D'après (2) et l'étude de [3], il n'existe pas d'opérateurs différentiels analytiques non-nuls de force strictement négative sur le cône C (on peut montrer ce résultat directement en considérant la variété projective $\tilde{C}$ associée à C, et l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\tilde{C}$).

D'autre part on montre facilement que tout opérateur différentiel analytique est la somme d'une série convergente (en un sens évident) d'opérateurs différentiels homogènes.

Soit φ une fonction différentiable à support compact dans $\mathbb{R}^3$, telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,\ 1,\ -1) = 1$$

Considérons

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\,\varphi(nx)$$

Notons $\dot{\varphi}_n$ la restriction de φ_n à C

Lemme :

$$\dot{\varphi}_n \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}_{diff}(C)$$

Admettons d'abord ce lemme, et montrons qu'il en résulte que la topologie de Schwartz n'est pas identique à la topologie de Fréchet de $\mathcal{E}(C)$. On aurait en effet

$$\dot{\varphi}_n \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}(C)$$

$$\exists\ \psi_n \in \quad (\mathbb{R}^3)$$

$$\psi_n = 0 \text{ sur } C$$

$$\varphi_n - \psi_n \to 0 \quad \text{dans} \quad (\mathbb{R}^3)$$

Considérons l'application

$$(\mathbb{R}^3) \to \quad (\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,\ y,\ -y)$$

C'est une application continue. De plus

$$g|_C = 0 \Longleftrightarrow g = (x^3 + y^3 + z^3)\psi \ ,\ \psi \in \quad (\mathbb{R}^3)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,\ y,\ z) = (x^3 + y^3 + z^3)\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + 3x^2\psi$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, y, -y) = 0$$

Elle induit donc une application continue

$$D : \mathcal{E}(C) \to \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

On aurait donc

$$D(\dot{\varphi}_n) \to 0 \qquad D(\dot{\varphi}_n)(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, ny, -ny)$$

Cependant, pour tout compact K voisinage de l'origine dans R

$$\sup_K |D(\dot{\varphi}_n)| \geqslant 1$$

Contradiction.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Si P est un opérateur différentiel analytique homogène de force k, on a

$$P(\varphi_n)(x) = \frac{1}{n^{k+1}} P(\varphi)(nx)$$

Pour tout compact K

$$\|P(\varphi_n)\|_K \leqslant \frac{1}{n^{k+1}} \|P(\varphi)\|$$

La suite $\|P(\varphi_n)\|_K$ est de Cauchy. Le cas général en résulte alors par un simple calcul de convergence.

DEUXIEME PARTIE :

LES COMPLEXES DU "d" ET DU "$\bar{\partial}$" SUR LES ESPACES ANALYTIQUES

PREMIER CHAPITRE : HOMOLOGIE LOCALE DES COMPLEXES DU "d" ET DU "$\bar{\partial}$".

I -

DÉFINITIONS

On associe classiquement [15] à un espace annelé $(X,\mathcal{F})$ un complexe $\Omega^{\cdot}(\mathcal{F})$ appelé complexe de de Rham de $(X,\mathcal{F})$.

Si X est un espace analytique complexe, nous désignons par $\Omega^{\cdot}_X$ (resp. $\Omega^{\cdot}(\mathcal{A}_X)$, $\Omega^{\cdot}(\mathcal{E}_X)$) le complexe de de Rham associé à l'espace annelé $(X,\mathcal{O}_X)$ (resp. $(X,\mathcal{A}_X)$, $(X,\mathcal{E}_X)$) . Ce complexe sera appelé complexe de de Rham holomorphe (resp. analytique, différentiable) de X. On désigne par d la différentielle.

Théorème 1 : On suppose X localement irréductible, cohérent (comme espace analytique réel).

1 Le complexe $\Omega^{\cdot}(\mathcal{A}_X)$ se décompose canoniquement en un bicomplexe

$$\Omega^m(\mathcal{A}_X) = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q}(\mathcal{A}_X)$$

$$d = \partial + \bar{\partial} \qquad \partial : \Omega^{p,q}(\mathcal{A}_X) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(\mathcal{A}_X) \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(\mathcal{A}_X) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(\mathcal{A}_X)$$

où $\Omega^{p,q}(\mathcal{A}_X)$ désigne le faisceau des formes différentielles induites par des formes homogènes de type (p,q) dans un ouvert lisse réalisant un plongement local de X.

2 Soit $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ l'idéal de définition du germe de X plongé à l'origine de C^n .

$$\Omega^{p,q}_0(\mathcal{A}_X) = \Omega^{p,q}_0(\mathbb{C}^n) / \mathcal{K}^{p,q}$$

où

$$\mathcal{K}^{p,q} = \Big\{ \omega \in \Omega^{p,q}_0(\mathbb{C}^n),\ \omega = \sum_1^m f_i\, \omega_i + \sum_1^m \bar{f}_j\, \omega_j + \sum_1^m df_k \wedge \beta_k + \sum_1^m \overline{df_l} \wedge \gamma_l$$

$$\omega_i \ , \ \omega_j \in \Omega_0^{p,q}(\mathbb{C}^n) \ , \ \beta_k \in \Omega_0^{p-1,q}(\mathbb{C}^n) \quad , \quad \gamma_l \in \Omega_0^{p,q-1}(\mathbb{C}^n)$$

<u>Définition</u>

On appelle <u>complexe analytique</u> du $\bar{\partial}$ le complexe $\Omega^{0,\cdot}(\mathcal{A}_X)$.

La démonstration de ce théorème (ainsi que du résultat analogue relatif au faisceau $\mathcal{E}_X$, qui introduit le <u>complexe différentiable</u> du $\bar{\delta}$, noté $\Omega^{0,\cdot}(\mathcal{E}_X)$) a été publiée dans [20] auquel nous renvoyons le lecteur.

Munissons les faisceaux $\Omega_X^{\cdot}$ des structures de faisceaux de type (FN) canoniques, et les espaces de germes des topologies de limites inductives. D'après un résultat précédent (Première Partie, Ch.I, Proposition 4 et Corollaire), on peut munir les modules $\Omega_x^{p,q}(\mathcal{A}_X)$ de topologies de type (DFN) .

<u>Proposition</u> : On a, en tout degré p ,

$$\Omega_x^{p,0}(\mathcal{A}_X) = \bar{\mathcal{O}}_{X,x} \hat{\otimes} \Omega^p_{X,x}$$

(produit tensoriel complété pour l'une des topologies π ou ε) .

<u>Démonstration</u>

1°/ En degré zéro :

Supposons

$$X = \mathbb{C}^n$$

On a bien

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}^n,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n},0} = \bar{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^n,0} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

En effet si (K_i) désigne un polydisque compact, $B(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur K_i, holomorphes à m l'intérieur, on a [12]

$$B(K_1 \times K_2) = B(K_1) \hat{\otimes} B(K_2)$$

Il suffit de passer à la limite inductive, pour obtenir l'assertion.
Par passage au quotient on déduit :

$$\mathcal{A}_{X,x} = \bar{\mathcal{O}}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{X,x}$$

2°/ On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{p,o} \longrightarrow \Omega^{p,o}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow \Omega^{p,o}(\mathcal{A}_X) \longrightarrow 0$$

D'autre part on sait que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^p \longrightarrow \Omega^p_0(C^n) \longrightarrow \Omega^p_{X,x} \longrightarrow 0$$

(où $\mathcal{J}^p$ désigne le sous-module des formes différentielles de degré p appartenant à l'idéal différentiel engendré par les (f_j)) reste exact par produit tensoriel complété avec $\bar{\mathcal{O}}_{X,x}$.

Or

$$\mathcal{J}^p \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{K}^{p,o}$$

En effet, si ω est une forme de $\mathcal{K}^{p,o}$, elle s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i \omega_i + \sum_{j=1}^{m} \bar{f}_j \omega_j + \sum_{k=1}^{m} df_k \wedge \beta_k$$

et on peut approcher chacun des coefficients des formes du second membre par des combinaisons de produits d'éléments de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\bar{\mathcal{O}}_{X,x}$, d'après la première partie. La démonstration s'achève alors trivialement.

II -

Fonctions dont la différentielle est nulle. Dans ce paragraphe, on considère des espaces éventuellement non réduits.

Définition 5 : L'espace X est appelé bon espace analytique au point x si la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{d} \Omega^1_{X,x}$$

est exacte.

Lemme 6 : Supposons X plongé dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine, et soit I l'idéal des germes de fonctions holomorphes nulles sur $(X,0)$; le germe $(X,0)$ est bon si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \in I \quad \forall j = 1 \quad ,\ldots \qquad \Longrightarrow f - f(o) \in I$$

Démonstration : On a :

$$\Omega^1_{X,0} = \Omega^1_o \Big/ I\,\Omega^1_o + \mathcal{O}_0 dI$$

Soit $\tilde{f}$ un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$

$$d\tilde{f} \in I\,\Omega^1_o + \mathcal{O}\,dI \iff \exists g \in I \ , \quad f_i \in I$$

$$d\tilde{f} = h\ dg + \Sigma_1^p \ f_i\,\omega_i \quad , \qquad h \in \mathcal{O}_0 \ , \quad \omega_i \in \Omega^1_0$$

ou encore :

$$d(\tilde{f} - gh) = g\ dh + \Sigma\, f_i\,\omega_i \in I\ \Omega^1_0$$

Proposition 6 : Si $(X,0)$ est irréductible réduit, c'est un bon germe.
En effet soit f un germe de différentielle nulle. Il est constant sur la variété connexe des points réguliers, donc

$$f - f(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_{(X,0)\text{réd}} = \mathcal{O}_{X,0} \quad \Longrightarrow \quad f = f(0)$$

L'exemple suivant répond à une question qui nous a été posée par J. Giraud :

Un exemple : Soit $(X,0)$ un germe artinien. Ce peut être un bon germe, comme le montre le cas trivial

$$\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_1\,0} \Big/ \mathfrak{M}^k \quad , \ \mathfrak{M} \text{ idéal maximal.}$$

En général ce n'est pas le cas : soit f un germe à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^n$, tel que

$$f \notin J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \quad , \quad f(0) = 0$$

C'est le cas si f n'est pas un polynôme quasi-homogène (dans aucun système local de coordonnées, cf. [33]) . Soient $(X,0)$ le germe artinien défini par l'idéal jacobien, et $\tilde{f}$ la classe de f dans $\mathcal{O}_{X,0}$. On a

$$\tilde{f} \neq 0 \quad , \quad d\tilde{f} = 0 \quad : df \in J(f)\, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0}$$

Ainsi $(X,0)$ n'est pas un bon germe.

D'autres exemples de bons germes sont donnés par la Proposition suivante :

<u>Proposition 7</u> :

Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique défini par l'idéal I . Si I est intégralement clos, ou si I peut être engendré par des monômes , $(X,0)$ est un bon germe.

<u>Démonstration</u> :

a/ Supposons I intégralement clos. Soit f un germe tel que

$$f(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} \in I \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

On sait que f est entier sur l'idéal jacobien (d'après par exemple le critère valuatif de dépendance intégrale). On a donc, en désignant par $\bar{I}$ la **clôture** intégrale de l'idéal I ,

$$f \in \overline{J(f)} \subset \bar{I} = I$$

b/ Soit

$$(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_p}) \qquad \alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$$

un système fini de générateurs monomiaux de I . On a

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_{i,j}\, z^{\alpha_j} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Par intégration on obtient

$$f(z) = \sum_{j=1}^{p} \psi_{ij}\, z^{\alpha_j} + g_i(z)$$

Lemme 7 : Si g_i (resp. g_j) est un germe qui ne dépend pas de z_i (resp. z_j), tel que

$$g_i - g_j \in I$$

Alors

$$\left.\begin{aligned} g_i &= g_{ij} + h_i \\ g_j &= g'_{i,j} + h_j \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} & h_i, h_j \in I \\ & g_{i,j}, g'_{i,j} \in \mathcal{O}\{z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n\} \end{aligned}$$

En effet, on peut diviser g_i (resp. g_j) par z_j (resp. z_i) :

$$\begin{aligned} g_i(z) &= g_{i,j}(z) + z_j h_i \\ g_j(z) &= g'_{i,j}(z) + z_i h_j \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & g_{ij}, g'_{ij} \in \mathcal{O}\{z_1, \dots, \hat{z}_i, \hat{z}_j, \dots, z_n\} \\ & h_i \in \mathcal{O}\{\hat{z}_i\} \\ & h_j \in \mathcal{O}\{z_j\} \end{aligned}$$

On a

$$g_{ij} - g'_{ij} + z_j h_i - z_i h_j = \sum_{k=1}^{p} z^{\alpha_k} \varphi_K$$

En annulant successivement (z_i, z_j), puis (z_i), (z_j), on obtient

$$g_{ij} - g'_{ij} \in I$$

$$z_j h_i \in I$$

$$z_i h_j \in I$$

On en déduit alors la proposition par récurrence sur le nombre de variables.

III

Théorème de finitude pour les singularités isolées.

II.1. Soit X un espace analytique ayant une singularité isolée en x. Désignons par $\mathcal{H}^{\cdot}(U)$ l'homologie du complexe des sections du complexe de de Rham sur U :

$$\Gamma(U, \Omega^{\circ}_X) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma(U, \Omega^i_X) \xrightarrow{d}$$

et par $\mathcal{H}^{\cdot}_x$ l'homologie du complexe $\Omega^{\cdot}_x(\mathcal{O}_X)$.

Le résultat suivant précise un théorème de Bloom-Herrera [4] dont la démonstration requérait la résolution des singularités et le théorème des images directes de Grauert :

Théorème 2 :

1/ L'homologie $\mathcal{H}^{\cdot}_x$ est un espace vectoriel de dimension finie, et il existe une base d'ouverts U voisinages de x tels que la restriction

$$(1) \qquad \mathcal{H}^{\cdot}(U) \longrightarrow \mathcal{H}^{\cdot}_x$$

soit un isomorphisme.

2/ Soit $\widetilde{\Omega}(\mathcal{O}^{\cdot}_X)$ un complexe de faisceaux cohérents qui coïncide avec le complexe de de Rham sur

$$X^* = X - x$$

Alors l'homologie $\mathcal{H}^{\cdot}_x$ de ce complexe est de dimension finie et vérifie la même propriété (1) .

Démonstration : On utilise la méthode des bourgeonnements (furoconli) que nous exposons brièvement (dans le cas où les "bourgeons" sont lisses).

III.2 Bourgeonnement.

Soit X un espace analytique. On dit que l'ouvert U_2 de X est obtenu par bourgeonnement à partir de l'ouvert U_1 s'il existe un ouvert V de X tel que

1/ $U_2 = U_1 \cup V$

2/ V et
$W = U_1 \cap V$

sont analytiquement isomorphes à des ouverts convexes d'espaces $\mathbb{C}^N$.

En particulier, U_1 et U_2 ne diffèrent que par des points réguliers de X .

Lemme 4 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine, h une fonction de classe C^2 sur U , à valeurs réelles. On suppose h fortement plurisousharmonique,

$$h(0) = 0$$
$$dh\,(0) \neq 0$$

Alors il existe un isomorphisme analytique θ d'un ouvert convexe V de $\mathbb{C}^n$ sur un voisinage de l'origine dans U tel que

$$h_1 = h \circ \theta$$

soit fortement convexe.

En effet, on sait [18, p.51] qu'il existe un système de coordonnées à l'origine de $\mathbb{C}^n$ dans lequel h prenne la forme

$$h_1(z_1,\ldots,z_n) = \operatorname{Im} z + \sum z_j \bar{z}_k \frac{\partial^2 h(0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + O(|z|^2)$$

où la matrice hessienne est définie positive par hypothèse. Il en résulte que h_1 est fortement convexe.

Proposition 5 : Soient X un espace analytique, h une fonction de classe C^2 sur X, et x un point régulier tel que

$$h(x) = 0$$
$$dh(x) \neq 0$$

On suppose h fortement plurisousharmonique au point x. Il existe alors un voisinage compact K de x dans X tel que pour toute fonction h' de classe C^2 assez voisine de h, et pour toute fonction u positive à support dans K, l'ouvert

$$U_2 = \{y \in X \ ; \ h'(y) < u(y)\}$$

se déduise de

$$V_1 = \{y \in X \ ; \ h'(y) < 0\}$$

par bourgeonnement.

Démonstration : On peut supposer x à l'origine de $\mathbb{C}^n$, et h définie et fortement convexe (lemme 4) sur une boule ouverte B de centre l'origine.

Soit W un ouvert relativement compact dans B. Si u est une fonction assez petite à support dans $\bar{W}$, et h' quelconque,

$$U_2 = U_1 \cup (B \cap U_2)$$

Puisque h est fortement convexe sur B, les fonctions h' et

$$h'' = h' - u$$

sont fortement convexes pourvu que h' soit proche de h, et u assez petite. On en déduit que les ouverts

$$V = B \cap U_2$$
$$V' = B \cap U_1$$

sont convexes, ce qui démontre la proposition.

<u>Théorème 5</u> : Soient X un espace analytique, V la variété de ses points réguliers, et h une fonction de classe C^2 sur X, à valeurs réelles. Pour deux nombres réels a,b, $a < b$

on pose

$$X^a = h^{-1}(-\infty, a[)$$

$$X^b = h^{-1}(-\infty, b[)$$

$$X_a^b = X^b - X^a$$

On suppose

1/ $X_a^b \subset V$, X_a^b relativement compact.

2/ h fortement plurisousharmonique au voisinage de X_a^b,

et

$$dh(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{X}_a^b$$

Alors X^b se déduit de X^a par un nombre fini de bourgeonnements.

<u>Démonstration</u>.

Soit c un nombre tel que

$$a < c < b$$

Pour tout point x du compact $h^{-1}(c)$, il existe un voisinage compact K'_x tel que si h' est voisine de h, et u positive à support dans K, assez petite, l'ouvert

$$Y' = \{ h'(y) - c < u(y) \}$$

se déduit par bourgeonnement de

$$Y = \{ y \ ; \ h'(y) < c \}$$

Par une partition de l'unité associée au recouvrement (K'_x), on en déduit qu'il existe ε tel que

$$\varepsilon > 0$$

$$\forall c_1, c_2 \qquad c - \varepsilon \leq c_1 \leq c_2 \leq c + \varepsilon$$

l'ouvert X^{c_2} se déduit de l'ouvert X^{c_1} par un nombre fini de bourgeonnement.

On en conclut, par une partition finie convenable de l'intervalle $[a,b]$, que X^b se déduit de X^a par un nombre fini de bourgeonnements.

III.3. Bourgeonnements et complexes de de Rham

Proposition 6 : Soient U un ouvert de X , et V de Stein obtenu par un nombre fini de bourgeonnements à partir de U . La restriction de V à U induit un isomorphisme en homologie

$$\mathcal{H}^{\cdot}(V) \longrightarrow \mathcal{H}^{\cdot}(U)$$

Démonstration : Il suffit de considérer le cas où V est obtenu par un bourgeonnement à partir de U , soit

$$V = U \cup W$$

où $(W, U\cap W)$ sont isomorphes à des ouverts convexes d'espaces $\mathbb{C}^n$. Les faisceaux Ω^i sont acycliques sur W et sur $U\cap W$, et d'après l'hypothèse de convexité

$$H^k(W,\mathbb{C}) = 0 \qquad k > 0$$
$$H^k(U\cap W,\mathbb{C}) = 0 \qquad k > 0$$

Le complexe

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Gamma(W, \Omega^0) \xrightarrow{d} \Gamma(W,\Omega^{\cdot}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma(W, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

est donc exact (de même pour $U\cap W$) .

D'autre part, d'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, on a (puisque V est de Stein

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow H^0(V, \Omega^i) \xrightarrow{r} H^0(U, \Omega^i) \oplus H^0(W, \Omega^i) \xrightarrow{\rho} H^0(U\cap W, \Omega^i) \longrightarrow 0$$

$$r(\omega) = (\omega|_U \, , \omega|_W)$$

$$\rho(\alpha,\beta) = \alpha|_{U\cap W} - \beta|_{U\cap W}$$

Considérons alors le diagramme suivant, où les suites verticales sont exactes, ainsi que la dernière suite horizontale :

$$\begin{array}{lclcl}
\Gamma(V,\Omega^{\cdot}) & \dots \xrightarrow{d} & \Gamma(V,\Omega^i) & \xrightarrow{d} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(U,\Omega^{\cdot}) \oplus \Gamma(W,\Omega^{\cdot}) & \longrightarrow & \Gamma(U,\Omega^i) \oplus \Gamma(W,\Omega^i) & \longrightarrow & \qquad (4) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(U\cap W,\Omega^{\cdot}) & \longrightarrow & \Gamma(U\cap W,\Omega^i) & \longrightarrow & \\
\downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

On vérifie que l'homologie du complexe (4) n'est autre que $\mathcal{H}^{\cdot}(U)$
On déduit alors de (3) que la restriction

$$r : \mathcal{H}^{\cdot}(V) \longrightarrow \mathcal{H}^{\cdot}(U)$$

est un isomorphisme

Proposition 7 : Si l'ouvert de Stein V de X est obtenu par un nombre fini de bourgeonnements à partir de l'ouvert U relativement compact dans V, alors $\mathcal{H}(V)$ et $\mathcal{H}^{\cdot}(U)$ sont isomorphes et de dimension finie.

Démonstration : Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, on sait que la restriction

$$\Gamma(V,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F})$$

est compacte. On a donc aussi une application compacte

$$Z^i(V) \longrightarrow Z^i(U)$$

où

$$Z^i(V) = \{\omega\ ;\ \omega \in \Gamma(V, \Omega^i),\ d\omega = 0\}$$

Considérons l'application

$$\Gamma(U,\Omega^{i-1}) \times Z^i(V) \longrightarrow Z^i(U)$$

$$(\omega, \alpha) \longrightarrow d\omega + \alpha$$

Elle est surjective, d'après la proposition 6. La somme de cette application et l'application compacte

$$Z^i(V) \longrightarrow Z^i(U)$$

$$\alpha \longrightarrow -\alpha|_U$$

a une image de codimension finie [35]

Achevons la démonstration du théorème 2.
Si x est un point singulier isolé de X, on sait que le germe (x,X) est isomorphe au germe à l'origine d'une variété algébrique V de $\mathbb{C}^n$.
D'après [28 , Cor. 2.9] , les sphères centrées à l'origine et de rayon assez petit coupent V transervalement.
La fonction

$$h(z) = \sum_i^n |z_i|^2$$

induit sur V une fonction fortement plurisousharmonique, à laquelle on peut appliquer le théorème 5. Le théorème 2 résulte alors de la proposition 7. On remarque enfin que la démonstration s'applique à un complexe de faisceaux cohérents qui coïncide avec le complexe de de Rham holomorphe en dehors de la singularité.

III-4 Homologie du complexe du "$\bar\partial$" analytique

Le résultat suivant est bien connu des spécialistes :

Lemme 1 : Soient $E^\bullet$ un complexe d'espaces (DFN), où les différentielles sont des homomorphismes, et F un espace (DFN). Alors l'homologie du complexe $F\hat{\otimes}E^\bullet$ vérifie

$$\mathcal{H}^\bullet(F\hat{\otimes}E^\bullet) = F\hat{\otimes}\mathcal{H}(E^\bullet)$$

Démonstration

On sait que le foncteur $(F\hat{\otimes}\,.)$ est exact dans la catégorie (DFN) [31, Prop. 1, ii] . On l'applique successivement aux suites exactes

$$0 \longrightarrow Z^i(E) \longrightarrow E^i \xrightarrow{d} B^{i+1}(E) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B^i(E) \longrightarrow Z^i(E) \longrightarrow \mathcal{H}(E) \longrightarrow 0$$

Théorème 2 : Soit (X,x) un germe de singularité isolée irréductible d'espace analytique complexe. L'homologie du complexe analytique de Dolbeault-Grothendieck est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre de rang fini égal en chaque degré à la dimension de l'homologie du complexe de de Rham holomorphe.

Démonstration :

On a vu (Ch.I. (Prop. 9) que

$$(1) \qquad \Omega^{p,o}(\mathcal{A}_{X,x}) = \bar{\mathcal{O}}_{X,x}\hat{\otimes}\ \Omega^p_{X,x}$$

D'autre part, montrons que la différentielle du complexe de de Rham est un homomorphisme. D'après le Théorème 2 l'homologie est de dimension finie, et on a [7]

$$H^\bullet(\Omega^\bullet_{X,x}) = H(\hat{\Omega}^\bullet_{X,x})$$

L'espace des bords formels est de codimension finie dans un espace de Fréchet, donc fermé; l'espace des bords holomorphes est lui-même fermé :

$$B^\bullet(\Omega^\bullet_{X,x}) = B^\bullet(\hat{\Omega}^\bullet_{X,x}) \cap \Omega^\bullet_{X,x}$$

On applique alors le lemme 1 au complexe (1), par conjugaison on obtient le résultat.

CHAPITRE II.

TORSION DES COMPLEXES DE FORMES DIFFERENTIELLES, ET COMPLEXES REDUITS.

Soit $\mathcal{F}^{\cdot}_X$ l'un des complexes de formes différentielles sur X que nous avons définis. Nous étudions le sous-complexe de torsion de $\mathcal{F}^{\cdot}_X$. Le critère pour qu'une forme soit de torsion démontré dans le théorème 1 donne une démonstration élémentaire du résultat suivant : si (X,x) est un germe de singularité isolée d'hypersurface, les modules $(\Omega^i_X(\Theta_X)^{\cdot})$ sont sans torsion pour

$$i < \dim_x X$$

Le critère établit de plus un lien entre notre étude et celle des équations de Pfaff. Enfin nous identifions le quotient du complexe des formes différentielles par le sous-complexe de torsion aux complexes introduits dans [4] .

I -

Torsion du complexe de de Rham holomorphe.

I-1.

On désigne par S le lieu singulier de l'espace analytique X, par V la variété de ses points réguliers. A tout complexe $\mathcal{F}^{\bullet}$ de faisceaux analytiques cohérents sur X, on associe le complexe $t\,\mathcal{F}^{\cdot}$ des faisceaux de torsion, et le complexe $\Gamma_S\mathcal{F}^{\cdot}$ des germes de sections à support dans S.

Soit $\Omega^{\cdot}_X$ le complexe de de Rham holomorphe.

Lemme 1 : on a l'égalité de complexes

$$t\ \Omega^{\cdot}_X = \Gamma_S\ \Omega^{\cdot}_X$$

En effet, les germes de sections de $\Gamma_S\ \Omega^{\cdot}_X$ coïncident (d'après le théorème des zéros de Hilbert pour les faisceaux analytiques cohérents) avec les germes de $\Omega^{\cdot}_X$ qui sont annulés par une puissance de l'idéal de définition de S. D'où

$$\Gamma_S\Omega^{\cdot}_X \subset t\ \Omega^{\cdot}_X$$

Réciproquement, le complexe $\Omega^{\cdot}_X$ étant localement libre sur V, une forme différentielle de torsion est nulle sur V.

Corollaire : Si p est la dimension de X au point x, les modules $\Omega^i_{X,x}$ sont des modules de torsion pour $i > p$.

En effet, une forme différentielle holomorphe sur V ne peut être de dimension supérieure à p sans être nulle.

I.2. Un critère de torsion :

Soit $(X,0)$ le germe à l'origine de $\mathbb{C}^N$ d'un espace analytique défini par l'idéal I. On note encore X un représentant du germe. On suppose $(X,0)$ réduit équidimensionnel, de dimension n ; on pose

$$m = N - n .$$

Théorème 1 : Soit ω une forme différentielle holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^N$. Pour que ω induise un élément de torsion dans $\Omega^{\cdot}_{X,0}$, il faut et il suffit qu'on ait la condition suivante :

$$(P) \qquad \begin{gathered} \forall f_1, f_2, \dots, f_m \in I \\ \omega \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_m \in I\, \Omega^{\cdot}_{\mathbb{C}^N,0} \end{gathered}$$

Démonstration :

a/ Remarquons d'abord que si $(X,0)$ est le germe de la sous-variété définie par

$$z_1 = \dots = z_m = 0$$

(dans un système de coordonnées locales)

alors (P) signifie que la restriction de ω à cette sous-variété est nulle.

b/ Soit ω une forme différentielle holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}^N$ contenant l'origine, et vérifiant (P). Montrons que ω vérifie la condition $(P)_x$ aux points voisins de X : en des points suffisamment proches de l'origine, l'idéal I_x de définition du germe (X,x) est engendré par les (f_i) générateurs de I.

$$\forall g_1, \dots, g_m \in I_x$$

$$g_i = \sum_1^p h_{i,o} f_j \qquad\qquad I = (f_1, \dots, f_p)$$

$$\omega \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_m = \sum_{(i)=(1,\dots,i_m)} h_{(i)}\, \omega \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_m} + \sum_1 f_j\, \omega^{\cdot}_j$$

La forme ω vérifie donc bien $(P)_x$. D'après a/, elle induit une forme nulle aux points réguliers, donc un élément de torsion.

Réciproquement, soit ω une forme différentielle à l'origine de $\mathbb{C}^N$ qui induit sur X un élément de torsion, c'est-à-dire une forme nulle aux points réguliers. Pour tout m-uple d'éléments de I , la forme

$$\beta = \omega \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_m$$

a ses coefficients nuls aux points réguliers de X où elle est définie, donc nuls à l'origine; ses coefficients appartiennent donc à I puisque $(X,0)$ est réduit.

Corollaire : Si $(X,0)$ est cohérent en tant que germe analytique-réel, pour qu'une forme ω analytique-réelle induise un élément de torsion dans $\Omega^\cdot(\mathcal{A}_{X,0})$, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{l} \forall\ f_1, \dots, f_m \in I \\ \quad\ g_1, \dots, g_m \in I \\ \omega \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_m \wedge d\bar{g}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{g}_m \in (I,\bar{I})\ \Omega^\cdot_o \end{array}$$

En effet, le complexe $\Omega^\cdot(\mathcal{A}_{X,0})$ s'identifie au complexe de de Rham de $X \times X$.

Remarque : On peut énoncer un critère analogue pour les formes à coefficients différentiables.

I.2. Calcul de la torsion.

La torsion du complexe de de Rham a été étudiée récemment [38] , seulement pour des intersections complètes.

Le théorème 1 permet de donner une démonstration élémentaire du résultat suivant

Théorème 2 : Soit $(X,0)$ un germe de singularité isolée d'hypersurface irréductible et réduite à l'origine de $\mathbb{C}^{N+1}$. Les modules $\Omega^i_{X,0}$ sont sans torsion pour

$$i \leq N-1$$

le module $\Omega^N_{X,0}$ possède de la torsion, et $\Omega^{N+1}_{X,0}$ est un module de torsion.

Démonstration. On sait que la suite des dérivées partielles du germe f définissant l'hypersurface est une suite régulière.

a/ Soit ω une forme différentielle à l'origine de $\mathbb{C}^{N+1}$, de degré strictement inférieur à N . Pour que ω induise un élément de torsion, il faut et suffit qu'on ait

$$\omega \wedge df = f\alpha \quad , \quad \alpha \in \Omega^i_0$$

On a alors

$$\alpha \wedge df = 0$$

D'après le théorème de division de de Rham appliqué à df [11]

$$\alpha \wedge df = 0 \Longrightarrow \alpha = df \wedge \beta$$

D'où

$$(\omega - f\beta) \wedge df = 0 \Longrightarrow \omega = f\beta + df \wedge \Psi$$

La forme ω induit la forme nulle dans $\Omega'_{X,0}$

b/ Soit k le plus petit entier tel que

$$f^k \in \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)$$

$$f^k = \sum_0^N a_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

La forme

$$\omega = \sum_i (-1)^i \; a_i \; dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_N$$

vérifie (P) , donc induit un élément $\dot{\omega}$ de torsion. Cependant $\dot{\omega}$ n'est pas nulle : si on avait

$$\omega = f\omega_1 + df \wedge \omega_2$$

on aurait aussi

$$\omega \wedge df = f(\omega_1 \wedge df) = f^k \; dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \Rightarrow f^{k-1} \in J(f)$$

contrairement à la définition de k .

Calcul de la torsion :

Le faisceau de torsion est un faisceau cohérent concentré à l'origine, donc un espace vectoriel de dimension finie.

Considérons l'application

$$df : \Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1},0} \longrightarrow \mathcal{O}_0$$

$$df(\omega) = g \qquad \omega \wedge df = g \, dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$$

Son image est l'idéal jacobien $J(f)$. D'autre part, d'après le lemme de division de de Rham :

$$\omega = f\omega_1 + df \wedge \omega_2 \iff df(\omega) \in (f).\,J(f)$$

Soient alors F le module des formes de degré n à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui induisent sur X des éléments de torsion à l'origine, et E le module de torsion $t\,\Omega^n_{X,0}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 \\
 & E \arrow[u] \arrow[rr, "df"] & & \dfrac{(f)\cap J(f)}{(f).\,J(f)} \arrow[u] \\
 & F \arrow[u] \arrow[rr, "df"] & & (f)\cap J(f) \arrow[u] \\
 & f\,\Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1},0} + df\wedge \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^{n+1},0} \arrow[u] \arrow[rr, "df"] & & (f).J(f) \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

L'application induite

$$df : E \longrightarrow \frac{(f)\cap J(f)}{(f).J(f)}$$

est injective:

Si ω est une forme différentielle telle que

$$df = f\,g\,dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$$

Il existe une forme β telle que

$$(\omega - f\beta)\wedge df = 0$$

$$\implies \omega = f\beta + df\wedge\gamma$$

$$\implies \omega = 0$$

dans $\Omega^n_{X,0}$

L'isomorphisme canonique

$$E = \frac{(f)\cap J(f)}{(f).\;J(f)}$$

permet de calculer la dimension de E :

<u>Proposition 3</u> :

$$\dim_{\mathbb{C}} E = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/(f, J(f))$$

Démonstration : Il suffit de considérer les deux suites exactes d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \longrightarrow \frac{(f,J(f))}{J(f)} \longrightarrow \frac{\theta}{J(f)} \longrightarrow \frac{\theta}{(f,J(f))} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \frac{(f)\cap J(f)}{(f).J(f)} \xrightarrow{\Psi_1} \frac{\theta}{J(f)} \xrightarrow{\Psi_2} \frac{(f,J(f)}{J(f)} \longrightarrow 0$$

où

$$\Psi_1(f\dot{g}) = \dot{g}$$
$$\Psi_2(\dot{h}) = (f\dot{h})$$

Remarque :

Compte tenu des résultats de [38] on peut établir une réciproque au théorème de division de de Rham dans le cas de formes exactes : soit f une fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{N+1}$, définissant un espace analytique X dont le lieu singulier S vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes

$$\operatorname{codim}_X S < N-2 \ , \quad \dim S \geqslant 3$$

Alors il existe une forme différentielle ω holomorphe telle que

$$\omega \wedge df = 0 \ , \qquad \omega \notin df \wedge \Omega^{\cdot}$$

I.3 - Systèmes de Pfaff.

Soient $(\omega_i)_{i = 1,\dots,p}$ un nombre fini de formes différentielles holomorphes de degré 1 dans $\mathbb{C}^N$. On peut donner la définition suivante [13]

Définition 1 : On appelle solution du système de Pfaff

$$\omega_i = 0 \qquad i = 1,\dots,p$$

un espace analytique X tel que la forme

$$\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$$

soit de torsion sur X.

On sait [38] que si X est normale en x, le module $\Omega^1_{X,x}$ n'a pas de torsion. Il résulte la propriété suivante, qui généralise un résultat de [13] .

Théorème 3 : Si ω est à coefficients polynomiaux homogènes de degré r , et V une hypersurface algébrique définie par un polynôme homogène irréductible de degré p solution de Pfaff de ω , on a :

$$p \leq r$$

II Complexes réduits

Soit X un espace analytique (de lieu singulier S), et considérons un complexe $\mathcal{F}^{\cdot}$ de faisceaux sur X .

Définition 2

On appelle complexe réduit associé à $\mathcal{F}^{\cdot}$ le complexe

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\cdot} = \mathcal{F}^{\cdot} / \Gamma_S \mathcal{F}^{\cdot}$$

où $\Gamma_S \mathcal{F}^{\cdot}$ désigne le complexe des germes de sections de $\mathcal{F}^{\cdot}$ à support dans S.

Remarque : Le complexe réduit associé au complexe de de Rham différentiable n'est autre que le complexe $\mathcal{E}^{\cdot}_X$ de [4] .

Soit (X,0) un germe d'hypersurface irréductible à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Proposition : 1/ L'homologie du complexe réduit associé à $\Omega^{\cdot}_{X,0}$ est nulle en degré strictement inférieur à (n-1).

2/ Soit d_n (resp. d_{n-1}) sa dimension en degré n (resp. (n-1))

On a :

$$d_n - d_{n-1} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(f,J(f))}{J(f)}$$

Démonstration :

D'après (I, lemme 1, et théorème 2)

$$t\,\Omega^{\cdot}_X = \Gamma_0\, \Omega^{\cdot}_X$$

On sait que le complexe de torsion est concentré en degrés (n,n+1) , et que

$$t\,\Omega^{n+1}_{X,0} = \Omega^{n+1}_{X,0} \quad ; \qquad \dim_{\mathbb{C}}(t\,\Omega^{n}_{X,0}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta}{(f,J(f))}$$

Considérons la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow t\,\Omega^{\cdot}_{X,0} \longrightarrow \Omega^{\cdot}_{X,0} \longrightarrow \underset{\sim}{\Omega}^{\cdot}_{X,0} \longrightarrow 0$$

Désignons par $\mathcal{H}^j_{X,0}$ (resp. $t\,\mathcal{H}^j_{X,0}$, $\underset{\sim}{\mathcal{H}}^j_{X,0}$) l'homologie du complexe $\Omega^{\cdot}_{X,0}$ (resp. $t\,\Omega^{\cdot}_{X,0}$, $\underset{\sim}{\Omega}^{\cdot}_{X,0}$)

On a la suite exacte (bornée)

$$\dots\ t\,\mathcal{H}^i_{X,0} \longrightarrow \mathcal{H}^i_{X,0} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{H}}^i_{X,0} \xrightarrow{\partial} t\,\mathcal{H}^{i+1}_{X,0} \longrightarrow \dots$$

On sait [7,36] qu'on a

$$\mathcal{H}^i_{X,0} = 0 \qquad i = 1,\dots,n-1$$

D'autre part on a vu que

$$t\,\Omega^i_{X,0} = 0 \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(t\,\Omega^n_{X,0}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(f,J(f))} = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^{n+1}_{X,0}$$

$$t\,\Omega^{n+1}_{X,0} = \Omega^{n+1}_{X,0}$$

On a donc

$$\underset{\sim}{\mathcal{H}}^i_{X,0} = \mathcal{H}^i_{X,0} = 0 \qquad i = 1,\dots,n-2$$

$$0 \to t\,\mathcal{H}^{n-1}_{X,0} \longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}_{X,0} \to \underset{\sim}{\mathcal{H}}^{n-1}_{X,0} \xrightarrow{\partial} t\,\mathcal{H}^n_{X,0} \longrightarrow \mathcal{H}^n_{X,0} \to \underset{\sim}{\mathcal{H}}^n_{X,0} \xrightarrow{\partial} \frac{\Omega_{X,0}}{d(t\,\Omega^n_{X,0})} \longrightarrow 0$$

Il en résulte la suite exacte

$$\text{(A)}\quad 0 \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{H}}^{n-1}_{X,0} \longrightarrow t\,\mathcal{H}^n_{X,0} \longrightarrow \mathcal{H}^n_{X,0} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{H}}^n_{X,0} \xrightarrow{\partial} \frac{\Omega^{n+1}_{X,0}}{d(t\,\Omega^n_{X,0})} \longrightarrow 0$$

On a de manière évidente

$$t\,\mathcal{H}^n_{X,0} = \{\omega \in t\,\Omega^n_{X,0}\ ,\ d\omega = 0\}$$

et la suite exacte

$$\text{(B)}\quad 0 \to t\,\mathcal{H}^n_{X,0} \longrightarrow t\,\Omega^n_{X,0} \xrightarrow{d} \Omega^{n+1}_{X,0} \longrightarrow \Omega^{n+1}_{X,0} \Big/ d(t\,\Omega^n_{X,0}) \longrightarrow 0$$

On compare ensuite les dimensions des espaces vectoriels qui figurent dans (A) et (B) . La formule 2) en résulte, d'après [7] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.). - Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudoconcaves, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 1-38.

[2] ANDREOTTI (A.), GRAUERT (H.). - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 193-259.

[3] BERNSTEIN (I. N.), GELFAND (S. I.), GELFAND (I. M.). - Opérateurs différentiels sur le cône cubique, Uspekhi Mat. Ž., Moskva, t. 18, 1963, n° 1, p. 185-190.

[4] BOOM (T.), HERRERA (M.). - De Rham cohomology of an analytic space, Invent. Math., Berlin, t. 7, 1969, p. 275-296.

[5] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, Chap. I : Modules plats. - Paris, Hermann, 1961.

[6] BOURBAKI (N.). - Groupes et algèbres de Lie. - Paris, Hermann, 1960.

[7] BRIESKORN (E.). - Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen Manuscripta Math., Berlin, t. 2, 1970, p. 103-161.

[8] BURNS (D.). - Differential operators on varieties, Philos. Diss., M. I. T. Boston, 1973.

[9] CARTAN (H.). - Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, "Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz", p. 90-102. - Princeton, Princeton University Press, 1957 (Princeton mathematical Series, 12).

[10] CARTAN (H.). - Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 77-99.

[11] DE RHAM (G.). - Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire, Comment. Math. Helvet., t. 28, 1954, p. 346-352.

[12] DOUADY (A.). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, n° 1, p. 1-98.

[13] GERARD (R.), JOUANOLOU (J. P.). - Etude de l'existence de variétés intégrales compactes de certains systèmes de Pfaff, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, 1973, Série A, p. 167-169.

[14] GRAUERT (H.). - Über Modifikationen und exceptionnelle analytische Mengen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 331-368.

[15] GROTHENDIECK (A.). - Techniques de construction en géométrie analytique, VII, Séminaire Cartan : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique, 13e année, 1960-61, n° 14, 27 p.

[16] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence; American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[17] HIRONAKA (H.). - Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space, Haward, 1970.

[18] HÖRMANDER (H.). - An introduction to complex analysis in several variables. - Princeton, D. Van Nostrand, 1966 (University Series in higher Mathematics).

[19] KANTOR (J. M.). - Opérateurs différentiels sur les singularités-quotients, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 897-899.

[20] KANTOR (J. M.). - Le complexe de Dolbeault-Grothendieck sur les espaces analytiques, Séminaire P. Lelong : Analyse, 1973/1974, p. 142-154. - Berlin,

Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes mathematics, 474).

[21] KANTOR (J. M.). – Torsion du complexe de De Rham d'un espace analytique complexe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 893-896.

[22] KANTOR (J. M.). – Hyperfonctions associées aux faisceaux analytiques, Anaïs Acad. Ciencias, t. 43, 1971, n° 2, p. 299-318.

[23] KANTOR (J. M.). – Analyse fonctionnelle sur les espaces analytiques, "Colloque international CNRS 128 : Sur les fonctions de plusieurs variables complexes [1974. Paris]", p. 89-94. – Paris, Gauthier-Villars, 1975 (Agora Math., 1).

[24] LELONG (P.). – Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 239-261.

[25] MALGRANGE (B.). – Analytic spaces, "Topics in several complex variables", p. 1-28. – Genève, l'Enseignement mathématique, 1968 (Monographies de l'Enseignement mathématique, 17).

[26] MALGRANGE (B.). – Ideals of differentiable functions. – Bombay, Oxford university Press, 1966 (Tata Institute, Studies in Mathematics, 3).

[27] MALGRANGE (B.). – Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 113-127.

[28] MILNOR (J.). – Singular points of complex hypersurfaces. – Princeton, Princeton University Press, 1968 (Annals of Mathematics Studies, 61).

[29] NARASIMHAN (R.). – Introduction to the theory of analytic spaces. – Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 25).

[30] POLY (J. B.). – Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques, Thèse Sciences Mathématiques, Poitiers 1974.

[31] RAMIS (J. P.), RUGET (G.). – Résidus et dualité, Invent. Math., Berlin, t. 26, 1974, p. 89-131.

[32] REIFFEN (J.). – Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen, Math. Z., t. 101, 1967, p. 269-284.

[33] SAITO (K.). – Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Invent. Math., Berlin, t. 14, 1971, p. 123-142.

[34] SCHWARTZ (L.). – Théorie des distributions. Nouvelle édition. – Paris, Hermann, 1966 (Publ. Inst. Math. Strasbourg, 9-10).

[35] SCHWARTZ (L.). – Homomorphismes et applications complètement continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 2472-2473.

[36] SEBASTIANI (M.). – Preuve d'une conjecture de Brieskorn, Manuscripta Math., t. 2, 1970, p. 301-318.

[37] SINGER (I. M.). – Future extensions of index theory and elliptic operators, "Prospects in Mathematics", p. 171-185. – Princeton, Princeton University Press, 1971 (Annals of Mathematics Studies, 70).

[38] VETTER (U.). – Äußere Potenzen von Differentialmoduln reduzierte vollständiger Durschnitte, Manus. Math, t. 2, 1970, p. 67-75.

[39] WEIL (A.). – Foundations of algebraic geometry. – Providence, American mathematical Society, 1962 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 29).

[40] ZARISKI (O.). – Characterization of plane algebroid curves whose modules of differentials has maximum torsion, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 56 1966, p. 781-786.

Jean-Michel KANTOR, Math., Univ. Paris-7, 2 Place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05.