MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL GONDRAN

Un algorithme de coupes en programmation en nombres entiers

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 93-100
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__93_0>

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math . France
Mémoire 49-50, 1977, p. 93-100

UN ALGORITHME DE COUPES EN PROGRAMMATION EN NOMBRES ENTIERS

par Michel GONDRAN

RESUME -

Dans le cas des programmes linéaires tout entier , l'auteur propose un algorithme de coupes basé sur les deux règles suivantes :

1°) Les conditions d'intégrité des variables de base de la solution continue sont utilisées pour générer une suite de coupes. Le pivotage sur ce petit nombre de coupes permet d'obtenir une solution duale réalisable entière du problème augmenté.

2°) Ces coupes sont déterminées par des endomorphismes, puis consolidées par certaines agrégations comme dans " the accelerated Euclidean Algorithm " de Glenn MARTIN.

Ces deux règles permettent de définir un algorithme de coupes efficace pour une classe importante de problèmes en nombres entiers : recouvrement et partition.

1.- Un algorithme de coupes -

Considérons le programme entier linéaire :

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = cx \\ \text{avec} \quad Ax = b \\ \qquad 0 \leq x \leq \alpha \qquad x \in Z^n \end{cases}$$

où

- A est une $m \times n$ matrice entière
- b est un m vecteur entier,
- α est un n vecteur entier.

Nous présentons pour résoudre ce programme des variantes de l'algorithme des coupes de GOMORY (1) et de l'algorithme de MARTIN (2).

L'algorithme sera le suivant :

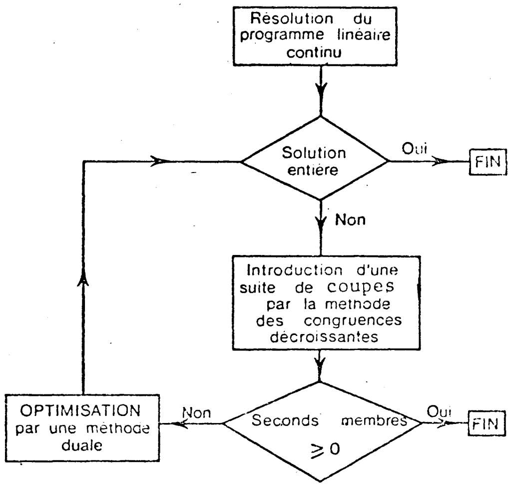
a) Résolution de (P) en continu par le simplexe. Si la solution est entière, FIN. Sinon aller en b).

b) On ajoute un petit nombre de coupes permettant d'obtenir une solution entière duale réalisable du problème augmenté. Si cette solution est positive, FIN. Sinon aller en c).

c) Résolution du problème augmenté en continu par la méthode duale du simplexe. Si cette solution est entière, FIN. Sinon aller en b).

Pour générer les coupes de b), on utilisera la condition d'intégrité d'une des variables de base. Le pivotage qu'on fera sur cette suite de coupes conservera à chaque étape une solution duale réalisable tout en diminuant le déterminant de la matrice de base. (méthode des congruences décroissantes (3)).

L'organigramme de l'algorithme sera donc :



. Au paragraphe 2, on montre comment sont générées les coupes par la méthode des congruences décroissantes.

Au paragraphe 3, nous donnons des expériences numériques et des conclusions.

Une présentation plus détaillée de cet algorithme est donnée dans [12].

2.- Génération des coupes et méthodes des congruences décroissantes -

En écrivant l'intégrité d'une variable de base, nous obtenons l'équation de congruence

(2-1) $$\sum_{i \in I} g_i \, x_i \equiv g_o \quad (\text{mod } D)$$

où D, le déterminant de la matrice de base, est le produit des pivots.

On notera par $|g|_D$ le représentant de g dans $[0, D-1]$.

Etape 1.-

Soit ϕ_λ un endomorphisme de Z/DZ dans Z/DZ défini par

$$\phi_\lambda(g) \equiv \lambda \, g$$

L'équation (2-1) entraîne alors :

(2-2) $$\sum_{i \in I} \phi_\lambda(g_i) \, x_i \equiv \phi_\lambda(g_o) \quad (\text{mod } D)$$

Il y aura équivalence entre (2-1) et (2-2) si ϕ_λ est un automorphisme.

En posant alors $f_i = |\phi_\lambda(g_i)|_D$ pour $i \in I + \{o\}$, l'équation (2-2) s'écrit :

(2-3) $$\sum_{i \in I} \frac{f_i}{D} \, x_i - s = \frac{f_o}{D}$$

avec s entier positif.

Pratiquement on choisira un automorphisme qui maximise $|\phi_\lambda(g_o)|_D$.

En effet si δ = pgcd (D, $|g_o|_D$), il existe deux entiers relatifs λ et μ tel que [3] :

(2-4) $$-\lambda |g_o|_D + \mu\ D = \delta \quad \text{(Bezout)}$$

(2-5) $$\text{pgcd}\ (\lambda,\ D) = 1$$

Alors pour cet automorphisme, on obtient la plus grande valeur pour f_o, c'est-à-dire $D - \delta$.

Etape 2.-

On ajoutera alors au programme (P) la contrainte (2-3) et on pivotera dessus.

Soit $i_o \in I$ la variable qui rentre en base.

Le déterminant D' de la nouvelle matrice de base est alors :

(2-6) $$D' = \frac{f_{i_o}}{D}\ D = f_{i_o} \leqslant D - 1$$

Si toutes les variables de bases sont entières, Fin. Sinon en écrivant l'intégrité d'une variable de base, on obtient une équation de congruence du même type que (2-1) mais dans un groupe Z/D'Z d'ordre plus petit que D ($D' \leqslant D - 1$).

En un nombre fini de telles étapes, on obtient donc une solution duale réalisable entière.

Le nombre de ces étapes est approximativement égal à $\log_2 D$ lorsque l'on prend l'automorphisme qui maximise f_o.

Remarque 1 -

A la fin de chaque étape de la méthode duale du simplexe, un certain nombre de coupes non actives sont supprimées.

Remarque 2 -

Un certain nombre d'autres coupes peuvent être considérées, en particulier les coupes consolidées développées dans [12].

3.- EXPERIENCES NUMERIQUES ET CONCLUSIONS -

3.1. Expériences numériques.

Jusqu'à présent deux codes ont été écrits sur cet algorithme, l'un par l'auteur à l'Electricité de France sur CDC 6400, l'autre par Monsieur J. DELORME [4] à la R.A.T.P. sur Bull 6050.

1°) Le premier, et différentes variantes, a été testé sur les différents problèmes tests de la littérature (cf. TRAUTH et WOOLSEY [5] et GARFINKEL et NEMHAUSER [6]), c'est-à-dire sur :

a) neuf problèmes d'allocation,

b) les dix problèmes de charge fixe de HALDI

c) les six problèmes tests " IBM " de HALDI

Deux variantes particulières ont été étudiées :

Cathy 1 correspondant aux coupes du paragraphe 2,
Cathy 3 aux coupes consolidées citées en Remarque 2.

Les heuristiques choisis ont été les suivants :

- Là variable choisie pour obtenir la congruence (2.1) sera prise suivant l'ordre naturel,
- L'endomorphisme ϕ_λ sera un automorphisme qui maximise f_o ,
- A la fin de chaque étape du dual, on supprime toutes les coupes non actives à ε (= 2) près,

On donne aux tableaux 1 à 3 une comparaison des résultats de ces deux codes aux résultats des différents codes de coupes de la littérature (cf. TRAUTH et WOOSLEY (5)) :

. IPM3, code écrit par R.E. LEVITAN et R.E. GOMORY en 1961 (7).
. LIP1, code écrit par J.HALDI et L. ISAACSON en 1965 (8).
. ILP2-1 et ILP2-2, codes écrits par D. SOMMERS, qui utilisent l'algorithme tout entier de GOMORY (9).
. IPSC, code écrit en 1966 par R.E. WOOSLEY (10), basé sur l'algorithme tout entier de GOMORY (9).

TABLEAU 1

Nombre de pivotages pour les 9 problèmes d'allocations

Problèmes	D à l'optimum continu	Nbre de pivotages pour opt. continu	IPM3	ILP1	ILP2-1	ILP2-2	IPSC	Cathy 1	Cathy 3
1	20	12	14	19	54	51	46	14	14
2	18	12	31	55	163	77	64	52	33
3	18	13	30	41	168	59	71	28	29
4	18	14	18	19	192	48	62	18	18
5	25	12	12	12	139	32	50	12	12
6	25	12	18	40	157	54	81	21	22
7	25	12	61	81	504	119	131	63	54
8	25	12	21	51	370	57	102	41	19
9	30	11	11	11	201	34	44	11	11

TABLEAU 2

Nombre de pivotages pour les 10 problèmes de charge fixe.

Problèmes	D à l'optimum continu	Nbre de pivotages pour opt. continu	IPM3	ILP1	ILP2-1	ILP2-2	IPSC	Cathy 1	Cathy 3
1	183	4	54	24	135	36	32	25	24
2	258	4	81	15	94	47	45	24	12
3	320	4	37	26	154	104	56	18	18
4	205	4	91	18	93	18	22	12	9
5	19400	4	⩾ 7000	158	⩾ 7000	⩾ 7000	6104	346	106
6	32000	4	⩾ 7000	123	⩾ 7000	311	3320	293	104
7	19400	4	⩾ 7000	159	⩾ 7000	⩾ 7000	⩾7000	561	106
8	32000	4	⩾ 7000	126	⩾ 7000	306	⩾7000	298	110
9	2000	6	118	42	⩾ 7000	298	339	73	31
10	6098400		1396	102	⩾ 7000	⩾ 7000	⩾7000		

TABLEAU 3

Nombre de pivotages pour les 6 problèmes "IBM" d'HALDI

Problèmes	D à l'optimum continu	Nbre de pivotages pour opt. continu	IPM3	ILP1	ILP2-1	ILP2-2	IPSC	Cathy 1	Cathy 3
1	32	7	8	11	9	11	9	9	8
2	32	7	17	32	13	15	16	18	22
3	72	4	22	53	23	14	14	20	19
4	16 384	17	24	73	41	18	17	46	53
5	131 072	16	1 144	351	⩾ 7000	842	1 020		
9			6 758	953	⩾ 7000	1 105	752		

Nous sommes sans résultats pour le problème de charge fixe n° 10 et pour les problèmes IBM 5 et 9 car les nombres étant très grands (D > 100 000) nous avons eu des erreurs d'arrondis.

Nous préparons d'ailleurs un code pour remédier à cet inconvénient.

Toutefois pour $D < 50000$, le code Cathy 3 est presque toujours en tête.

Pour des détails sur le code, voir (11).

2°) Le second a été écrit afin de résoudre de grands problèmes (plusieurs milliers de variables, plusieurs centaines de contraintes) de partition auxquels on a ajouté quelques contraintes supplémentaires de la forme $\Sigma\ x_j = N$ et $\Sigma\ t_j\ x_j \leqslant T$.

Les résultats actuels montrent que très peu de coupes (moins d'une dizaine) suffisent pour résoudre ces gros problèmes : cf tableau 4.

Pour des détails complémentaires, voir la thèse de Docteur Ingénieur de J. DELORME (4) et l'article de J. DELORME et E. HEURGON (13).

TABLEAU 4

Problèmes de partition avec une contrainte de la forme $\sum_j x_j = N$ et une autre de la forme $\Sigma\ t_j\ x_j$ T.

n	m	D à l'optimum continu	z à l'optimum continu	Nbre de pivotages pour opt continu	z optimum	Nbre de coupes	Nbre pivotages après optimum continu
913	51	3	459.667	258	479	3	41
953	88	68	3305.5	360	3316	1	1
2186	111	4	3320.	577	3327	6	59
1020	91	4	3161.	260	3162	3	42

5.2.- CONCLUSIONS -

Une première constatation est de remarquer que la difficulté de résolution des problèmes en nombres entiers par une méthode de coupes, qui peut être mesurée par le nombre de pivotages, est une fonction croissante de n et m, mais aussi fortement de D.

Il semble donc que les méthodes de coupes ne doivent pas être utilisées pour D grand ($D > 1000$). Cela restreint pratiquement l'utilisation des méthodes de coupes aux problèmes dont la matrice des contraintes est peu dense avec des coefficients très petits (en général 0, 1, -1). Dans cette classe on trouve cependant les problèmes de recouvrement et de partition et quelques problèmes combinatoires.

Cependant un grand nombre d'améliorations que nous étudions actuellement peuvent être apportées aux méthodes de coupes :

1°) On a intérêt à choisir une coupe augmentant strictement la fonction économique. Pour cela, si le vecteur c est entier, tant que la fonction économique z n'est pas entière, on l'utilisera pour générer la congruence (2-1).

C'est ce que font Haldi et Issacson (8). Nous améliorons ainsi Cathy 1 et Cathy 3.

2°) Lorsque l'on n'arrive pas à déterminer une coupe améliorant strictement la fonction économique, on fera une énumération partielle des solutions, ce qui permettra de sortir de cette impasse.

3°) Dans tous les cas nous devons travailler en variables bornées.

Ainsi par exemple pour le problème n° 1 d'allocation, l'optimum est atteint alors avec 2 pivotages seulement (1 pour la solution du problème en continu, l'autre pour la coupe) avec Cathy 3.

Nous préparons actuellement un code tenant compte des améliorations 1, 2 et 3.

BIBLIOGRAPHIE

(1) GOMORY R.E.- "An algorithm for integer solutions to linear programs".- Princeton IBM Math. Report, Nov. 1958, also in Recent Advances in Mathematical Programming. (R.L. GRAVEC and P. WOLFE, eds). Mc Graw-Hill, New-York 1963).

(2) MARTIN G.T.- "An accelerated Euclidean Algorithm for Integer Linear Programming".- in Recent Advances in Mathematical Programming (R.L. GRAVES and P. WOLFE, eds) Mc Graw-Hill, New-York, 1963)

(3) GONDRAN M.- "Un outil pour la programmation en nombres entiers : la méthode des congruences décroissantes".- R.A.I.R.O 7ème année, Septembre 1973, V-3, p. 35 à 54.

(4) DELORME J.- "Contribution à la résolution du problème de recouvrement : méthode de troncatures".- Thèse de Docteur-Ingénieur Université de Paris VI Juin 1974.

(5) TRAUTH C.A. and WOOSLEY R.E.- "Integer Linear Programming : A study in Computational Efficiency".- Man. Sci. 15, p. 481-493 (1969).

(6) GARFINKEL R.S. and NEMHAUSER G.L.- "Integer Programming".- John Wiley and Sons (1972).

(7) LEVITAN R.E.- IPM 3, SHARE Distribution Number 1190, September 1961.

(8) HALDI J. and ISSACSON L.M.- "A computer Code for Integer Solutions to linear programs".- Operations Research, vol. 13, n° 6, November-December 1965 p. 946-959.

(9) GOMORY R.E.- "All-Integer Programming".- IBM Research Report RL-189, January 1960.

(10) WOOSLEY R.E.- "On Integer Linear Programming in Combinational Analysis".- Sandia Laboratories Reprint SC-R-65-963, August 1965

(11) GONDRAN M.- "Expériences numériques en programmation en nombres entiers par des méthodes de coupes".- note EDF HI 1398/02 de Janvier 1974.

[12] GONDRAN M.- "Un algorithme de coupes efficace par la méthode des congruences décroissantes".- note EDF HI 1234/02 du 11 Décembre 1973, à paraître en anglais dans les "Proceeding" de : International Meeting on Optimization Problems in Engineering and Economics.- Naples, Italie, Décembre 1974.

[13] DELORME J. et HEURGON E.- "Problèmes de partitionnement : exploration arborescente ou méthodes de troncatures ?" R.A.I.R.O., 9ème année, Juin 1975, V-2, p. 53 à 65.

Michel GONDRAN
Département TRAITEMENT DE L'INFORMATIQUE
ET ETUDES MATHEMATIQUES
17, Avenue du Général de Gaulle
92140 CLAMART