François Dress

Majorations de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 47-52
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__47_0>

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math. France
Mémoire 49-50, 1977, p. 47-52

MAJORATIONS DE LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION DE MÖBIUS

par François DRESS

1) <u>EN GUISE D'INTRODUCTION</u> ... ou : Comment présenter la fonction de Möbius à des non arithméticiens ?

On considère une suite réelle $(c_n)_{n\geq 1}$ et on construit la fonction de la variable réelle $x \geq 1$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{x}{n}\right]^{(1)}$$

(somme qui n'est infinie qu'en apparence). On se pose alors le problème suivant : existe-t-il une suite (c_n) telle que la fonction correspondante ait pour valeur 1 pour tout x (≥ 1) ? On a :

$$f(1) = c_1$$
$$f(2) = 2\ c_1 + c_2$$
$$f(3) = 3\ c_3 + c_2 + c_3$$
$$f(4) = 4\ c_1 + 2\ c_2 + c_3 + c_4$$
$$\text{etc} \ldots$$

ce qui permet de calculer $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -1$, $c_4 = 0$, etc ... Un raisonnement par récurrence trivial permet de montrer que la suite (c_n) existe et est unique. Il est par contre beaucoup moins trivial - avec cette présentation - de trouver une règle de calcul du terme général c_n.

Rappelons qu'on appelle fonction arithmérique une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et que les fonctions arithmétiques sont munies d'un produit de convolution défini par $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(\frac{n}{d})$ (produit de convolution qui n'est autre - à condition d'interpréter les fonctions arithmétiques comme des sommes de distributions de Dirac - que le traditionnel produit de convolution multiplicatif $(f * g)(x) = \int_1^x f(t)\, g(\frac{x}{t})\, \frac{dt}{t}$).

La fonction arithmétique i définie par $i(n) = 1$ pour tout n (≥ 1) possède un inverse de convolution μ, appelé fonction de Möbius, et qui répond à la caractérisation ci-dessous :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(p_1\ p_2 \ldots p_k) = (-1)^k & (p_i \text{ nombres premiers distincts}) \\ \mu(n) = 0 \text{ si } n \text{ possède (au moins) un facteur carré.} \end{cases}$$

---

(1) $[y]$ désigne la partie entière k de y, définie par $k \leq y < k + 1$ (on ne regrettera jamais assez que les ordinateurs ne souscrivent pas à cette définition pour les nombres négatifs).

La fonction μ fait partie des fonctions arithmétiques multiplicatives, caractérisées par la propriété $f(m\,n) = f(m)\,f(n)$ si m et n sont premiers entre eux.

Le lecteur a déjà deviné que le terme général c_n de la suite définie au début de cet exposé est la fonction de Möbius $\mu(n)$ (on ne le démontrera pas ici, mais les maniaques pourront le vérifier sur ordinateur jusqu'à $n = \ldots$)

2) QUELQUES FONCTIONS SOMMATOIRES -

De nombreuses fonctions arithmétiques sont très irrégulières et une manière souvent efficace pour " casser " leurs irrégularités consiste à considérer leur fonction sommatoire $\sum_{n \leq x} f(n)$ (définie sur les réels $n \geq 1$). On présentera ici trois fonctions sommatoires.

La première, essentielle en arithmétique, est $\pi(x)$ la fonction sommatoire de la fonction caractéristique des nombres premiers, i. e. le nombre de nombres premiers $\leq x$.

La deuxième, qui est le sujet de cet exposé, est $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ la fonction sommatoire de la fonction de Möbius.

La troisième, dont on aura besoin, est $Q(x) = \sum_{n \leq x} |\mu(n)|$ qui donne le nombre des entiers " sans facteur carré " $\leq x$.

Le théorème des nombres premiers énonce que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ lorsque $x \to \infty$ et l'on démontre indépendamment que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \iff M(x) = o(x)$. Enfin, il est très facile de montrer que $Q(x) \sim \frac{6}{\pi^2}\, x$ lorsque $x \to \infty$ et même des estimations telles que

$$\left|Q(x) - \frac{6}{\pi^2}\, x\right| \leq \sqrt{x} \quad \text{pour tout} \quad x \geq 1$$

d'où l'on déduit par exemple

$$Q(x) \leq 0{,}75\, x \quad \text{pour} \quad x \geq 8.$$

Le problème qui va être étudié ici est le suivant : quoique que l'on sache que $M(x) = o(x)$ (théorème des nombres premiers) il est très difficile d'obtenir des majorations EFFECTIVES du type

$$|M(x)| \leq \varepsilon\, x \quad \text{pour} \quad n \geq x(\varepsilon)$$

et c'est le but de la méthode qui va être exposée maintenant. Précisons enfin, pour situer le problème à sa juste valeur, que l'on connaît (Schoenfeld [4]) des majorations effectives du type

$$|M(x)| \leq \frac{c_\alpha\, x}{\log^\alpha x} \quad \text{pour} \quad n \geq n(\alpha)$$

MAIS que la constante c_α dépend (en puissance 2/3 environ) du ε des majorations effectives du type $\varepsilon\, x$.

3) LE PRINCIPE DE LA METHODE -

Un exemple très simple fera mieux comprendre le principe suivi et les améliorations que l'on peut ensuite y apporter.

On considère la fonction

$$f(x) = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right]$$

qui est périodique de période 6 et possède les deux propriétés essentielles suivantes :

(i) $f(x) = 1$ pour $1 \leq x < 5$

(ii) $|1 - f(x)| \leq 1$ pour tout x (≥ 1)

La somme

$$S = \sum_{n \leq x} \mu(n) \; \{1 - f(\frac{x}{n})\}$$

peut alors, soit être évaluée directement :

$$S = \sum_{n \leq x} \{\mu(n) - \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] + \mu(n) \left[\frac{x/2}{n}\right] + \mu(n) \left[\frac{x/3}{n}\right] + \mu(n) \left[\frac{x/6}{n}\right] \}$$

$$= M(x) - 1 + 1 + 1 + 1 = M(x) + 2 \qquad \text{si } x \geq 6$$

soit être majorée au moyen des propriétés (i) et (ii) :

$$|S| = \Big|\sum_{n \leq \frac{x}{5}} \mu(n) \; \{1 - f(\frac{x}{n})\}\Big| \leq \sum_{n \leq \frac{x}{5}} |\mu(n)|$$

$$= Q(\frac{x}{5}) \leq 0,15 \, x \qquad \text{si } x \geq 40.$$

On en déduit immédiatement

$$|M(x)| \leq 0,15 \, x + 2$$

$$\leq 0,16 \, x \qquad \text{pour } x \geq 200$$

majoration dont il est immédiat de constater qu'elle est valable en fait pour $x \geq 14$.

Tout le problème est donc de trouver des fonctions $f(x)$ du type décrit dans cet exemple, vérifiant les deux propriétés

(i) $f(x) = 1$ pour $1 \leq x < A$

(ii) $|1 - f(x)| \leq B$ (1) pour tout x

De telles fonctions sont, en un certain sens, des " approximations " de la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1$ (2) et la double évaluation exposée dans l'exemple permet d'obtenir une majoration de $|M(x)|$ en $\varepsilon \, x$, avec $\varepsilon = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{B}{A}$ plus un petit terme. L'ennui est que rendre A grand en conservant B petit se révèle, à l'expérience, très antinomique ... Le lecteur doit deviner que l'ordinateur se prépare à entrer sur scène.

---

(1) $|1 - f(x)|$ bornée équivaut à $f(x)$ périodique, qui équivaut, si $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \left[\frac{x}{n}\right]$, à $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n} = 0$.

(2) en particulier $f(x) = 1$ pour $1 \leq x < A$ équivaut à $c_n = \mu(n)$ pour $1 \leq n < A$.

4) SUBTILITES ET ORDINATEUR -

Encore un exemple avant de justifier le titre de ce paragraphe. On considère la fonction

$$f(x) = [x] - [\frac{x}{2}] - [\frac{x}{3}] - [\frac{x}{5}] + [\frac{x}{6}] - [\frac{x}{7}] + [\frac{x}{105}]$$

qui est périodique de période 210 et possède les deux propriétés

$$\text{(i)} \quad f(x) = 1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 10$$

$$\text{(ii)} \quad |1 - f(x)| \leqslant 2 \qquad \text{pour tout} \quad x$$

Mais ceci est un peu brutal et l'on peut détailler :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 10 \\ |1 - f(x)| \leqslant 1 & \text{pour} \quad 10 \leqslant x < 70 \\ |1 - f(x)| \leqslant 2 & \text{pour} \quad 70 \leqslant x \end{cases}$$

de sorte que la somme

$$S = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \{1 - f(\frac{x}{n})\} = M(x) + 1 \qquad (\text{si} \quad x \geqslant 105)$$

peut être majorée ainsi :

$$|S| = \left| \sum_{\frac{x}{70} < n \leqslant \frac{x}{10}} \mu(n) \{1 - f(\frac{x}{n})\} + \sum_{n \leqslant \frac{x}{70}} \mu(n) \{1 - f(\frac{x}{n})\} \right|$$

$$\leqslant \sum_{\frac{x}{70} < n \leqslant \frac{x}{10}} |\mu(n)| + 2 \sum_{n \leqslant \frac{x}{70}} |\mu(n)| = Q(\frac{x}{10}) + Q(\frac{x}{70})$$

$$\leqslant \frac{3}{35} x \qquad \text{si} \quad x \geqslant 560$$

On en déduit immédiatement

$$|M(x)| \leqslant \frac{3}{35} x + 1$$

$$\leqslant 0{,}0875\, x \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 560$$

majoration dont il est facile de constater qu'elle est valable en fait pour $x \geqslant 34$.

C'est suivant ce principe que Mac Leod a obtenu en 1967 (2) la majoration

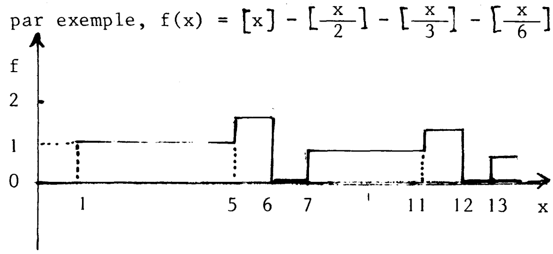
$$|M(x)| \leqslant \frac{x}{80} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 1119$$

la meilleure majoration de ce type actuellement connue. (La fonction qu'il utilise comporte 222 termes positifs et 226 termes négatifs).

Mais ce principe est trop sommaire et - à condition de disposer d'un ordinateur dès que la fonction utilisée devient compliquée - on peut faire mieux. En reprenant la fonction du paragraphe 3, par exemple, $f(x) = [x] - [\frac{x}{2}] - [\frac{x}{3}] - [\frac{x}{6}]$ et en remarquant qu'elle vaut 1 pour x appartenant à la réunion

$[1,5[\cup [7,11[\cup [13,17[\cup \ldots$

(et 0 ou 2 sur le complémentaire), on peut écrire :



$$|M(x) + 2| = |\sum_{n\leq x} \mu(n) \{1 - f(\frac{x}{n})\}|$$
$$\leq \sum_{\frac{x}{7}<n\leq\frac{x}{5}} |\mu(n)| + \sum_{\frac{x}{13}<n\leq\frac{x}{11}} |\mu(n)| + \ldots$$
$$+ \sum_{\frac{x}{6h+1}<n\leq\frac{x}{6h-1}} |\mu(n)| + \sum_{n\leq\frac{x}{6h+5}} |\mu(n)|$$

d'où, en utilisant l'estimation
$$|Q(x) - \frac{6}{\pi^2} x| \leq \sqrt{x} \quad \text{pour tout} \quad x,$$
on déduit
$$|M(x)| \leq Q(\frac{x}{5}) - Q(\frac{x}{7}) + Q(\frac{x}{11}) - Q(\frac{x}{13}) + \ldots$$
$$+ Q(\frac{x}{6\,h-1}) - Q(\frac{x}{6\,h+1}) + Q(\frac{x}{6\,h+5}) + 2$$
si $x \geq 6\,h + 5$

Soit
$$|M(x)| \leq \alpha\, x + \beta \sqrt{x} + \gamma$$
avec ici
$$\begin{cases} \alpha = (\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{6\,h-1} - \frac{1}{6\,h+1} + \frac{1}{6\,h+5}) \\ \beta = (\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{6\,h+1}} + \frac{1}{\sqrt{6\,h+1}} + \frac{1}{\sqrt{6\,h+5}}) \\ \gamma = 2 \end{cases}$$
majoration qui se traduira par :
$$|M(x)| \leq (\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{x_o}} + \frac{\gamma}{x_o})\, x \quad \text{pour} \quad x \geq x_o \geq 6\,h + 5$$

Une fonction f étant donnée, une majoration efficace sera donnée, primo en " poussant le calcul " le plus loin possible, i. e. en rendant α très proche de sa valeur limite $\frac{6}{\pi^2} \int_1^\infty |1 - f(t)| \frac{dt}{t^2}$ (1) - d'où l'utilité évidente d'un ordinateur -, secondo en prenant x_o très grand, i. e. en ayant vérifié la majoration depuis sa limite " naturelle " (de l'ordre de 10^3 à 10^4 pour une majoration de l'ordre de $\frac{x}{80}$ à $\frac{x}{200}$) jusqu'à un x_o le plus grand possible (Neubauer [3] a montré - avec un ordinateur bien sûr - que $|M(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x}$ pour $201 \leq x \leq 10^8$, et on peut en déduire par exemple $|M(x)| \leq \frac{x}{282}$ pour $10^8 \leq x \leq 2{,}5 \,.\, 10^9$).

Avant de donner des résultats numériques, il importe de dire quelle est en fait l'utilité essentielle de l'ordinateur (avec sa console !) dans ce problème : se faire une idée claire, par de très nombreux essais, de ce que sont les fonctions efficaces (on découvre par exemple qu'il est plus important de prendre des fonctions de valeur moyenne 1 que de finasser pour gagner sur la borne $|1 - f|$) puis par de très nombreux essais encore, découvrir les fonctions les plus efficaces.

(1) Cette valeur limite est 0.056598 ... dans l'exemple étudié.

Les essais sont encore en cours. En utilisant l'estimation de Cohen et l'auteur (1).

$$|Q(x) - \frac{6}{\pi^2} x| \leq 0,22 \sqrt{x} \quad \text{pour} \quad x \leq 242$$

une fonction de 137 termes positifs et 140 termes négatifs a donné une majoration en $\frac{x}{143,7}$

BIBLIOGRAPHIE

(1) H. COHEN et F. DRESS .- Estimations effectives de la fonction sommatoire Q(x).- (en cours de rédaction).

(2) R.A. MAC LEOD.- A new estimate for the sum $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$.- Acta Arithmetica XIII (1967)- p. 49-59.

(3) G. NEUBAUER.- Eine empirische Untersuchung zur Mertensschen Funktion.- Numerische Mathematik.- 5 (1963).- p. 1-13.

(4) L. SCHOENFELD.- An improved estimate for the summatory function of the Möbius function.- Acta Arithmetica.- XV (1969).- p. 221-233.

François DRESS
351, cours de la Libération
33405 BORDEAUX-TALENCE