MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JACQUES LAFONTAINE

Réunions d'ensembles de convergence absolue

Mémoires de la S. M. F., tome 19 (1969), p. 21-25
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__19__21_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 19, 1969, p. 21-25.

RÉUNIONS D'ENSEMBLES DE CONVERGENCE ABSOLUE

par

Jacques LAFONTAINE

I. On dit qu'un sous-ensemble E de la droite réelle $\mathbf{R}$ est un ensemble de convergence absolue (ou ensemble du type N) s'il existe une série trigonométrique absolument convergente en tout point de E et dont la série des modules diverge. On trouvera dans [1] et [3] des exposés des principales propriétés de ces ensembles. On y démontre notamment que tout ensemble du type N est de mesure nulle, et que tout dénombrable est du type N ; que si E est un ensemble du type N et D un dénombrable, la réunion $E \cup D$ est du type N. Nous allons voir que contrairement à une assertion de [1], cette dernière propriété est la meilleure possible.

II. Théorème. *Soit E une partie fermée de $\mathbf{R}$. Si l'union de E avec tout ensemble du type N est elle-même du type N, alors E est dénombrable.*

Démonstration. Supposant E non dénombrable, nous allons construire un ensemble de convergence absolue F tel que, pour presque tout réel λ de $[0 , 1]$, la somme $\lambda E + F$ soit un ensemble de mesure positive. Il en résultera (cf [3]) que $E \cup \frac{1}{\lambda}F$ n'est du type N pour presque aucun λ de $[0 , 1]$.

Soient μ et ν deux mesures portées par E et F respectivement. L'ensemble

$\lambda E + F$ porte la mesure $\mu_\lambda * \nu$ (μ_λ étant définie par $\int f(x)d\mu_\lambda = \int f(\lambda x)d\mu$), dont la transformée de Fourier est $\hat{\mu}(\lambda u)\,\hat{\nu}(u)$. Si l'on a

$$(1) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}(\lambda n)\,\hat{\nu}(n)|^2 < +\infty$$

l'ensemble $\lambda E + F$ modulo 2π sera de mesure positive d'après le théorème de Plancherel, et par conséquent $\lambda E + F$ aussi. On aura (1) pour presque tout λ de $[0\,,\,1]$ si

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}(\lambda n)\,\hat{\nu}(n)|^2 \, d\lambda < +\infty$$

ou encore

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\nu}(n)|^2 \int_0^1 |\hat{\mu}(\lambda n)|^2 \, d\lambda < +\infty .$$

Si le fermé E n'est pas dénombrable, on peut prendre μ <u>diffuse</u>, et dans ces conditions, on a

$$\lim_{|n|\to+\infty} \int_0^1 |\hat{\mu}(\lambda n)|^2 \, d\lambda = 0 \qquad \text{(cf [6]).}$$

On est donc ramené au problème suivant : une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tendant vers zéro quand $|n|$ tend vers l'infini étant donnée, construire un ensemble de convergence absolue F et une mesure ν portée par F tels que

$$(2) \qquad \sum |\hat{\nu}(n)|^2 \, a_n < +\infty .$$

La construction de F résulte des travaux de Salem. Tout d'abord, si $P_{\{\xi_k\}}$ est le parfait symétrique construit sur $[0\,,\,2\pi]$ en prenant les ξ_k $(0 \leqslant \xi_k \leqslant \frac{1}{2})$ pour rapports de dissection successifs, et si $M(p) = 2\pi\,.2^p.\,\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_p$ est la somme des longueurs des segments de la p-ième étape de la construction, on démontre dans [5] que les coefficients de Fourier-Stieltjes $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de la mesure de Lebesgue de P vérifient

$$\sum M([3 \log |n|])|b_n|^2 < +\infty$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

On prend $F = P_{\{\xi_p\}}$, avec $\xi_p = \frac{1}{2}$ sauf pour une suite $\{i_j\}$ pour laquelle $\xi_{i_j} = \frac{1}{2j}$. Alors, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, F est du type N; et M(p) peut tendre vers zéro arbitrairement lentement à condition de choisir la suite $\{i_j\}$ suffisamment lacunaire. c.q.f.d.(1)

III. Les mêmes considérations s'appliquent aux ensembles de Dirichlet. On dit qu'un compact E de R est un ensemble de Dirichlet si

$$\liminf_{|\lambda|\to\infty} \|e^{i\lambda x} - 1\|_{C(E)} = 0$$

ou, ce qui revient au même, s'il existe une suite d'entiers positifs $\{n_k\}$, tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\sin n_k x\|_{C(E)} = 0.$$

Tout ensemble de Dirichlet est un ensemble du type N ; par contre, l'union de 0 et d'une progression géométrique tendant vers zéro est un ensemble du type N qui n'est

(1) L'existence d'ensembles parfaits satisfaisant à (2) est également établie dans [3], chapitre III, par des méthodes de théorie du potentiel. L'existence d'ensembles du type N vérifiant (2) résulte alors de ce que, pour toute fonction déterminante de Hausdorff h telle que $\lim_{t\to\infty} h(t)/t = 0$, il existe un ensemble du type N de h-mesure infinie.

pas de Dirichlet (cf [2]). On en déduit qu'il existe également des parfaits du type N qui ne sont pas des ensembles de Dirichlet, par exemple

$$G = \{0\} \cup \Big(\bigcup_{p \geqslant 0} 1/2^p + \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k / 2^{k^2} \Big) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1 .$$

L'ensemble F construit précédemment est un ensemble de Dirichlet, d'après la démonstration de Salem ([4]) :

Prenons $p = i_j$. Les origines α_{pk} $(k = 1, 2, \dots 2^p)$ des 2^p intervalles de la p-ième étape sont données par

$$\alpha_{pk} = 2\pi\,(\varepsilon_1 (1 - \xi_1) + \varepsilon_2\, \xi_2 (1 - \xi_1) \dots + \varepsilon_p\, \xi_1\, \xi_2 \dots \xi_{p-1} (1 - \xi_p))$$

et ces intervalles ont tous pour longueur $\eta_p = 2\pi\, 2^{-p} (j!)^{-1}$. Si $n_p = 2^p (j-1)!$, on a

$$|\sin n_p \alpha_{pk}| \leqslant 2\pi / j \qquad \text{et} \qquad n_p \eta_p = 1/j .$$

Par conséquent

$$|\sin n_p x| \leqslant (2\pi + 1)/j$$

pour tout x dans F.

Le théorème du §2 est donc encore vrai pour les ensembles de Dirichlet.

Bibliographie

[1] ARBAULT (J.). L'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique. Bull. Soc. Math. France, t. 80 (1952), 253-317.

[2] KAHANE (J.-P.). Ensembles de Dirichlet et ensembles de Kronecker. A paraitre.

[3] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann, Paris, 1963.

[4] SALEM (R.). The absolute convergence of trigonometrical series in Oeuvres Mathématiques, Hermann, Paris, 1967, 201-218.

[5] SALEM (R.). On some properties of symmetrical perfect sets. Ibidem, 219-227.

[6] ZYGMUND (A.). Trigonometric series. Cambridge University Press, 1959. Tome II, p. 261.

Jacques LAFONTAINE
Mathématiques (425)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)