LUIS PUIG

Structure locale dans les groupes finis

Mémoires de la S. M. F., tome 47 (1976)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__47__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 47, 1976, 132 p.

STRUCTURE LOCALE DANS LES GROUPES FINIS

par Luis PUIG (*)

C.N.R.S., Univ. Paris 7

TABLE DES MATIERES

(*) Thèse Sc. math., Paris 1975, Univ. P. et M. Curie

INDEX DES NOTATIONS

INTRODUCTION

Soient G un groupe fini et p un nombre premier. L'usage semble maintenant établi de baptiser "étude locale de G " l'ensemble des questions liées à l'étude des p-sous-groupes de G et de leurs normalisateurs (voir par exemple (8), §1 et (13), §2.1). Ce mémoire a un double but: donner - et utiliser - une définition précise de ce que l'on peut entendre par "étude locale" et contribuer à cette étude.

Comme dans d'autres domaines des mathématiques, il semble raisonnable d'espérer obtenir une classification des "structures locales" des groupes finis plus facilement qu'une classification globale, encore hypothétique. Dans cette voie, le travail présenté ici nous permet

(a) d'organiser certaines notions connues comme les "p-constrained groups" (cf. (12), ch.8), les "signalizer functors" (cf. (10), (11) et (13), §3.1), les p-sous-groupes "controlling strong fusion" (cf. (9)) et les sous-groupes "stark eingebettet" (cf. (2)),

(b) de proposer une méthode pour "l'étude locale", du moins dans la situation considérée au chapitre VIII,

(c) d'introduire et d'utiliser certaines notions nouvelles comme les doubles flèches à but maximal et les p-sous-groupes essentiels.

Les exemples qui suivent peuvent être considérés comme se rattachant à "l'étude locale"; ils nous permettront de justifier la définition de "p-localité" donnée ultérieurement.

1. Un théorème de Frobenius affirme: si pour tout p-sous-groupe non trivial A de G , $N_G(A)/C_G(A)$ est un p-groupe, le groupe G possède un p-complément normal (cf. (12), ch.7, th.4.5). Ici l'hypothèse est "locale" dans la mesure où elle ne fait intervenir que $N_G(A)$, mais on remarquera qu'il suffit de connaître $N_G(A)/C_G(A)$.

2. Soit T un sous-groupe distingué d'un S_p-groupe S de G ; suivant la terminologie de (9), on dit que T contrôle la fusion forte ("controls strong fusion") dans S , s'il satisfait à la condition suivante

(F) Si $A \subset S$, $x \in G$ et $A^x \subset S$, il existe $n \in N_G(T)$ et $z \in C_G(A)$ tels que l'on ait $x = zn$.

Dans ce cas, le sous-groupe $N = N_G(T)$ contient une certaine "information locale" sur G ; en effet, si A est un p-sous-groupe de N , les groupes $N_N(A)/C_N(A)$ et $N_G(A)/C_G(A)$ sont isomorphes (à rapprocher de l'exemple 1); plus généralement, on remarquera que si A et B sont des p-sous-groupes de N , tout homomorphisme de A dans B qui est induit par un automorphisme intérieur de G , l'est par un automorphisme intérieur de N .

Le langage des catégories semble ici commode pour formuler cette remarque; en effet, soit $\mathfrak{C}_G$ (resp. $\mathfrak{C}_N$) la catégorie dont les objets sont les p-sous-groupes de G (resp. de N) et dont les morphismes sont les homomorphismes induits par les automorphismes intérieurs de G (resp. N), la composition des morphismes étant la composition des applications; si la condition (F) est satisfaite, l'inclusion de N dans G induit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{C}_N$ et $\mathfrak{C}_G$.

3. Pour calculer les composantes p-primaires des groupes de co-homologie de G (cf. (4), ch.XII, th.10.1), il suffit de connaître le système formé par les groupes de co-homologie des p-sous-groupes de G et par les homomorphismes induits par les inclusions et par la conjugaison par des éléments de G . On remarquera que la connaissance des p-sous-groupes non triviaux de G et de leurs normalisateurs n'est plus suffisante: étant donnés deux p-sous-groupes A , B de G , il faut connaître l'ensemble des $x \in G$ tels que $xAx^{-1} \subset B$.

Ici encore, le langage des catégories s'avère commode; considérons la catégorie $\mathfrak{C}'_G$ dont les objets sont les p-sous-groupes de G et dont les morphismes entre deux objets A , B sont les $x \in G$ tels que $xAx^{-1} \subset B$, la composition des morphismes étant le produit des éléments; la co-homologie définit alors un foncteur contravariant h de $\mathfrak{C}'_G$ dans la catégorie des $\underline{Z}$-modules gradués (cf. ch.III, §2) et d'après le théorème 10.1 de (4), ch.XII, la composante p-primaire de la co-homologie de G est isomorphe à la limite projective de h .

Ces considérations nous amènent à introduire, pour "l'étude locale", les notions suivantes

p-localité (cf. ch.I)

On appelle "p-localité de G " tout couple $(\mathfrak{U},W)$ formé d'un ensemble non vide $\mathfrak{U}$ de p-sous-groupes de G et d'une application W de $\mathfrak{U}$ dans l'ensemble des sous-groupes de G , satisfaisant aux conditions (L1), (L2) et (L3) du ch.I.

Ainsi, dans "l'étude locale" correspondant aux exemples 1 et 2, on considère la p-localité définie en prenant $\mathfrak{U}$ égal à l'ensemble des p-sous-groupes de G et en posant $W(A) = C_G(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{U}$ (on l'appelle la C-localité de G). Pour l'exemple 3, l'ensemble $\mathfrak{U}$ est le même et l'application W est telle que $W(A) = 1$ pour tout $A \in \mathfrak{U}$ (on l'appelle la 1-localité de G).

catégorie associée à une p-localité (cf. ch.I, §1)

Etant donnée une p-localité $(\mathfrak{U},W)$, on lui associe la catégorie $\mathfrak{U}_W$ définie par: les objets de $\mathfrak{U}_W$ sont les éléments de $\mathfrak{U}$; si $A , B \in \mathfrak{U}$, les morphismes de A dans B sont déterminés par les triplets (B,x,A) tels que $A \subset B^x$, deux triplets (B,x,A) , (B,y,A) déterminant le même morphisme si $x^{-1}y$ appartient à $W(A)$; la composition des morphismes est définie par le produit des éléments.

Ainsi, les catégories $\mathfrak{C}_G$ et $\mathfrak{C}'_G$ introduites dans les exemples 2 et 3 sont les catégories associées aux p-localités correspondantes.

<u>équivalence des</u> p-<u>localités</u> (cf. ch.I, §2)

On dit que deux p-localités $(\mathfrak{U},W)$ et $(\mathfrak{U}',W')$ de deux groupes finis G et G' sont équivalentes s'il existe un foncteur de $\mathfrak{U}_W$ dans $\mathfrak{U}'_{W'}$ qui est une équivalence de catégories.

Ainsi, dans l'exemple 2, si la condition (F) est satisfaite, les C-localités de G et de N sont équivalentes.

<u>L'étude locale de</u> G <u>relativement à</u> p <u>est, pour nous, l'étude des classes d'équivalence des</u> p-<u>localités de</u> G .

(a) <u>Organiser certaines notions connues</u>

Soit $(\mathfrak{U},W)$ une p-localité de G . Il est raisonnable d'étudier les sous-groupes H de G qui possèdent une p-localité $(\mathfrak{U}',W')$ pour laquelle l'inclusion de H dans G induit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{U}_W$ et $\mathfrak{U}'_{W'}$; de tels sous-groupes sont appelés <u>sous-groupes de</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>contrôle de</u> G (cf. ch.I, §3); cette notion recouvre

- la notion de contrôle de la fusion forte de (9),
- la notion de sous-groupe "stark eingebettet" de (2),

(voir les exemples 1 et 2 du ch.I, §3).

Tout morphisme de $\mathfrak{U}_W$ est un monomorphisme (cf. ch.I, §4) et on peut se démander pour quelles p-localités, tout morphisme est aussi un épimorphisme; de telles p-localités sont appelées p-<u>localités à épimorphismes</u> et on montre au chapitre VI qu'elles font apparaître la notion de "signalizer functor" de (10). En outre, on introduit au même chapitre une certaine p-localité de G (<u>la</u> O^*-<u>localité</u>) qui est à épimorphismes si et seulement si, suivant la terminologie de (12), ch.8, le normalisateur de tout p-sous-groupe non trivial de G est "p-constrained".

(b) <u>Une méthode pour l'étude locale</u>

On commence par étudier la C-localité définie ci-dessus (cf. ch.V) dont l'avatage réside dans le fait que les morphismes de sa catégorie associée sont des "vrais" homomorphismes de groupes; ensuite, on établit des critères permettant le "transport" de l'information vers les p-localités "plus fines" (cf. ch.VII), le but étant de connaître la "plus fine" de toutes, la 1-localité. De ce point de vue, les p-localités à épimorphismes (cf. ch.VI) sont déjà "assez proches" de la 1-localité.

Illustrons ces idées dans la situation suivante: p <u>et</u> q <u>sont deux nombres premiers différents de</u> 2 <u>et de</u> 3 <u>qui divisent</u> $|G|$ <u>et le normalisateur de tout</u> p-<u>sous-groupe</u> (resp. q-<u>sous-groupe</u>) <u>non trivial de</u> G <u>est</u> p-<u>résoluble</u>

(resp. q-résoluble). L'étude des C-localités de G relatives à p et à q montre l'existence d'un p-sous-groupe A et d'un q-sous-groupe B non triviaux tels que $N_G(A)$ et $N_G(B)$ soient respectivement des sous-groupes de C-contrôle de G relativement à p et à q (cf. ch. V, th.1); les "critères de transport" établis au chapitre VII montrent alors que $N_G(A)$ et $N_G(B)$ sont aussi des sous-groupes de O^*-contrôle de G relativement à p et à q ; en outre, d'après nos hypothèses, les O^*-localités de G relatives à p et à q sont à épimorphismes (cf. ch.VI, prop.5); sous certaines hypothèses (cf. ch.VIII, th.), il existe alors un $\{p,q\}$-sous-groupe non trivial F de G tel que $N_G(F)$ soit un sous-groupe de O^*-contrôle de G à la fois pour p et pour q .

A l'aide de cette démarche, on démontre au chapitre IX un critère d'existence d'un π-complément normal.

(c) Doubles flèches à but maximal et p-sous-groupes essentiels

Soient $(\mathfrak{U},W)$ une p-localité de G et f un foncteur contravariant de $\mathfrak{U}_W$ dans la catégorie des $\underline{Z}$-modules: on s'intérèsse à la limite projective L de f (à rapprocher de l'exemple 3 ci-dessus). On voit aisément que si P est un S_p-groupe de G , le module L est isomorphe à l'intersection des sous-modules $\mathrm{Ker}(f(\alpha)-f(\beta))$ de $f(P)$, où (α,β) parcourt l'ensemble des couples de $\mathfrak{U}_W$-morphismes ayant même source et P comme but. Cependant, pour calculer L , il est superflu de calculer tous ces noyaux; en effet, soient A un élément de $\mathfrak{U}$, α , β , γ des $\mathfrak{U}_W$-morphismes de A dans P et δ un $\mathfrak{U}_W$-morphisme ayant A comme but; on a alors les inclusions suivantes

$$\mathrm{Ker}(f(\alpha)-f(\beta))\cap \mathrm{Ker}(f(\beta)-f(\gamma))\subset \mathrm{Ker}(f(\alpha)-f(\gamma)) ,$$
$$\mathrm{Ker}(f(\alpha)-f(\beta))\subset \mathrm{Ker}(f(\alpha\delta)-f(\beta\delta))$$

Ceci nous amène à considérer (cf. ch.III) l'ensemble $\mathcal{D}$ des couples (α,β) de $\mathfrak{U}_W$-morphismes tels que α et β aient même source et un même S_p-groupe de G comme but, et à le munir des pseudopérations suivantes

$$(\alpha,\beta)+(\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma) ,$$
$$(\alpha,\beta).\delta=(\alpha\delta,\beta\delta) \quad \text{et} \quad \epsilon.(\alpha,\beta)=(\epsilon\alpha,\epsilon\beta) ,$$

où α , β , γ sont des $\mathfrak{U}_W$-morphismes ayant même source A et même but B , et δ (resp. ϵ) est un $\mathfrak{U}_W$-morphisme ayant A comme but (resp. B comme source); on dit q'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$ si tout élément de $\mathcal{D}$ est égal à une "combinaison linéaire" d'éléments de $\mathcal{C}\cup\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ dont la source est un S_p-groupe de G . D'après les inclusions ci-dessus, pour calculer L , il suffit alors de connaître un système directeur de $\mathcal{D}$ et les points fixes de $N_G(P)$ dans $f(P)$.

Le calcul des systèmes directeurs de $\mathcal{D}$ (cf. ch.III) dépend uniquement de la connaissance des normalisateurs de certains p-sous-groupes de G ; ces p-sous-groupes sont appelés p-sous-groupes $(\mathfrak{U},W)$-essentiels ou simplement, essentiels lorsqu'il s'agit de la 1-localité de G ; ils semblent jouer un rôle privilégié dans la structure locale de G ; par exemple, dans un groupe de Chevalley sur un corps fini de caractéristique p (cf. app.I), il y a une bijection canonique entre l'ensemble des classes de conjugaison des p-sous-groupes essentiels et l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin correspondant. Pour la C-localité et pour $p \geq 5$, on exhibe (cf. ch.V) un système directeur particulièrement simple, en étudiant les normalisateurs des p-sous-groupes C-essentiels de G .

Ce mémoire est divisé en neuf chapitres et trois appendices; le plan suit de près la méthode proposée ci-dessus

- "théorie générale" sur une p-localité quelconque (ch.III et ch.IV),
- étude de la C-localité (ch.V),
- étude des p-localités à épimorphismes et de la O^*-localité (ch.VI),
- "critères de transport" des propriétés (ch.VII).

Dans le chapitre I, on introduit les notions de p-localité, de catégorie associée à une p-localité (§1) et d'équivalence des p-localités (§2). Au §2, on étudie sous quelles conditions un homomorphisme entre deux groupes finis induit une équivalence entre deux p-localités; ceci est surtout utilisé lorsqu'il s'agit d'un groupe, d'un sous-groupe et de l'homomorphisme d'inclusion (§3), c'est à dire, dans le cas des sous-groupes de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle. Dans le §4, on montre que les catégories associées aux p-localités de G sont la solution d'un certain "problème universel"; ceci n'est pas utilisé dans la suite.

Les p-sous-groupes essentiels et leurs normalisateurs sont un outil dont on se sert constamment dans tout le mémoire; on les introduit au chapitre II. Si A est un p-sous-groupe de G et P est un S_p-groupe de G contenant A , on définit d'abord le sous-groupe $M_G(A,P)$ de $N_G(A)$; on dit que A est un p-sous-groupe essentiel de G si $M_G(A,P) \neq N_G(A)$. D'après la proposition 2, le groupe $M_G(A,P)$ est égal au groupe $M(T)$ de (8), app.A3, section 3, pour $A = T$ et $P = S$. Au §1, on démontre que si A est essentiel, $N_G(A)/A$ possède un plus petit sous-groupe distingué d'ordre divisible par p ; on note $X_G(A)$ son image réciproque dans $N_G(A)$ et on démontre que $X_G(A)/O_{pp'}(X_G(A))$ est simple. Au §2, on étudie le rapport entre les p-sous-groupes essentiels de G et les p-sous-groupes essentiels de ses sous-groupes et de ses quotients; en particulier, on calcule les p-sous-groupes essentiels d'un produit direct.

Dans les appendices I et II, on calcule les p-sous-groupes essentiels des groupes de Chevalley sur un corps fini de caractéristique p , des groupes "tordus" correspondants et des groupes symétriques. L'appendice II (les p-sous-groupes essentiels des groupes symétriques) n'utilise que le contenu du chapitre II et le corollaire 2 de l'app.I qui peut se démontrer directement sans difficulté. Par contre, l'appendice I utilise des résultats du chapitre III.

Dans le chapitre III, on détermine les systèmes directeurs de l'ensemble $\mathcal{D}$ des doubles flèches à but maximal d'une p-localité $(\mathfrak{U},W)$ de G. Il s'avère utile de distinguer dans $\mathcal{D}$ deux sortes d'éléments: les réductibles (i.e. en quelque sorte, les éléments "non générateurs": voir lemme 5) et les irréductibles; en particulier, lorsque $(\mathfrak{U},W)$ est la 1-localité de G, on retrouve le sous-groupe $M_G(A,P)$ comme étant l'ensemble des $x \in N_G(A)$ tels que la double flèche $(P,1,x,A)_1$ soit réductible (cf. th.1), et les p-sous-groupes essentiels comme étant les sources des éléments irréductibles (cf. cor.2 du th.1); ainsi, dans l'appendice I, on calcule les p-sous-groupes essentiels des groupes de Chevalley et des groupes "tordus", en exhibant un système directeur de $\mathcal{D}$. Au §1, on montre que le théorème principal de (1) est une conséquence de nos résultats. Au §2, on les applique au calcul des composantes p-primaires des groupes d'homologie et de cohomologie de G, mais la démarche serait la même pour le calcul de la limite projective de n'importe quel foncteur contravariant de $\mathfrak{U}_W$ dans la catégorie des $\underline{Z}$-modules.

A l'aide des p-sous-groupes $(\mathfrak{U},W)$-essentiels (définis au chapitre III), on donne au chapitre IV des critères pour qu'un sous-groupe H de G soit un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle; le corollaire 1 de la prop.1 énonce le critère le plus utilisé par la suite; au §2, on l'utilise pour donner une nouvelle démonstration d'un résultat de R. Baer. Au §1, on décrit sous quelles conditions le normalisateur d'un élément A de $\mathfrak{U}$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle; en particulier, on met en évidence le caractère $(\mathfrak{U},W)$-local de tels éléments (i.e. leurs images ont la même propriété dans n'importe quelle p-localité équivalente).

Les deux théorèmes sur la C-localité de G que l'on établit au chapitre V, utilisent la construction, pour tout p-groupe fini P, d'un certain sous-groupe $L(P)$, qui est à rapprocher de la construction de $J(P)$ et de $K_\infty(P)$ décrite dans (8), §13 et §14. Soit P un S_p-groupe de G ; le théorème 1 affirme que si G est p-stable, $N_G(Z(L(P)))$ est un sous-groupe de C-contrôle de G ; ce théorème est analogue au théorème 12.8 de (8) sur $K_\infty(P)$ et à l'assertion (a) de (9), th.A, sur $Z(J(P))$, mais on remarquera qu'ici nous n'avons pas besoin de supposer que toutes les sections de G sont p-stables. Pour $p \geq 5$, dans le théorème 2 et ses corollaires, on démontre qu'un p-sous-groupe C-essentiel de G contenu dans P ou bien est C-essentiel dans $N_G(Z(L(P)))$, ou bien admet l'un des groupes $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$ comme groupe simple associé (cf. ch.II, prop.7), et on exhibe un système directeur particulièrement simple de l'ensemble des doubles flèches à but maximal de la C-localité de G ; la démonstration du théorème 2 utilise la classification des "quadratic pairs" de J. G. Thompson et la proposition 2 de l'appendice I.

Dans le chapitre VI, on étudie les p-localités à épimorphismes. On démontre qu'une p-localité $(\mathfrak{U},W)$ de G est à épimorphismes si et seulement si l'application W satisfait à une certaine condition analogue à la "balance condition" de (13), §3.1; cette condition impose des contraintes assez fortes aux groupes $W(A)$ par rapport au nombre premier p (cf. prop.2 et prop.3); pratiquement, on peut supposer qu'ils sont des p'-groupes. Au §1, on définit la O-localité de G et on étudie sous quelles conditions la O^*-localité de G (i.e. la restriction de la O-localité à l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G) est à épimorphismes: on retrouve les groupes où, suivant la terminologie de (12), ch.8, le normalisateur de tout p-sous-groupe non trivial est "p-constrained".

Dans les p-localités à épimorphismes $(\mathfrak{U},W)$ où $\mathfrak{U}$ est l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G et où $W(B)$ est un p'-groupe, pour tout $B \in \mathfrak{U}$, la restriction de l'application W à un sous-groupe abélien p-élémentaire A définit, suivant la terminologie de (10), un "signalizer functor"; en effet, si pour tout élément non trivial a de A, on pose $\theta(C_G(a)) = W(< a >)$, l'application θ satisfait à la condition (*) de (10) (cf. cor.2 de la prop.1). Les résultats sur les "signalizer functors" s'appliquent donc à l'étude de certaines p-localités à épimorphismes. Au §2, on utilise des résultats de (10) pour exhiber, sous certaines hypothèses, un q-sous-groupe Q de G tel que $N_G(Q)$ soit un sous-groupe de $(\mathfrak{B},W)$-contrôle de G, où q est un nombre premier $\neq p$ et où $\mathfrak{B}$ est l'ensemble des p-sous-groupes de G qui rencontrent non trivialement un sous-groupe abélien p-élémentaire de G d'ordre $\geq p^3$; la démonstration s'inspire de l'étude, pour $p = 2$, des "balanced groups" de (13), §4.2.

Nous avons constaté que, quitte à modifier convenablement les démonstrations, le théorème principal, le théorème 3.1 et le lemme 2.7 de (10) sont encore vrais lorsque G est infini; de plus, dans chaque cas, le sous-groupe engendré par la réunion des $\theta(C_G(a))$ est fini. Bien que ce mémoire soit consacré à l'étude des groupes finis, nous croyons utile d'en donner, dans l'appendice III, des démonstrations valables pour un groupe quelconque. Dans le §2 du chapitre VI, nous n'avons besoin que des théorèmes 1 et 2 de cet appendice.

Dans le chapitre VII, on introduit une relation (<u>la relation de similitude</u>) entre les p-localités de G qui garantit un "bon transport" de certaines propriétés (cf. prop.2). On démontre que la C-localité et la O-localité de G sont semblables (cf. prop.4), tandis que deux p-localités à épimorphismes le sont "rarement" (cf. prop.3).

Dans le chapitre VIII, on utilise certains résultats des chapitres précédents pour exhiber, sous certaines hypothèses, un $\{p,q\}$-sous-groupe non trivial de G dont le normalisateur est un sous-groupe de 0-contrôle de G à la fois pour p et pour q. En particulier, notre théorème entraîne les théorèmes 2 et 3 de (14), mais on remarquera que nous n'avons pas besoin des conditions (IV) et (V) de la définition de "$\{p,q\}$-tame group" de (14), déf.10. Pour le démontrer, nous avons profité de certaines idées de (14) et du chapitre IV de (6); mais nous évitons de raisonner par l'absurde ce qui, à notre avis, rend plus claire notre démarche.

A l'aide du théorème du chapitre VIII, nous démontrons au chapitre IX un critère d'existence d'un π-complément normal.

§ 1. Notations et références

Soient G un groupe et X, Y des sous-ensembles de G. On note $< X >$ le sous-groupe de G engendré par X et $X.Y$ l'ensemble des xy où $x \in X$ et $y \in Y$; si Z est un troisième sous-ensmeble de G, on écrit $X.Y.Z$ au lieu de $(X.Y).Z$ et de $X.(Y.Z)$. Si $x \in G$, on pose

$$xY = \{x\}.Y \quad , \quad Yx = Y.\{x\} \quad \text{et} \quad Y^x = x^{-1}Yx$$

et si $y \in G$, on écrit $y^x = x^{-1}yx$ et $[y,x] = y^{-1}y^x$. On note $[X,Y]$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des $[x,y]$ où $x \in X$ et $y \in Y$, et on pose $[X,Y,Y] = [[X,Y],Y]$. On note $N_Y(X)$ (resp. $C_Y(X)$) l'ensemble des $y \in Y$ tels que $X^y = X$ (resp. tels que $x^y = x$ pour tout $x \in X$). Lorsque tous les groupes considérés sont des sous-groupes de G, on écrit $N(X)$ et $C(X)$ au lieu de $N_G(X)$ et $C_G(X)$. Si H est un groupe qui opère sur G, on se place d'emblée dans le produit semi-direct de G par H.

On pose $Z(G) = C_G(G)$ et $D(G) = [G,G]$; on définit inductivement les groupes $D^n(G)$ par les formules

$$D^0(G) = G \quad \text{et} \quad D^n(G) = D(D^{n-1}(G)) \quad , n \geq 1 .$$

Suivant les cas, on designe par 1 soit l'élément neutre de G, soit le sous-groupe qu'il engendre, soit l'application qui à tout sous-groupe de G fait correspondre le sous-groupe à un élément; on dit qu'un sous-groupe H (resp. un élément x) de G est <u>trivial</u> si $H = 1$ (resp. $x = 1$). Une <u>section</u> de G est un quotient H/K où H est un sous-groupe de G et K est un sous-groupe distingué de H ; si $H = G$, on dit que G/K est un <u>facteur</u> de G.

Soit E un ensemble; si A, B sont des sous-ensembles de E, on note $A - B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ; si E est fini, $|E|$ désigne le nombre d'éléments de E. Soit π un ensemble de nombres premiers; on note π' l'ensemble des nombres premiers qui n'appartiennent pas à π ; si π n'a qu'un seul élément p , on écrira partout p au lieu de π ; si n est un entier > o , n_π désigne le plus grand produit d'éléments de π qui divise n .

Supposons que G soit fini; si H est un sous-groupe de G , on pose $|G:H| = |G|/|H|$. On dit qu'un sous-groupe H de G est un S_π-groupe si $|H| = |G|_\pi$; un appelle π-complément normal de G un $S_{\pi'}$-groupe distingué de G . On note $O^\pi(G)$ le plus petit sous-groupe distingué de G tel que $G/O^\pi(G)$ soit un π-groupe, $O_\pi(G)$ le plus grand π-sous-groupe distingué de G , $O_{\pi\pi'}(G)$ l'image réciproque de $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$ dans G , $O_{\pi\pi'\pi}(G)$ ... .

Soient p un nombre premier et P un p-groupe fini. On note $\Phi(P)$ le plus petit sous-groupe distingué de P tel que $P/\Phi(P)$ soit abélien p-élémentaire: il est égal au groupe de Frattini de P (cf. (12), ch.5, th.1.3). Si P est abélien, on note $\Omega_1(P)$ l'ensemble des $x \in P$ tels que $x^p = 1$. Si P est abélien p-élémentaire d'ordre p^2 (resp. p^3) on dit qu'il est un groupe de type (p,p) (resp. (p,p,p)). On appelle rang de P le plus grand entier n tel que P possède un sous-groupe abélien p-élémentaire d'ordre p^n ; on appelle p-rang de G le rang d'un S_p-groupe de G ; on les note respectivement rang(P) et p-rang(G) .

On note $\underline{Z}$ l'anneau des entiers; si n est un entier > o , on note Z_n le groupe cyclique $\underline{Z}/n\underline{Z}$. Si E est un ensemble fini, on note $\Sigma(E)$ (resp. $\Lambda(E)$) le groupe des permutations (resp. des permutations paires) de E . On appelle groupes (finis) du type de Lie relativement à p , les groupes de Chevalley sur les corps (finis) de caractéristique p et les groupes "tordus" correspondants décrits dans (17), §3 et §11 (voir appendice I).

Soient $\mathfrak{K}$ un corps et V un espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$; on note $\Gamma L(V)$ le groupe des automorphismes semi-linéaires de V , $GL(V)$ l'ensemble des éléments linéaires de $\Gamma L(V)$ et $SL(V)$ l'ensemble des éléments de déterminant égal à 1 de $GL(V)$; si n est un entier > o , on note $\Gamma L(n,\mathfrak{K})$, $GL(n,\mathfrak{K})$ et $SL(n,\mathfrak{K})$ les groupes obtenus en prenant $V = \mathfrak{K}^n$; lorsque $\mathfrak{K}$ est fini, on remplace souvent $\mathfrak{K}$ par son cardinal. Si $\mathfrak{K}$ est de cardinal p^{2m} , il possède un unique automorphisme involutif (on note $\bar{x}$ l'image de x) et on considère $\mathfrak{K}^n$ ($n \geq 2$) muni de la forme unitaire

$$f(x_1,\dots,x_n) = \epsilon\Big(\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i \bar{x}_i x_{n-i+1}\Big) \qquad ,$$

où $\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$ si n est pair et $\epsilon = 1$ si n est impair; on note respectivement $\Gamma U(n,p^{2m})$, $U(n,p^{2m})$ et $SU(n,p^{2m})$ les ensembles des éléments de $\Gamma L(n,p^{2m})$, $GL(n,p^{2m})$ et $SL(n,p^{2m})$ qui stabilisent f . Enfin, si X est l'un de ces groupes, on note PX son image dans le quotient $\Gamma L(n,\mathfrak{K})/Z(\Gamma L(n,\mathfrak{K}))$.

Au début de chaque chapitre ou appendice, on fixe les notations qui gardent le même sens jusqu'à la fin. On numérote les "ensembles" des lemmes, des propositions et des théorèmes de chaque chapitre ou appendice et "l'ensemble" des corollaires de chaque proposition ou théorème, lorsque ces "ensembles" ont plus d'un "élément".

Les renvois à la bibliographie sont indiqués "cf. (x), ... " ; le renvoi à un énoncé du mémoire est indiqué par: (i) le numéro du chapitre (ch.x), lorsque celui-ci n'est pas le même, (ii) le "type" de l'énoncé (lemme, prop., th., cor.), et (iii) son numéro, s'il y a lieu; pour les corollaires, on précisera la proposition ou le théorème correspondant lorsqu'il y a de l'ambiguïté. Les renvois du type "cf. ch.x, §a, déf." ou "cf. ch.x, §a" indiquent que l'on se réfère à l'une des définitions ou à l'un des commentaires du début du §a dans le chapitre x (s'il n'y a aucun § indiqué, il faut lire "§o").

On trouvera toutes les notions que nous empruntons au langage des catégories, dans les paragraphes 1, 5 du ch.I et 3, 4 du ch.II de (16); elles sont utilisées sans référence. Pour les groupes du type de Lie, nous nous référons à (5) et à (17): nous renvoyons à (17) pour la construction et les automorphismes de ces groupes, et à (5) pour l'existence des systèmes de Tits (pour nous en servir comme unique référence, (5) a l'inconvénient de n'étudier que les "groupes adjoints"). Pour la "théorie générale" sur les groupes finis, nous renvoyons, tant qu'il est possible, à (12); nous utilisons sans référence tous les énoncés du chapitre 1 de (12). Enfin, les énoncés suivants sont soit indiqués par "cf. (Ox)" , soit utilisés sans référence: soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G , p un nombre premier et P un p-sous-groupe de G .

(01) Si P normalise H les conditions " P contient un S_p-groupe de H " et " P contient un S_p-groupe de $N_H(P)$ " sont équivalentes. En particulier, P est un S_p-groupe de G si et seulement s'il est un S_p-groupe de $N(P)$.

(02) Si H est distingué dans G et si P est un S_p-groupe de H , on a $G = O^p(H).N(P)$. En particulier, si P est un S_p-groupe de G et si H contient $N(P)$, on a $N(H) = H$.

(03) On a $H \cap O_p(G) \subset O_p(H)$, $H \cap O_{p'}(G) \subset O_{p'}(H)$,

$H \cap O_{pp'}(G) \subset O_{pp'}(H)$ et $H \cap O_{p'p}(G) \subset O_{p'p}(H)$;

si H est sous-normal dans G , toutes ces inclusions sont des égalités. En outre on a $O^p(H) \subset O^p(G)$ et $O^{p'}(H) \subset O^{p'}(G)$.

CHAPITRE I

La définition des p-localités

Soient G un groupe fini et p un nombre premier. Une localité de G relative à p (ou p-localité) est un couple $(\mathfrak{U},W)$ formé d'un ensemble non vide $\mathfrak{U}$ de p-sous-groupes de G et d'une application W de $\mathfrak{U}$ dans l'ensemble des sous-groupes de G qui satisfait aux conditions suivantes

(L1) Le conjugué d'un élément A de $\mathfrak{U}$ par un élément x de G appartient à $\mathfrak{U}$ et on a $W(A^x) = W(A)^x$.

(L2) Tout p-sous-groupe B de G qui contient un élément A de $\mathfrak{U}$, appartient à $\mathfrak{U}$ et on a $W(B) \subset W(A)$.

(L3) Pour tout élément A de $\mathfrak{U}$, $W(A)$ normalise A .

L'ensemble de tous les p-sous-groupes de G et l'application 1 qui à chaque p-sous-groupe de G fait correspondre le sous-groupe à un élément, forment une p-localité de G appelée la 1-localité. Le même ensemble et l'application C qui à chaque p-sous-groupe A de G fait correspondre le centralisateur de A dans G, forment aussi une p-localité de G appelée la C-localité.

Dans la plupart des p-localités $(\mathfrak{U},W)$ de G que nous aurons à considérer ici, l'ensemble $\mathfrak{U}$ est ou bien l'ensemble des p-sous-groupes de G, ou bien l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G (auquel cas p divise $|G|$); dans ces cas, le couple $(\mathfrak{U},W)$ sera remplacé par W et par W^* ; ainsi, si p divise $|G|$, la 1^*-localité de G relative à p est formée par l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G et par la restriction de l'application 1 à cet ensemble.

Si $(\mathfrak{U},W)$ est une p-localité de G et si A est un élément de $\mathfrak{U}$, on remarquera que $N(A)$ normalise $W(A)$ et que $W(A)$ normalise tous les sous-groupes de A qui appartienent à $\mathfrak{U}$; en fait, dans les exemples que nous allons étudier, $W(A)$ est toujours contenu dans le centralisateur de A .

§ 1. La catégorie associée

Soit $(\mathfrak{U},W)$ une p-localité de G ; nous allons construire à l'aide de $(\mathfrak{U},W)$, une catégorie que l'on note $\mathfrak{U}_W$ et que l'on appelle la catégorie associée à $(\mathfrak{U},W)$.

Les objets de $\mathfrak{U}_W$ sont les éléments de $\mathfrak{U}$. Soient A, $B \in \mathfrak{U}$ et $T(B,A)$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $A \subset B^x$; en vertu de la condition (L3), la formule $w.x = xw^{-1}$ où $w \in W(A)$ et $x \in T(B,A)$, définit une opération de $W(A)$ sur $T(B,A)$: l'ensemble des $\mathfrak{U}_W$-morphismes de A dans B est alors l'ensemble des triplets formés par A , B et une orbite de $W(A)$ par cette opération. On note $\mathfrak{A}_W(B,A)$ cet ensemble et si $x \in T(B,A)$, on note $(B,x,A)_W$ (ou simplement (B,x,A)) le $\mathfrak{A}_W$-morphisme de A dans B déterminé par x . Soient $A,B,C \in \mathfrak{A}$, $x,x' \in T(B,A)$ et $y,y' \in T(C,B)$; on a alors yx , $y'x' \in T(C,A)$; de plus, si on a $(B,x,A)_W = (B,x',A)_W$ et $(C,y,B)_W = (C,y',B)_W$, les $\mathfrak{A}_W$-morphismes $(C,yx,A)_W$ et $(C,y'x',A)_W$ coïncident (cf. (L1),(L2)). La composition des $\mathfrak{A}_W$-morphismes est alors définie par la formule

$$(C,y,B)_W(B,x,A)_W = (C,yx,A)_W \quad .$$

On remarquera que deux éléments de $\mathfrak{A}$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathfrak{A}_W$ si et seulement s'ils sont conjugués dans G .

§ 2. Les morphismes et l'équivalence

Soient G' un deuxième groupe fini, $(\mathfrak{A}',W')$ une p-localité de G' et f un homomorphisme de G dans G' . On dit que f définit un morphisme de $(\mathfrak{A},W)$ dans $(\mathfrak{A}',W')$ s'il satisfait à la condition suivante

(M) L'image par f d'un élément A de $\mathfrak{A}$ appartient à $\mathfrak{A}'$ et on a $f(W(A)) \subset W'(f(A))$.

Si f satisfait à la condition (M), on construit un foncteur φ de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$ de la manière suivante: si $A,B \in \mathfrak{A}$, on pose $\varphi(A) = f(A)$, $\varphi(B) = f(B)$ et on définit l'application $\varphi_{A,B}$ de $\mathfrak{A}_W(B,A)$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}(\varphi(B),\varphi(A))$ par la formule

$$\varphi_{A,B}((B,x,A)_W) = (f(B),f(x),f(A))_{W'}$$

(on voit sans difficulté que le second membre ne dépend que de $(B,x,A)_W$); on dit que φ est le foncteur de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$ définit par f . Si $G = G'$ et si f est l'homomorphisme identique, φ s'appelle le foncteur canonique de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$.

On dit que les p-localités $(\mathfrak{A},W)$ et $(\mathfrak{A}',W')$ sont équivalentes s'il existe un foncteur de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$ (ou de $\mathfrak{A}'_{W'}$ dans $\mathfrak{A}_W$) qui est une équivalence de catégories. De plus, on dit que f définit une équivalence entre $(\mathfrak{A},W)$ et $(\mathfrak{A}',W')$ s'il définit un morphisme de $(\mathfrak{A},W)$ dans $(\mathfrak{A}',W')$ et si le foncteur de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$ définit par f est une équivalence de catégories.

Nous sommes intéressés aux propriétés des p-localités qui se conservent par équivalence. On dira qu'une propriété de G , de ses éléments, de ses sous-groupes, etc. est $(\mathfrak{A},W)$-locale si elle peut être formulée dans la catégorie associée à n'importe quelle p-localité équivalente à $(\mathfrak{A},W)$.

Dans la proposition suivante, nous exprimons le fait que l'homomorphisme f définisse une équivalence entre $(\mathfrak{A},W)$ et $(\mathfrak{A}',W')$ à l'aide des ensembles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ et des applications W , W' ; dans ce cas, $(\mathfrak{A},W)$ est complètement déterminée par $(\mathfrak{A}',W')$ grâce à la condition 1 ci-dessous.

Proposition 1. Avec les notations précédentes, soit P' un S_p-groupe de $\mathrm{Im}(f)$. L'homomorphisme f définit une équivalence entre les p-localités $(\mathfrak{A},W)$ et $(\mathfrak{A}',W')$ si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes

1. Un p-sous-groupe A de G appartient à $\mathfrak{A}$ si et seulement si A contient un S_p-groupe de $\mathrm{Ker}(f)$ et $f(A)$ appartient à $\mathfrak{A}'$. Dans ce cas, on a $W(A) = f^{-1}(W'(f(A))) \cap N_G(A)$.

2. Le groupe P' est un S_p-groupe de G'.

3. Pour tout $x' \in G'$ tel que l'on ait $P' \cap (P')^{x'} = f(A)$ où $A \in \mathfrak{A}$, x' appartient à l'ensemble $\mathrm{Im}(f).W'(P' \cap (P')^{x'})$.

Démonstration: Démontrons d'abord que les conditions 1, 2, 3 sont nécessaires. Nous supposons que f satisfait à la condition (M) et que le foncteur φ de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$ défini par f est une équivalence de catégories.

La condition 2 résulte du fait que φ est essentiellement surjectif. Démontrons la condition 3; les notations étant celles de 3, soit B un S_p-groupe de $f^{-1}(P')$ contenant A ; on a alors $B \in \mathfrak{A}$ et $f(B) = P'$; comme $x' \in T_{G'}(f(B),f(A))$ et comme φ est plein, il existe $x \in T_G(B,A)$ tel que l'on a

$$(f(B),x',f(A))_{W'} = (f(B),f(x),f(A))_{W'}$$

et par suite, x' appartient à $\mathrm{Im}(f).W'(P' \cap (P')^{x'})$.

Nous allons démontrer la condition 1. Soit $A \in \mathfrak{A}$; d'après la condition (M), $f(A)$ appartient à $\mathfrak{A}'$ et on a

$$W(A) \subset f^{-1}(W'(f(A))) \cap N_G(A) \quad ;$$

de plus, si $x \in f^{-1}(W'(f(A))) \cap N_G(A)$ on a

$$(f(A),f(x),f(A))_{W'} = (f(A),1,f(A))_{W'}$$

et puisque φ est fidèle, il s'en suit que $x \in W(A)$; on a donc

$$W(A) = f^{-1}(W'(f(A))) \cap N_G(A) \quad .$$

En outre, si B est un S_p-groupe de $A.\mathrm{Ker}(f)$ contenant A, on a $B \in \mathfrak{A}$ et $f(A) = f(B)$; puisque φ est plein, on en déduit que $\mathfrak{A}_W(A,B)$ n'est pas vide et par suite, que $A = B$. Réciproquement, soit A un p-sous-groupe de G contenant un S_p-groupe de $\mathrm{Ker}(f)$ et tel que $f(A)$ appartienne à $\mathfrak{A}'$; puisque φ est essentiellement surjectif, il existe $x' \in G'$ et $B \in \mathfrak{A}$ tels que $f(B) = f(A)^{x'}$; si P est un S_p-groupe de G contenant A, on a alors $P \in \mathfrak{A}$ et $x' \in T_{G'}(f(P),f(B))$ et comme φ est plein, il existe $x \in T_G(P,B)$ tel que l'on a

$$(f(P),x',f(B))_{W'} = (f(P),f(x),f(B))_{W'} \quad .$$

On en déduit que $f(B) = f(A^x)$ et par suite, que A^x est un S_p-groupe de $B.\mathrm{Ker}(f)$; or, comme $B \in \mathfrak{A}$, B contient un S_p-groupe de $\mathrm{Ker}(f)$; par conséquent, A et B sont conjugués dans G et on a $A \in \mathfrak{A}$.

Dorénavant nous supposons que les conditions 1, 2, 3 sont satisfaites. En vertu de la condition 1, f satisfait à la condition (M) et par suite, il définit un foncteur φ de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}'_{W'}$; nous allons démontrer que φ est une équivalence de catégories.

D'après les conditions 1, 2, φ est essentiellement surjectif. Soient A , $B \in \mathfrak{A}$; si $T_{G'}(f(B),f(A))$ est vide, $T_G(B,A)$ l'est également. Supposons que $T_{G'}(f(B),f(A))$ soit non vide et soit x' un élément de cet ensemble; nous allons démontrer qu'il existe un unique $\mathfrak{A}_W$-morphisme $(B,x,A)_W$ de A dans B tel que l'on ait

$$(f(B),x',f(A))_{W'} = (f(B),f(x),f(A))_{W'} \quad .$$

Démontrons d'abord l'existence. Soient u , $v \in G$ tels que P' contienne $f(A^u)$ et $f(B^v)$; puisque $f(A) \subset f(B)^{x'}$, on a $f(A^u) \subset P' \cap (P')^{t'}$ où $t' = f(v)^{-1}x'f(u)$, et par suite, A^u est contenu dans un S_p-groupe C de $f^{-1}(P' \cap (P')^{t'})$; on en déduit que $C \in \mathfrak{A}$ (car $A \in \mathfrak{A}$), que $P' \cap (P')^{t'} = f(C)$ (car $P' \subset \mathrm{Im}(f)$), que $f(A^u)$ et $P' \cap (P')^{t'}$ appartiennent à $\mathfrak{A}'$ (grâce à la condition 1) et que l'on a $W'(P' \cap (P')^{t'}) \subset W'(f(A^u))$ (cf. (L2)). En vertu de de la condition 3, il existe alors $z \in G$ et $w' \in W'(f(A))$ tels que l'on ait $t' = f(z)(w')^{f(u)}$, d'où il résulte que $x' = f(vzu^{-1})w'$. De plus, comme $f(A) \subset f(B)^{x'}$ et comme w' normalise $f(A)$, on a $f(A) \subset f(B^{vzu^{-1}})$ et par suite, A est contenu dans $B^{vzu^{-1}}.\mathrm{Ker}(f)$; puisque B contient un S_p-groupe de $\mathrm{Ker}(f)$, il existe alors $k \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que l'on ait $A \subset B^{vzu^{-1}k}$. Ainsi, l'élément $x = vzu^{-1}k$ appartient à $T_G(B,A)$ et on a $x' = f(x)w'$, d'où il résulte que

$$(f(B),x',f(A))_{W'} = (f(B),f(x),f(A))_{W'} \quad .$$

Démontrons maintenant l'unicité; soient y , $z \in T_G(B,A)$ tels que l'on ait

$$(f(B),f(y),f(A))_{W'} = (f(B),f(z),f(A))_{W'} \quad ;$$

nous allons démontrer que $z^{-1}y \in W(A)$. D'après notre hypothèse, on a $f(z^{-1}y) \in W'(f(A))$; par suite, en vertu de la condition 1, il suffit de démontrer que $z^{-1}y$ normalise A . Puisque $f(z^{-1}y) \in W'(f(A))$, $f(z^{-1}y)$ normalise $f(A)$ et par suite $A^{z^{-1}y}$ est contenu dans $A.\mathrm{Ker}(f)$; or, d'après nos hypothèses, A et $A^{z^{-1}y}$ sont contenus dans B^y et A est un S_p-groupe de $A.\mathrm{Ker}(f)$; il en résulte que $A = A^{z^{-1}y}$. Par conséquent, on a $(B,y,A)_W = (B,z,A)_W$.

Le foncteur φ est donc essentiellement surjectif et pleinement fidèle; par suite, il est une équivalence de catégories.

Nous allons donner maintenant trois exemples à propos de l'équivalence (toutes les localités citées sont relatives à p).

1. On voit aisément que la 1-localité de G et la 1-localité de G' sont équivalentes si et seulement si G et G' sont isomorphes.

2. Si K est un p'-sous-groupe distingué de G , on vérifie à l'aide de la proposition 1 que la projection de G sur G/K définit une équivalence entre les C-localités de G et de G/K .

3. D'après un théorème de Frobenius sur l'existence d'un p-complément normal (cf. (12), ch.7, th.4.5), si la C-localité de G est équivalente à la C-localité d'un p-groupe fini, $G/O_{p'}(G)$ est un p-groupe.

§ 3. La restriction et le contrôle

Soient H un sous-groupe de G et $(\mathfrak{A},W)$ une p-localité de G . On voit aisément que, si H contient un élément de $\mathfrak{A}$, le couple formé par l'ensemble des p-sous-groupes de H qui appartiennent à $\mathfrak{A}$ (noté $\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{A}$) et par l'application qui à tout élément A de cet ensemble fait correspondre $W(A) \cap H$ (notée $\mathrm{Res}_{H,G}W$), est une p-localité de H ; dans ce cas, on note respectivement $\mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A},W)$ et $\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{A}_W$, cette p-localité et sa catégorie associée.

Si $(\mathfrak{A}',W')$ est une p-localité de H , on voit sans difficulté que l'inclusion de H dans G définit un morphisme de $(\mathfrak{A}',W')$ dans $(\mathfrak{A},W)$ si et seulement si H contient un élément de $\mathfrak{A}$ et l'identité définit un morphisme de $(\mathfrak{A}',W')$ dans $\mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A},W)$. En particulier, si H contient un élément de $\mathfrak{A}$, l'inclusion de H dans G définit un morphisme de $\mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A},W)$ dans $(\mathfrak{A},W)$ et on voit aisément que le foncteur de $\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}_W$ est fidèle; si A , B sont des éléments de $\mathfrak{A}$ contenus dans H , on identifiera les $(\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{A}_W)$-morphismes de A dans B à leurs images dans $\mathfrak{A}_W(B,A)$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Avec les notations précédentes, soit</u> P <u>un</u> S_p<u>-groupe de</u> H . <u>Il existe une</u> p-<u>localité</u> $(\mathfrak{A}',W')$ <u>de</u> H <u>pour laquelle l'inclusion</u> $H \subset G$ <u>définit une équivalence entre</u> $(\mathfrak{A}',W')$ <u>et</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>si et seulement si</u> H <u>satisfait aux conditions suivantes</u>

1. <u>Le groupe</u> P <u>est un</u> S_p<u>-groupe de</u> G .
2. <u>Pour tout</u> $x \in G$ <u>tel que</u> $P \cap P^x \in \mathfrak{A}$, x <u>appartient à</u> $H.W(P \cap P^x)$.

<u>De plus, dans ce cas on a</u> $(\mathfrak{A}',W') = \mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A},W)$.

<u>Démonstration</u>: Supposons qu'il existe une telle p-localité $(\mathfrak{A}',W')$ de H ; les conditions 2, 3 de la proposition 1 entraînent les conditions 1, 2 ci-dessus; la condition 1 entraîne $(\mathfrak{A}',W') = \mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A},W)$. Réciproquement, si les conditions 1,

2 sont satisfaites, on prend $(\mathfrak{A}', W') = \mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A}, W)$ (ceci a un sens car $P \in \mathfrak{A}$) et on applique la proposition 1.

On dit que H est un <u>sous-groupe de</u> $(\mathfrak{A}, W)$-<u>contrôle</u> de G s'il satisfait aux conditions 1, 2 de la proposition 2. Soit K un sous-groupe de H ; comme les foncteurs définis par les inclusions sont fidèles, K est un sous-groupe de $(\mathfrak{A}, W)$-contrôle de G si et seulement si H est un sous-groupe de $(\mathfrak{A}, W)$-contrôle de G et K est un sous-groupe de $\mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{A}, W)$-contrôle de H .

Nous allons expliciter maintenant les conditions 1, 2 de la proposition 2 dans trois exemples.

1. Soient P un S_p-groupe de G et T un sous-groupe distingué de P . Le groupe $N(T)$ est un sous-groupe de C-contrôle de G si et seulement s'il satisfait à la condition suivante

(F) <u>Si</u> A , $A^x \subset P$ <u>où</u> $x \in G$, <u>il existe des éléments</u> n <u>de</u> $N(T)$ <u>et</u> z <u>de</u> $C(A)$ <u>tels que l'on ait</u> $x = zn$.

C'est à dire, $N(T)$ est un sous-groupe de C-contrôle de G relativement à p si et seulement si, suivant la terminologie de (9), T "controls strong fusion" dans P par rapport à G .

2. Supposons que p divise $|G|$ et soit H un sous-groupe propre de G ; le groupe H est de 1^*-contrôle de G relativement à p si et seulement s'il satisfait à la condition suivante

(S) <u>L'ordre de</u> H <u>est divisible par</u> p <u>et pour tout</u> $x \in G - H$, $H \cap H^x$ <u>est un</u> p'-<u>groupe</u>.

En effet, si H satisfait à la condition (S) et si P est un S_p-groupe de H , H contient $N(P)$ et par suite, P est un S_p-groupe de G ; le reste ne présente aucune difficulté.

Par conséquent, H est un sous-groupe de 1^*-contrôle de G pour $p = 2$ si et seulement si, suivant la terminologie de (2), H est "stark eingebettet" dans G .

3. Soit H un sous-groupe propre non trivial de G . On déduit aisément de la condition (S) ci-dessus que G est un groupe de Frobenius dont H est un complément si et seulement si H est un sous-groupe de 1^*-contrôle de G relativement à tout nombre premier qui divise l'ordre de H (cf. (12), ch.2, th.7.7).

§ 4. <u>Quelques remarques sur les catégories associées</u>

Le contenu de ce paragraphe ne sera pas utilisé dans la suite.

On dit qu'une catégorie $\mathfrak{C}$ est <u>à monomorphismes</u> si tout morphisme de $\mathfrak{C}$

est un monomorphisme. Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ des catégories à monomorphismes et τ un foncteur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{C}'$; on dit que τ détermine la divisibilité à droite si pour tout couple de morphismes f , g de $\mathfrak{C}$ ayant le même but, les conditions "il existe un morphisme h de $\mathfrak{C}$ tel que $f = gh$ " et "il existe un morphisme h' de $\mathfrak{C}'$ tel que $\tau(f) = \tau(g)h'$ " sont équivalentes (h et h' sont alors uniquement déterminés et on a $\tau(h) = h'$).

On vérifie aisément que les catégories associées aux p-localités de G sont à monomorphismes et que les foncteurs canoniques (i.e. les foncteurs définis par l'identité) déterminent la divisibilité à droite. De plus, on a le résultat suivant.

Proposition 3. Soient $(\mathfrak{A},W)$ une p-localité de G , $\mathfrak{C}$ une catégorie à monomorphismes et τ un foncteur de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{C}$ qui détermine la divisibilité à droite; notons V l'application qui à tout élément A de $\mathfrak{A}$ fait correspondre le noyau de l'homomorphisme induit par τ de $N(A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\tau(A),\tau(A))$. On a alors

1. Le couple $(\mathfrak{A},V)$ est une p-localité de G et l'identité définit un morphisme de $(\mathfrak{A},W)$ dans $(\mathfrak{A},V)$.

2. Il existe un unique foncteur σ de $\mathfrak{A}_V$ dans $\mathfrak{C}$ tel que l'on ait $\tau = \sigma\circ\pi$ où π est le foncteur canonique de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{A}_V$.

3. Le foncteur σ est fidèle et il détermine la divisibilité à droite.

Démonstration: Démontrons l'assertion 1. Si $A \in \mathfrak{A}$, il est clair que $V(A)$ contient $W(A)$. Il suffit donc de démontrer que si A , $B \in \mathfrak{A}$ et $x \in T(B,A)$, $V(A)$ contient $V(B)^x$. Soit $z \in V(B)$; puisque $\tau((B,z,B)_W) = 1_{\tau(B)}$, on a
$$\tau((B,zx,A)_W) = \tau((B,x,A)_W) \quad ;$$
puisque τ détermine la divisibilité à droite, il existe alors $u \in N(A)$ tel que l'on ait $(B,zx,A)_W = (B,xu,A)_W$ et $\tau((A,u,A)_W) = 1_{\tau(A)}$; par suite, u appartient à $V(A)$ et on a $zx = xuw$ où $w \in W(A)$, d'où il résulte que $z^x \in V(A)$.

La démonstration de l'assertion 2 ne présente aucune difficulté. Démontrons la fidélité de σ ; soient A , $B \in \mathfrak{A}$ et x , $y \in T(B,A)$; si l'on a $\sigma((B,x,A)_V) = \sigma((B,y,A)_V)$, on a encore $\tau((B,x,A)_W) = \tau((B,y,A)_W)$ et comme τ détermine la divisibilité à droite, il existe $z \in N(A)$ tel que l'on ait $(B,x,A)_W = (B,yz,A)_W$ et $\tau((A,z,A)_W) = 1_{\tau(A)}$; il en résulte que z appartient à $V(A)$ et par suite, que $(B,x,A)_V = (B,y,A)_V$. Enfin, on vérifie sans difficulté que σ détermine la divisibilité à droite à l'aide de la même proprieté pour τ .

Notons $\mathfrak{G}$ la catégorie dont les objets sont les p-groupes finis, dont les morphismes sont les homomorphismes injectifs, la composition des morphismes étant la composition des applications; si $(\mathfrak{A},W)$ est une p-localité de G tel que pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ centralise A , on construit un foncteur ϵ de $\mathfrak{A}_W$ dans $\mathfrak{G}$ de la manière suivante: si A , $B \in \mathfrak{A}$ et $x \in T(B,A)$, on pose $\epsilon(A) = A$, $\epsilon(B) = B$ et $\epsilon((B,x,A)_W)(a) = xax^{-1}$ pour tout $a \in A$. On vérifie aisément que le foncteur ϵ détermine la divisibilité à droite.

CHAPITRE II

Les p-sous-groupes essentiels et leurs normalisateurs

Soient G un groupe fini, p un nombre premier, A un p-sous-groupe de G et P un S_p-groupe de G contenant A. Nous allons étudier $N(A)$ lorsqu'il possède un sous-groupe propre M qui satisfait aux conditions suivantes

(M1) L'intersection $N(A) \cap N(P)$ est contenue dans M.

(M2) Pour tout $x \in N(A) - M$, A est un S_p-groupe de $M \cap M^x$.

Nous allons démontrer d'abord que l'ensemble des sous-groupes de $N(A)$ qui satisfont à ces conditions est égal à l'ensemble des sous-groupes de $N(A)$ qui contiennent un certain sous-groupe $M(A,P)$ de $N(A)$.

Lemme 1. Soient M un sous-groupe de $N(A)$ satisfaisant à la condition (M2) et H un sous-groupe de M. Si A ne contient aucun S_p-groupe de H, M contient $N(A) \cap N(H)$. En particulier, si A n'est pas un S_p-groupe de M, M contient un S_p-groupe de $N(A)$.

Démonstration: Si $x \in N(A) \cap N(H)$, H est contenu dans $M \cap M^x$ et par suite, A n'est pas un S_p-groupe de $M \cap M^x$, d'où il résulte que $x \in M$.

Proposition 1. Soient M, M' des sous-groupes de $N(A)$. L'intersection $M \cap M'$ satisfait aux conditions (M1) et (M2) si et seulement s'il en est de même pour M et M'.

Démonstration: Si M et M' satisfont à (M1) et à (M2), $M \cap M'$ contient $N(A) \cap N(P)$; de plus, si $x \in N(A) - M \cap M'$, x n'appartient pas soit à M, soit à M' et dans les deux cas, A est un S_p-groupe de $M \cap M' \cap (M \cap M')^x$. Supposons que $M \cap M'$ satisfasse à (M1) et à (M2); nous allons démontrer que M et M' satisfont à la condition (M2). Ou bien $A = P$, ou bien A n'est pas un S_p-groupe de $M \cap M'$: dans les deux cas, $M \cap M'$ contient un S_p-groupe de $N(A)$ (cf. lemme 1). Soient $x \in N(A)$ et B un S_p-groupe de $M \cap M^x$; il existe alors $m, n \in M$ tels que $M \cap M'$ contienne B^m et $B^{x^{-1}n}$; par conséquent, on a

$$B^m \subset (M \cap M') \cap (M \cap M')^{n^{-1}xm} .$$

Si $A \neq B$, on en déduit que $n^{-1}xm \in M \cap M'$ (cf. (M2)) et par suite, que $x \in M$. On raisonne de même pour M'.

D'après la proposition 1, l'ensemble des sous-groupes de $N(A)$ qui satisfont aux conditions (M1) et (M2) possède un plus petit élément que l'on note $M(A,P)$ (ou $M_G(A,P)$); de plus, tout sous-groupe de $N(A)$ qui contient $M(A,P)$

satisfait à ces conditions. Il est clair que $M(P,P) = N(P)$. Si $A \neq P$, nous allons donner un système générateur de $M(A,P)$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> Q <u>un</u> S_p<u>-groupe de</u> $M(A,P)$. <u>Si</u> $A \neq P$, <u>le groupe</u> $M(A,P)$ <u>est engendré par la réunion des groupes</u> $N(A) \cap N(B)$ <u>où</u> $A \subset B \subset Q$ <u>et</u> $A \neq B$. <u>En particulier, si</u> P' <u>est un</u> S_p<u>-groupe de</u> G <u>qui contient</u> A , <u>il existe</u> $x \in N(A)$ <u>tel que</u> $M(A,P)^x = M(A,P')$.

<u>Démonstration</u>: Supposons que $A \neq P$ et notons M le sous-groupe de $N(A)$ engendré par cette réunion; d'après le lemme 1, $M(A,P)$ contient M ; de plus, si B est un p-sous-groupe de M qui contient strictement A , M contient $N(A) \cap N(P)$. En particulier, M contient un conjugué de $N(A) \cap N(P)$ dans $N(A)$ (on prend B égal à un conjugué de $N_p(A)$ contenu dans Q). Il suffit maintenant de démontrer que M satisfait à la condition (M2); en effet, M contiendra alors un conjugué de $M(A,P)$ et comme $M \subset M(A,P)$, on aura l'égalité.

Soient $x \in N(A)$ et B un p-sous-groupe de $M \cap M^x$ contenant A ; d'après ce qui précède, $A \neq B$ entraîne $N(A) \cap N(B) \subset M \cap M^x$. Par conséquent, si $x \in N(A)$ et A n'est pas un S_p-groupe de $M \cap M^x$, $M \cap M^x$ contient un S_p-groupe Q' de $N(A)$ (cf. (O1)) et pour tout sous-groupe B' de Q' contenant strictement A , $M \cap M^x$ contient $N(A) \cap N(B')$; il en résulte que $M \cap M^x$ contient un conjugué de M dans $N(A)$ et par suite, que $M = M^x$; dans ces conditions, comme $N(A) \cap N(Q) \subset M$, x appartient à M (cf. (O2)).

On dit que A est un p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G si on a
$$N(A) \neq M(A,P) \quad .$$
D'après la proposition 2, cette condition ne dépend pas du choix de P ; d'après le lemme 1, elle est satisfaite dès que $N(A)$ possède un sous-groupe propre M qui satisfait à la condition (M2) et qui n'admet pas A comme S_p-groupe. Supposons que $N(A) \neq M(A,P)$; si $x \in N(A) - M(A,P)$, on a alors
$$A = O_p(N(A)) = N_p(A) \cap N_p(A)^x \qquad \text{(cf. (M2))}$$
et par suite, on a $A = P \cap P^x$ (cf. (O1)). Par conséquent, tout p-sous-groupe essentiel de G est égal à l'intersection de deux S_p-groupes de G distincts; la réciproque est, en général, fausse (cf. app.I), mais on a la proposition suivante.

<u>Proposition 3</u>. <u>Si</u> A <u>est un élément maximal de l'ensemble des intersections des couples de</u> S_p<u>-groupes de</u> G <u>distincts, on a</u> $M(A,P) = N(A) \cap N(P)$ <u>et</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G .

<u>Démonstration</u>: Supposons que A soit un tel élément maximal. Soit $x \in N(A)$; si A n'est pas un S_p-groupe de $N(A) \cap N(P) \cap N(P)^x$, on a $A \neq P \cap P^x$ et par suite,

on a $P = P^x$. Par conséquent, $N(A) \cap N(P)$ satisfait à (M1) et (M2) et par suite, il est égal à $M(A,P)$. De plus, d'après nos hypothèses, A est contenu dans un S_p-groupe Q de G différent de P et on a $A = P \cap Q$; par suite, $N_Q(A)$ ne normalise pas P ; il en résulte que $N(A) \neq M(A,P)$.

Cette proposition montre que l'ensemble des p-sous-groupes essentiels de G n'est vide que dans le cas où P est distingué dans G . Dans les appendices I et II on calcule les p-sous-groupes essentiels de certains groupes classiques .

Si A est un p-sous-groupe essentiel de G , on a vu que $A = O_p(N(A))$; la proposition suivante montre que cette condition est suffisante lorsque $p\text{-rang}(N(A)/A) = 1$.

<u>Proposition 4.</u> <u>Si</u> $p\text{-rang}(N(A)/A) = 1$ <u>et si</u> B/A <u>est l'unique sous-groupe d'ordre</u> p <u>de</u> $N_p(A)/A$, <u>on a</u> $M(A,P) = N(A) \cap N(B)$. <u>Si</u> $p\text{-rang}(N(A)/A) \geq 2$, $M(A,P)$ <u>contient</u> $O_{pp'}(N(A))$.

<u>Démonstration</u>: Si $p\text{-rang}(N(A)/A) = 1$, l'intersection $N(A) \cap N(B)$ satisfait aux conditions (M1) et (M2) et par suite, elle contient $M(A,P)$; or, d'après le lemme 1, $N(A) \cap N(B)$ est contenu dans $M(A,P)$; on a donc l'égalité.

Supposons maintenant que $p\text{-rang}(N(A)/A) \geq 2$; posons $\bar{N} = N(A)/A$ et soient respectivement $\bar{M}$ et $\bar{K}$ les images de $M(A,P)$ et de $O_{pp'}(N(A))$ dans $\bar{N}$; nous pouvons supposer que $N(A) \neq M(A,P)$, auquel cas on a $A = O_p(N(A))$ et $\bar{K}$ est un p'-groupe. Soit $\bar{B}$ un sous-groupe de $\bar{M}$ de type (p,p) ; puisque $\bar{B}$ normalise $\bar{K}$, $\bar{K}$ est engendré par la réunion des $C_{\bar{K}}(\bar{D})$ où $\bar{D}$ parcourt les sous-groupes d'ordre p de $\bar{B}$ (cf. (12), ch.6, th.2.4); or, si D est l'image réciproque de $\bar{D}$ dans $N(A)$, l'image réciproque de $C_{\bar{K}}(\bar{D})$ est contenue dans $N(A) \cap N(D)$; l'assertion résulte alors du lemme 1.

On remarquera que si A est un p-sous-groupe essentiel de G et si $N(A)$ est p-résoluble, $M(A,P)$ ne contient pas $O_{pp'}(N(A))$; en effet, dans ces conditions, si B est un S_p-groupe de $O_{pp'p}(N(A))$ contenu dans $M(A,P)$, on a

$$N(A) = O_{pp'}(N(A)).(N(A) \cap N(B)) \qquad \text{(cf. (O2))}$$

et $N(A) \cap N(B)$ est contenu dans $M(A,P)$ (cf. lemme 1).

<u>Corollaire.</u> <u>Supposons que</u> G <u>soit</u> p-<u>résoluble. Alors</u>, A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G <u>si et seulement si l'on a</u> $A = O_p(N(A))$ <u>et</u> $p\text{-rang}(N(A)/A) = 1$.

<u>Démonstration</u>: Le corollaire résulte tout de suite de la proposition 4 et de la remarque précédente.

§ 1. Le normalisateur d'un p-sous-groupe essentiel

Dans ce paragraphe, nous supposons que A est un p-sous-groupe essentiel de G (i.e. que $N(A) \neq M(A,P)$). On a donc $A = O_p(N(A))$ et $A \neq P$. Nous allons étudier les sous-groupes sous-normaux X de $N(A)$ qui satisfont à la condition suivante

(X) On a $A \subset X$ et p divise $|X:A|$.

Proposition 5. Si X et X' sont des sous-groupes sous-normaux de $N(A)$ qui satisfont à la condition (X), il en est de même pour $X \cap X'$.

Démonstration: Posons $N = N(A)$ et $M = M(A,P)$. On raisonne par l'absurde; parmi les contre-exemples, on choisit un couple X , X' de sorte que $|X||X'|$ soit maximal. Puisque X et X' satisfont à la condition (X), il en est de même pour $N_N(X)$ et pour $N_N(X')$; par suite, d'après le choix du couple X , X' , les groupes $N_X(X')$ et $N_{X'}(X)$ satisfont aussi à la condition (X) (car $N_N(X') \neq X'$ et $N_X(X') = X \cap N_N(X')$, etc.). Posons $Y = N_X(X')$ et $Y' = N_{X'}(X)$; alors, Y et Y' sont des sous-groupes sous-normaux de $N(A)$ qui se normalisent l'un l'autre et on a $Y \cap Y' = X \cap X'$; par conséquent, $Y \cap Y'$ est un sous-groupe sous-normal de $N(A)$ et A est un S_p-groupe de $Y \cap Y'$; il en résulte que $O_{pp'}(Y \cap Y') = Y \cap Y'$ et par suite, que $Y \cap Y'$ est contenu dans $O_{pp'}(N(A))$ (cf. (O3)).

D'autre part, soit Q un S_p-groupe de N contenu dans M ; alors $Q \cap Y$ et $Q \cap Y'$ sont des S_p-groupes de Y et de Y' ; ainsi, comme Y et Y' satisfont à (X), les images de $Q \cap Y$ et de $Q \cap Y'$ dans N/A ne sont pas triviales et par contre, ont une intersection triviale (car $Q \cap Y \cap Y' = A$) ; puisqu'elles se normalisent l'une l'autre , elles se centralisent et on a donc $p\text{-rang}(N(A)/A) \geq 2$. Par conséquent, M contient $O_{pp'}(N(A))$ (cf. prop.4).

On en déduit que M contient $Y \cap Y'$, donc qu'il contient $(Q \cap Y).(Y \cap Y')$. Or, comme Y et Y' se normalisent l'un l'autre, Y' normalise $(Q \cap Y).(Y \cap Y')$. Comme $A \neq Q \cap Y$ et $A \neq Q \cap Y'$, il résulte alors du lemme 1, que M contient les groupes Y_i , $i \geq 0$, définis inductivement par les formules $Y_0 = Y'$, $Y_i = N_N(Y_{i-1})$, $i \geq 1$; comme Y' est sous-normal dans N , il existe n tel que $Y_n = N$ et par suite, on a $M = N$, ce qui contredit nos hypothèses.

La proposition 5 montre que l'ensemble des sous-groupes sous-normaux de $N(A)$ qui satisfont à la condition (X) possède un plus petit élément; on le note $X(A)$ (ou $X_G(A)$) . Il est clair que $X(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$; nous allons étudier maintenant des propriétés de $X(A)$.

<u>Proposition 6. On a</u> $N(A) = O^p(X(A)).M(A,P)$ <u>et tout sous-groupe distingué</u> K <u>de</u> $N(A)$ <u>tel que l'on ait</u> $N(A) = K.M(A,P)$, <u>contient</u> $O^p(X(A))$. <u>De plus, on a</u> $X(A) = O^p(X(A)).(P \cap X(A))$.

<u>Démonstration</u>: Posons $N = N(A)$, $M = M(A,P)$, $X = X(A)$ et soit Q un S_p-groupe de M contenant $P \cap N$. Comme $A \not\subset Q \cap X$, M contient $N_N(Q \cap X)$ (cf. lemme 1); par conséquent on a $N = O^p(X).M$ (cf. (O2)). De plus, soit K un sous-groupe distingué de N tel que $N = K.M$; nous allons démontrer d'abord que $K.(P \cap N)$ contient X . Si $K.A$ satisfait à la condition (X), il contient X . Supposons maintenant que A soit un S_p-groupe de $K.A$; on a alors $O_{pp'}(K) = K$ et par suite, K est contenu dans $O_{pp'}(N)$ (cf. (O3)) ; comme M ne contient pas K , on a alors $p\text{-rang}(N/A) = 1$ et $M = N_N(B)$ où B/A est l'unique sous-groupe d'ordre p de $P \cap N/A$ (cf. prop.4); par conséquent, $K.B$ est distingué dans N et il satisfait à la condition (X) . Dans tous les cas, $K.(P \cap N)$ contient X .

Puisque $X \subset K.(P \cap N)$, on a $O^p(X) \subset K$; de plus, comme $N = O^p(X).M$, on peut prendre $K = O^p(X)$ d'où il résulte que l'on a $X = O^p(X).(P \cap X)$.

<u>Proposition 7. Tout sous-groupe propre distingué de</u> $X(A)/A$ <u>est un</u> p'<u>-groupe; en particulier, on a</u> $A = O_p(X(A))$ <u>et le quotient</u> $S(A) = X(A)/O_{pp'}(X(A))$ <u>est un groupe simple d'ordre divisible par</u> p . <u>Si</u> $S(A)$ <u>est abélien, on a</u> $p\text{-rang}(N(A)/A) = 1$. <u>Si</u> $S(A)$ <u>n'est pas abélien, la conjugaison induit une opération fidèle de</u> $N(A)/O_{pp'}(N(A))$ <u>sur</u> $S(A)$ <u>et le groupe</u> 1 <u>est un</u> p<u>-sous-groupe essentiel de</u> $S(A)$.

<u>Démonstration</u>: Posons $N = N(A)$, $M = M(A,P)$ et $X = X(A)$. Un sous-groupe distingué Y de X est sous-normal dans N ; par suite, si $Y \neq X$ et si $A \subset Y$, Y/A est un p'-groupe. Si $S(A)$ est abélien, on a $O^p(X) \subset O_{pp'}(X)$ et par suite, M ne contient pas $O_{pp'}(X)$ (cf. prop.6), d'où il résulte que $p\text{-rang}(N/A) = 1$ (cf. prop.4).

Supposons que $S(A)$ ne soit pas abélien. Comme $O_{pp'}(X) = X \cap O_{pp'}(N)$ (cf. (O3)), le noyau K de l'opération de N sur $S(A)$ induite par la conjugaison contient $O_{pp'}(N)$; de plus, comme $S(A)$ n'est pas abélien, K ne contient pas X et par suite, A est un S_p-groupe de K , d'où il résulte que K est contenu dans $O_{pp'}(N)$ (cf. (O3)); on a donc $K = O_{pp'}(N)$. D'autre part, $S(A)$ étant non abélien, $O^p(X)$ n'est pas contenu dans $O_{pp'}(X)$ et par suite, $O_{pp'}(X).M$ ne contient pas X (cf. prop.6); de plus, on sait que $O_{pp'}(X).M$ satisfait aux conditions (M1) et (M2) (cf. prop.1); on en déduit que l'image H de $M \cap X$ dans $S(A)$ est un sous-groupe propre de $S(A)$ d'ordre divisible par p et que pour tout $x \in S(A) - H$, $H \cap H^x$ est un p'-groupe; en vertu du lemme 1, H

contient alors le normalisateur d'un S_p-groupe Q de $S(A)$ et par suite, H contient $M_{S(A)}(1,Q)$; ceci démontre que 1 est un p-sous-groupe essentiel de $S(A)$.

On dit que $S(A)$ est le groupe simple associé à A. D'après la proposition précédente, un tel groupe simple ou bien est d'ordre p, ou bien admet le groupe 1 comme p-sous-groupe essentiel; dans le deuxième cas, si Q est un S_p-groupe de $S(A)$, $M_{S(A)}(1,Q)$ est un sous-groupe propre de 1^*-contrôle de $S(A)$ relativement à p (cf. ch.I, §3). H. Bender a déterminé dans (2) tous les groupes simples qui possèdent un sous-groupe propre de 1^*-contrôle relativement à 2 ; d'après cette classification, si $p = 2$, $S(A)$ est isomorphe à l'un des groupes suivants: Z_2, $PSL(2,2^n)$, $PSU(3,2^{2n})$, $Sz(2^{2n-1})$, $n \geq 2$. Nous démontrons dans le chapitre V que si $p \geq 5$ et si $S(A)$ n'est pas isomorphe à l'un des groupes $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$, ou bien $O^p(X(A))$ centralise A, ou bien $X(A)$ normalise $Z(L(P))$ où $L(P)$ est un sous-groupe de P défini dans le même chapitre.

§ 2. Sous-groupes, quotients et produits

Soient H un sous-groupe de G contenant A et K un sous-groupe distingué de G ; nous allons étudier des conditions suffisantes pour que A soit un p-sous-groupe essentiel de H et pour que l'image de A dans G/K soit un p-sous-groupe essentiel de G/K.

Proposition 8. Soient H un sous-groupe de G contenant A et Q un S_p-groupe de H contenant un S_p-groupe de $H \cap M_G(A,P)$. Supposons que A soit un p-sous-groupe essentiel de G et que H contienne $X_G(A)$. Alors, A est un p-sous-groupe essentiel de H, $M_G(A,P)$ contient $M_H(A,Q)$ et on a

$$X_H(A) = X_G(A) \quad \text{et} \quad S_H(A) = S_G(A)$$

Démonstration: Il est clair que $H \cap M_G(A,P)$ satisfait à la condition (M2) relativement au couple H, A ; démontrons qu'il satisfait à la condition (M1) relativement à H, A, Q. Le groupe $M_G(A,P)$ contient un S_p-groupe de $N_G(A)$, donc de $X_G(A)$ et par suite, on a $A \neq Q \cap M_G(A,P)$; il résulte alors du lemme 1, que l'on a

$$N_H(A) \cap N_H(Q \cap M_G(A,P)) \subset H \cap M_G(A,P)$$

et par suite, on a

$$N_Q(A) \cap N_Q(Q \cap M_G(A,P)) = Q \cap M_G(A,P) \quad ,$$

d'où il résulte que $Q \cap M_G(A,P) = N_Q(A)$ (cf. (O1)). Par conséquent, comme $N_H(A) \cap N_H(Q)$ normalise $N_Q(A)$, il est contenu dans $H \cap M_G(A,P)$.

On en déduit que $H \cap M_G(A,P)$ contient $M_H(A,Q)$; de plus, comme

$M_G(A,P)$ ne contient pas $X_G(A)$ (cf. prop.6), on a alors $N_H(A) \neq M_H(A,Q)$ et par suite, A est un p-sous-groupe essentiel de H ; enfin, puisque $X_G(A)$ est un sous-groupe distingué de $N_H(A)$, $X_H(A)$ est un sous-groupe distingué de $X_G(A)$ et comme $X_H(A)/A$ n'est pas un p'-groupe, on a $X_H(A) = X_G(A)$ (cf. prop.7).

Proposition 9. Soit K un sous-groupe distingué de G ; posons $\overline{G} = G/K$ et, si H est un sous-groupe de G , notons $\overline{H}$ l'image de H dans $\overline{G}$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes

1. Le groupe $N_G(A)$ n'est pas contenu dans $K.M_G(A,P)$.

2. Le groupe A est un p-sous-groupe essentiel de G et K ne contient pas $O^p(X_G(A))$.

3. On a $K \cap P \subset A$ et $\overline{A}$ est un p-sous-groupe essentiel de $\overline{G}$.

De plus, dans ces conditions on a

$$N_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{N_G(A)} \quad , \quad M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P}) = \overline{M_G(A,P)} \quad , \quad X_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{X_G(A)} \quad \text{et} \quad S_{\overline{G}}(\overline{A}) \simeq S_G(A) \quad .$$

Démonstration: Démontrons d'abord que $K \cap P \subset A$ entraîne $N_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{N_G(A)}$; en effet, si $K \cap P \subset A$, A est un S_p-groupe de $A.K$ et comme $N_G(A.K)$ est l'image réciproque de $N_{\overline{G}}(\overline{A})$ dans G , on a $N_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{N_G(A)}$ (cf. (O2)).

Supposons que 1 soit vrai; nous allons démontrer 3 et l'inclusion $M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P}) \subset \overline{M_G(A,P)}$. Posons $M = N_K(A).M_G(A,P)$; comme M satisfait à la condition (M2), si $x \in N_G(A) - M$, A est un S_p-groupe de $M \cap M^x$ et par suite, il est un S_p-groupe de $A.N_K(A)$, donc de $A.K$ (cf. (O1)); par conséquent, A contient $K \cap P$ et on a $N_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{N_G(A)}$. De plus, comme M contient $N_K(A)$, pour tout $x \in N_G(A)$ on a

$$\overline{M_G(A,P)} \cap \overline{M_G(A,P)}^{\,\overline{x}} = \overline{M} \cap \overline{M}^{\,\overline{x}} = \overline{M \cap M^x} \quad ;$$

par suite, $\overline{M_G(A,P)}$ satisfait à la condition (M2) relativement au couple $\overline{G}$, $\overline{A}$. Il résulte alors du lemme 1, que $\overline{M_G(A,P)}$ satisfait aussi à la condition (M1) relativement à $\overline{G}$, $\overline{A}$, $\overline{P}$ et par conséquent, que $\overline{M_G(A,P)}$ contient $M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P})$; en particulier, on a $N_{\overline{G}}(\overline{A}) \neq M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P})$ et par suite, $\overline{A}$ est un p-sous-groupe essentiel de $\overline{G}$.

Supposons que 3 soit vrai; nous allons démontrer 2, l'inclusion $\overline{M_G(A,P)} \subset M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P})$, l'égalité $X_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{X_G(A)}$ et l'isomorphisme $S_{\overline{G}}(\overline{A}) \simeq S_G(A)$. Soit M' l'image réciproque de $M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P})$ dans $N_G(A)$; comme A contient $K \cap P$, on a $N_{\overline{G}}(\overline{A}) = \overline{N_G(A)}$ et par suite, on a $\overline{M'} = M_{\overline{G}}(\overline{A},\overline{P})$; de plus, on voit aisément que M' satisfait à la condition (M2); il résulte alors du lemme 1, que M'

contient $N(A) \cap N(P)$ (car $N(A) \cap N(P)$ normalise $N_P(A)$) et par suite, que M' contient $M_G(A,P)$; ceci démontre que A est un p-sous-groupe essentiel de G et que $M_{\bar{G}}(\bar{A},\bar{P})$ contient $\overline{M_G(A,P)}$. En outre, comme $\bar{A}$ n'est pas un S_p-groupe de $\overline{X_G(A)}$, $\overline{X_G(A)}$ contient $X_{\bar{G}}(\bar{A})$ et en particulier, $\overline{X_G(A)}$ n'est pas un p-groupe, d'où il résulte que K ne contient pas $O^p(X_G(A))$. Soit X l'image récirpoque de $X_{\bar{G}}(\bar{A})$ dans $X_G(A)$; alors, X/A n'est pas un p'-groupe et il est un sous-groupe distingué de $X_G(A)/A$; par conséquent, on a $X = X_G(A)$ (cf. prop.7), d'où il résulte que $X_{\bar{G}}(\bar{A}) = \overline{X_G(A)}$. Enfin, puisque A contient $K \cap P$, on a

$$K \cap X_G(A) \subset O_{pp'}(X_G(A)) \qquad ;$$

par conséquent, la projection de $X_G(A)$ sur $X_{\bar{G}}(\bar{A})$, induit un isomorphisme entre $S_G(A)$ et $S_{\bar{G}}(\bar{A})$.

Il nous reste à démontrer que 2 entraîne 1. Si 2 est vrai, $N_K(A)$ ne contient pas $O^p(X_G(A))$ et par suite, on a $N_G(A) \neq N_K(A).M_G(A,P)$ (cf. prop.6), ce qui démontre 1.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Les notations étant celles de la proposition 9, si</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G , <u>ou bien</u> $\bar{A}$ <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $\bar{G}$ <u>et on a</u> $S_{\bar{G}}(\bar{A}) \simeq S_G(A)$, <u>ou bien</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $K.P$ <u>et on a</u> $S_{K.P}(A) = S_G(A)$.

<u>Démonstration</u>: Si K ne contient pas $O^p(X_G(A))$, on est dans le premier cas d'après la proposition 9. Si K contient $O^p(X_G(A))$, $K.P$ contient $X_G(A)$ (cf. prop.6) et on est dans le deuxième cas d'après la proposition 8.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soient</u> G_1 , G_2 <u>des groupes finis et supposons que</u> $G = G_1 \times G_2$. <u>Alors</u>, A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G <u>si et seulement si cu bien</u> $A = P_1 \times A_2$ <u>où</u> P_1 <u>est un</u> S_p-<u>groupe de</u> G_1 <u>et</u> A_2 <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G_2 , <u>ou bien</u> $A = A_1 \times P_2$ <u>où</u> A_1 <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G_1 <u>et</u> P_2 <u>est un</u> S_p-<u>groupe de</u> G_2 . <u>Dans ces conditions</u>, $X_G(A)$ <u>est égal suivant le cas, à</u> $P_1 \times X_{G_2}(A_2)$ <u>ou à</u> $X_{G_1}(A_1) \times P_2$.

<u>Démonstration</u>: D'après nos hypothèses, on a $P = P_1 \times P_2$ où P_1 et P_2 sont respectivement des S_p-groupes de G_1 et de G_2 . Supposons que A soit un p-sous-groupe essentiel de G ; comme $O^p(X_G(A)) \neq 1$, l'un des facteurs ne contient pas $O^p(X_G(A))$. Or, d'après la proposition 9, si G_1 ne contient pas $O^p(X_G(A))$, A contient P_1 et la projection A_2 de A dans G_2 est un p-sous-groupe essentiel de G_2 ; en particulier, dans ce cas on a $A = P_1 \times A_2$. De même pour G_2 .

Réciproquement, si $A = P_1 \times A_2$ où A_2 est un p-sous-groupe essentiel de G_2 , A est un p-sous-groupe essentiel de G (cf. prop.9) et comme

$N_G(A) = N_{G_1}(P_1) \times N_{G_2}(A_2)$, on vérifie aisément que l'on a $X_G(A) = P_1 \times X_{G_2}(A_2)$.

<u>Proposition 10. Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

1. <u>Le groupe</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G .
2. <u>Le groupe</u> 1 <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $N(A)/A$.
3. <u>On a</u> $A \neq P$ <u>et le quotient</u> $N(A)/A$ <u>possède un sous-groupe propre de</u> 1^*-<u>contrôle relativement à</u> p .

<u>De plus, dans ces conditions on a</u> $X(A)/A = X_{N(A)/A}(1)$.

<u>Démonstration</u>: Si A est un p-sous-groupe essentiel de G , en vertu des propositions 8 et 9, l'assertion 2 est vraie et on a $X(A)/A = X_{N(A)/A}(1)$. Supposons que l'assertion 2 soit vraie; posons $N(A)/A = H$ et soit Q un S_p-groupe de H ; on a alors $H \neq M_H(1,Q)$, $Q \neq 1$ et $M_H(1,Q)$ est un sous-groupe de 1^*-contrôle de H relativement à p (cf. ch.I, §3). Enfin, si l'assertion 3 est vraie et si M est l'image réciproque dans $N(A)$ d'un sous-groupe propre de 1^*-contrôle de $N(A)/A$ relativement à p , M contient un S_p-groupe de $N(A)$ (cf. ch.I, §3) et on voit aisément qu'il satisfait à la condition (M2); l'assertion 1 résulte alors du lemme 1.

CHAPITRE III

Les doubles flèches à but maximal

Soient G un groupe fini, p un nombre premier et $(\mathfrak{U},W)$ une p-localité de G. Une double flèche de $(\mathfrak{U},W)$ est un couple de $\mathfrak{U}_W$-morphismes ayant la même source et le même but; si $(B,x,A)_W$ et $(B,y,A)_W$ sont deux $\mathfrak{U}_W$-morphismes, on écrira $(B,x,y,A)_W$ au lieu de $((B,x,A)_W,(B,y,A)_W)$. Une double flèche à but maximal de $(\mathfrak{U},W)$ est une double flèche de $(\mathfrak{U},W)$ dont le but est un S_p-groupe de G ; on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des doubles flèches à but maximal de $(\mathfrak{U},W)$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ dont la source est aussi un S_p-groupe de G.

Dorénavant, nous écrirons les doubles flèches de $(\mathfrak{U},W)$ et les $\mathfrak{U}_W$-morphismes sans l'indice W tant qu'il n'y aura pas de confusion à craindre.

Si (B,x,y,A) et (B,z,u,A) sont des doubles flèches de $(\mathfrak{U},W)$ telles que l'on ait $(B,y,A) = (B,z,A)$, on pose

$$(B,x,y,A) + (B,z,u,A) = (B,x,u,A)$$

et on dit que (B,x,u,A) est la somme de (B,x,y,A) et de (B,z,u,A). Si (A,v,C) et (D,w,B) sont des $\mathfrak{U}_W$-morphismes, on pose

$$(B,x,y,A)(A,v,C) = (B,xv,yv,C) \quad , \quad (D,w,B)(B,x,y,A) = (D,wx,wy,A)$$

et on dit que (B,xv,yv,C) (resp. (D,wx,wy,A)) est le produit de (B,x,y,A) par (A,v,C) (resp. par (D,w,B)). Ces opérations satisfont à des conditions d'associativité et de distributivité évidentes.

Soient (B,x,y,A) une double flèche et $\mathcal{C}$ un ensemble de doubles flèches de $(\mathfrak{U},W)$; on dit que (B,x,y,A) est engendré par $\mathcal{C}$ (ou qu'elle est égale à une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{C}$) s'il existe une suite $\{(B_i,x_i,y_i,A_i)\}_{i=1,\dots,n}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ et deux suites $\{(A_i,u_i,A)\}_{i=1,\dots,n}$, $\{(B,v_i,B_i)\}_{i=1,\dots,n}$ de $\mathfrak{U}_W$-morphismes telles que la formule

$$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$$

soit vraie. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$ si tout élément de $\mathcal{D}$ est engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$. Dans ce chapitre nous allons étudier les systèmes directeurs minimaux de $\mathcal{D}$.

Proposition 1. Soient A un élément de $\mathfrak{U}$, P un S_p-groupe de G contenant A et $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{U}$. L'ensemble des $x \in N(A)$ tels que $(P,1,x,A)$ soit engendré par $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de $N(A)$ qui contient $W(A)$ et $N(A) \cap N(P)$.

Démonstration: Notons H cet ensemble; si $x \in N(A) \cap N(P)$ et $w \in W(A)$, on a

$$(P,1,xw,A) = (P,1,x,P)(P,1,A)$$

et par suite, H contient $N(A) \cap N(P)$ et $W(A)$; de plus, si x , $y \in N(A)$, on a
$$(P,1,xy,A) = (P,1,y,A) + (P,1,x,A)(A,y,A)$$
et par conséquent, si x et y appartiennent à H , il en est de même pour xy .

Soit $(B,x,y,A) \in \mathcal{D}$; on appelle <u>longueur de</u> (B,x,y,A) l'entier $|B|/|A|$; ainsi, $\mathcal{U}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ de longueur égale à 1 . On dit que (B,x,y,A) est <u>réductible</u> s'il est ou bien de longueur égale à 1 , ou bien engendré par l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ de longueurs strictement inférieures à $|B|/|A|$; on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments réductibles de $\mathcal{D}$. Il est clair que <u>si</u> $(B,x,A) = (B,y,A)$, (B,x,y,A) <u>est réductible</u>. De plus, d'après l'associativité et la distributivité de la somme et du produit, <u>tout élément de</u> $\mathcal{D}$ <u>engendré par</u> $\mathcal{R}$ <u>appartient à</u> $\mathcal{R}$.

<u>Proposition 2. Un élément</u> (B,x,y,A) <u>de</u> $\mathcal{D}$ <u>est réductible si et seulement s'il existe une suite</u> $\{P_i\}_{i=0,\dots,n}$ <u>de</u> S_p<u>-groupes de</u> G <u>contenant</u> A , <u>telle que</u> $P_o = B^x$, $P_n = B^y$ <u>et telle que si</u> $1 \leq i \leq n$, <u>ou bien</u> $A \neq P_i \cap P_{i-1}$, <u>ou bien il existe</u> $w \in W(A)$ <u>tel que</u> $P_i = (P_{i-1})^w$. <u>En particulier, si</u> (B,x,y,A) <u>est réductible, il en est de même pour</u> (B,y,x,A) .

<u>Démonstration</u>: Supposons qu'il existe une telle suite. Soient $z_i \in G$, $0 \leq i \leq n$, tels que $P_i = B^{z_i}$; d'après nos hypothèses, on peut choisir ces éléments de sorte que $z_o = x$, $z_n = y$ et que si $A = P_i \cap P_{i-1}$, on ait $(z_{i-1})^{-1}z_i \in W(A)$; on a alors
$$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,z_i,z_{i-1},A)$$
et tous les éléments (B,z_i,z_{i-1},A) sont réductibles; par conséquent, (B,x,y,A) est réductible.

Réciproquement, supposons que $(B,x,y,A) \in \mathcal{R}$. Si $(B,x,y,A) \in \mathcal{U}$, on a $B^x = B^y$. Supposons que $(B,x,y,A) \in \mathcal{R} - \mathcal{U}$; dans ce cas on a
$$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$$
où $|B_i|/|A_i| < |B|/|A|$ pour tout $i \leq n$; posons $z_o = x$, $z_{2n+1} = y$, $z_{2i-1} = v_i x_i u_i$ et $z_{2i} = v_i y_i u_i$ où $1 \leq i \leq n$; la suite $\{B^{z_i}\}_{i=0,\dots,2n+1}$ satisfait alors aux conditions de l'énoncé.

Soient (B,x,y,A) , $(B',x',y',A') \in \mathcal{D}$; on dit que (B,x,y,A) <u>est échangeable avec</u> (B',x',y',A') s'il existe u , $v \in G$ tels que l'on ait $A' = A^u$, $B' = B^v$ et tels que $(B,x,vx'u^{-1},A)$ et $(B,vy'u^{-1},y,A)$ soient réductibles. S'il en est ainsi, $(B',x',v^{-1}xu,A')$ et $(B',v^{-1}yu,y',A')$ sont encore réductibles (cf. prop.2) et par suite, (B',x',y',A') est échangeable avec (B,x,y,A) ; on dira simplement que (B,x,y,A) et (B',x',y',A') sont échangeables. De plus, puisque la somme de deux éléments de $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{R}$, l'échangeabilité est transitive. Par conséquent, l'échangeabilité est une relation d'équivalence. En outre, il est clair que pour tout $u, v \in G$, (B,x,y,A) est échangeable avec $(B^v, v^{-1}xu, v^{-1}yu, A^u)$.

Proposition 3. Si (B,x,y,A) et (B',x',y',A') sont des éléments échangeables de $\mathcal{D}$, (B,x,y,A) est engendré par $\{(B',x',y',A')\} \cup \mathcal{R}$. En particulier, tout élément de $\mathcal{D}$ échangeable avec un élément de $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{R}$.

Démonstration: Il suffit de remarquer que s'il existe $u, v \in G$ tels que $A' = A^u$ et $B' = B^v$, on a légalité suivante

$$(B,x,y,A) = (B,x,r,A) + (B,v,B')(B',x',y',A')(A',u^{-1},A) + (B,s,y,A)$$

où $r = vx'u^{-1}$ et $s = vy'u^{-1}$.

On dit qu'un élément de $\mathcal{D}$ est irréductible s'il n'appartient pas à $\mathcal{R}$. Nous démontrerons que les éléments d'un système directeur minimal de $\mathcal{D}$ sont irréductibles et deux à deux non échangeables. Nous allons classifier d'abord les classes d'échangeabilité des éléments irréductibles de $\mathcal{D}$ à l'aide du théorème suivant.

Théorème 1. Soient $A \in \mathfrak{A}$, P un S_p-groupe de G contenant A , $z \in N(A)$ et $(B,x,y,A) \in \mathcal{D}$; posons $M = W(A).M(A,P)$ et soient $u, v \in N(A)$ tels que l'on ait $B^x \cap N(A) \subset M^u$ et $B^y \cap N(A) \subset M^v$. On a alors

1. La double flèche (B,x,y,A) est irréductible si et seulement si vu^{-1} n'appartient pas à M .

2. Les doubles flèches (B,x,y,A) et $(P,1,z,A)$ sont échangeables si et seulement si $MzM = Mvu^{-1}M$.

Nous allons décomposer la démonstration du théorème en une suite de quatre lemmes. Si $A = P$, on a $M = N(A)$ et les assertions 1 et 2 sont trivialement vraies; dorénavant nous supposons que $A \neq P$. Les notations sont toujours celles du théorème; de plus, on note Q un S_p-groupe de G contenant un S_p-groupe de $M(A,P)$ (rappelons que $M(A,P)$ contient un S_p-groupe de $N(A)$ (cf. ch.II, lemme 1)).

Lemme 1. Si (B,x,y,A) est réductible, vu^{-1} appartient à M .

Démonstration: D'après la proposition 2, il suffit de démontrer que $vu^{-1} \in M$

lorsque l'on a $A \neq B^x \cap B^y$ et lorsqu'il existe $w \in W(A)$ tel que $B^y = (B^x)^w$. Si $A \neq B^x \cap B^y$, on a encore $A \neq B^x \cap B^y \cap N(A)$ (cf. (01)) et par suite, A n'est pas un S_p-groupe de $M^u \cap M^v$; or, M satisfait à la condition (M2) du ch.II ; on a donc $vu^{-1} \in M$. Supposons qu'il existe $w \in W(A)$ tel que $B^y = B^{xw}$; on a alors $B^y \cap N(A) \subset M^{uw} \cap M^v$ et comme $A \neq B^y$, A n'est pas un S_p-groupe de $M^{uw} \cap M^v$; par conséquent, on a $vw^{-1}u^{-1} \in M$ et comme $uw^{-1}u^{-1}$ appartient à $W(A)$, vu^{-1} appartient à M .

<u>Lemme 2. L'ensemble des</u> $t \in N(A)$ <u>tels que</u> $(Q,1,t,A)$ <u>soit réductible est égal à</u> M .

<u>Démonstration</u>: Notons M' cet ensemble; d'après la proposition 1, M' est un sous-groupe de $N(A)$ qui contient $W(A)$. De plus, si B est un sous-groupe de Q qui contient strictement A , pour tout $t \in N(A) \cap N(B)$ la double flèche $(Q,1,t,A)$ est réductible; par conséquent, M' contient $N(A) \cap N(B)$. On en déduit que M' contient $M(A,P)$ (cf. ch.II, prop.2), donc qu'il contient M . Or, d'après le lemme 1, M' est contenu dans M (on prend $B = Q$, $x = u = 1$ et $y = v = t$). On a donc $M' = M$.

<u>Lemme 3. Les doubles flèches</u> (B,x,y,A) <u>et</u> $(Q,1,vu^{-1},A)$ <u>sont échangeables. En particulier, si</u> vu^{-1} <u>appartient à</u> M , (B,x,y,A) <u>est réductible</u>.

<u>Démonstration</u>: Posons $C = B^x \cap N(A)$ et $D = B^y \cap N(A)$ et soit $s \in G$ tel que $Q = B^s$. D'après notre choix de u , v , il existe m , $n \in M$ tels que l'on ait $C \subset Q^{mu}$ et $D \subset Q^{nv}$; comme $A \neq C$ et $A \neq D$, les doubles flèches (B,x,smu,A) et (B,snv,y,A) sont réductibles (cf. prop.2) et par suite, (B,x,y,A) et (Q,mu,nv,A) sont échangeables. D'autre part, d'après le lemme 2, $(Q,1,m,A)$ et $(Q,1,n,A)$ sont réductibles et par suite, il en est de même pour (Q,mu,u,A) et pour (Q,v,nv,A) ; on en déduit que (Q,mu, nv,A) et $(Q,1,vu^{-1},A)$ sont échangeables. Par conséquent, (B,x,y,A) et $(Q,1,vu^{-1},A)$ sont aussi échangeables.

La deuxième assertion résulte de la première, de la proposition 3 et du lemme 2.

<u>Lemme 4. Les doubles flèches</u> (B,x,y,A) <u>et</u> $(P,1,z,A)$ <u>sont échangeables si et seulement si</u> $MzM = Mvu^{-1}M$.

<u>Démonstration</u>: Supposons que $z = mvu^{-1}n$ où m , $n \in M$; en vertu du lemme 3, $(Q,1,vu^{-1},A)$ est alors échangeable avec $(P,1,z,A)$ (on prend $B = P$, $x = 1$, $y = z$ et on choisit $u' = n$ et $v' = vu^{-1}n$); par conséquent, (B,x,y,A) et $(P,1,z,A)$ sont échangeables. Réciproquement, si (B,x,y,A) et $(P,1,z,A)$ sont échangeables, il existe r , $s \in G$ tels que $A = A^r$, $P = B^s$ et tels que

(B,x,sr^{-1},A) et (B,szr^{-1},y,A) soient réductibles; comme r normalise A, on a alors $B^{sr^{-1}} \cap N(A) = N_p(A)^{r^{-1}} \subset M^{r^{-1}}$ et $B^{szr^{-1}} \cap N(A) = N_p(A)^{zr^{-1}} \subset M^{zr^{-1}}$.

En vertu du lemme 1, on en déduit que $r^{-1}u^{-1}$ et vrz^{-1} appartienent à M et par suite, que vu^{-1} appartient à MzM.

<u>Corollaire 1. Les notations étant celles du théorème 1, l'application de</u> $N(A)$ <u>dans</u> $\mathcal{D}$ <u>qui à</u> z <u>fait correspondre</u> $(P,1,z,A)$, <u>induit une bijection entre l'ensemble des</u> (M,M)<u>-classes doubles de</u> $N(A)$ <u>différentes de</u> M <u>et l'ensemble des classes d'échangeabilité des éléments irréductibles de</u> $\mathcal{D}$ <u>dont la source est un conjugué de</u> A <u>dans</u> G.

<u>Démonstration</u>: D'après l'assertion 1 du théorème, si $z \in N(A) - M$, la double flèche $(P,1,z,A)$ est irréductible (on prend $B = P$, $x = u = 1$ et $y = v = z$); de plus, d'après l'assertion 2, si $z' \in N(A)$, les doubles flèches $(P,1,z,A)$ et $(P,1,z',A)$ sont échangeables si et seulement si $MzM = Mz'M$; ceci démontre l'existence et l'injectivité de l'application induite. D'autre part, si $(B',x',y',A') \in \mathcal{D} - \mathcal{R}$ et si $A' = A^u$ où $u \in G$, on sait que (B',x',y',A') et $(B',x'u^{-1},y'u^{-1},A)$ sont échangeables; d'après les assertions 1 et 2 du théorème, (B',x',y',A') est donc échangeable avec une double flèche de la forme $(P,1,v,A)$ où $v \in N(A) - M$.

D'après le corollaire 1, un élément A de $\mathfrak{A}$ est la source d'un élément irréductible de $\mathcal{D}$ si et seulement si $N(A) \neq W(A).M(A,P)$; dans ce cas, on dit que A est un p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>essentiel de</u> G. Il est clair qu'un tel p-sous-groupe est un p-sous-groupe essentiel de G (cf. ch.II); réciproquement, <u>tout</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G <u>est un</u> p-<u>sous-groupe</u> 1-<u>essentiel de</u> G (i.e. relativement à la 1-localité de G). Le corollaire suivant permet d'obtenir les p-sous-groupes $(\mathfrak{A},W)$- essentiels à partir des p-sous-groupes essentiels.

Si $A \in \mathfrak{A}$, on note $\widetilde{W}(A)$ l'image réciproque de $O_p(N(A)/W(A))$ dans $N(A)$.

<u>Corollaire 2. Un élément</u> A <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>est un</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>essentiel de</u> G <u>si et seulement s'il satisfait à l'une des conditions suivantes</u>

1. <u>On a</u> $N(A) \neq W(A).M(A,P)$.
2. <u>Le groupe</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G <u>et</u> $W(A)$ <u>ne contient pas</u> $O^p(X(A))$.
3. <u>Le groupe</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G <u>et un</u> S_p-<u>groupe de</u> $\widetilde{W}(A)$.

<u>Démonstration</u>: D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que les conditions 1,

2, 3 sont équivalentes. Démontrons que 1 entraîne 3; posons $M = W(A).M(A,P)$; comme $\tilde{W}(A)/W(A)$ est un p-groupe, M contient $\tilde{W}(A)$; or, M satisfait à la condition (M2) du ch.II ; par suite, si $M \neq N(A)$, A est un S_p-groupe de $\tilde{W}(A)$. De plus, si A est un S_p-groupe de $\tilde{W}(A)$, $\tilde{W}(A)$ ne contient pas $X(A)$ (cf. ch.II, §1) et par suite, $W(A)$ ne contient pas $O^p(X(A))$. Enfin, d'après la proposition 6 du ch.II, §1, 2 entraîne 1 .

Théorème 2. Soient P un S_p-groupe de G et $\mathfrak{R}$ un système de représentants dans P des classes de conjugaison dans G des p-sous-groupes $(\mathfrak{U},W)$-essentiels de G . Un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathfrak{R}$, $N(A)$ est engendré par l'ensemble des $x \in N(A)$ tels que $(P,1,x,A)$ soit échangeable avec un élément irréductible de $\mathcal{C}$.

Nous allons décomposer la démonstration du théorème en une suite de quatre lemmes. Les notations sont toujours celles du théorème; de plus, si A est un p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G contenu dans P , on pose $M_A = W(A).M(A,P)$ et si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, on note $\mathcal{C}_A$ l'ensemble des $x \in N(A)$ tels que $(P,1,x,A)$ soit échangeable avec un élément irréductible de $\mathcal{C}$.

Lemme 5. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Si $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ l'est également.

Démonstration: Nous allons démontrer que tout élément (B,x,y,A) de $\mathcal{D}$ est engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$ en raisonnant par récurrence sur la longueur l de (B,x,y,A) . Si $l = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $l > 1$; d'après nos hypothèses, (B,x,y,A) est égal à une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$ de longueurs $\leq l$. Or, tout élément (B',x',y',A') de $\mathcal{R}$ de longueur $\leq l$ est engendré par l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ de longueurs $< l$; on en déduit, grâce à l'hypothèse de récurrence, que (B',x',y',A') est engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$. Par conséquent, (B,x,y,A) est aussi engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$.

Lemme 6. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$ et si tout élément irréductible de $\mathcal{C}$ est échangeable avec un élément de $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}'$ est également un système directeur de $\mathcal{D}$.

Démonstration: D'après le lemme 5, il suffit de démontrer que tout élément irréductible de $\mathcal{C}$ est engendré par $\mathcal{C}' \cup \mathcal{R}$. Or, d'après nos hypothèses, si (B,x,y,A) est un élément irréductible de $\mathcal{C}$, il est échangeable avec un élément (B',x',y',A') de $\mathcal{C}'$ et par suite, il est engendré par $\{(B',x',y',A')\} \cup \mathcal{R}$ (cf. prop.3).

<u>Lemme 7. Pour tout</u> $A \in \mathfrak{R}$ <u>, soit</u> Y_A <u>un sous-ensemble de</u> $N(A)$ <u>dont la réunion avec</u> M_A <u>engendre</u> $N(A)$ <u>. L'ensemble des doubles flèches de la forme</u> $(P,1,x,A)$ <u>où</u> $A \in \mathfrak{R}$ <u>et</u> $x \in Y_A$ <u>, est alors un système directeur de</u> $\mathcal{D}$.

<u>Démonstration</u>: Notons $\mathcal{C}$ cet ensemble et soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ engendrés par $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$; d'après les lemmes 5 et 6, il suffit de démontrer que tout élément irréductible de $\mathcal{D}$ est échangeable avec un élément de $\mathcal{D}'$. Soit (B',x',y',A') un élément irréductible de $\mathcal{D}$; A' est donc un sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G et par suite, il est conjugué d'un élément A de $\mathfrak{R}$; en vertu du corollaire 1, il existe alors $x \in N(A)$ tel que $(P,1,x,A)$ soit échangeable avec (B',x',y',A') . Il suffit de démontrer maintenant que pour tout $A \in \mathfrak{R}$ et tout $x \in N(A)$, $(P,1,x,A)$ est engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$.

Soit $A \in \mathfrak{R}$; l'ensemble des $x \in N(A)$ tels que $(P,1,x,A)$ soit engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$ est un sous-groupe de $N(A)$ (cf. prop. 1) et il contient Y_A et M_A (car si $x \in M_A$, $(P,1,x,A)$ est réductible); par suite, d'après nos hypothèses, il est égal à $N(A)$.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$; nous sommes en mesure de démontrer que si $\mathcal{C}_A$ engendre $N(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{R}$, $\mathcal{C}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$. En effet, en vertu du lemme 7, l'ensemble $\mathcal{C}'$ des doubles flèches de la forme $(P,1,x,A)$ où $A \in \mathfrak{R}$ et $x \in \mathcal{C}_A$, est alors un système directeur de $\mathcal{D}$. et l'assertion résulte tout de suite du lemme 6.

Si $A \in \mathfrak{R}$, il est clair que l'on a $(\mathcal{C} \cup \mathcal{U})_A = \mathcal{C}_A$; par suite, le lemme suivant achève la démonstration du théorème.

<u>Lemme 8. Soient</u> $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ <u>et</u> A <u>un</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>essentiel de</u> G <u>contenu dans</u> P <u>. Si pour tout</u> $x \in N(A)$ <u>, la double flèche</u> $(P,1,x,A)$ <u>est engendrée par</u> $\mathcal{C}$ <u>, l'ensemble</u> $\mathcal{C}_A$ <u>engendre</u> $N(A)$.

<u>Démonstration</u>: Soit N_A le sous-groupe de $N(A)$ engendré par $\mathcal{C}_A$ et supposons que $(P,1,x,A)$ soit engendré par $\mathcal{C}$ pour tout $x \in N(A)$; nous allons démontrer d'abord que N_A contient M_A . Puisque A est $(\mathfrak{U},W)$-essentiel, on a $M_A \neq N(A)$; soit $x \in N(A) - M_A$; alors, $(P,1,x,A)$ est égal à une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{C}$; or, comme $(P,1,x,A)$ est irréductible (cf. th. 1), l'un des éléments d'une telle combinaison est irréductible et de longueur égale à celle de $(P,1,x,A)$; par conséquent, un conjugué de A est la source d'un élément irréductible de $\mathcal{C}$. D'après le corollaire 1, $\mathcal{C}_A$ contient donc une (M_A,M_A)-classe double de $N(A)$ et par suite, N_A contient M_A .

Soient $x \in N(A)$ et $(P,1,x,A) = \sum_{i=1}^{n} (P,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$ une décomposition de $(P,1,x,A)$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{C}$; posons $z_o = 1$, $z_{2n+1} = x$, $z_{2i-1} = v_i x_i u_i$ et $z_{2i} = v_i y_i u_i$ où $1 \leq i \leq n$ et soient $r_j \in N(A)$, $0 \leq j \leq 2n+1$, tels que l'on ait

$$P^{z_j} \cap N(A) \subset (M_A)^{r_j} \quad \text{si} \quad 0 \leq j \leq 2n+1 \qquad ;$$

on a alors $(P,z_{2i},A) = (P,z_{2i+1},A)$ si $0 \leq i \leq n$, et si $1 \leq i \leq n$, on a

$$(P,z_{2i-1},z_{2i},A) = (P,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A) \qquad .$$

On en déduit que (P,z_j,z_{j+1},A) n'est irréductible que lorsqu'il est échangeable avec un élément irréductible de $\mathcal{C}$; par conséquent, pour tout $j \leq 2n$, l'élément $r_{j+1}(r_j)^{-1}$ appartient soit à M_A , soit à $\mathcal{C}_A$ (cf. th. 1), donc il appartient à N_A . Or, nous pouvons choisir $r_o = 1$ et $r_{2n+1} = x$. Il s'en suit que x appartient à N_A et par suite, que $N_A = N(A)$.

Avec les notations précédentes, d'après le corollaire 1, $\mathcal{C}_A$ est une réunion de (M_A,M_A)-classes doubles de $N(A)$.

<u>Corollaire. Avec les notations précédentes, un sous-ensemble</u> $\mathcal{C}$ <u>de</u> $\mathcal{D}$ <u>est un système directeur minimal de</u> $\mathcal{D}$ <u>si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes</u>

1. <u>Tout élément de</u> $\mathcal{C}$ <u>est irréductible</u>.
2. <u>Les éléments de</u> $\mathcal{C}$ <u>sont deux à deux non échangeables</u>.
3. <u>Pour tout</u> $A \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{C}_A$ <u>est un élément minimal de l'ensemble des parties de</u> $N(A)$ <u>qui sont la réunion de</u> (M_A,M_A)<u>-classes doubles et qui engendrent le groupe</u> $N(A)$.

<u>Démonstration</u>: Supposons que $\mathcal{C}$ soit un système directeur minimal de $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}'$ est un système de représentants dans $\mathcal{C}$ des classes d'échangeabilité des éléments irréductibles de $\mathcal{C}$, il résulte du lemme 6 que $\mathcal{C}'$ est encore un système directeur de $\mathcal{D}$ et par suite, que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$; ceci démontre que $\mathcal{C}$ satisfait aux conditions 1 et 2 . D'après le théorème 2, $\mathcal{C}$ satisfait aussi à la condition 3.

Soit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$; supposons que $\mathcal{C}$ satisfasse aux conditions 1, 2, 3 et que $\mathcal{C}'$ soit un système directeur de $\mathcal{D}$; nous allons démontrer que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$. D'après la condition 3 et le théorème 2, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{C}'_A$ et $\mathcal{C}_A$ coïncident; par conséquent, tout élément irréductible de $\mathcal{C}$ est échangeable avec un élément de $\mathcal{C}'$; ainsi, d'après les conditions 1 et 2, tout élément de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}'$; on a donc $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

On remarquera que les notions étudiées dans ce chapitre expriment des propriétés $(\mathfrak{A},W)$-locales de G (cf. ch.I, §2). Plus précisément, soient G' un deuxième groupe fini, $(\mathfrak{A}',W')$ une p-localité de G' , $\mathcal{D}'$ l'ensemble des doubles flèches à but maximal de $(\mathfrak{A}',W')$ et R' l'ensemble des éléments réductibles de D' ; si les p-localités $(\mathfrak{A},W)$ et $(\mathfrak{A}',W')$ sont équivalentes (cf. ch.I, §2) et si φ est une équivalence de catégories entre $\mathfrak{A}_W$ et $\mathfrak{A}'_{W'}$, on voit aisément que φ induit une application f de D dans D' qui conserve la longueur, que l'on a $f^{-1}(R') = R$ et que f induit une bijection entre les ensembles des classes d'échangeabilité des éléments irréductibles de D et de D' ; de plus, un sous-ensemble C de D est un système directeur de D si et seulement si $f(C)$ est un système directeur de D' ; enfin, un élément A de $\mathfrak{A}$ est un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G si et seulement si $\varphi(A)$ est un p-sous-groupe $(\mathfrak{A}',W')$-essentiel de G' .

§ 1. Un exemple

Dans ce paragraphe nous supposons que $(\mathfrak{A},W)$ est la 1-localité de G relative à p . Nous allons montrer que le théorème principal de (1) est une conséquence du fait qu'un certain sous-ensemble T de D est un système directeur de D et que ceci résulte du théorème 2.

On dit qu'un p-sous-groupe A de G est une "tame intersection" (cf.(1)) s'il est égal à l'intersection de deux S_p-groupes de $N(A)$. Si A est un p-sous-groupe essentiel de G , P un S_p-groupe de G contenant A et x un élément de $N(A) - M(A,P)$, on a $A = N_p(A) \cap N_p(A)^x$ (cf. ch.II, cond.(M2)); par conséquent, tout p-sous-groupe essentiel de G est une "tame intersection" dans G (la réciproque est fausse: le groupe 1 est toujours une "tame intersection" dans $GL(n,p^m)$ tandis qu'il n'est un p-sous-groupe essentiel de $GL(n,p^m)$ que si $n = 2$ (cf. app.I)).

Proposition 4. Soient P un S_p-groupe de G et $\mathfrak{S}$ l'ensemble des "tame intersections" A telles que P contienne un S_p-groupe de $N(A)$. L'ensemble T des doubles flèches de la forme $(P,1,x,A)$ où $A \in \mathfrak{S}$ et x est un p-élément de $N(A)$ est un système directeur de D .

Démonstration: Puisque tout p-sous-groupe 1-essentiel de G est une "tame intersection" , $\mathfrak{S}$ contient un système de représentants des classes de conjugaison dans G des p-sous-groupes 1-essentiels de G . De plus, si A est un p-sous-groupe 1-essentiel de G contenu dans P , on a $N(A) = O^{p'}(N(A)).M(A,P)$ (cf. ch.II, prop.6); comme $O^{p'}(N(A))$ est le sous-groupe de $N(A)$ engendré par les p-éléments de $N(A)$, la proposition résulte alors du lemme 7.

D'après la proposition 4, tout élément de D est engendré par $T \cup U$. Or, on voit aisément que tout élément de D engendré par U est de la forme (B,nu,u,A) où n normalise B . De plus, si $(B,u,v,A) \in D$ et si n normalise

B , on a l'égalité suivante

$$(B,nu,u,A) + (B,u,v,A) = (B,n,B)(B,u,v,A) + (B,nv,v,A) \quad .$$

Il en résulte que tout élément (B,x,y,A) de $\mathcal{D}$ est égal à la somme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{T}$ et d'un élément de $\mathcal{D}$ de la forme (B,nu,u,A) où n normalise B .

Corollaire. (cf. (1)). Les notations étant celles de la proposition 4, soit E un sous-ensemble de P . Si x est un élément de G tel que $E^x \subset P$, il existe $y \in N(P)$, une suite $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments de $\mathfrak{S}$ et pour tout $i \leq n$, un p-élément x_i de $N(A_i)$ qui satisfont aux coditions suivantes

1. On a $x = x_1 \ldots x_n y$
2. On a $E \subset A_1$ et pour tout $i \leq n-1$, $E^{x_1 \ldots x_i} \subset A_{i+1}$.

Démonstration: Soit A le sous-groupe de P engendré par E ; d'après notre hypothèse, on a $A^x \subset P$ et par suite, $(P,1,x^{-1},A)$ est un élément de $\mathcal{D}$. En vertu de la proposition 4 et des remarques précédentes, on a alors

$$(P,1,x^{-1},A) = \sum_{i=1}^{n} (P,v_i,P)(P,1,z_i,B_i)(B_i,u_i,A) + (P,tu,u,A)$$

où $t \in N(P)$, $B_i \in \mathfrak{S}$ et z_i est un p-élément de $N(B_i)$, $1 \leq i \leq n$. D'après cette formule, v_i normalise P , A est contenu dans $(B_i)^{u_i}$ et on a $1 = v_1 u_1$, $x^{-1} = u$, $tu = v_n z_n u_n$ et $v_{i+1} u_{i+1} = v_i z_i u_i$ où $i \leq n-1$. Par conséquent, il suffit de prendre

$$y = t \quad , \quad A_i = (B_i)^{v_i^{-1}} \quad \text{et} \quad x_i = (z_i^{-1})^{v_i^{-1}} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \quad .$$

§ 2. Une application

Nous allons appliquer le théorème 2 au calcul des groupes d'homologie et de cohomologie de G . Nous empruntons les notations de (4), ch.XII, §8 (sauf pour les groupes et le module). Soient L un G-module et P un S_p-groupe de G ; d'après le théorème 10.1 de (4), ch.XII, §10, l'image de l'application $i(P,G)$ de $\hat{H}(G,L)$ dans $\hat{H}(P,L)$ est isomorphe à la composante p-primaire de $\hat{H}(G,L)$, et égale à l'ensemble des éléments stables de $\hat{H}(P,L)$; nous allons voir que le théorème 2 simplifie le calcul des éléments stables de $\hat{H}(P,L)$.

Supposons que $(\mathfrak{U},W)$ soit la 1-localité de G relative à p (i.e. que $\mathfrak{U}$ soit l'ensemble des p-sous-groupes de G et que $W=1$). On note h le foncteur contravariant de $\mathfrak{U}_W$ dans la catégorie des $\underline{Z}$-modules gradués (sur $\underline{Z}$) défini par

(h1) Si A est un p-sous-groupe de G , $h(A) = \hat{H}(A,L)$

(h2) Si (B,x,A) est un $\mathfrak{U}_W$-morphisme, $h(B,x,A) = i(A,B^x) \circ c_{x^{-1}}$

(On démontre que h est compatible avec la composition de morphismes à l'aide des égalités (4), (5) et (10) de (4), ch.XII, §8). Si A est un p-sous-groupe de G, h définit une opération de $N(A)$ sur $\hat{H}(A,L)$ et si $X \subset N(A)$, on note $\hat{H}(A,L)^X$ l'ensemble des points fixes de X dans $\hat{H}(A,L)$. Si $(B,x,y,A) \in \mathcal{D}$, on pose
$$K(B,x,y,A) = \mathrm{Ker}(h(B,y,A) - h(B,x,A)) \quad ;$$
$K(B,x,y,A)$ est un sous-module de $\hat{H}(B,L)$ et on voit aisément qu'il contient tous les éléments stables de $\hat{H}(B,L)$; si $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ dont les éléments ont tous le même but B, on note $K(\mathcal{C})$ l'intersection des $K(B,x,y,A)$ où (B,x,y,A) parcourt les éléments de $\mathcal{C}$. D'après la définition d'élément stable (cf. (4), ch.XII, §9), <u>un élément de</u> $\hat{H}(P,L)$ <u>est stable si et seulement s'il appartient à</u> $K(\{(P,1,x,P \cap P^x) \mid x \in G\})$.

Le lemme suivant nous permettra d'appliquer ensuite le théorème 2.

<u>Lemme 9.</u> <u>Avec les notations précédentes, si</u> $\mathcal{C}$ <u>est un système directeur de</u> $\mathcal{D}$ <u>dont tous les éléments ont le but égal à</u> P, <u>on a</u>
$$\mathrm{Im}(i(P,G)) = \hat{H}(P,L)^{N(P)} \cap K(\mathcal{C}) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Il est clair que $\mathrm{Im}(i(P,G))$ est contenu dans $\hat{H}(P,L)^{N(P)}$ et on a vu que tout élément stable de $\hat{H}(P,L)$ appartient à $K(\mathcal{C})$. Il nous reste à démontrer que tout élément de $\hat{H}(P,L)^{N(P)} \cap K(\mathcal{C})$ est stable. Soient $a \in \hat{H}(P,L)^{N(P)} \cap K(\mathcal{C})$ et $x \in G$; d'après les remarques précédentes, il suffit de démontrer que a appartient à $K(P,1,x,P \cap P^x)$.

Si $\mathcal{C}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$, on a une égalité de la forme
$$(P,1,x,P \cap P^x) = \sum_{i=1}^{n} (P,v_i,P)(P,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,P \cap P^x)$$
où $(P,x_i,y_i,A_i) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{U}$, $1 \leq i \leq n$; on en déduit l'égalité suivante
$$h(P,x,P \cap P^x) - h(P,1,P \cap P^x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} h(A_i,u_i,P \cap P^x)(h(P,y_i,A_i) - h(P,x_i,A_i))h(P,v_i,P) \quad .$$

Or, comme $a \in \hat{H}(P,L)^{N(P)}$, on a $h(P,v_i,P)(a) = a$ et si (P,x_i,y_i,A_i) est de longueur égale à 1, on a
$$(h(P,y_i,A_i) - h(P,x_i,A_i))(a) = 0 \quad ;$$
de plus, comme $a \in K(\mathcal{C})$, si (P,x_i,y_i,A_i) appartient à $\mathcal{C}$, on a aussi
$$(h(P,y_i,A_i) - h(P,x_i,A_i))(a) = 0 \quad .$$
Par conséquent, a appartient à $K(P,1,x,P \cap P^x)$.

<u>Proposition 5. Avec les notations précédentes, soit</u> $\mathfrak{R}$ <u>un système de représentants dans</u> P <u>des classes de conjugaison dans</u> G <u>des p-sous-groupes 1-essentiels de</u> G ; <u>pour tout</u> $A \in \mathfrak{R}$, <u>soit</u> Y_A <u>un sous-ensemble de</u> $N(A)$ <u>dont la réunion avec</u> $M(A,P)$ <u>engendre</u> $N(A)$. <u>On a alors</u>

$$\mathrm{Im}(i(P,G)) = \hat{H}(P,L)^{N(P)} \cap \left[\bigcap_{A \in \mathfrak{R}} i(A,P)^{-1}(\hat{H}(A,L)^{Y_A})\right]$$

<u>Démonstration</u>: Si A est un sous-groupe de P et si $z \in N(A)$, on a

$$h(P,z,A) - h(P,1,A) = (h(A,z,A) - \mathrm{id}_{\hat{H}(A,L)}) \circ i(A,P) \qquad ;$$

par suite, $K(P,1,z,A)$ est égal à l'image réciproque par $i(A,P)$ des points fixes de z dans $\hat{H}(A,L)$; la proposition résulte maintenant des lemmes 7 et 9.

Supposons maintenant que G opère trivialement sur L . Alors, pour tout sous-groupe A de G et tout $x \in C(A)$, c_x est égal à l'identité sur $\hat{H}(A,L)$; par conséquent, h induit un foncteur contravariant h_C de la catégorie associée à la C-localité de G dans la catégorie des $\underline{Z}$-modules gradués (sur $\underline{Z}$). Suivant une démarche similaire, on obtient alors la proposition suivante.

<u>Proposition 6. Avec les notations précédentes, supposons que</u> G <u>opère trivialement sur</u> L . <u>Soit</u> $\mathfrak{R}$ <u>un système de représentants dans</u> P <u>des classes de conjugaison dans</u> G <u>des p-sous-groupes C-essentiels de</u> G <u>et pour tout</u> $A \in \mathfrak{R}$, <u>soit</u> Y_A <u>un sous-ensemble de</u> $N(A)$ <u>dont la réunion avec</u> $C(A).M(A,P)$ <u>engendre</u> $N(A)$. <u>On a alors</u>

$$\mathrm{Im}(i(P,G)) = \hat{H}(P,L)^{N(P)} \cap \left[\bigcap_{A \in \mathfrak{R}} i(A,P)^{-1}(\hat{H}(A,L)^{Y_A})\right] \qquad .$$

CHAPITRE IV

Les sous-groupes de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle

Soient G un groupe fini, p un nombre premier, $(\mathfrak{U},W)$ une p-localité de G et $\mathcal{D}$ l'ensemble des doubles flèches à but maximal de $(\mathfrak{U},W)$. Dans ce chapitre, nous allons donner des critères pour qu'un sous-groupe H de G soit un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle de G (cf. ch.I, §3), à l'aide des résultats du chapitre III.

Signalons d'abord une conséquence de la condition 2 de la définition des sous-groupes de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle (cf. ch.I, §3) qui sera utilisée souvent.

<u>Lemme 1. Si</u> H <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>contrôle de</u> G, <u>pour tout élément</u> A <u>de</u> $\mathfrak{U}$ <u>contenu dans</u> H <u>on a</u> $N(A) = W(A).N_H(A)$.

<u>Démonstration</u>: Il suffit de démontrer que sous les hypothèses de l'énoncé, on a $N(A) \subset H.W(A)$; or, si $x \in N(A)$ et si P est un S_p-groupe de H contenant A, on a $A \subset P \cap P^x$ et par suite, $P \cap P^x$ appartient à $\mathfrak{U}$ et on a $W(P \cap P^x) \subset W(A)$ (cf. ch.I, cond.(L2)); l'assertion résulte alors de la condition 2 de la proposition 2 du ch.I, §3.

Soit H un sous-groupe de G contenant un S_p-groupe P de G. Comme $P \in \mathfrak{U}$, nous pouvons construire la p-localité $\mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{U},W)$ de H (cf. ch.I, §3) et on note $\mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$ l'ensemble des doubles flèches à but maximal de $\mathrm{Res}_{H,G}(\mathfrak{U},W)$. Rappelons que le foncteur de $\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{U}_W$ dans $\mathfrak{U}_W$ défini par l'inclusion $H \subset G$ est fidèle (cf. ch.I, §3) et que nous avons identifié les $(\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{U}_W)$-morphismes à leurs images dans $\mathfrak{U}_W$; dans ces conditions, $\mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}$.

<u>Proposition 1. Soient</u> H <u>un sous-groupe de</u> G <u>contenant un</u> S_p-<u>groupe</u> P <u>de</u> G <u>et</u> $\mathfrak{R}$ <u>un système de représentants dans</u> P <u>des classes de conjugaison dans</u> G <u>des p-sous-groupes</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>essentiels de</u> G. <u>Les trois assertions suivantes sont alors équivalentes</u>

1. <u>Le groupe</u> H <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>contrôle de</u> G.
2. <u>On a</u> $N(P) = W(P).N_H(P)$ <u>et pour tout</u> $A \in \mathfrak{R}$, $N(A)$ <u>est engendré par la réunion de</u> $W(A)$, $M(A,P)$ <u>et</u> $N_H(A)$.
3. <u>On a</u> $(\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{U}_W)(P,P) = \mathfrak{U}_W(P,P)$ <u>et l'ensemble</u> $\mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$ <u>est un système directeur de</u> $\mathcal{D}$.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 1, 1 entraîne 2. Il est clair que les égalités

$$N(P) = W(P).N_H(P) \quad , \quad (\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{U}_W)(P,P) = \mathfrak{U}_W(P,P)$$

sont équivalentes; il résulte alors du lemme 7 du ch.III, que 2 entraîne 3. Enfin, nous allons démontrer que 3 entraîne 1; supposons que l'assertion 3 soit vraie; puisque H contient un S_p-groupe de G, il suffit de démontrer que pour tout $x \in G$ tel que $P \cap P^x \in \mathfrak{A}$, x appartient à $H.W(P \cap P^x)$ (cf. ch.I, §3, déf.).

Soit $x \in G$ tel que $P \cap P^x \in \mathfrak{A}$ et posons $A = P \cap P^x$; d'après l'assertion 3, $(P,1,x,A)$ est engendré par $U \cup \mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$ où U est l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ de longueur égale à 1 (cf. ch.III). D'autre part, il résulte sans difficulté de l'égalité

$$(\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{A}_W)(P,P) = \mathfrak{A}_W(P,P)$$

que tout élément de U est engendré par l'ensemble des éléments de longueur 1 de $\mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$ et que, si Q est un S_p-groupe de H, on a

$$(\mathrm{Res}_{H,G}\mathfrak{A}_W)(P,Q) = \mathfrak{A}_W(P,Q)$$

On en déduit que $(P,1,x,A)$ est égal à une combinaison linéaire d'éléments de $\mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$ et que si

$$(P,1,x,A) = \sum_{i=1}^{n} (P,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$$

est une telle combinaison, nous pouvons toujours supposer que les éléments x_i, y_i, v_i, $1 \leq i \leq n$, appartiennent à H. Posons $z_0 = 1$, $z_{2n+1} = x$, $z_{2i-1} = v_i x_i u_i$ et $z_{2i} = v_i y_i u_i$ si $1 \leq i \leq n$; nous allons démontrer que pour tout $j \leq 2n+1$, z_j appartient à $H.W(A)$; en particulier, ceci montrera que $x \in H.W(P \cap P^x)$. On raisonne par récurrence sur j ; si $j = o$ il n'y a rien à démontrer. Supposons que $j \leq 2n$ et $z_j \in H.W(A)$; si j est pair, la combinaison linéaire ci-dessus sous-entend que $(P,z_j,A) = (P,z_{j+1},A)$ et par suite, on a $(z_j)^{-1}z_{j+1} \in W(A)$, d'où il résulte que z_{j+1} appartient à $H.W(A)$; si $j = 2i-1$ où $1 \leq i \leq n$, on a

$$z_{j+1} = (v_i y_i (x_i)^{-1}(v_i)^{-1})z_j$$

et comme v_i, y_i, x_i appartiennent à H, z_{j+1} appartient encore à $H.W(A)$.

<u>Corollaire 1. Un sous-groupe H de G est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G si et seulement si pour tout p-sous-groupe A de G qui est ou bien un S_p-groupe de G, ou bien un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G, il existe $x \in G$ tel que l'on ait</u>

$$A \subset H^x \quad \underline{\text{et}} \quad N(A) = W(A).(N(A) \cap H^x) .$$

<u>Démonstration</u>: Si H est un sous-groupe de G qui satisfait à cette condition, H contient un S_p-groupe P de G tel que l'on ait $N(P) = W(P).N_H(P)$ et on voit aisément que, les notations étant celles de la proposition 1, il existe $\mathfrak{K}$ tel que

l'assertion 2 de cette proposition soit vraie; il s'en suit que H est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G. Réciproquement, si H est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G, il contient un S_p-groupe P de G (cf. ch.I, §3, déf.); le reste résulte alors du lemme 1.

<u>Corollaire 2. Les notations étant celles de la proposition 1, supposons que le groupe 1 ne soit pas un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G. Pour que H soit un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites</u>

1. <u>On a</u> $N(P) = W(P).N_H(P)$.
2. <u>Pour tout élément</u> x <u>d'ordre</u> p <u>de</u> P <u>qui centralise un élément de</u> $\mathfrak{A}$, $C_H(x)$ <u>est un sous-groupe de</u> $\mathrm{Res}_{C(x),G}(\mathfrak{A},W)$-<u>contrôle de</u> $C(x)$.

<u>Démonstration</u>: L'ensemble $\mathcal{C}$ des éléments de $\mathcal{D}$ de la forme $(P,1,y,A)$ où $A \in \mathfrak{R}$ et y est un p-élément de $N(A)$ est un système directeur de $\mathcal{D}$; en effet, pour tout $A \in \mathfrak{R}$, on a $N(A) = O^{p'}(N(A)).M(A,P)$ (cf. ch.II, prop.6) et comme $O^{p'}(N(A))$ est le sous-groupe de $N(A)$ engendré par les p-éléments de $N(A)$, l'assertion résulte du lemme 7 du ch.III. Par conséquent, d'après l'équivalence des assertions 1 et 3 de la proposition 1, il suffit de démontrer que la condition 2 ci-dessus entraîne $\mathcal{C} \subset \mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$. Soit $(P,1,y,A) \in \mathcal{C}$; d'après nos hypothèses, A n'est pas trivial et comme y est un p-élément qui normalise A, y centralise un élément x d'ordre p de $Z(A)$; par conséquent, le $\mathfrak{A}_W$-morphisme (A,y,A) appartient à $(\mathrm{Res}_{C(x),G}\mathfrak{A}_W)(A,A)$ (identifié à un sous-ensemble de $\mathfrak{A}_W(A,A)$). Si la condition 2 est satisfaite, $C_H(x)$ est alors un sous-groupe de $\mathrm{Res}_{C(x),G}(\mathfrak{A},W)$-contrôle de $C(x)$ et comme $A \subset C_H(x)$, il existe $z \in N(A) \cap C_H(x)$ tel que l'on ait $(A,y,A) = (A,z,A)$; on a alors $(P,1,y,A) = (P,1,z,A)$ et par suite, $(P,1,y,A)$ appartient à $\mathrm{Res}_{H,G}\mathcal{D}$.

On remarquera que dans le corollaire précédent, l'hypothèse "le groupe 1 n'est pas un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G" est nécessaire; en effet, le sous-groupe $M(1,P)$ contient $N(P)$ et $C(x)$ pour tout élément x d'ordre p de P (cf. ch.II, lemme 1) et par contre, si 1 est un p-sous-groupe 1-essentiel de G, on a $M(1,P) \neq G$, donc $M(1,P)$ n'est pas un sous-groupe de 1-contrôle de G (i.e. relativement à la 1-localité de G).

A l'aide du corollaire 2, nous allons donner un système générateur de $M(A,P)$ qui améliore celui de la proposition 2 du ch.II.

<u>Corollaire 3. Soient</u> P <u>un</u> S_p<u>-groupe de</u> G , A <u>un sous-groupe de</u> P <u>et</u> Q <u>un</u> S_p<u>-groupe de</u> $M(A,P)$. <u>Si</u> $A \neq P$, <u>le groupe</u> $M(A,P)$ <u>est engendré par la réunion de</u> $N(A) \cap N(Q)$ <u>et des</u> $N(A) \cap N(B)$ <u>où</u> $A \subset B \subset Q$ <u>et</u> $|B:A| = p$.

<u>Démonstration</u>: D'après la proposition 2 du ch.II, on a

$$M(A,P)/A = M_{N(A)/A}(1,Q/A)$$

et par conséquent, il suffit de démontrer le corollaire lorsque $A = 1$ et $Q = P$. Notons M le sous-groupe de G engendré par la réunion de $N(P)$ et des $N(B)$ où $B \subset P$ et $|B| = p$; d'après le corollaire 2 appliqué à la 1^*-localité de G relative à p , M est un sous-groupe de 1^*-contrôle de G ; par conséquent, M satisfait à la condition (M2) du ch.II relativement au p-sous-groupe 1 de G (car si C est un p-sous-groupe non trivial de $M \cap M^x$, $(C^{x^{-1}},x,C)$ est un 1^*-morphisme de G dont la source et le but sont contenus dans M et par suite, $x \in M$). Comme $N(P) \subset M$, on en déduit que M contient $M(1,P)$; or, d'après le lemme 1 du ch.II, M est contenu dans $M(1,P)$; on a donc $M = M(1,P)$.

§ 1. <u>Les</u> p-<u>sous-groupes</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>normaux</u>

Dans ce paragraphe nous allons étudier les éléments de $\mathfrak{U}$ dont le normalisateur est un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle de G .

On dit qu'un p-sous-groupe A de G est <u>fermé dans</u> G si pour aucun élément x de $G - N(A)$ le groupe $< A, A^x >$ n'est un p-groupe. Si P est un S_p-groupe de G qui contient A , on voit aisément que A <u>est fermé dans</u> G <u>si et seulement si pour tout</u> $x \in G$ <u>tel que</u> $A^x \subset P$, <u>on a</u> $A^x = A$ (i.e. si et seulement si A est "weakly closed" dans P suivant la terminologie de (12), ch.7 §5). On remarquera que <u>si</u> $A \in \mathfrak{U}$, <u>l'assertion</u> " A est fermé dans G " <u>est une propriété</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>locale</u> (cf. ch.I, §2); en effet, un élément A de $\mathfrak{U}$ est fermé dans G si et seulement si pour toute double flèche (B,x,y,A) de $(\mathfrak{U},W)$ de source A , il existe $(A,z,A) \in \mathfrak{U}_W(A,A)$ tel que l'on ait $(B,y,A) = (B,x,A)(A,z,A)$; ainsi formulée, il est clair que cette assertion ne dépend que de la classe d'équivalence de $(\mathfrak{U},W)$.

Rappelons que pour tout $A \in \mathfrak{U}$, on note $\widetilde{W}(A)$ l'image réciproque de $O_p(N(A)/W(A))$ dans $N(A)$.

<u>Proposition 2. Pour tout</u> $A \in \mathfrak{U}$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1. <u>Le groupe</u> $N(A)$ <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>contrôle de</u> G .
2. <u>Le</u> p-<u>groupe</u> A <u>est fermé dans</u> G <u>et pour tout</u> $B \in \mathfrak{U}$ <u>tel que</u> $B \subset N(A)$, $\widetilde{W}(A)$ <u>contient</u> $N_A(B)$.
3. <u>Le</u> p-<u>groupe</u> A <u>est fermé dans</u> G <u>et tout</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>essentiel de</u> G <u>contient un conjugué de</u> A .

<u>Démonstration</u>: Supposons que $N(A)$ soit un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle de G ; pour tout $B \in \mathfrak{U}$ tel que $B \subset N(A)$ on a alors

$$N(B) = W(B).(N(B) \cap N(A)) \qquad \text{(cf. lemme 1)}$$

et par suite, l'image de $N_A(B)$ dans $N(B)/W(B)$ est un p-sous-groupe distingué de ce quotient, d'où il résulte que $N_A(B) \subset \widetilde{W}(B)$; de plus, $N(A)$ contient un S_p-groupe P de G (cf. ch.I, §3, déf.) et pour tout $x \in G$ tel que $A^x \subset P$, le $\mathfrak{U}_W$-morphisme (A,x,A^x) provient d'un $(\mathrm{Res}_{N(A),G}\mathfrak{U}_W)$-morphisme, d'où il résulte que x normalise A ; par coséquent, A est fermé dans G . Ceci démontre que 1 entraîne 2.

Démontrons que 2 entraîne 3. Si A est fermé dans G , A est distingué dans tout p-sous-groupe de G qui le contient et par suite, tout p-sous-groupe de G possède un conjugué contenu dans $N(A)$. Par conséquent, si la condition 2 est satisfaite, pour tout p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel B de G , il existe $x \in G$ tel que l'on ait

$$B^x \subset N(A) \quad \text{et} \quad N_A(B^x) \subset \widetilde{W}(B^x) \qquad ;$$

or, B^x est l'unique S_p-groupe de $\widetilde{W}(B^x)$ (cf. ch.III, cor.2 du th.1); par suite, B^x contient $N_A(B^x)$, donc il contient A (cf. (01)).

Démontrons que 3 entraîne 1. Si A est fermé dans G et si B est un p-sous-groupe de G qui contient A , $N(B)$ est contenu dans $N(A)$. Par conséquent, si la codition 3 est satisfaite, $N(A)$ contient les normalisateurs d'un S_p-groupe de G et d'un conjugué de chaque p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G ; la condition 1 résulte alors du corollaire 1.

On dit qu'un p-sous-groupe A de G est $(\mathfrak{U},W)$-<u>normal dans</u> G s'il appartient à $\mathfrak{U}$ et satisfait aux conditions 1, 2, 3 de la proposition 2. La condition 3 montre que <u>l'assertion</u> " A est un p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-normal dans G " <u>est une propriété</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>locale</u>; en effet, on sait qu'il en est ainsi pour les assertions " A est un élément de $\mathfrak{U}$ fermé dans G " et " B est un p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G "; de plus, dire qu'un élément B de $\mathfrak{U}$ contient un conjugué de A équivaut à dire que $\mathfrak{U}_W(B,A)$ n'est pas vide. Soit $A \in \mathfrak{U}$; notons $\mathfrak{U}_A$ l'ensemble des p-sous-groupes de G qui contiennent un cojugué de A ; il est clair que le couple formé par $\mathfrak{U}_A$ et par la restriction de W à $\mathfrak{U}_A$ (que l'on note encore W) est une p-localité de G ; en vertu de la condition 3, A <u>est fermé dans</u> G <u>si et seulement s'il est</u> $(\mathfrak{U}_A,W)$-<u>normal dans</u> G .

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> P <u>un</u> S_p-<u>groupe de</u> G . <u>S'il existe un</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>normal dans</u> G , <u>on a</u>

1. L'ensemble des p-sous-groupes $(\mathfrak{U},W)$-normaux dans G qui sont contenus dans P possède un plus grand élément A.

2. Un sous-groupe de P est $(\mathfrak{U},W)$-normal dans G si et seulement s'il est distingué dans $N(A)$ et appartient à $\mathfrak{U}$.

Démonstration: Pour démontrer l'assertion 1, il suffit de montrer que, si B, C sont des sous-groupes de P $(\mathfrak{U},W)$-normaux dans G, le p-groupe $B.C$ est aussi $(\mathfrak{U},W)$-normal dans G (rappelons que B et C sont distingués dans P). Puisque B et C sont fermés dans G, $B.C$ l'est également. De plus, si D est un p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G contenu dans P, comme B et C satisfont à la condition 3 de la proposition 2, D contient des conjugués B^x et C^y de B et C ; or, P contient maintenant B, B^x, C et C^y d'où il résulte que $B = B^x$ et $C = C^y$; par suite, D contient $B.C$. Le p-groupe $B.C$ satisfait donc à la condition 3 de la proposition 2.

Supposons que l'ensemble des sous-groupes de P $(\mathfrak{U},W)$-normaux dans G ne soit pas vide et notons A son plus grand élément. Soit B un sous-groupe de P ; si B est distingué dans $N(A)$, $N(B)$ contient $N(A)$ et par suite, $N(B)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle de G (cf. ch.I, §3); réciproquement, si B est $(\mathfrak{U},W)$-normal dans G, il est contenu dans A et puisqu'il est fermé dans G, tout élément de $N(A)$ le normalise.

§ 2. Une application

Nous allons donner une démonstration du théorème suivant de R.Baer, à l'aide du corollaire 1 de la proposition 1.

Théorème. (cf. (12), ch.3, th.8.2). Soit Γ un ensemble de p-éléments de G stable par conjugaison dans G. Si tout couple d'éléments de Γ engendre un p-groupe, Γ est contenu dans $O_p(G)$.

Nous allons démontrer d'abord le lemme suivant qui nous sera encore utile dans le chapitre VII.

Lemme 2. Soient P un S_p-groupe de G et Γ un ensemble de p-éléments de G stable par conjugaison dans G ; si H est un sous-groupe de G, on pose $\Gamma(H) = \langle H \cap \Gamma \rangle$. Si pour tout p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel A de G, $\widetilde{W}(A)$ contient $\Gamma(N(\Gamma(A))) \cap N(A)$, le groupe $N(\Gamma(P))$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle de G.

Démonstration: Le groupe $N(\Gamma(P))$ contient $N(P)$. Soit A un p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G ; il suffit alors de démontrer que si l'on a

$$\Gamma(N(\Gamma(A))) \cap N(A) \subset \widetilde{W}(A) \quad ,$$

$N(A)$ est contenu dans un conjugué de $N(\Gamma(P))$ (cf. cor. 1 de la prop. 1). Soit Q un S_p-groupe de $N(\Gamma(A))$ contenant A ; si $\widetilde{W}(A)$ contient $\Gamma(N(\Gamma(A))) \cap N(A)$, il contient $N_{\Gamma(Q)}(A)$ et par conséquent, A contient $N_{\Gamma(Q)}(A)$ (cf. ch. III, cor. 2 du th. 1), donc $\Gamma(Q)$ (cf. (O1)); dans ces conditions on a $\Gamma(A) = \Gamma(Q)$ (car on a $A \cap \Gamma = Q \cap \Gamma$) et en particulier, $N(\Gamma(A))$ contient $N(Q)$, ce qui montre que Q est un S_p-groupe de G (cf. (O1)); il existe alors $x \in G$ tel que l'on ait $\Gamma(P)^x = \Gamma(A)$, ce qui démontre l'assertion.

Démonstration du théorème: On raisonne par récurrence sur $|G|$. Les notations étant celles du lemme 2, il suffit de démontrer que $\Gamma(P)$ est distingué dans G ; nous pouvons supposer que $\Gamma(P) \neq 1$. On prend $\mathfrak{U}$ égal à l'ensemble des p-sous-groupes A de G tels que $\Gamma(A) \neq 1$ et W égal à la restriction de l'application 1 à $\mathfrak{U}$; il est clair que $(\mathfrak{U}, W)$ est une p-localité de G et que si $A \in \mathfrak{U}$, on a $\widetilde{W}(A) = O_p(N(A))$. Soit $A \in \mathfrak{U}$; l'image de $\Gamma \cap N(A)$ dans $N(A)/A$ satisfait encore aux hypothèses du théorème; par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, $\Gamma(N(A))$ est contenu dans $O_p(N(A))$. On en déduit que pour tout $A \in \mathfrak{U}$, $\widetilde{W}(A)$ contient $\Gamma(N(\Gamma(A))) \cap N(A)$ (cf. (O3)); le groupe $N(\Gamma(P))$ est donc un sous-groupe de $(\mathfrak{U}, W)$-contrôle de G (cf. lemme 2). Soient $x \in G$, y un élément non trivial de $\Gamma \cap P$ et posons $A = \langle y \rangle$ et $B = \langle y, y^x \rangle$; puisque B est un p-groupe, il existe $z \in G$ tel que $B \subset P^z$; on a alors

$$A \subset P \cap P^z \cap P^{zx^{-1}}$$

et comme $N(\Gamma(P))$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{U}, W)$-contrôle de G , z et zx^{-1} appartiennent à $N(\Gamma(P))$ (cf. ch. I, cond. 2 de la prop. 2); par conséquent, x normalise $\Gamma(P)$. Le groupe $\Gamma(P)$ est donc distingué dans G .

CHAPITRE V

La C-localité

Soient G un groupe fini, p un nombre premier et P un S_p-groupe de G. Dans ce chapitre nous allons étudier la C-localité de G relative à p.

Puisque le p-groupe 1 est C-normal dans G, l'ensemble des sous-groupes de P C-normaux dans G possède un plus grand élément A (cf. ch.IV, prop.3). Nous allons donner d'abord une caractérisation des éléments de $P \cap Z(N(A))$: la proposition suivante montre qu'ils sont, suivant la terminologie de (8), §4, les éléments "weakly closed" dans P.

__Proposition. Soit__ A __le plus grand sous-groupe de__ P __C-normal dans__ G. __Un élément__ x __de__ P __appartient à__ $Z(N(A))$ __si et seulement si pour tout__ $y \in G$ __tel que__ $x^y \in P$, __on a__ $x^y = x$.

__Démonstration__: Soient $x \in P \cap Z(N(A))$ et $y \in G$ tels que $x^y \in P$; comme $N(A)$ est un sous-groupe de C-contrôle de G, on a $y = zn$ où $z \in C(x)$ et $n \in N(A)$ (cf. ch.I, cond.2 de la prop.2); par suite, y centralise x et on a $x^y = x$. Réciproquement, soit $x \in P$ et supposons que pour tout $y \in G$ tel que $x^y \in P$, on ait $x^y = x$. Posons $X = \langle x \rangle$; le p-groupe X est alors fermé dans G et il est contenu dans $Z(P)$, donc dans tout p-sous-groupe C-essentiel B de G qui est contenu dans P (car B contient $C_p(B)$ (cf. ch.III, cor.2 du th.1)); par conséquent, X est C-normal dans G (cf. ch.IV, cond.3 de la prop.2) et par suite, il est distingué dans $N(A)$ (cf. ch.IV, prop.3); or, d'après notre hypothèse, tout élément qui normalise X centralise x ; on en déduit que x appartient à $Z(N(A))$.

Rappelons que pour tout p-sous-groupe A de G, on note $\tilde{C}(A)$ l'image réciproque de $O_p(N(A)/C(A))$ dans $N(A)$. Suivant la terminologie de (12), ch.8, on dit que G est p-__stable__ si pour tout couple A, B de p-sous-groupes de G tels que $A \subset N(B)$ et $[B,A,A] = 1$, on a $A \subset \tilde{C}(B)$. Nous démontrerons que la p-stabilité de G est une condition suffisante pou assurer l'existence d'un p-sous-groupe C-normal non trivial dès que $P \neq 1$; plus précisement, nous allons construire un sous-groupe caractéristique de P qui contient $Z(P)$ et qui est C-normal dans G lorsque G est p-stable. Nous allons étudier d'abord cette construction.

Soit Q un p-groupe fini; notons $L_*(Q)$ (resp. $L^*(Q)$) le sous-groupe de Q engendré par la réunion des sous-groupes abéliens de Q qui sont distingués dans Q (resp. qui sont normalisés par $L_*(Q)$). Il est clair que l'on a

$$L_*(L_*(Q)) = L_*(Q) = L^*(L_*(Q))$$

On définit inductivement les groupes $L_i^*(Q)$, $i \geq 0$, par les formules

$$L_0^*(Q) = Q \quad \text{et} \quad L_i^*(Q) = L^*(L_{i-1}^*(Q)) \quad \text{si} \quad i \geq 1$$

et on pose $L(Q) = \bigcap_{i \geq 0} L_i^*(Q)$. Puisque Q est fini, il existe $n \geq 0$ tel que pour tout $m \geq n$, on ait $L(Q) = L_m^*(Q)$ (n dépend de Q). Dans les sept lemmes suivants, R désigne un sous-groupe de Q .

<u>Lemme 1</u>. <u>On a</u> $L_*(Q) \subset L^*(Q)$. <u>De plus, si</u> R <u>contient</u> $L_*(Q)$, <u>on a</u>

$$L_*(Q) \subset L_*(R) \quad \underline{\text{et}} \quad L^*(R) \subset L^*(Q) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: La première inclusion résulte tout de suite de la définition. De plus, si $L_*(Q) \subset R$, tout sous-groupe abélien distingué de Q est contenu dans R , donc dans $L_*(R)$ et si un sous-groupe abélien de R est normalisé par $L_*(R)$, il est normalisé par $L_*(Q)$.

<u>Lemme 2</u>. <u>On a</u>
$$L(Q) \subset \ldots \subset L_{i+1}^*(Q) \subset L_i^*(Q) \subset \ldots \subset Q$$
<u>et</u>
$$L_*(Q) \subset \ldots \subset L_*(L_i^*(Q)) \subset L_*(L_{i+1}^*(Q)) \subset \ldots \subset L_*(L(Q)) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Comme $L_*(R) \subset L^*(R)$, d'après le lemme 1 appliqué au p-groupe R et au sous-groupe $L^*(R)$, on a $L_*(R) \subset L_*(L^*(R))$; si on prend $R = L_i^*(Q)$, on a donc $L_*(L_i^*(Q)) \subset L_*(L_{i+1}^*(Q))$. Le reste ne présente aucune difficulté.

<u>Lemme 3</u>. <u>Soit</u> i <u>un entier</u> ≥ 0 . <u>Si</u> R <u>contient</u> $L_*(L_i^*(Q))$, <u>pour tout</u> $j \leq i$, <u>on a</u> $L_*(L_j^*(Q)) \subset L_*(L_j^*(R))$ <u>et</u> $L_{j+1}^*(R) \subset L_{j+1}^*(Q)$.

<u>Démonstration</u>: On raisonne par récurrence sur i . Supposons que R contienne $L_*(L_i^*(Q))$; en vertu du lemme 1, nous pouvons supposer que $i \geq 1$; en vertu du lemme 2, R contient alors $L_*(L_{i-1}^*(Q))$ et d'après l'hypothèse de récurrence, les inclusions de l'énoncé sont vraies pour tout $j \leq i-1$; en particulier, on a

$$L^*(R) \subset L^*(Q) \quad \text{et} \quad L_i^*(R) \subset L_i^*(Q) \quad .$$

Nous allons démontrer d'abord que $L^*(R)$ contient $L_*(L_i^*(Q))$; en vertu du lemme 2, on a $L_*(R) \subset L_i^*(R)$ et par suite, on a $L_*(R) \subset L_i^*(Q)$; en vertu du lemme 1, on a alors

$$L^*(R \cap L_i^*(Q)) \subset L^*(R) \quad ;$$

de plus, puisque R contient $L_*(L_i^*(Q))$, on a $L_*(L_i^*(Q)) \subset L_*(R \cap L_i^*(Q))$ (cf. lemme 1); il en résulte que $L^*(R)$ contient $L_*(L_i^*(Q))$. Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer l'hypothèse de récurrence au p-groupe $L^*(Q)$ et au sous-groupe $L^*(R)$; on en déduit que pour tout $k \leq i-1$, on a

$$L_*(L^*_{k+1}(Q)) \subset L_*(L^*_{k+1}(R)) \quad \text{et} \quad L^*_{k+2}(R) \subset L^*_{k+2}(Q) \quad ,$$

d'où il résulte que les inclusions de l'énoncé sont encore vraies si $j = i$ (on prend $k = i-1$).

<u>Lemme 4.</u> <u>Si</u> R <u>contient</u> $L_*(L(Q))$, <u>on a</u>

$$L_*(L(Q)) \subset L_*(L(R)) \quad , \quad L(R) \subset L(Q) \quad \underline{\text{et}} \quad Z(L(Q)) \subset Z(L(R)) \quad .$$

<u>De plus, si</u> R <u>contient</u> $L(Q)$, <u>on a</u> $L(R) = L(Q)$.

<u>Démonstration</u>: Puisqu'il existe un entier $n \geq o$ tel que l'on ait $L(Q) = L^*_m(Q)$ pour tout $m \geq n$, si R contient $L_*(L(Q))$, les deux premières inclusions résultent du lemme 3. Démontrons la troisième; comme $Z(L(Q))$ est un sous-groupe abélien distingué de $L(Q)$, il est contenu dans $L_*(L(Q))$; alors, d'après la première inclusion, $Z(L(Q))$ est contenu dans $L(R)$ et d'après la deuxième, $Z(L(Q))$ et $L(R)$ se centralisent l'un l'autre; par suite, on a $Z(L(Q) \subset Z(L(R))$. De plus, si R contient $L(Q)$, il contient aussi $L_*(L(Q))$ et par suite, on a

$$L(R) \subset L(Q) \subset R \quad ;$$

si on applique maintenant le même raisonement au p-groupe R et au sous-groupe $L(Q)$, on obtient

$$L(L(Q)) \subset L(R) \subset L(Q) \quad ;$$

or, on sait que $L^*(L(Q)) = L(Q)$; par conséquent, on a

$$L(L(Q)) = L(R) = L(Q) \quad .$$

On remarquera que les démonstrations des lemmes 2, 3 et 4 (sauf pour l'inclusion $Z(L(Q)) \subset Z(L(R))$ ne font appel qu'aux inclusions du lemme 1.

<u>Lemme 5.</u> <u>Si</u> R <u>ne contient pas</u> $L_*(L(Q))$, <u>il existe un sous-groupe</u> B <u>de</u> $N_Q(L(R))$ <u>qui n'est pas contenu dans</u> R <u>et qui vérifie</u>

$$[L(R), B, B] = 1 \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Si R ne contient pas $L_*(L(Q))$, l'ensemble des entiers $j \geq o$ tels que R ne contienne pas $L_*(L^*_j(Q))$ n'est pas vide; notons i son premier élément et démontrons d'abord que $L^*_i(Q)$ contient $L(R)$. Si $i = o$, il n'y a rien à démontrer; si $i \geq 1$, R contient $L_*(L^*_{i-1}(Q))$ et l'inclusion annoncée résulte des lemmes 3 et 2.

Puisque R ne contient pas $L_*(L^*_i(Q))$, il existe un sous-groupe abélien distingué A de $L^*_i(Q)$ qui n'est pas contenu dans R ; nous allons démontrer que $B = N_A(R \cap L^*_i(Q))$ satisfait aux conditions de l'énoncé. Puisque $L(R)$ est contenu dans $L^*_i(Q)$, il normalise B et par suite, on a $[L(R), B, B] = 1$. De plus, en vertu du lemme 4 appliqué au p-groupe R et au sous-groupe $R \cap L^*_i(Q)$, on a

$$L(R) = L(R \cap L^*_i(Q)) \quad ,$$

d'où il résulte que B normalise $L(R)$. Enfin, comme A n'est pas contenu dans R, $R \cap L_i^*(Q)$ ne contient pas A et par suite, il ne contient pas B (cf. (01)); par conséquent, B n'est pas contenu dans Q.

<u>Lemme 6. Ou bien</u> $L(R) = L(Q)$, <u>ou bien il existe un sous-groupe</u> B <u>de</u> $N_Q(Z(L(R)))$ <u>qui n'est pas contenu dans</u> R <u>et qui vérifie</u>

$$[Z(L(R)),B,B] = 1 .$$

<u>Démonstration</u>: Posons $S = N_Q(Z(L(R)))$; S contient R et on distingue deux cas suivant que R contient ou non $L(S)$. Si R contient $L(S)$, on a $L(R) = L(Q)$; en effet, en vertu du lemme 4, on a $L(R) = L(S)$ et par suite, $N_Q(S)$ normalise $Z(L(R))$, d'où il résulte que $Q = S$ et que $L(R) = L(Q)$. Supposons que R ne contienne pas $L(S)$; puisque $L^*(L(S)) = L(S)$, il existe un sous-groupe abélien B de $L(S)$ qui est normalisé par $L_*(L(S))$ et qui n'est pas contenu dans R ; comme $Z(L(R))$ est un sous-groupe abélien distingué de S, $L_*(L(S))$ contient $Z(L(R))$ (cf. lemme 2) et par suite, $Z(L(R))$ normalise B ; on a donc $[Z(L(R)),B,B] = 1$.

<u>Lemme 7. On a</u> $C_Q(L(Q)) \subset C_Q(L_*(L(Q))) \subset L_*(L(Q)) \subset L(Q)$.

<u>Démonstration</u>: Si A est un sous-groupe abélien distingué maximal de Q, on sait que $C_Q(A) = A$ (cf. (12), ch.5, lemme 3.12); puisque A est contenu dans $L_*(Q)$, le lemme résulte alors du lemme 2.

Revenons au groupe G. Le lemme 7 sera utilisé dans G à l'aide du lemme suivant.

<u>Lemme 8. Soient</u> A <u>un</u> p-<u>sous-groupe de</u> G <u>et</u> B <u>un</u> p-<u>sous-groupe distingué de</u> $N(A)$. <u>Si</u> $C_A(B) \subset B$, <u>on a</u> $\widetilde{C}(B) \cap N(A) \subset \widetilde{C}(A)$.

<u>Démonstration</u>: Posons $H = \widetilde{C}(B) \cap N(A)$; d'après nos hypothèses, H est un sous-groupe distingué de $N(A)$; par conséquent, il suffit de démontrer que tout p'-sous-groupe de H centralise A. Si K est un p'-sous-groupe de H, il normalise A et centralise B ; par suite, la conjugaison induit une opération du produit $K \times B$ sur A et si $C_A(B) \subset B$, K centralise $C_A(B)$; dans ces conditions, on sait que K centralise A (cf. (12), ch.5, th.3.4).

Nous sommes en mesure de démontrer notre résultat sur les groupes p-stables.

<u>Théorème 1. Supposons que</u> G <u>soit</u> p-<u>stable. Le</u> p-<u>groupe</u> $Z(L(P))$ <u>est alors</u> C-<u>normal dans</u> G .

<u>Démonstration</u>: Posons $N = N(Z(L(P)))$; nous allons démontrer que N est un sous-groupe de C-contrôle de G en montrant qu'il vérifie l'assertion 2 de la proposition 1 du ch.IV . Il est clair que N contient $N(P)$. Soit A un p-sous-groupe C-essentiel de G contenu dans P ; démontrons d'abord que A contient $L_*(L(P))$. Sinon, d'après le lemme 5, il existe un sous-groupe B de $N_p(L(A))$ qui vérifie

$$[L(A),B,B] = 1$$

et qui n'est pas contenu dans A ; or, d'après les lemmes 7 et 8, $\widetilde{C}(A)$ contient $\widetilde{C}(L(A)) \cap N(A)$ et par suite, A contient un S_p-groupe de $\widetilde{C}(L(A)) \cap N(A)$ (cf. ch.III, cor.2 du th.1), donc de $\widetilde{C}(L(A))$ (cf. (01)); par conséquent, B n'est pas contenu dans $\widetilde{C}(L(A))$, ce qui contredit la p-stabilité de G .

Nous allons démontrer maintenant que ou bien $L(A) = L(P)$, ou bien on a

$$N(A) = (N(A) \cap C(Z(L(A)))).M(A,P) .$$

Supposons que $L(A) \neq L(P)$; d'après le lemme 6, il existe alors un sous-groupe B de $N_p(Z(L(A)))$ qui n'est pas contenu dans A et qui vérifie

$$[Z(L(A)),B,B] = 1 ;$$

comme G est p-stable, B est contenu dans $\widetilde{C}(Z(L(A)))$ et par suite, A ne contient aucun S_p-groupe de $\widetilde{C}(Z(L(A)))$, d'où il résulte que A ne contient aucun S_p-groupe de $N(A) \cap \widetilde{C}(Z(L(A)))$ (cf. (01)). Posons $H = N(A) \cap \widetilde{C}(Z(L(A)))$; le groupe H est distingué dans $N(A)$ et on vient de démontrer que A n'est pas un S_p-groupe dans $A.H$; par conséquent, $A.H$ contient $X(A)$ (cf. ch.II, §1, déf.) et on a $N(A) = O^p(H).M(A,P)$ (cf. ch.II, prop.6); or, il est clair que $N(A) \cap C(Z(L(A)))$ contient $O^p(H)$; on a donc l'égalité annoncée.

Comme A contient $L_*(L(P))$, $Z(L(A))$ contient $Z(L(P))$ (cf. lemme 4) et par suite, on a $C(Z(L(A))) \subset N$; de plus, si $L(A) = L(P)$, N contient $N(A)$. Par conséquent, d'après l'assertion démontrée ci-dessus, la réunion de $N_N(A)$ et $M(A,P)$ engendre toujours $N(A)$. Puisque ceci est vrai pour tout p-sous-groupe C-essentiel de G contenu dans P , l'assertion 2 de la proposition 1 du ch.IV est vraie.

<u>Corollaire 1. Si</u> G <u>est</u> p-<u>stable, on a</u> $G = C(O_p(G)).N(Z(L(P)))$.

<u>Démonstration</u>: Le corollaire résulte tout de suite du théorème 1 et du lemme 1 du ch.IV.

En remplaçant $Z(J(P))$ par $Z(L(P))$ dans la démonstration du théorème 3.1 de (12), ch.8, on démontre sans difficulté le corollaire suivant (le corollaire 1 ci-dessus remplace le théorème 2.10 de (12), ch.8).

Corollaire 2. Supposons que $p \neq 2$. Si $N(Z(L(P)))$ possède un p-complément normal, il en est de même pour G.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des doubles flèches à but maximal de la C-localité de G relative à p. D'après le théorème 1 ci-dessus et la proposition 1 du ch.IV, si G est p-stable, l'ensemble $\mathrm{Res}_{N(Z(L(P))),G}\mathcal{D}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$. Si $p \geq 5$, à l'aide de la classification des "quadratic pairs" de J. Thompson (cf. (18)), nous allons décrire un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ particulièrement simple dont la réunion avec $\mathrm{Res}_{N(Z(L(P))),G}\mathcal{D}$ est toujours un système directeur de $\mathcal{D}$. Ceci résultera du théorème suivant.

Rappelons que pour tout p-sous-groupe essentiel A de G, on note $S(A)$ le quotient $X(A)/O_{pp'}(X(A))$ (cf. ch.II, prop.7).

Théorème 2. Supposons que $p \geq 5$. Soit A un p-sous-groupe C-essentiel de G contenu dans P et posons $M = C(A).M(A,P)$. L'une des conditions suivantes est satisfaite

1. Le groupe $X(A)$ normalise $Z(L(P))$ et on a $L_*(L(P)) \subset A$.
2. Le groupe $S(A)$ est isomorphe à l'un des groupes suivants $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$, et on a $O_{pp'}(X(A)) \subset C(Z(L(P))).M$.

On remarquera que la deuxième affirmation de la condition 2 résulte de la première, sauf si $S(A)$ est isomorphe à $PSL(2,p)$; en effet, sauf dans ce cas, $O_{pp'}(X(A))$ est contenu dans $M(A,P)$ d'après la proposition 4 du ch.II.

La démonstration du théorème 2 utilise, outre la classification des "quadratic pairs" et les proprietés de $L(P)$ et $L_*(L(P))$, le calcul développé dans la deuxième partie de l'appendice I (cf. app.I, prop.2). Nous allons la décomposer en une suite de quatre lemmes; dans les deux premiers, on établit les conséquences de (18) qui nous intéressent ici; le troisième utilise la proposition 2 de l'appendice I ; dans le quatrième, à l'aide des proprietés de $L(P)$ et $L_*(L(P))$, on démontre un énoncé plus précis que le théorème (qui est utile dans la démonstration de certaines conséquences).

Lemme 9. Soient $\{S_i\}_{i \in I}$ une famille finie de groupes simples et H un sous-groupe du produit $\prod_{i \in I} S_i$. Si la projection de H sur chaque facteur S_i est surjective, il existe $J \subset I$ tel que la projection de H sur le produit $\prod_{i \in J} S_i$ soit un isomorphisme.

Démonstration: Soit π_i la projection de H sur S_i et posons $K_i = \mathrm{Ker}(\pi_i)$, $i \in I$. On raisonne par récurrence sur $|I|$. On se ramène sans difficulté au cas où $|I| \geq 2$ et $K_i \neq 1$ pour tout $i \in I$. Soit L un sous-ensemble maximal de I satisfaisant à la codition $\bigcap_{i \in L} K_i \neq 1$; comme $\bigcap_{i \in I} K_i = 1$, on a $L \neq I$; posons $K = \bigcap_{i \in L} K_i$ et soit $j \in I - L$; on a alors $K \cap K_j = 1$ et $\pi_j(K)$ est un sous-groupe distingué non trivial de S_j ; par suite, π_j induit un isomorphisme entre K et S_j et les inclusions de K et K_j dans H induisent un isomorphisme entre H et $K \times K_j$.

Soit maintenant I' l'ensemble des $i \in I$ tels que $\pi_i(K_j) \neq 1$; comme j n'appartient pas à I' , on a $I' \neq I$ et on voit aisément que la projection de K_j sur le produit $\prod_{i \in I'} S_i$ est injective; de plus, pour tout $i \in I'$, $\pi_i(K_j)$ est un sous-groupe distingué non trivial de S_i , donc égal à S_i . En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe alors $J' \subset I'$ tel que la projection de K_j sur $\prod_{i \in J'} S_i$ soit un isomorphisme; il suffit de prendre maintenant $J = J' \cup \{j\}$ et on démontre sans difficulté que la projection de H sur $\prod_{i \in J} S_i$ est un isomorphisme.

Lemme 10. Supposons que $p \geq 5$. Soient R un $\underline{Z}/p\underline{Z}[G]$-module semi-simple et ρ l'homomorphisme de G dans $\mathrm{End}_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(R)$ associé à R . Si R est fidèle et si G est engendré par l'ensemble des x qui vérifient

$$(\rho(x) - \mathrm{id}_R)^2 = 0$$

$Z(G)$ est un p'-groupe et $G/Z(G)$ est isomorphe à un produit direct de groupes simples du type de Lie relativement à p .

Démonstration: Si R est fidèle, on a $O_p(G) = 1$ (cf. (12), ch.3, th.1.3); dans ce cas, $Z(G)$ est un p'-groupe. Soient S un sous-module simple de R et H l'image de G dans $\mathrm{End}_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(S)$; d'après nos hypothèses, ou bien $H = 1$, ou bien le couple (H,S) est un "quadratic pair" relativement à p (cf. (18)); dans le deuxième cas, il résulte de (18), que $H/Z(H)$ est isomorphe à un produit direct de groupes simples du type de Lie relativement à p .

Soient $R = \sum_{i \in I} S_i$ une décomposition de R en somme de sous-modules simples, ρ_i l'homomorphisme de G dans $\mathrm{End}_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(S_i)$ associé à S_i et H_i l'image de ρ_i , $i \in I$; on se ramène aisément au cas où l'ensemble I est fini. Si R est fidèle, la famille $\{\rho_i\}_{i \in I}$ définit un homomorphisme injectif de G dans le produit $\prod_{i \in I} H_i$; par suite, l'image réciproque K de $\prod_{i \in I} Z(H_i)$

dans G est contenue dans $Z(G)$ et le quotient G/K est isomorphe à un sous-groupe d'un produit direct de groupes simples du type de Lie relativement à p, dont la projection sur chaque facteur est surjective; il résulte alors du lemme 9, que G/K est lui même isomorphe à un tel produit et par suite, que $K = Z(G)$.

Lemme 11. Supposons que $p \geq 5$. Soient R un $\underline{Z}/p\underline{Z}[G]$-module semi-simple, ρ l'homomorphisme de G dans $\mathrm{End}_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(R)$ associé à R, F le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des x qui vérifient $(\rho(x) - \mathrm{id}_R)^2 = 0$ et A un p-sous-groupe de G; posons $H = A.F$ et soit Q un S_p-groupe de H contenant A. Supposons que A soit un p-sous-groupe essentiel de H. Alors, l'une des assertions suivantes est vraie

1. On a $O^p(X_H(A)) \subset \mathrm{Ker}(\rho)$.

2. Le groupe $S_H(A)$ est isomorphe à l'un des groupes suivants $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$, et on a $O_{pp'}(X_H(A)) \subset \mathrm{Ker}(\rho).M_H(A,Q)$.

Démonstration: Posons $K = \mathrm{Ker}(\rho)$; si A ne contient aucun S_p-groupe de K, A n'est pas un S_p-groupe de $A.N_K(A)$ (cf. (O1)) et par suite, on a $X_H(A) \subset A.N_K(A)$ (cf. ch.II, §1, déf.); dans ce cas, l'assertion 1 est vraie. Dorénavant, nous supposons que A contient $Q \cap K$. Soit Z l'image réciproque de $Z(F/K)$ dans F; comme F est distingué dans G, l'iclusion $F \subset G$ induit sur R une structure de $\underline{Z}/p\underline{Z}[F]$-module semi-simple (cf. (12), ch.3 th.4.1); il résulte alors du lemme 10 appliqué à F/K, que Z/K est un p'-groupe et que F/Z est isomorphe à un produit direct $\prod_{i \in I} S_i$ dont chaque facteur S_i est un groupe simple du type de Lie relativement à p. Comme $A \neq Q$, A ne contient pas $Q \cap F$ et par suite, il existe un facteur S_j tel que l'intersection de Q avec l'image réciproque de S_j dans F ne soit pas contenue dans A; soit Y l'image réciproque dans F du produit de tous les facteurs isomorphes à S_j; il est clair que Y est un sous-groupe distingué de H qui contient Z, que A ne contient pas $Q \cap Y$ et que Y/Z est isomorphe à $(S_j)^k$ pour un certain entier $k > 0$.

Soit ρ' l'homomorphisme de H dans $\mathrm{Aut}(Y/Z)$ induit par la conjugaison et posons $K' = \mathrm{Ker}(\rho')$; nous allons démontrer d'abord que l'on a

$$N_{K'}(A) \subset N_K(A).M_H(A,Q).$$

Soit $x \in N_{K'}(A)$; comme $x \in K'$, on a $[x,Y] \subset Z$ et en particulier, x normalise $Z.N_{Q \cap Y}(A)$; comme $(Z.(Q \cap F))/K$ est nilpotent, x normalise aussi $K.N_{Q \cap Y}(A)$, donc il normalise $N_K(A).N_{Q \cap Y}(A)$; or, $N_K(A).M_H(A,Q)$ contient $N_K(A).N_{Q \cap Y}(A)$ et A ne contient pas $N_{Q \cap Y}(A)$ (car A ne contient pas $Q \cap Y$); on en déduit que x appartient à $N_K(A).M_H(A,Q)$ (cf. ch.II, lemme 1).

Si $N_H(A) = N_{K'}(A).M_H(A,Q)$, l'inclusion ci-dessus montre que l'on a

$N_H(A) = N_K(A).M_H(A,Q)$ et d'après la proposition 6 du ch.II, l'assertion 1 est vraie. Supposons que $N_H(A) \neq N_{K'}(A).M_H(A,Q)$; nous allons démontrer l'assertion 2. Posons $H' = \rho'(H)$, $A' = \rho'(A)$ et $Q' = \rho'(Q)$; d'après la proposition 9 du ch.II, A' est un p-sous-groupe essentiel de H' , les groupes $N_{H'}(A')$, $M_{H'}(A',Q')$ et $X_{H'}(A')$ sont respectivement égaux aux images par ρ' de $N_H(A)$, $M_H(A,Q)$ et $X_H(A)$ et $S_{H'}(A')$ est isomorphe à $S_H(A)$. D'autre part, il est clair que K' contient Z et que $(K' \cap F)/Z$ est égal au produit des facteurs de F/Z non contenus dans Y/Z ; par conséquent, $\rho'(F)$ est isomorphe à Y/Z , donc à $(S_j)^k$. Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer la proposition 2 de l'appendice I à S_j . On en déduit que $S_H(A)$ est isomorphe à l'un des groupes annoncés et que l'on a $O_{pp'}(X_H(A)) \subset N_{K'}(A).M_H(A,Q)$; d'après l'inclusion démontrée ci-dessus, on a donc $O_{pp'}(X_H(A)) \subset N_K(A).M_H(A,Q)$, ce qui démontre l'assertion 2.

<u>Lemme 12. Supposons que</u> $p \geq 5$. <u>Soient</u> A <u>un</u> p-<u>sous-groupe</u> C-<u>essentiel de</u> G <u>contenu dans</u> P <u>et</u> G_o <u>un sous-groupe distingué de</u> G ; <u>posons</u> $M = C(A).M(A,P)$, $A_o = A \cap G_o$, $P_o = P \cap G_o$ <u>et supposons que l'on ait</u>

$$\tilde{C}(A_o) \cap N(A) \subset \tilde{C}(A)$$

<u>Alors, l'une des assertions suivantes est vraie</u>

1. <u>Le groupe</u> $X(A)$ <u>normalise</u> $Z(L(P_o))$ <u>et on a</u> $L_*(L(P_o)) \subset A$.

2. <u>Le groupe</u> $S(A)$ <u>est isomorphe à l'un des groupes suivants</u> $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$, <u>et on a</u> $O_{pp'}(X(A)) \subset C(Z(L(P_o))).M$.

<u>Démonstration</u>: Nous allons démontrer l'assertion 2 en supposant que l'assertion 1 soit fausse. On distingue deux cas suivant que A_o contient ou non $L_*(L(P_o))$: si A_o contient $L_*(L(P_o))$, on pose $D = Z(L(A_o))$ et sinon, on pose $D = L(A_o)$. La conjugaison induit une structure de $\underline{Z}/p\underline{Z}[N(D)]$-module sur $D/\Phi(D)$; soient R la somme directe des quotients d'une suite de Jordan-Hölder de ce module et ρ l'homomorphisme de $N(D)$ dans $\mathrm{End}_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(R)$ associé à R ; le groupe $\tilde{C}(D)$ est alors contenu dans $\mathrm{Ker}(\rho)$ (cf. (12), ch.3, th.1.3); de plus, tout p'-élément de $\mathrm{Ker}(\rho)$ opère trivialement sur $D/\Phi(D)$ (cf. (12), ch.3, th.3.4), donc centralise D (cf. (12), ch.5, th.1.4); on en déduit que l'on a $\mathrm{Ker}(\rho) = \tilde{C}(D)$.

Soit F le sous-groupe de $N(D)$ engendré par l'ensemble des x qui vérifient $(\rho(x) - id_R)^2 = 0$; démontrons d'abord que A ne contient aucun S_p-groupe de F ; puisque A normalise $P_o \cap F$, il suffit de démontrer qu'il ne contient pas $P_o \cap F$. Si A_o contient $L_*(L(P_o))$, on a $D = Z(L(A_o))$ et d'après la fausseté de l'assertion 1, $X(A)$ ne normalise pas $Z(L(P_o))$; comme $N(A)$ normalise A_o , $X(A)$ normalise $Z(L(A_o))$ et on a alors $L(A_o) \neq L(P_o)$; dans ces conditions, d'après le lemme 6, il existe un sous-groupe B de $N_{P_o}(D)$

qui est contenu dans F et qui n'est pas contenu dans A. Si A_0 ne contient pas $L_*(L(P_0))$, on a $D = L(A_0)$ et en vertu du lemme 5, il existe un sous-groupe B de $N_{P_0}(D)$ contenu dans F et non contenu dans A.

Posons $H = A.F$; puisque A ne contient aucun S_p-groupe de F, A n'est pas un S_p-groupe de H, donc de $N_H(A)$ (cf. (O1)); or, comme $N(A)$ normalise A_0, $N_H(A)$ est distingué dans $N(A)$; par conséquent, $X(A)$ est contenu dans H (cf. ch.II, §1, déf.). Il résulte alors de la proposition 8 du ch.II, que A est un p-sous-groupe essentiel de H et que l'on a

$$X_H(A) = X(A) \quad , \quad S_H(A) = S(A) \quad \text{et} \quad M_H(A,Q) \subset M(A,P)$$

où Q est un S_p-groupe de H contenant un S_p-groupe de $H \cap M(A,P)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme 11 à $N(D)$; nous allons démontrer d'abord que dans notre situation, l'assertion 1 de ce lemme est fausse. Si A_0 ne contient pas $L_*(L(P_0))$, on a $D = L(A_0)$ et en vertu des lemmes 7 et 8, on a

$$\tilde{C}(D) \cap N(A_0) \subset \tilde{C}(A_0) \qquad ;$$

comme $N(A_0)$ contient $N(A)$, d'après nos hypothèses, on a alors

$$\tilde{C}(D) \cap N(A) \subset \tilde{C}(A_0) \cap N(A) \subset \tilde{C}(A) \qquad ;$$

or, A étant un p-sous-groupe C-essentiel de G, $O^p(X(A))$ n'est pas contenu dans $C(A)$ (cf. ch.III, cor.2 du th.1), donc il n'est pas contenu dans $\tilde{C}(A)$ (cf. (O3)); par conséquent, $O^p(X(A))$ n'est pas contenu dans $Ker(\rho)$. Si A_0 contient $L_*(L(P_0))$, on a $D = Z(L(A_0))$ et en vertu du lemme 4, on a alors

$$C(D) \subset C(Z(L(P_0))) \qquad ;$$

or, d'après la fausseté de l'assertion 1, $X(A)$ ne normalise pas $Z(L(P_0))$; comme P normalise P_0 et comme $X(A) = O^p(X(A)).(X(A) \cap P)$ (cf. ch.II, prop.6), on en déduit que $O^p(X(A))$ n'est pas contenu dans $C(D)$ et par suite, qu'il n'est pas contenu dans $Ker(\rho)$ (cf. (O3)).

Par conséquent, dans notre situation l'assertion 2 du lemme 11 est vraie. On en déduit que $S(A)$ est isomorphe à l'un des groupes annoncés et que l'on a

$$O_{pp'}(X(A)) \subset \tilde{C}(D).M(A,P) \qquad ;$$

comme $M(A,P)$ contient un S_p-groupe de $\tilde{C}(D) \cap N(A)$, on a donc

$$O_{pp'}(X(A)) \subset (C(D) \cap N(A)).M(A,P) \qquad .$$

Si A_0 ne contient pas $L_*(L(P_0))$, on a démontré ci-dessus que l'on a $\tilde{C}(D) \cap N(A) \subset \tilde{C}(A)$ et par suite, $O_{pp'}(X(A))$ est contenu dans M (car on a $M = \tilde{C}(A).M(A,P)$). Si A_0 contient $L_*(L(P_0))$, en vertu du lemme 4, on a $C(D) \subset C(Z(L(P_0)))$ et par suite, $O_{pp'}(X(A))$ est contenu dans $C(Z(L(P_0))).M(A,P)$. Dans tous les cas on a

$$O_{pp'}(X(A)) \subset C(Z(L(P_0))).M \qquad ,$$

ce qui démontre l'assertion 2.

Corollaire 1. Supposons que $p \geq 5$ et posons $N = N(Z(L(P)))$. Soit A un p-sous-groupe C-essentiel de G contenu dans N . Alors, l'une des assertions suivantes est vraie

1. Le groupe A est un p-sous-groupe C-essentiel de N et on a

$$X_N(A) = X(A) \quad \text{et} \quad S_N(A) = S(A) \quad .$$

2. Le quotient $N(A)/O_{pp'}(N(A))$ est isomorphe, pour un certain $n \geq 1$, à un sous-groupe de $P\Gamma L(2,p^n)$ ou de $P\Gamma U(3,p^{2n})$ qui contient suivant le cas $PSL(2,p^n)$ ou $PSU(3,p^{2n})$.

Démonstration: Quitte à remplacer A par l'un de ses conjugués dans N , nous pouvons supposer que A est contenu dans P . D'après la proposition 8 du ch.II, si $X(A)$ normalise $Z(L(P))$, A est un p-sous-groupe essentiel de N et on a

$$X_N(A) = X(A) \quad \text{et} \quad S_N(A) = S(A) \quad ;$$

dans ce cas, d'après la condition 2 du corollaire 2 du ch.III, th.1, A étant un p-sous-groupe C-essentiel de G , A est également un p-sous-groupe C-essentiel de N .

Supposons que $X(A)$ ne normalise pas $Z(L(P))$; en vertu du théorème 2, $S(A)$ est isomorphe à l'un des groupes $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, pour un certain $n \geq 1$, et d'après la proposition 7 du ch.II, le quotient $N(A)/O_{pp'}(N(A))$ est isomorphe à un sous-groupe de $Aut(S(A))$ qui contient $S(A)$; or, on sait que

$$Aut(PSL(2,p^n)) = P\Gamma L(2,p^n) \quad \text{et} \quad Aut(PSU(3,p^{2n})) = P\Gamma U(3,p^{2n})$$

(cf. (17), th.30 et th.36), ce qui démontre l'assertion 2.

Posons $N = N(Z(L(P)))$ et notons respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_N$ les ensembles des doubles flèches à but maximal des C-localités de G et de N relatives à p . Puisque N contient P et puisque la C-localité de N est égale à la restriction à N de la C-localité de G , l'inclusion $N \subset G$ induit une application injective de $\mathcal{D}_N$ dans $\mathcal{D}$: nous identifions $\mathcal{D}_N$ à son image dans $\mathcal{D}$.

Corollaire 2. Supposons que $p \geq 5$. Soit $\mathfrak{R}_2$ un système de représentants dans P des classes de conjugaison dans G des p-sous-groupes C-essentiels de G qui satisfont à la condition 2 du théorème 2, et pour tout $A \in \mathfrak{R}_2$, choisissons $x_A \in X(A)$ tel que l'image de x_A dans $S(A)$ ne normalise aucun S_p-groupe. Tout élément de $\mathcal{D}$ est alors engendré par la réunion de $\mathcal{D}_N$ et de l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ de la forme $(P,1,x_A,A)$ où $A \in \mathfrak{R}_2$.

Démonstration: Notons $\mathcal{C}$ ce dernier ensemble; nous allons construire d'abord un système directeur de $\mathcal{D}$ contenu dans $\mathcal{D}_N \cup \mathcal{C}$. Nous empruntons les notations du lemme 7 du ch.III; nous pouvons supposer que $\mathfrak{R}_2$ est contenu dans $\mathfrak{R}$; si $A \in \mathfrak{R}_2$, on prend $Y_A = N_N(A) \cup \{x_A\}$ et si $A \in \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_2$, on prend $Y_A = X(A)$; on démontre alors sans difficulté que le sous-groupe de $N(A)$ engendré par $Y_A \cup M_A$ contient toujours $X(A)$ et par conséquent, il est égal à $N(A)$ (cf. ch.II, prop.6); d'après le lemme cité, l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ de la forme $(P,1,y,A)$ où $A \in \mathfrak{K}$ et $y \in Y_A$, est donc un système directeur de $\mathcal{D}$. D'autre part, d'après le théorème 2, un tel élément appartient soit à $\mathcal{D}_N$ soit à $\mathcal{C}$.

Il en résulte que tout élément de $\mathcal{D}$ est engendré par la réunion de $\mathcal{D}_N \cup \mathcal{C}$ et de l'ensemble des éléments de longueur 1 de $\mathcal{D}$; or, puisque N contient $N(P)$, tout élément de longueur 1 de $\mathcal{D}$ est engendré par l'ensemble des éléments de longueur 1 de $\mathcal{D}_N$; par suite, tout élément de $\mathcal{D}$ est engendré par $\mathcal{D}_N \cup \mathcal{C}$.

Corollaire 3. Supposons que $p \geq 5$ et que P soit engendré par la réunion de ses sous-groupes abéliens distingués. Si A est un p-sous-groupe C-essentiel de G , $S(A)$ est isomorphe à l'un des groupes suivants: $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$.

Démonstration: D'après nos hypothèses, on a $L_*(P) = P$ et par suite, on a $L_*(L(P)) = P$; dans ces conditions, l'assertion 1 du théorème 2 est toujours fausse.

CHAPITRE VI

Les p-localités à épimorphismes

Soient G un groupe fini et p un nombre premier. On dit qu'une p-localité $(\mathfrak{U},W)$ de G est une p-localité à épimorphismes si dans la catégorie associée $\mathfrak{U}_W$ (cf. ch.I, §1), tout $\mathfrak{U}_W$-morphisme est un épimorphisme. Par exemple, la 1-localité de G relative à p est à épimorphismes. Il est clair que toute p-localité équivalente à une p-localité à épimorphismes est à épimorphismes et que la restriction à un sous-groupe (cf. ch.I, §3) d'une p-localité à épimorphismes est encore à épimorphismes. Dans ce chapitre, nous allons étudier les p-localités à épimorphismes de G.

Proposition 1. Une p-localité $(\mathfrak{U},W)$ de G est à épimorphismes si et seulement si pour tout couple A, B d'éléments de $\mathfrak{U}$ tels que $A \subset B$, on a

$$W(B) = W(A) \cap N(B)$$

Démonstration: Supposons d'abord que $(\mathfrak{U},W)$ soit à épimorphismes et soient A, $B \in \mathfrak{U}$ tels que $A \subset B$; on a alors $W(B) \subset W(A) \cap N(B)$ (cf. ch.I, cond. (L2),(L3)); de plus, pour tout $w \in W(A) \cap N(B)$, on a (en écrivant les $\mathfrak{U}_W$-morphismes sans l'indice W)

$$(B,w,B)(B,1,A) = (B,w,A) = (B,1,A)$$

et comme $(B,1,A)$ est un épimorphisme, on a alors $(B,w,B) = (B,1,B)$; par suite, w appartient à $W(B)$. On a donc $W(B) = W(A) \cap N(B)$.

Supposons maintenant que $(\mathfrak{U},W)$ satisfasse à la condition de l'énoncé; nous allons démontrer que tout $\mathfrak{U}_W$-morphisme (B,x,A) est un épimorphisme; puisque tout isomorphisme est un épimorphisme, nous pouvons supposer que $x = 1$ et en raisonnant par récurrence sur $|B:A|$, nous pouvons supposer que A est un sous-groupe distingué de B. Posons $H = B.W(A)$ et $K = B.W(B)$; pour tout p-sous-groupe C de H qui contient B, $N_H(C)$ est contenu dans K ; en effet, puisque B normalise C, on a

$$N_H(C) = B.(W(A) \cap N(C))$$

et d'après nos hypothèses, on a

$$W(A) \cap N(C) = W(C) \subset W(B) \qquad \text{(cf. ch.I, (L2)).}$$

En particulier, K contient un S_p-groupe de H contenant B (cf. (O1)). Notons $\mathfrak{U}_{H,B}$ l'ensemble des p-sous-groupes de H qui contiennent un conjugué de B dans H ; le couple $(\mathfrak{U}_{H,B},1)$ est alors une p-localité de H et d'après ce que l'on vient de démontrer, K est un sous-groupe de $(\mathfrak{U}_{H,B},1)$-contrôle de H (cf. ch.IV, cor.1).

Nous sommes en mesure de démontrer que $(B,1,A)$ est un épimorphisme; soient (C,x,B) et (C,y,B) deux $\mathfrak{A}_W$-morphismes tels que l'on ait

$$(C,x,A) = (C,y,A) \quad ;$$

l'élément $x^{-1}y$ appartient alors à $W(A)$, donc à H ; de plus, puisque C^x et C^y contiennent B, $C^x \cap H$ et $C^y \cap H$ appartiennent à $\mathfrak{A}_{H,B}$ et ils sont contenus dans K ; par conséquent, puisque K est un sous-groupe de $(\mathfrak{A}_{H,B},1)$-contrôle de H, l'élément $x^{-1}y$ appartient à K (cf. ch.I, §3, déf.) et par suite, il normalise B ; or, d'après nos hypothèses, on a $W(B) = W(A) \cap N(B)$; il en résulte que $x^{-1}y \in W(B)$ et par suite, que $(C,x,B) = (C,y,B)$.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soit</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>une</u> p-<u>localité à épimorphismes de</u> G . <u>Si</u> A, B <u>sont des éléments de</u> $\mathfrak{A}$ <u>qui engendrent un</u> p-<u>sous-groupe, on a</u>

$$W(A) \cap N(B) = W(B) \cap N(A) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Soit C le p-sous-groupe de G engendré par $A \cup B$; puisque C contient A et B, il appartient à $\mathfrak{A}$ et on a

$$W(A) \cap N(C) = W(C) = W(B) \cap N(C) \qquad \text{(cf. prop.1);}$$

en particulier, $W(A) \cap N(C)$ normalise B et par suite, on a

$$W(A) \cap N(C) = W(A) \cap N(B) \qquad \text{(cf. ch.I, cond.(L3));}$$

de même, on a

$$W(B) \cap N(C) = W(B) \cap N(A) \quad ;$$

on a donc l'égalité de l'énoncé.

Les notations étant celles de la proposition 1, lorsque pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ est un p'-groupe, on peut remplacer le normalisateur par le centralisateur d'après le corollaire suivant.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>une</u> p-<u>localité de</u> G <u>telle que pour tout</u> $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ <u>soit un</u> p'-<u>groupe. La</u> p-<u>localité</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>est à épimorphismes si et seulement si, pour tout couple</u> A, B <u>d'éléments de</u> $\mathfrak{A}$ <u>tels que</u> $A \subset B$, <u>on a</u>

$$W(B) = W(A) \cap C(B) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Soient $A, B \in \mathfrak{A}$ tels que $A \subset B$; puisque $W(A) \cap N(B)$ et $A.C_B(A)$ se normalisent l'un l'autre (cf. ch.I, (L3)), ils se centralisent; par conséquent, la conjugaison induit une opération de $(W(A) \cap N(B)) \times A$ sur B et $W(A) \cap N(B)$ opère trivialement sur $C_B(A)$; dans ces conditions, $W(A) \cap N(B)$ opère trivialement sur B (cf. (12), ch.5, th.3.4) et par suite, on a

$$W(A) \cap N(B) = W(A) \cap C(B) \quad .$$

Le corollaire résulte alors de la proposition 1.

Les deux propositions suivantes montrent que, dans une certaine mesure, il suffit d'étudier les p-localités à épimorphismes $(\mathfrak{A},W)$ telles que $W(A)$ soit un p'-groupe pour tout $A \in \mathfrak{A}$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soient</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>une</u> p-<u>localité à épimorphismes et</u> P <u>un</u> S_p-<u>groupe de</u> G ; <u>posons</u> $Z = P \cap W(P)$. <u>Pour tout</u> $A \in \mathfrak{A}$ <u>tel que</u> $A \subset P$, Z <u>est un</u> S_p-<u>groupe de</u> $W(A)$; <u>en particulier, si</u> A <u>contient</u> Z , Z <u>est distingué dans</u> $N(A)$. <u>De plus</u>, $N(Z)$ <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>contrôle de</u> G .

<u>Démonstration</u>: Soient $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \subset P$ et $x \in G$ tel que P^x contienne un S_p-groupe de $A.W(A)$; on a alors

$$W(P^x) = W(A) \cap N(P^x) \qquad \text{(cf. prop. 1)}$$

et par suite, Z^x est un S_p-groupe de $W(A)$; or, comme P contient A , $W(A)$ contient Z (cf. ch.I, (L2)); par conséquent, Z est un S_p-groupe de $W(A)$. En particulier, on a

$$N(A) = W(A).(N(A) \cap N(Z)) \qquad \text{(cf. (O2))}$$

pour tout $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \subset P$ et d'après le corollaire 1 du ch.IV, $N(Z)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G .

<u>Proposition 3</u>. <u>Soient</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>une</u> p-<u>localité à épimorphismes de</u> G <u>telle que pour tout</u> $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ <u>centralise</u> A , <u>et</u> P <u>un</u> S_p-<u>groupe de</u> G ; <u>posons</u> $Z = P \cap W(P)$ <u>et notons</u> V <u>l'application qui à chaque</u> $A \in \mathfrak{A}$ <u>fait correspondre</u> $O_{p'}(W(A))$. <u>Alors, pour tout</u> $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ <u>possède un</u> p-<u>complément normal. De plus</u>, $(\mathfrak{A},V)$ <u>est une</u> p-<u>localité à épimorphismes et</u> $N(Z)$ <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{A},V)$-<u>contrôle de</u> G .

<u>Démonstration</u>: Soit $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \subset P$; en vertu de la proposition 2, Z est un S_p-groupe de $W(A)$; de plus, on a

$$W(A) \cap N(Z) \subset W(A) \cap N(A.Z) = W(A.Z) \qquad \text{(cf. prop. 1)}$$

et par suite, d'après nos hypothèses, $N_{W(A)}(Z)$ centralise Z ; on en déduit que $W(A)$ possède un p-complément normal (cf. (12), ch.7, th.4.3). Par conséquent, $V(A)$ est égal à l'ensemble des p'-éléments de $W(A)$; il en résulte que, si B est un élément de $\mathfrak{A}$ qui contient A , on a

$$V(B) = V(A) \cap N(B) \qquad \text{(cf. prop. 1);}$$

de plus, il est clair que pour tout $x \in G$, on a $V(A^x) = V(A)^x$; le couple $(\mathfrak{A},V)$ est donc une p-localité à épimorphismes de G (cf. prop. 1 et ch.I, (L1), (L2),(L3)). Enfin, comme Z est un S_p-groupe de $W(A)$ et comme $W(A) = V(A).Z$, on a $N(A) = V(A).(N(A) \cap N(Z))$ (cf. (O2)) et la dernière assertion résulte du corollaire 1 du ch.IV.

§ 1. La O-localité et la p-contrainte

Dans ce paragraphe, nous allons construire d'abord une p-localité de G définie sur l'ensemble des p-sous-groupes de G et appelée la O-localité ; puis, nous étudierons sous quelles conditions la O^*-localité est à épimorphismes (rappelons qu'une p-localité $(\mathfrak{U},W)$ de G est notée W^* lorsque $\mathfrak{U}$ est l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G).

Soit A un p-sous-groupe de G et posons $\overline{C(A)} = C(A)/O_{p'}(C(A))$; on note $O(A)$ (ou $O_G(A)$) l'image réciproque de $O^p(C_{\overline{C(A)}}(O_p(\overline{C(A)})))$ dans $C(A)$. Il est clair que $O(A)$ est un sous-groupe caractéristique de $C(A)$ et que pour tout $x \in G$, on a $O(A^x) = O(A)^x$. De plus, si A_o est un S_p-groupe de $O_{p',p}(C(A))$, on a

$$O(A) = O_{p'}(C(A)).O^p(C(A.A_o)) \qquad ;$$

en effet, $O_p(\overline{C(A)})$ est égal à l'image de A_o dans $\overline{C(A)}$ et par suite, d'après le lemme suivant, $O^p(C_{\overline{C(A)}}(O_p(\overline{C(A)})))$ est égal à l'image de $O^p(C_{C(A)}(A_o))$ dans $\overline{C(A)}$.

Lemme 1. Soient H un groupe, A un p-groupe fini qui opère sur H et K un p'-sous-groupe fini distingué A-stable de H ; notons $\bar{L}$ l'image dans H/K de tout sous-groupe L de H . On a alors

$$C_{\bar{H}}(A) = \overline{C_H(A)} \quad \text{et} \quad O^p(C_{\bar{H}}(A)) = \overline{O^p(C_H(A))} \qquad .$$

Démonstration: Soit $x \in H$; le cardinal de xK est alors premier à p et par suite, si A stabilise xK , il fixe un élément de xK . De plus, si L est un sous-groupe de H , on a $O^p(\bar{L}) = \overline{O^p(L)}$.

Nous allons démontrer que l'application O qui à tout p-sous-groupe A de G fait correspondre $O(A)$, renverse les inclusions. Enonçons d'abord quelques propriétés des groupes $O(A)$.

Lemme 2. Soit A un p-sous-groupe de G . On a

$$[O(A),O_{p',p}(C(A))] \subset O_{p'}(C(A)) \quad , \quad O^p(O(A)) = O(A) \qquad ,$$

$$O_{p'}(O(A)) = O_{p'}(C(A)) \quad \text{et} \quad O_{p',pp'}(O(A)) = O_{p',p}(O(A)) \qquad .$$

De plus, $O(A)$ est p-résolùble si et seulement s'il est un p'-groupe.

Démonstration: Notons $\bar{H}$ l'image dans $C(A)/O_{p'}(C(A))$ de tout sous-groupe H de $C(A)$; comme $\overline{O_{p',p}(C(A))} = O_p(\overline{C(A)})$, on a

$$[\overline{O(A)},\overline{O_{p',p}(C(A))}] = 1 \qquad ,$$

ce qui démontre l'inclusion. D'après la définition de $O(A)$, on a

$O^p(\overline{O(A)}) = \overline{O(A)}$; or, $O^p(O(A))$ contient $O_{p'}(C(A))$; on en déduit que $O^p(O(A)) = O(A)$.

Comme $O(A)$ est distingué dans $C(A)$, on a

$$O_{p'}(O(A)) = O_{p'}(C(A)) \quad \text{et} \quad O_{p'p}(O(A)) = O_{p'p}(C(A)) \cap O(A)$$

(cf. (03)); par conséquent, $O_p(\overline{O(A)})$ est contenu dans $O_p(\overline{C(A)})$ et par suite, il centralise $\overline{O(A)}$; ainsi, si $\overline{M}$ est un complément de $O_p(\overline{O(A)})$ dans $O_{pp'}(\overline{O(A)})$ (cf. (12), ch.6, th.2.1), $\overline{M}$ est l'unique $S_{p'}$-groupe de $O_{pp'}(\overline{O(A)})$ et par suite, il est caractéristique dans $\overline{O(A)}$, donc distingué dans $\overline{C(A)}$; or, on a $O_{p'}(\overline{C(A)}) = 1$; on en déduit que $O_{pp'}(\overline{O(A)}) = O_p(\overline{O(A)})$ et par suite, que l'on a

$$O_{p'pp'}(O(A)) = O_{p'p}(O(A)) \qquad .$$

De plus, si $O(A)$ est p-résoluble, on a alors $O(A) = O_{p'p}(O(A))$ et comme $O^p(O(A)) = O(A)$, $O(A)$ est un p'-groupe.

<u>Proposition 4. Si</u> A , B <u>sont des</u> p-<u>sous-groupes de</u> G <u>tels que</u> $A \subset B$, <u>on a</u>

$$O(B) \subset O(A) \qquad .$$

<u>Démonstration</u>: En raisonnant par récurrence sur $|B:A|$, on se ramène au cas où $|B:A| = p$; par conséquent, il suffit de démontrer que $O(A)$ contient $O(B)$ lorsque A est un sous-groupe distingué de B . Posons $H = C(A)$ et $\overline{H} = H/O_{p'}(H)$; puisque $O(B) \subset H$ et puisque $O^p(O(B)) = O(B)$ (cf. lemme 2), il suffit de démontrer que l'image de $O(B)$ dans $\overline{H}$ centralise $O_p(\overline{H})$; or, comme B normalise A et centralise $O(B)$, la conjugaison induit une opération de $O(B) \times B$ sur $O_p(\overline{H})$ et comme $O^p(O(B)) = O(B)$, $O(B)$ est engendré par l'ensemble de ses p'-éléments; dans cette situation, il suffit de démontrer que $O(B)$ laisse fixe tout point fixe de B dans $O_p(\overline{H})$ (cf. (12), ch.5, th.3.4).

D'après le lemme 1, l'ensemble des points fixes de B dans $O_p(\overline{H})$ est égal à l'image de $O_{p'p}(H) \cap C(B)$ dans $\overline{H}$; or, puisque H contient $C(B)$, on a $O_{p'p}(H) \cap C(B) \subset O_{p'p}(C(B))$; en vertu du lemme 2, $[O(B), O_{p'p}(H) \cap C(B)]$ est alors contenu dans $O_{p'}(C(B))$ et comme il est contenu dans $O_{p'p}(H)$, il est donc contenu dans $O_{p'}(H)$. Par conséquent, $O(B)$ opère trivialement sur l'ensemble des points fixes de B dans $O_p(\overline{H})$.

Le couple formé par l'ensemble des p-sous-groupes de G et l'application O , satisfait donc aux conditions (L1),(L2),(L3) du ch.I et par suite, il est une p-localité de G ; on l'appelle la <u>O-localité de</u> G <u>relative à</u> p .

Nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la O^*-localité de G soit à épimorphismes.

<u>Proposition 5. Supposons que</u> p <u>divise</u> $|G|$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1. <u>La</u> O^*<u>-localité de</u> G <u>relative à</u> p <u>est à épimorphismes.</u>

2. <u>Pour tout</u> p<u>-sous-groupe non trivial</u> A <u>de</u> G , $O(A)$ <u>est un</u> p'<u>-groupe.</u>

3. <u>Pour tout</u> p<u>-sous-groupe non trivial</u> A <u>de</u> G <u>et tout</u> S_p<u>-groupe</u> A_o <u>de</u> $O_{p'p}(C(A))$, $C(A.A_o)$ <u>est</u> p<u>-résoluble.</u>

<u>S'il en est ainsi, pour tout</u> p<u>-sous-groupe non trivial</u> A <u>de</u> G , <u>on a</u>

$$O(A) = O_{p'}(C(A)) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Démontrons que 1 entraîne 3; si la O^*-localité de G est à épimorphismes, en vertu de la proposition 3, $O(A)$ possède un p-complément normal, donc il est p-résoluble pour tout p-sous-groupe non trivial A de G ; la condition 3 résulte alors de la définition de $O(A)$. En vertu de la dernière affirmation du lemme 2, 3 entraîne 2. Supposons que la condition 2 soit satisfaite; soient A, B des p-sous-groupes non triviaux de G tels que $A \subset B$; d'après la proposition 4, $O(A)$ contient $O(B)$ et d'après le lemme 2, on a

$$O(A) = O_{p'}(C(A)) \quad \text{et} \quad O(B) = O_{p'}(C(B)) \quad ;$$

on en déduit que $$O(B) = O(A) \cap C(B) \qquad \text{(cf. (O3))}.$$
Par conséquent, d'après le corollaire 2, la O^*-localité de G est à épimorphismes.

On dit que G est p-<u>contraint</u> si p divise $|G|$ et G satisfait aux conditions 1,2,3 de la proposition 5. On remarquera que la seule différence entre la condition 3 et la définition de "p-constrained group" de (14), déf.6, est la condition "p-résoluble" qui remplace la condition "résoluble" de (14), déf.6. Si $O_{p'p}(G) \neq O_{p'}(G)$, notre définition coïncide avec la définition de "p-constrained group" de (12), ch.8, comme le montre le corollaire suivant.

<u>Corollaire. Soit</u> P <u>un</u> S_p <u>groupe de</u> $O_{p'p}(G)$. <u>Si</u> $P \neq 1$, G <u>est</u> p<u>-contraint si et seulement si</u> $O_{p'p}(G)$ <u>contient</u> $C(P)$.

<u>Démonstration</u>: Puisque $G = O_{p'}(G).N(P)$ (cf. (O2)), le groupe $O_{p'}(G).O_{p'p}(C(P))$ est distingué dans G et par suite, on a

$$O_{p'}(G).O_{p'p}(C(P)) \subset O_{p'p}(G) \quad ;$$

en particulier, P contient un S_p-groupe de $O_{p'p}(C(P))$ et par suite, on a

$$O(P) = O_{p'}(C(P)).O^p(C(P)) \quad .$$

En vertu de cette égalité et de la condition 2, si G est p-contraint, $O^p(C(P))$ est un p'-groupe; par suite, on a $C(P) = O_{p'p}(C(P))$ et d'après l'inclusion ci-dessus, $O_{p'p}(G)$ contient $C(P)$. Réciproquement, comme $O(1) = O_{p'}(G).O^p(C(P))$, si $O_{p'p}(G)$ contient $C(P)$, $O(1)$ est un p'-groupe et par suite, pour tout p-sous-groupe A de G , $O(A)$ est un p'-groupe (cf. prop.4).

Nous allons étudier maintenant le rapport entre les O-localités de G et de certains sous-groupes et quotients.

Proposition 6. Soit K un p'-sous-groupe distingué de G. La projection de G sur G/K définit une équivalence entre les O-localités de G et de G/K relatives à p.

Démonstration: Notons $\overline{H}$ l'image dans G/K de tout sous-groupe H de G. D'après la proposition 1 du ch.I, il suffit de démontrer que pour tout p-sous-groupe A de G, $O_G(A)$ est égal à l'image réciproque de $O_{\overline{G}}(\overline{A})$ dans $N_G(A)$. Comme K est un p'-groupe, on a

$$N_K(A) \subset O_{p'}(C_G(A))$$

et d'après le lemme 1, on a alors

$$O_{p'}(C_{\overline{G}}(\overline{A})) = O_{p'}(\overline{C_G(A)}) = \overline{O_{p'}(C_G(A))} \quad ,$$

$$O_{p'p}(C_{\overline{G}}(\overline{A})) = O_{p'p}(\overline{C_G(A)}) = \overline{O_{p'p}(C_G(A))} \quad ;$$

par conséquent, si A_0 est un S_p-groupe de $O_{p'p}(C_G(A))$, $\overline{A}_0$ est un S_p-groupe de $O_{p'p}(C_{\overline{G}}(\overline{A}))$ et par suite, on a

$$O_{\overline{G}}(\overline{A}) = O_{p'}(C_{\overline{G}}(\overline{A})).O^p(C_{\overline{G}}(\overline{A}.\overline{A}_0)) = \overline{O_G(A)} \qquad \text{(cf. lemme 1);}$$

comme $N_K(A) \subset O_G(A)$, l'assertion est vraie.

Corollaire. Si K est un p'-sous-groupe distingué de G, G est p-contraint si et seulement si G/K est p-contraint.

Démonstration: Nous pouvons supposer que p divise $|G|$. D'après la proposition 6, les O^*-localités de G et de G/K sont équivalentes et par suite, l'une est à épimorphismes si et seulement s'il en est de même pour l'autre.

Proposition 7. Soient A un p-sous-groupe de G et H un sous-groupe distingué de $N(A)$ contenant $C(A)$. Pour tout p-sous-groupe B de H, on a

$$O_H(B) = O_G(A.B) \subset O_G(B) \cap H \quad .$$

En particulier, l'inclusion de H dans G définit un morphisme de la O-localité de H dans celle de G.

Démonstration: Soit B un p-sous-groupe de H ; en vertu de la proposition 4, il suffit de démontrer que l'on a $O_H(B) = O_G(A.B)$. Posons $K = C_H(B)$ et $L = C_G(A.B)$; puisque H normalise A et contient $C(A)$, L est un sous-groupe distingué de K et par suite, on a $O_{p'}(L) \subset O_{p'}(K)$ (cf. (03)); de plus, $O_{p'}(K)$ et B se centralisent l'un l'autre, ils normalisent A et on a

$$[O_{p'}(K), C_A(B)] \subset O_{p'}(K) \cap A = 1 \quad ;$$

dans ces conditions, $O_{p'}(K)$ centralise A (cf. (12), ch.5, th.3.4) et par suite, on a $O_{p'}(K) \subset L$; on a donc $O_{p'}(K) = O_{p'}(L)$.

Posons $\bar{K} = K/O_{p'}(K)$ et notons $\bar{L}$ l'image de L dans $\bar{K}$; comme $O_{p'}(K) = O_{p'}(L)$, les groupes $O_H(B)$ et $O_G(A.B)$ sont respectivement égaux aux images réciproques de $O^p(C_{\bar{K}}(O_p(\bar{K})))$ et de $O^p(C_{\bar{L}}(O_p(\bar{L})))$ dans K ; puisque ces derniers groupes sont engendrés par ses p'-éléments, il suffit de démontrer maintenant qu'un p'-sous-groupe de K opère trivialement sur $O_p(\bar{K})$ si et seulement s'il est contenu dans L et opère trivialement sur $O_p(\bar{L})$.

Soient E un p'-sous-groupe de K et $\bar{E}$ son image dans $\bar{K}$; si E est contenu dans L et opère trivialement sur $O_p(\bar{L})$, on a

$$[O_p(\bar{K}), \bar{E}, \bar{E}] \subset [O_p(\bar{K}) \cap \bar{L}, \bar{E}] = 1$$

et par suite, $\bar{E}$ centralise $O_p(\bar{K})$ (cf. (12), ch.5, th.3.6). Supposons maintenant que E opère trivialement sur $O_p(\bar{K})$; comme H est un sous-groupe distingué de $N(A)$, on a

$$[C_A(B), E, E] \subset [A \cap K, E] \subset A \cap O_{p'}(K) = 1$$

et par suite, E centralise $C_A(B)$ (cf. (12), ch.5, th.3.6); de plus, E et B se centralisent l'un l'autre et ils normalisent A ; il s'en suit que E centralise A (cf. (12), ch.5, th.3.4) et par suite, que E est contenu dans L . D'autre part, comme L est distingué dans K , $O_p(\bar{K})$ contient $O_p(\bar{L})$ et par suite, E opère trivialement sur $O_p(\bar{L})$.

<u>Corollaire 1. Les notations étant celles de la proposition 7, supposons que</u> p <u>divise</u> $|H|$. <u>Si</u> G <u>est</u> p-<u>contraint</u>, H <u>est</u> p-<u>contraint et la</u> O^*-<u>localité de</u> H <u>est égale à la restriction à</u> H <u>de la</u> O^*-<u>localité de</u> G .

<u>Démonstration</u>: Si G est p-contraint et B est un p-sous-groupe non trivial de H, on a $O_G(B) = O_{p'}(C_G(B))$ (cf. prop.5) et par suite, $O_H(B)$ est un p'-groupe (cf. prop.7); par conséquent, H est alors p-contraint et on a

$$O_H(B) = O_{p'}(C_H(B)) = O_G(B) \cap H \qquad \text{(cf. prop.7 et (O3))}.$$

<u>Corollaire 2. Supposons que</u> p <u>divise</u> $|G|$. <u>Le groupe</u> G <u>est</u> p-<u>contraint si et seulement si pour tout sous-groupe</u> A <u>d'ordre</u> p <u>de</u> G , $C(A)$ <u>est</u> p-<u>contraint</u>.

<u>Démonstration</u>: Pour tout sous-groupe A d'ordre p de G , on a $O_{C(A)}(A) = O_G(A)$ et par suite, si $C(A)$ est p-contraint, $O_G(A)$ est un p'-groupe; d'après la proposition 4, G est alors p-contraint. La réciproque résulte du corollaire 1 ci-dessus.

§ 2. Les q-sous-groupes d'une p-localité à épimorphismes

Dans ce paragraphe, q est un nombre premier différent de p et $(\mathfrak{A},W)$ est une p-localité à épimorphismes de G. Nous supposons que $p\text{-rang}(G) \geq 3$, que $\mathfrak{A}$ est égal à l'ensemble des p-sous-groupes de G qui ont une intersection non triviale avec un sous-groupe de type (p,p,p) et que, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ est un p'-groupe. Par exemple, ces conditions sont satisfaites par la O^*-localité de G lorsque G est p-contraint et $\text{rang}(Z(P)) \geq 3$, P étant un S_p-groupe de G.

Nous allons utiliser dans ce paragraphe les définitions et les théorèmes 1 et 2 de l'appendice III.

Soit A un sous-groupe abélien p-élémentaire de G d'ordre $\geq p^3$ (on dira simplement "un sous-groupe de type $(p,p,p,\ldots)$ de G"); d'après le corollaire 2 de la proposition 1, la restriction de W à l'ensemble des sous-groupes non triviaux de A est un A-foncteur équilibré à valeurs dans G, relativement à l'opération de A sur G induite par la conjugaison (cf. app.III, déf.); on le note W_A (ou W, tant qu'il n'y aura pas de confusion à craindre). Nous allons exploiter les bonnes proprietés des q-sous-groupes de (A,W).

Soit Q un q-sous-groupe de G; on dit que Q est un q-sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$ s'il satisfait aux conditions suivantes

(Q1) On a $p\text{-rang}(N(Q)) \geq 3$.

(Q2) Pour tout $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \subset N(Q)$, on a $C_Q(A) \subset W(A)$.

On remarquera que l'inclusion de la condition (Q2) entraîne $C_Q(A) = W(A) \cap Q$.
On dit que Q est un S_q-groupe de $(\mathfrak{A},W)$ s'il est un q-sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$ qui contient un S_q-groupe de $W(A)$ pour tout élément A de $\mathfrak{A}$ qui le normalise.

D'après le corollaire 1 de la proposition 1, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, un q-sous-groupe Q de $W(A)$ tel que $p\text{-rang}(N(Q)) \geq 3$ est un q-sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$; en effet, si B est un élément de $\mathfrak{A}$ qui normalise Q, et si x est un élément de $N(Q)$ tel que $\langle A^x, B \rangle$ soit un p-groupe, on a

$$C_Q(B) \subset W(A^x) \cap C(B) \subset W(B).$$

De plus, si A est un sous-groupe de type $(p,p,p,\ldots)$ de G, tout q-sous-groupe (resp. S_q-groupe) de $(\mathfrak{A},W)$ qui est normalisé par A, est un q-sous-groupe (resp. S_q-groupe) de (A,W) (cf. app.III, cond.(H1),(H2)).

Nous sommes en mesure d'énoncer le principal résultat de ce paragraphe.

Théorème. Avec les notations précédentes, supposons que tout p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G contienne un sous-groupe de type (p,p,p). Il existe alors un S_q-groupe de $(\mathfrak{A},W)$. De plus, si Q est un S_q-groupe de $(\mathfrak{A},W)$, $N(Q)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G et tout q-sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$ possède un conjugué contenu dans Q.

Nous allons décomposer la démonstration du théorème en une suite de sept lemmes. Les deux premiers sont indépendants de la situation décrite dans ce paragraphe.

Lemme 3. Soit P un p-groupe fini. Si A, A' sont des sous-groupes de type $(p,p,p,\ldots)$ de P, il existe une suite $\{A_i\}_{i=0,\ldots,n}$ de sous-groupes de type $(p,p,p,\ldots)$ de P telle que l'on ait

$$A_0 = A \quad , \quad A_n = A' \quad \text{et} \quad |A_{i-1} \cap A_i| \geq p^2 \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad .$$

Démonstration: Puisque $\text{rang}(P) \geq 3$, P possède un sous-groupe distingué B de type (p,p) (cf. (12), ch.5, th.4.10 et th.4.3); comme on a $|P:C_P(B)| \leq p$, il suffit de prendre $A_0 = A$, $A_1 = C_A(B).B$, $A_2 = C_{A'}(B).B$ et $A_3 = A'$.

Lemme 4. Soient H un groupe fini, K un p'-sous-groupe de H, L un sous-groupe de H et A un p-sous-groupe de H qui normalise K et L. On a alors

$$(K.L) \cap N_H(A) = C_K(A).N_L(A) \quad .$$

Démonstration: Soient $x \in K$ et $y \in L$; il suffit de démontrer que si xy normalise A, il existe $z \in K \cap L$ tel que xz centralise A. Si xy normalise A, on a $A^x = A^{y^{-1}}$ et par suite, A^x est contenu dans $A.K$ et dans $A.L$; de plus, comme L contient tous les p'-éléments de $A.L$, on a

$$(A.K) \cap (A.L) = A.(K \cap L) \quad ;$$

par conséquent, A et A^x sont alors des S_p-groupes de $A.(K \cap L)$ et par suite, il existe $z \in K \cap L$ tel que l'on ait $A^{xz} = A$; on a alors $[A, xz] \subset A \cap K = 1$, ce qui démontre l'assertion.

Dans tous les lemmes suivants, les notaions sont celles du début du paragraphe.

Lemme 5. Soit Q un q-sous-groupe de G. Si A, B sont des sous-groupes de type $(p,p,p,\ldots)$ de $N(Q)$, Q est un q-sous-groupe (resp. S_q-groupe) de (A,W) si et seulement s'il est un q-sous-groupe (resp. S_q-groupe) de (B,W).

Démonstration: Si A et B sont conjugués dans $N(Q)$, la démonstration ne présente aucune difficulté. Par suite, nous pouvons supposer que A et B sont contenus dans un même S_p-groupe de $N(Q)$; d'après le lemme 3, il suffit alors de démontrer le lemme lorsque $|A \cap B| \geq p^2$, auquel cas, d'après le lemme 1 de l'app.III, on a

$$Q = < \bigcup_{|A \cap B : C| = p} C_Q(C) > .$$

Si Q est un q-sous-groupe de (A,W) , pour tout sous-groupe non trivial C de $A \cap B$, on a

$$C_Q(C) \subset W(C) \quad \text{et} \quad A \subset N(C_Q(C)) \qquad \text{(cf. app.III, (H2))}$$

et par suite, $C_Q(C)$ est un q-sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$; comme B normalise $C_Q(C)$, celui-ci est alors un q-sous-groupe de (B,W) . Dans ces conditions, Q est engendré par la réunion d'un ensemble de q-sous-groupes de (B,W) et par suite, il est un q-sous-groupe de (B,W) (cf. app.III, cor. du th.2).

Supposons maintenant que Q soit un S_q-groupe de (A,W) ; d'après ce que l'on vient de démontrer, Q est un q-sous-groupe de (B,W) et en vertu du théorème 1 de l'app.III, il est contenu dans un S_q-groupe Q' de (B,W) ; or, pour tout sous-groupe non trivial C de $A \cap B$, Q contient un S_q-groupe de $W(C)$; par conséquent, on a

$$C_Q(C) = W(C) \cap Q = W(C) \cap Q' = C_{Q'}(C) \qquad \text{(cf. app.III, (H2))},$$

d'où il résulte que l'on a $Q = Q'$ (cf. app.III, lemme 1).

Dans les lemmes suivants, A est un sous-groupe de type $(p,p,p,\dots)$ de G et Q est un S_q-groupe de (A,W) (dont l'existence est garantie par le théorème 1 de l'app.III). On remarquera que pour tout $x \in G$, Q^x est un S_q-groupe de (A^x,W) .

<u>Lemme 6</u>. <u>Le groupe</u> $N(Q)$ <u>contient un</u> S_p-<u>groupe de</u> G <u>et si</u> B <u>est un</u> p-<u>sous-groupe de</u> $N(Q)$ <u>de rang</u> ≥ 3 , <u>on a</u>

$$N(B) = W(B).(N(B) \cap N(Q)) .$$

<u>Démonstration</u>: Soient B un p-sous-groupe de $N(Q)$ de rang ≥ 3 et C un sous-groupe de type $(p,p,p,\dots)$ de B contenant $\Omega_1(Z(B))$; pour tout $x \in N(B)$, C normalise Q et $Q^{x^{-1}}$ et par suite, en vertu du lemme 5, Q et $Q^{x^{-1}}$ sont des S_q-groupes de (C,W) ; d'après le théorème 1 de l'app.III, il existe alors $z \in W(C)$ tel que l'on ait $Q^z = Q^{x^{-1}}$; par coséquent, $N(B)$ est contenu dans l'ensemble $W(C).N(Q)$. D'autre part, on a

$$W(C) \subset W(\Omega_1(Z(B))) \qquad \text{(cf. ch.I, (L2))}$$

et

$$W(\Omega_1(Z(B))) \cap N(B) = W(B) \qquad \text{(cf. prop.1)}.$$

L'égalité de l'énoncé résulte alors du lemme 4.

Supposons maintenant que B soit un S_p-groupe de $N(Q)$; d'après ce que l'on vient de démontrer, on a

$$N(B) = W(B).(N(B) \cap N(Q))$$

et comme $W(B)$ est un p'groupe, B est alors un S_p-groupe de $N(B)$, donc de G (cf. (01)).

<u>Lemme 7</u>. <u>Tout</u> q-<u>sous-groupe</u> (resp. S_q-<u>groupe</u>) <u>de</u> $(\mathfrak{A},W)$ <u>possède un conjugué contenu dans</u> Q (resp. <u>égal à</u> Q).

<u>Démonstration</u>: Soient Q' un q-sous-groupe (resp. S_q-groupe) de $(\mathfrak{A},W)$ et B un sous-groupe de type (p,p,p) de $N(Q')$; d'après la condition (Q2), Q' est alors un q-sous-groupe (resp. S_q-groupe) de (B,W) ; de plus, en vertu du lemme 6, quitte à remplacer Q' par l'un de ses conjugués dans G , nous pouvons supposer que B normalise Q ; en vertu du lemme 5, Q est alors un S_q-groupe de (B,W) et le lemme résulte du théorème 1 de l'app.III.

<u>Lemme 8</u>. <u>Si tout</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>essentiel de</u> G <u>est de rang</u> ≥ 3 , $N(Q)$ <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>contrôle de</u> G .

<u>Démonstration</u>: Le lemme résulte tout de suite du lemme 6 et du corollaire 1 du ch.IV.

<u>Lemme 9</u>. <u>Si tout</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>essentiel de</u> G <u>est de rang</u> ≥ 3 , Q <u>est un</u> S_q-<u>groupe de</u> $(\mathfrak{A},W)$.

<u>Démonstration</u>: Soit $B \in \mathfrak{A}$ tel que $B \subset N(Q)$; nous allons démontrer que $C_Q(B)$ est un S_q-groupe de $W(B)$ en raisonnant par récurrence sur $|B|$. Supposons d'abord que $|B| = p$; puisque $B \in \mathfrak{A}$, B est alors contenu dans un sous-groupe C de type (p,p,p) de G ; d'après le lemme 6, il existe $x \in G$ tel que $C^x \subset N(Q)$ et d'après le lemme 8, il existe alors $y \in N(Q)$ tel que l'on ait $(B,x,B^x)_W = (B,y,B^x)_W$; on a donc

$$B \subset C^{xy^{-1}} \subset N(Q)$$

et en vertu du lemme 5, Q est alors un S_q-groupe de $(C^{xy^{-1}},W)$; par suite, $C_Q(B)$ est un S_q-groupe de $W(B)$ (cf. app.III, déf.).

Supposons que $|B| \geq p^2$; il existe alors un sous-groupe C d'indice p de B qui appartient encore à $\mathfrak{A}$; en vertu de l'hypothèse de récurrence, $C_Q(C)$ est un S_q-groupe de $W(C)$; de plus, comme B normalise C , B normalise $W(C)$ et $C_Q(C)$ et on sait que $W(B)$ est le groupe des point fixes de B dans $W(C)$ (cf. cor.1 de la prop.1); on en déduit que $C_Q(C)$ contient un S_q-groupe de $W(B)$ (cf. (12), ch.6, th.2.2); or, d'après la condition (Q2), on a

$$C_Q(C) \cap W(B) = C_Q(B) \quad ;$$

par conséquent, $C_Q(B)$ est un S_q-groupe de $W(B)$.

<u>Corollaire. Les notations et les hypothèses étant celles du théorème, il existe une section G' de G telle que $|G'|_p = |G|_p$ et telle que, si on note $\mathfrak{A}'$ l'ensemble des p-sous-groupes de G' qui ont une intersection non triviale avec un sous-groupe de type (p,p,p) de G', les p-localités $(\mathfrak{A},W)$ de G et $(\mathfrak{A}',1)$ de G' soient équivalentes.</u>

<u>Démonstration</u>: On raisonne par récurrence sur $|G|$. Si $W = 1$ on prend $G' = G$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $A \in \mathfrak{A}$ tel que $|W(A)|_q \neq 1$; soit Q un S_q-groupe de $(\mathfrak{A},W)$ (cf. th.); comme $N(Q)$ contient un conjugué de A (cf. lemme 6), Q n'est pas trivial. D'autre part, comme $N(Q)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G (cf. th.), les p-localités $(\mathfrak{A},W)$ de G et $\mathrm{Res}_{N(Q),G}(\mathfrak{A},W)$ de $N(Q)$ sont équivalentes (cf. ch.I, prop.2); en particulier, $\mathrm{Res}_{N(Q),G}(\mathfrak{A},W)$ est à épimorphismes, tout p-sous-groupe $\mathrm{Res}_{N(Q),G}(\mathfrak{A},W)$-essentiel de $N(Q)$ est un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G (cf. ch.III, la remarque qui précède le §1) et on voit aisément que $\mathrm{Res}_{N(Q),G}\mathfrak{A}$ est égal à l'ensemble des p-sous-groupes de $N(Q)$ qui ont une intersection non triviale avec un sous-groupe de type (p,p,p) de $N(Q)$. Par conséquent, si $N(Q) \neq G$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $N(Q)$ et à $\mathrm{Res}_{N(Q),G}(\mathfrak{A},W)$.

Supposons que Q soit distingué dans G ; notons $\bar{H}$ l'image dans G/Q de tout sous-groupe H de G , $\bar{\mathfrak{A}}$ l'ensemble des images des éléments de $\mathfrak{A}$ dans $\bar{G}$ et $\bar{W}$ l'application de $\bar{\mathfrak{A}}$ dans l'ensemble des sous-groupes de $\bar{G}$ définie par la formule
$$\bar{W}(\bar{A}) = \overline{W(A)} \quad , \text{ où } A \in \mathfrak{A} \quad ;$$
il est clair que $\overline{W(A)}$ ne dépend que de $\bar{A}$ et que $\bar{\mathfrak{A}}$ est égal à l'ensemble des p-sous-groupes de $\bar{G}$ qui ont une intersection non triviale avec un sous-groupe de type (p,p,p) de $\bar{G}$. Le couple $(\bar{\mathfrak{A}},\bar{W})$ est alors une p-localité de $\bar{G}$ et nous allons démontrer que la projection de G sur $\bar{G}$ définit une équivalence entre $(\mathfrak{A},W)$ et $(\bar{\mathfrak{A}},\bar{W})$; d'après la proposition 1 du ch.I, il suffit de démontrer que pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $W(A)$ est égal à l'image réciproque de $\bar{W}(\bar{A})$ dans $N(A)$; l'image réciproque de $\bar{W}(\bar{A})$ dans G est égale à $W(A).Q$ et on a
$$(W(A).Q) \cap N(A) = W(A).N_Q(A) = W(A).C_Q(A) = W(A) \qquad \text{(cf. (Q2))},$$
ce qui démontre l'assertion. En particulier, $(\bar{\mathfrak{A}},\bar{W})$ est à épimorphismes et tout p-sous-groupe $(\bar{\mathfrak{A}},\bar{W})$-essentiel de $\bar{G}$ est l'image d'un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G . Comme $Q \neq 1$, le corollaire résulte d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\bar{G}$ et à $(\bar{\mathfrak{A}},\bar{W})$.

CHAPITRE VII

La relation de similitude

Soient G un groupe fini, p un nombre premier, P un S_p-groupe de G et $(\mathfrak{U},W)$, $(\mathfrak{U}',W')$ deux p-localités de G. Nous supposons que l'identité définit un morphisme de $(\mathfrak{U},W)$ dans $(\mathfrak{U}',W')$ (cf. ch.I, §2), c'est à dire, que la condition suivante est satisfaite

(P) <u>On a</u> $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}'$ <u>et pour tout</u> $A \in \mathfrak{U}$, <u>on a</u> $W(A) \subset W'(A)$.

On note respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les ensembles des doubles flèches à but maximal de $(\mathfrak{U},W)$ et de $(\mathfrak{U}',W')$ (cf. ch.III) et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les ensembles des éléments réductibles de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$. On note i l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ induite par le foncteur de $\mathfrak{U}_W$ dans $\mathfrak{U}'_{W'}$ définit par l'identité (cf. ch.I, §2).

Il est clair que i est compatible avec les opérations de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$ (cf. ch.III) et par suite, que l'on a $i(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}'$. On dit que $(\mathfrak{U},W)$ <u>et</u> $(\mathfrak{U}',W')$ <u>sont semblables</u> (et on écrit $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}',W')$) si $i(\mathcal{D})$ est un système directeur de $\mathcal{D}'$ et $i^{-1}(\mathcal{R}') = \mathcal{R}$. Comme $i(\mathcal{D})$ contient les éléments de longueur 1 de $\mathcal{D}'$, <u>si</u> $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}',W')$, <u>tout élément de</u> $\mathcal{D}'$ <u>est engendré par</u> $i(\mathcal{D})$. De plus, soit $(\mathfrak{U}'',W'')$ une troisième p-localité de G et supposons que l'identité définit un morphisme de $(\mathfrak{U}',W')$ dans $(\mathfrak{U}'',W'')$; alors <u>si</u> $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}',W')$ <u>et</u> $(\mathfrak{U}',W') \sim (\mathfrak{U}'',W'')$, <u>on a</u> $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}'',W'')$.

Dans ce chapitre nous allons montrer que si $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}',W')$, certaines propriétés de $(\mathfrak{U}',W')$ sont encore vraies dans $(\mathfrak{U},W)$; puis, nous montrerons que la O-localité (cf. ch.VI, §1) et la C-localité (cf. ch.I) de G sont toujours semblables.

<u>Proposition 1.</u> <u>On a</u> $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}',W')$ <u>si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites</u>

1. <u>Pour tout</u> p-<u>sous-groupe</u> A <u>de</u> G, A <u>est</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>essentiel si et seulement s'il est</u> $(\mathfrak{U}',W')$-<u>essentiel</u>.

2. <u>Pour tout</u> p-<u>sous-groupe</u> $(\mathfrak{U},W)$-<u>essentiel</u> A <u>de</u> G <u>contenu dans</u> P, <u>on a</u>
$$W(A).M(A,P) = W'(A).M(A,P) .$$

<u>Démonstration</u>: Supposons que $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U}',W')$. Soit A un p-sous-groupe $(\mathfrak{U}',W')$-essentiel de G contenu dans P ; le groupe A est donc la source d'un élément irréductible $(B,x,y,A)_{W'}$ de $\mathcal{D}'$ (cf. ch.III, déf.); or, d'après nos hypothèses, $(B,x,y,A)_{W'}$ est engendré par $i(\mathcal{D})$; on en déduit que A est le conjugué d'un élément de $\mathfrak{U}$ et par suite, que A appartient à $\mathfrak{U}$; on a alors
$$W(A).M(A,P) \subset W'(A).M(A,P) \neq N(A)$$

et par suite, A est $(\mathfrak{A},W)$-essentiel (cf. ch.III, cor.2 du th.1). Réciproquement, soit A un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G contenu dans P ; d'après la condition (P), A appartient à $\mathfrak{A}'$ et on a $W(A) \subset W'(A)$; d'après le théorème 1 du ch.III, pour tout $z \in W'(A).M(A,P)$, on a $(P,1,z,A)_{W'} \in \mathcal{R}'$ et comme $i^{-1}(\mathcal{R}') = \mathcal{R}$, on a encore $(P,1,z,A)_W \in \mathcal{R}$; par suite, z appartient à $W(A).M(A,P)$; on en déduit que $W(A).M(A,P) = W'(A).M(A,P)$ et que A est un p-sous-groupe $(\mathfrak{A}',W')$-essentiel (cf. ch.III, cor.2 du th.1).

Supposons maintenant que les conditions 1, 2 soient satisfaites. En vertu de la condition 1 et du théorème 2 du ch.III, $i(\mathcal{D})$ est un système directeur de $\mathcal{D}'$. Il nous reste à démontrer que l'on a $i(\mathcal{D} - \mathcal{R}) \subset \mathcal{D}' - \mathcal{R}'$; soit $(B,x,y,A)_W$ un élément irréductible de $\mathcal{D}$ tel que A soit contenu dans P ; le groupe A est donc un p-sous-groupe $(\mathfrak{A},W)$-essentiel de G et d'après la condition 2, on a

$$W(A).M(A,P) = W'(A).M(A,P) \qquad ;$$

il résulte alors du théorème 1 du ch.III, que $(B,x,y,A)_{W'}$ est un élément irréductible de $\mathcal{D}'$; ceci démontre l'assertion.

<u>Proposition 2</u>. <u>Supposons que</u> $(\mathfrak{A},W) \sim (\mathfrak{A}',W')$. <u>Soient</u> $\mathcal{C}$ <u>un sous-ensemble de</u> $\mathcal{D}$, N <u>un sous-groupe de</u> G <u>contenant</u> P <u>et</u> A <u>un élément de</u> $\mathfrak{A}$. <u>On a</u>

1. <u>L'application</u> i <u>induit une bijection entre les ensembles des classes d'échangeabilité des éléments irréductibles de</u> $\mathcal{D}$ <u>et de</u> $\mathcal{D}'$.

2. <u>L'ensemble</u> $\mathcal{C}$ <u>est un système directeur de</u> $\mathcal{D}$ <u>si et seulement si</u> $i(\mathcal{C})$ <u>est un système directeur de</u> $\mathcal{D}'$.

3. <u>Le groupe</u> N <u>est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>contrôle de</u> G <u>si et seulement s'il est un sous-groupe de</u> $(\mathfrak{A}',W')$-<u>contrôle de</u> G <u>qui vérifie</u>

$$W'(P) = W(P).(W'(P) \cap N) \qquad .$$

4. <u>Le</u> p-<u>groupe</u> A <u>est</u> $(\mathfrak{A},W)$-<u>normal dans</u> G <u>si et seulement s'il est</u> $(\mathfrak{A}',W')$-<u>normal dans</u> G.

<u>Démonstration</u>: En vertu de la proposition 1, les ensembles des p-sous-groupes $(\mathfrak{A},W)$-essentiels et $(\mathfrak{A}',W')$-essentiels coïncident, et si B est un élément de ces ensembles contenu dans P, on a

$$W(B).M(B,P) = W'(B).M(B,P) \qquad ;$$

l'assertion 1 résulte maintenant du corollaire 1 du théorème 1 du ch.III. En particulier, deux éléments irréductibles de $\mathcal{D}$ sont échangeables si et seulement si leurs images par i sont échangeables dans $\mathcal{D}'$; l'assertion 2 résulte alors de la remarque précédente et du théorème 2 du ch.III.

Si N est un sous-groupe de $(\mathfrak{A},W)$-contrôle de G, on a

$$N(P) = W(P).N_N(P) \qquad \text{(cf. ch.IV, lemme 1),}$$

d'où il résulte que

$$W'(P) = W(P).(W'(P) \cap N) \qquad ;$$

réciproquement, si la deuxième égalité est vraie et si N est un sous-groupe de $(\mathfrak{U}',W')$-contrôle de G, N vérifie la première (cf. ch.IV, lemme 1); l'assertion 3 résulte aisément de ce qui précède et de la proposition 1 du ch.IV. Enfin, l'assertion 4 résulte sans difficulté de la condition 3 de la proposition 2 du ch.IV et de l'égalité des ensembles des p-sous-groupes $(\mathfrak{U},W)$-essentiels et $(\mathfrak{U}',W')$-essentiels de G.

La proposition suivante montre que si $(\mathfrak{U},W)$ et $(\mathfrak{U}',W')$ sont des p-localités à épimorphismes telles que l'on ait $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$ et $W(P) = W'(P)$, elles ne sont semblables que si elles coïncident.

<u>Proposition 3. Supposons que</u> $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$ <u>et que</u> $(\mathfrak{U},W)$ <u>et</u> $(\mathfrak{U}',W')$ <u>soient à épimorphismes. On a alors</u> $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U},W')$ <u>si et seulement si, pour tout</u> $A \in \mathfrak{U}$ <u>tel que</u> $A \subset P$, <u>on a</u> $W'(A) = W(A).W'(P)$.

<u>Démonstration</u>: Si la condition est satisfaite, pour tout $A \in \mathfrak{U}$ tel que $A \subset P$, on a

$$W'(A).M(A,P) = W(A).M(A,P)$$

(car $W'(P) \subset N(A) \cap N(P) \subset M(A,P)$) et en particulier, A est $(\mathfrak{U},W)$-essentiel si et seulement s'il est $(\mathfrak{U},W')$-essentiel (cf. ch.III, cor.2 du th.1); on a alors $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U},W')$ (cf. prop.1).

Supposons maintenant que $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U},W')$. Soit $A \in \mathfrak{U}$ tel que $A \subset P$; nous allons démontrer l'égalité de l'énoncé en raisonnant par récurrence sur $|A|$. Posons $Z = P \cap W'(P)$; comme $(\mathfrak{U},W')$ est à épimorphismes, $N(Z)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W')$-contrôle de G (cf. ch.VI, prop.2); puisque $(\mathfrak{U},W) \sim (\mathfrak{U},W')$ et puisque $W'(P)$ normalise Z, $N(Z)$ est alors un sous-groupe de $(\mathfrak{U},W)$-contrôle de G (cf. prop.2); par conséquent, on a

$$W'(A) = W(A).(W'(A) \cap N(Z)) \qquad \text{(cf. ch.IV, lemme 1).}$$

D'autre part, $W'(A.Z)$ normalise Z (cf. ch.VI, prop.2) et on a

$$W'(A.Z) = W'(A) \cap N(A.Z) \qquad \text{(cf. ch.VI, prop.1);}$$

par suite, on a $W'(A.Z) = W'(A) \cap N(Z)$. On en déduit que l'on a

$$W'(A) = W(A).W'(A.Z) .$$

Si A ne contient pas Z, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$W'(A.Z) = W(A.Z).W'(P)$$

et par suite, comme $W(A.Z) \subset W(A)$, on a alors l'égalité de l'énoncé.

Dorénavant, nous supposons que $Z \subset A$ et que $A \neq P$. Soient Q un S_p-groupe de $N(A)$ contenant $N_p(A)$ et x un élément de G tel que $Q^x \subset P$; comme $(\mathfrak{U},W)$ est à épimorphismes, on a

$$W(Q) = W(A) \cap W'(Q) \quad \text{et} \quad W(P) = W(A) \cap W'(P) = W(Q^x) \cap W'(P)$$

(cf. ch.VI, prop.1). Posons $H = W'(A).Q$ et $K = W(A).W'(Q).Q$; si $H = K$, on a en particulier $|W'(A)|_{p'} = |W(A).W'(Q)|_{p'}$ et d'après la première égalité ci-dessus, on a alors

$$|W'(A):W(A)|_{p'} = |W'(Q):W(Q)|_{p'} \quad ;$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $W'(Q^x) = W(Q^x).W'(P)$ et comme $W(Q^x) \cap W'(P) = W(P)$, on obtient

$$|W'(Q):W(Q)| = |W'(P):W(P)| \quad ;$$

on en déduit que l'on a $|W'(A)|_{p'} = |W(A).W'(P)|_{p'}$.

D'autre part, $W'(A)$ contient $W(A).W'(P)$ et Z est un S_p-groupe de $W'(A)$ (cf. ch.VI, prop.2) et de $W'(P)$, donc de $W(A).W'(P)$. Par conséquent, si $H = K$, l'égalité de l'énoncé est vraie.

Nous allons démontrer que $H = K$; en raisonnant par l'absurde, supposons que $H \neq K$. Soit B un sous-groupe de Q contenant stictement A ; nous allons démontrer d'abord que K contient $N_H(B)$. Comme A contient Z , Z est distingué dans H (cf. ch.VI, prop.2); de plus, comme Z est un S_p-groupe de $W'(A)$ (cf. ch.VI, prop.2), l'image de $W'(A)$ dans H/Z est un p'-groupe; il résulte alors du lemme 4 du ch.VI appliqué à H/Z , $W'(A)/Z$, Q/Z et B/Z , que l'on a

$$N_H(B) = N_{W'(A)}(B).N_Q(B) \quad ;$$

or, comme $(\mathfrak{U},W')$ est à épimorphismes, on a $W'(A) \cap N(B) = W'(B)$ (cf. ch.VI, prop.1) et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$W'(B^x) = W(B^x).W'(P) \subset W(B^x).W'(Q^x) \quad ;$$

comme $W(B) \subset W(A)$, on en déduit que $N_H(B) \subset W(A).W'(Q).Q$, ce qui démontre l'assertion.

Par conséquent, d'après la proposition 2 du ch.II, le groupe K contient $M_H(A,Q)$ et comme $H \neq K$, A est un p-sous-groupe $Res_{H,G}(\mathfrak{U},W)$-essentiel de H (cf. ch.III, cor.2 du th.1). En particulier, A est un p-sous-groupe essentiel de H et comme H est p-résoluble (car $W'(A)/Z$ est un p'-groupe), on a $rang(Q/A) = 1$ (cf. ch.II, cor. de la prop.4). Par conséquent, si B/A est l'unique sous-groupe d'ordre p de $N_P(A)/A$, on a $M(A,P) = N(A) \cap N(B)$ (cf. ch.II, prop.4) et comme $A = O_p(H)$, on a aussi $A = O_p(N(A))$ (car $O_p(N(A)) \subset H$); on en déduit que A est un p-sous-groupe essentiel de G . De plus, A étant un p-sous-groupe $Res_{H,G}(\mathfrak{U},W)$-essentiel de H , A est un S_p-groupe de l'image réciproque de $O_p(H/W(A))$ dans H (cf. ch.III, cor.2 du th.1), donc de l'image réciproque de $O_p(N(A)/W(A))$ dans $N(A)$. Il en résulte que A est un p-sous-groupe $(\mathfrak{U},W)$-essentiel de G (cf. ch.III, cor.2 du th.1). D'après la proposition 1, on a alors

$$W'(A).(N(A) \cap N(B)) = W(A).(N(A) \cap N(B))$$

et par conséquent, on a

$$W'(A).N_H(B) = W(A).N_H(B) \subset K$$

d'où il résulte que $H = K$, ce qui contredit notre hypothèse.

<u>Proposition 4. La O-localité et la C-localité de</u> G <u>relatives à</u> p <u>sont semblables.</u>

<u>Démonstration</u>: Soit A un sous-groupe de P ; rappelons que l'on note respectivement $\tilde{O}(A)$ et $\tilde{C}(A)$ les images réciproques de $O_p(N(A)/O(A))$ et de $O_p(N(A)/C(A))$ dans $N(A)$; puisque l'homomorphisme canonique envoie $O_p(N(A)/O(A))$ dans $O_p(N(A)/C(A))$, on a $\tilde{O}(A) \subset \tilde{C}(A)$ et comme $M(A,P)$ contient un S_p-groupe de $N(A)$, on a

$$\tilde{O}(A).M(A,P) = O(A).M(A,P) \quad \text{et} \quad \tilde{C}(A).M(A,P) = C(A).M(A,P) \quad .$$

En vertu de ces remarques, de la proposition 1 et de la condition 3 du corollaire 2 du ch.III, th.1, il suffit de démontrer que si A est un S_p-groupe de $\tilde{O}(A)$, on a $\tilde{O}(A) = \tilde{C}(A)$.

Supposons que A soit un S_p-groupe de $\tilde{O}(A)$; alors $\tilde{O}(A)$ est p-résoluble et par suite, $O(A)$ est un p'-groupe (cf. ch.VI, lemme 2); on a donc $O(A) = O_{p'}(C(A))$ et comme $O_{p'}(C(A)) = O_{p'}(N(A))$, on a $\tilde{O}(A) = O_{p',p}(N(A))$. Par conséquent, A étant un S_p-groupe de $\tilde{O}(A)$, il contient un S_p-groupe de $O_{p',p}(C(A))$ (cf. (O3)) et par suite, d'après la définition de $O(A)$ (cf. ch.VI, §1), $O^p(C(A))$ est un p'-groupe. On a donc $O^p(C(A)) = O_{p'}(C(A))$ et par suite, on a aussi $\tilde{C}(A) = O_{p',p}(N(A))$, ce qui démontre l'assertion.

Puisque le p-groupe 1 n'est jamais un p-sous-groupe C-essentiel de G , la O^*-localité et la C-localité de G relatives à p sont encore semblables; en particulier, ceci démontre que si G est p-contraint (cf. ch.VI, §1), la C-localité de G est semblable à une p-localité à épimorphismes de G définie sur l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G ; nous allons démontrer que, sous certaines hypothèses, la réciproque est vraie.

On note Ω l'ensemble des p-éléments x de G qui satisfont à la condition suivante

(Ω) <u>Pour tout p-sous-groupe non trivial</u> A <u>de</u> G <u>qui est normalisé par</u> x , x <u>appartient à</u> $O_{p',p}(N(A))$.

On note P_o le plus grand sous-groupe de P qui est C-normal dans G (cf. ch.IV, prop.3).

<u>Théorème. Avec les notations précédentes, supposons que</u> $P \neq 1$. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

1. <u>Le groupe</u> G <u>est p-contraint et on a</u> $P_o \neq 1$.

2. <u>Les centralisateurs des p-sous-groupes essentiels non triviaux de</u> G <u>sont p-résolubles, on a</u> $C_p(P_o) \subset P_o$ <u>et pour tout couple</u> A , B <u>de sous-groupes non triviaux de</u> P , <u>on a</u>

$$O_{p'}(C(A)) \cap C(B) = O_{p'}(C(B)) \cap C(A) \quad .$$

3. <u>On a</u> $C_p(P_o) \subset P_o$ <u>et</u> G <u>possède une p-localité à épimorphismes</u> $(\mathfrak{B},V)$ <u>telle que</u> (a) $\mathfrak{B}$ <u>soit l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de</u> G , (b) <u>pour tout</u> $B \in \mathfrak{B}$, $V(B)$ <u>centralise</u> B , <u>et</u> (c) $(\mathfrak{B},V)$ <u>soit semblable à la C-localité de</u> G <u>relative à</u> p .

4. <u>On a</u> $C_p(\Omega \cap P) \subset \Omega$.

<u>De plus, s'il en est ainsi on a</u> $P_o = \Omega \cap P$.

Nous allons décomposer la démonstration du théorème en une suite de sept lemmes. Les trois premiers montrent que 1 entraîne 2, le quatrième montre que 2 entraîne 3, le lemme 5 montre que 3 entraîne 4 et les deux derniers montrent que 4 entraîne 1 et $P_o = \Omega \cap P$. Dans tous les lemmes, les notations et les hypothèses sont celles du théorème

<u>Lemme 1. Si</u> G <u>est p-contraint, pour tout couple</u> A , B <u>de sous-groupes non triviaux de</u> P , <u>on a</u>

$$O_{p'}(C(A)) \cap C(B) = O_{p'}(C(B)) \cap C(A) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Le lemme résulte de la proposition 5 du ch.VI et du corollaire 1 de la proposition 1 du ch.VI.

<u>Lemme 2. Si</u> G <u>est p-contraint, les centralisateurs des p-sous-groupes essentiels non triviaux de</u> G <u>sont p-résolubles.</u>

<u>Démonstration</u>: Soit A un p-sous-groupe essentiel non trivial de G . Si A contient un S_p-groupe de $O_{p'p}(C(A))$, on a $O(A) = O^p(C(A))$ (cf. ch.VI, §1, déf.) et si G est p-contraint, $O(A)$ est un p'-groupe (cf. ch.VI, prop.5); par suite, $C(A)$ possède alors un p-complément normal. Supposons que A ne contienne aucun S_p-groupe de $O_{p'p}(C(A))$; on a alors $X(A) \subset A.O_{p'p}(C(A))$ (cf. ch.II, §1, déf.) et par suite, on a $|S(A)| = p$ et $p\text{-rang}(N(A)/A) = 1$ (cf. ch.II, prop.7); par conséquent, si A_o est un S_p-groupe de $O_{p'p}(C(A))$, le quotient $A.A_o/A$ est cyclique ou quaternionien généralisé (cf. (12), ch.5, th.4.10) et par suite, $(C(A) \cap N(A.A_o))/C(A.A_o)$ est résoluble (cf. (12), ch.5, th.3.2). De plus, on a $O(A) = O_{p'}(C(A)).O^p(C(A.A_o))$ (cf. ch.VI, §1) et si G est p-contraint, $O(A)$ est un p'-groupe et par suite, $C(A.A_o)$ possède un p-complément normal. Comme $C(A) = O_{p'}(C(A)).(C(A) \cap N(A.A_o))$ (cf. (O2)), $C(A)$ est alors p-résoluble.

Lemme 3. Si G est p-contraint et si $P_o \neq 1$, P_o est un S_p-groupe de $\tilde{C}(P_o)$.

Démonstration: Posons $P_1 = P \cap O_{p',p}(N(P_o))$; on a alors

$$N(P_o) = O_{p'}(N(P_o)).(N(P_o) \cap N(P_1)) \qquad \text{(cf. (O2))}$$

et par suite, $N(P_o) \cap N(P_1)$ est un sous-groupe de C-contrôle de $N(P_o)$ (cf. ch.I, §2, exemple 2); alors, comme $N(P_o)$ est un sous-groupe de C-contrôle de G , il en est de même pour $N(P_1)$ (cf. ch.I, §3) et par conséquent, P_1 est un p-sous-groupe C-normal dans G ; d'après la maximalité de P_o on a donc $P_o = P_1$. En particulier, P_o contient un S_p-groupe de $O_{p',p}(C(P_o))$ (cf. (O3)) et par suite, on a

$$O(P_o) = O^p(C(P_o)) \qquad \text{(cf. ch.VI, §1, déf.).}$$

Si G est p-contraint et si $P_o \neq 1$, $O^p(C(P_o))$ est donc un p'-groupe (cf. ch.VI, prop.5) et comme $O_{p'}(C(P_o)) = O_{p'}(N(P_o))$, on a alors

$$\tilde{C}(P_o) = O_{p',p}(N(P_o)) .$$

Comme $P_o = P_1$ et P_1 est un S_p-groupe de $O_{p',p}(N(P_o))$, le lemme est démontré.

Lemme 4. Supposons que les centralisateurs des p-sous-groupes essentiels non triviaux de G soient p-résolubles et que pour tout couple A, B de p-sous-groupes non triviaux de G tels que $A \subset B$, on ait $O_{p'}(C(B)) \subset O_{p'}(C(A))$. Alors, le couple formé par l'ensemble $\mathfrak{B}$ des p-sous-groupes non triviaux de G et par l'application V qui à tout élément B de $\mathfrak{B}$ fait correspondre $O_{p'}(C(B))$, est une p-localité à épimorphismes de G semblable à la C-localité de G relative à p .

Démonstration: Il est clair que $(\mathfrak{B},V)$ est une p-localité de G . De plus, soient $A, B \in \mathfrak{B}$ tels que $A \subset B$; alors, $C(B)$ est contenu dans $C(A)$ et par suite on a $O_{p'}(C(B)) = O_{p'}(C(A)) \cap C(B)$ (cf. (O3)); par conséquent, d'après le corollaire 2 de la proposition 1 du ch.VI, $(\mathfrak{B},V)$ est à épimorphismes. D'autre part, d'après nos hypothèses, pour tout p-sous-groupe essentiel non trivial A de G , $C(A)$ est p-résoluble et par suite, on a

$$O(A) = O_{p'}(C(A)) = V(A) \qquad \text{(cf. ch.VI, lemme 2);}$$

on en déduit que $(\mathfrak{B},V)$ et la O^*-localité de G sont semblables (cf. prop.1 et ch.III, cor.2 du th.1); or, puisque le p-groupe 1 n'est jamais un p-sous-groupe C-essentiel de G , la O^*-localité et la C-localité de G sont semblables (cf. prop.4); par conséquent, $(\mathfrak{B},V)$ et la C-localité de G le sont également.

Lemme 5. Si G possède une p-localité à épimorphismes $(\mathfrak{B},V)$ qui satisfait aux conditions (a),(b) et (c) de l'assertion 4 du théorème, on a $P_o \subset \Omega$.

Démonstration: Il suffit de démontrer que pour tout p-sous-groupe non trivial A de G , on a $N_{P_o}(A) \subset O_{p',p}(N(A))$. Soit A un p-sous-groupe non trivial de G

et supposons que $N_{P_o}(A) \neq 1$; d'après nos hypothèses, P_o est $(\mathfrak{B},V)$-normal dans G (cf. prop.2), donc $N(P_o)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{B},V)$-contrôle de G ; par conséquent, il existe $x \in G$ tel que $N(P_o)$ contienne $(N_{P_o}(A).A)^x$ (cf. ch.I, §3, déf.), il existe $y \in N(P_o)$ tel que l'on ait

$$(N_{P_o}(A),x,N_{P_o}(A)^x)_V = (N_{P_o}(A),y,N_{P_o}(A)^x)_V$$

et on a $$N(A^x) = V(A^x).(N(A^x) \cap N(P_o)) \qquad \text{(cf. ch.IV, lemme 1).}$$

On en déduit que $N_{P_o}(A)^x$ est encore contenu dans P_o (car $N_{P_o}(A)^x = N_{P_o}(A)^y$) et que le groupe $V(A^x).N_{P_o}(A^x)$ est distingué dans $N(A^x)$; or, comme $(\mathfrak{B},V)$ est à épimorphismes et comme, pour tout $B \in \mathfrak{B}$, $V(B)$ centralise B , $V(A^x)$ possède un p-complément normal (cf. ch.VI, prop.3); par suite, on obtient

$$N_{P_o}(A)^x \subset N_{P_o}(A^x) \subset O_{p'p}(N(A^x)) \quad ,$$

d'où il résulte que $O_{p'p}(N(A))$ contient $N_{P_o}(A)$.

Lemme 6. Si $|\Omega \cap Z(P)| \geq 2$, le groupe $<\Omega \cap P>$ est C-normal dans G .

Démonstration: Supposons que $|\Omega \cap Z(P)| \geq 2$; nous empruntons les notations du lemme 2 du ch.IV et on prend $\Gamma = \Omega$; d'après ce lemme, il suffit de démontrer que pour tout p-sous-groupe C-essentiel A de G , $\tilde{C}(A)$ contient $\Omega(N(\Omega(A)))\cap N(A)$. Soit A un tel p-sous-groupe; d'après la condition 3 du corollaire 2 du ch.III, th.1, A est un S_p-groupe de $\tilde{C}(A)$; on en déduit que $\tilde{C}(A) = O_{p'p}(N(A))$ et que A contient un conjugué de $Z(P)$; en particulier, $\Omega(A)$ n'est pas trivial et d'après la condition (Ω), on a $\Omega(N(\Omega(A))) \subset O_{p'p}(N(\Omega(A)))$. Par conséquent, on a

$$\Omega(N(\Omega(A))) \cap N(A) \subset O_{p'p}(N(A)) = \tilde{C}(A) \qquad \text{(cf. (C3)),}$$

ce qui démontre l'assertion.

Lemme 7. Si Ω contient $C_P(\Omega \cap P)$, G est p-contraint et on a $P_o = \Omega \cap P$.

Démonstration: Supposons que $C_P(\Omega \cap P) \subset \Omega$; nous allons démontrer d'abord que G est p-contraint; il suffit de démontrer que pour tout p-sous-groupe non trivial A de G , $N(A)$ est p-contraint (car on a $O(A) = O_{N(A)}(A)$); on raisonne par récurrence sur $|G:N(A)|_p$. Soit Q un S_p-groupe de $N(A)$ et posons $R = <\Omega \cap Q>$; d'après la condition (Ω), $\Omega \cap Q$ est contenu dans $O_{p'p}(N(A))$ et par suite, tout élément de $N(A)$ qui normalise $Q \cap O_{p'p}(N(A))$, normalise R ; on a donc $$N(A) = O_{p'}(N(A)).(N(A) \cap N(R)) \qquad \text{(cf. (C2)).}$$
D'autre part, d'après nos hypothèses, Ω contient $Z(P)$ et par suite, R contient un conjugué de $Z(P)$ dans G ; en particulier, on a $R \neq 1$.

Nous allons démontrer d'abord que $N(R)$ est p-contraint; puisque

$N(Q) \subset N(R)$ et $R \neq 1$, si Q n'est pas un S_p-groupe de G , l'assertion résulte de l'hypothèse de récurrence. Si Q est un S_p-groupe de G , d'après nos hypothèses, R contient $C_Q(R)$ et par suite, $C(R)$ possède un p-complément normal; on a alors

$$C(Q \cap O_{p'p}(N(R))) \subset C(R) \subset O_{p'p}(N(R))$$

et l'assertion résulte du corollaire de la proposition 5 du ch.VI.

D'après ce qui précède et d'après le corollaire 1 du ch.VI, prop.7, $N(A) \cap N(R)$ est p-contraint; or, d'après l'égalité ci-dessus, les groupes

$$N(A)/O_{p'}(N(A)) \quad \text{et} \quad (N(A) \cap N(R))/(O_{p'}(N(A)) \cap N(R))$$

sont isomorphes; on en déduit que $N(A)$ est aussi p-contraint (cf. ch.VI, cor. de la prop.6).

Nous allons démontrer maintenant que $P_o = \Omega \cap P$. Puisque Ω contient $Z(P)$, il résulte du lemme 6 et de la maximalité de P_o , que P_o contient $\Omega \cap P$; en particulier, on a $P_o \neq 1$; comme G est p-contraint, il résulte alors des lemmes 1, 2, 4 et 5 que P_o est contenu dans Ω ; on a donc $P_o = \Omega \cap P$.

CHAPITRE VIII

Un exemple de liaison entre deux localités

Soient G un groupe fini et π l'ensemble des nombres premiers p qui satisfont aux conditions suivantes

(π1) Le groupe G est p-contraint.

(π2) Il existe un p-sous-groupe C-normal dans G de rang ≥ 3.

Supposons que $|\pi| \geq 2$ et soient p, q deux éléments de π ; dans ce chapitre, nous allons exhiber une situation qui permet d'étudier des propriétés de G faisant apparaître à la fois p et q et notamment, des questions relatives aux $\{p,q\}$-sous-groupes de G : l'utilisation de cette situation au chapitre suivant en est un exemple. Nous allons donner d'abord des conditions suffisantes pour qu'un nombre premier p appartienne à π.

Proposition. Soit p un nombre premier différent de 2. Si p-rang$(G) \geq 3$ et si G est p-stable et p-contraint, p appartient à π.

Démonstration: Nous allons démontrer que p satisfait à la condition (π2). Soient P un S_p-groupe de G et P_0 le plus grand sous-groupe de P C-normal dans G (cf. ch.IV, prop.3); puisque G est p-stable, P_0 contient le groupe $Z(L(P))$ (cf. ch.V, th.1) et par suite, on a $P_0 \neq 1$; comme G est p-contraint, P_0 est alors un S_p-groupe de $\tilde{C}(P_0)$ (cf. ch.VII, lemme 3); de plus, comme rang$(P) \geq 3$ et $p \neq 2$, P possède un sous-groupe abélien distingué A de rang ≥ 3 (cf. (12), ch.5, th.4.15); on a alors $[P_0, A, A] = 1$ et comme G est p-stable, A est contenu dans $\tilde{C}(P_0)$, donc dans P_0.

Corollaire. Soit p un nombre premier différent de 2 et 3. Si p-rang$(G) \geq 3$ et si le normalisateur de chaque p-sous-groupe non trivial de G est p-résoluble, p appartient à π.

Démonstration: D'après la définition de la p-contrainte (cf. ch.VI, §1), G est p-contraint; de plus, on sait que si $p \geq 5$, les groupes p-résolubles sont p-stables (cf. (12), ch.6, th.5.3); on en déduit que G est p-stable. Le corollaire résulte alors de la proposition.

Notre but est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. Soient p, q deux éléments distincts de π. S'il existe un $\{p,q\}$-sous-groupe non trivial E de G tel que p-rang$(N(E)) \geq 3$ et q-rang$(N(E)) \geq 3$, il existe un $\{p,q\}$-sous-groupe nilpotent non trivial F de G qui satisfait aux conditions suivantes

1. Le groupe $N(F)$ est un sous-groupe de O-contrôle de G relativement à p et à q.

2. Tout $\{p,q\}$-sous-groupe de G possède un conjugué dans G qui est contenu dans $N(F)$.

3. Le groupe $Z(F)$ est un $S_{\{p,q\}}$-groupe de $C(F)$.

Tout d'abord, nous allons donner quelques précisions sur les localités de G relatives aux éléments de π, à l'aide des résultats obtenus dans les chapitres précédentes; nous en profitons pour fixer les notations que nous garderons tout au long du chapitre.

Soient p un élément de π et P un S_p-groupe de G. On note P_o le plus grand sous-groupe de P C-normal dans G (cf. ch.IV, prop.3); d'après les conditions $(\pi 1)$,$(\pi 2)$, on a rang$(P_o) \geq 3$ et P_o est un S_p-groupe de $\tilde{C}(P_o)$ (cf. ch.VII, lemme 3). Comme la C-localité et la O-localité de G relatives à p sont semblables (cf. ch.VII, prop.4), P_o est un p-sous-groupe O-normal dans G (cf. ch.VII, prop.2).

Puisque G est p-contraint, la O^*-localité de G relative à p est à épimorphismes et pour tout p-sous-groupe non trivial A de G, on a

$$O(A) = O_{p'}(C(A)) \qquad \text{(cf. ch.VI, prop.5).}$$

De plus, pour tout p-sous-groupe A de G, tout sous-groupe distingué H de $N(A)$ contenant $C(A)$ et tout p-sous-groupe non trivial B de H, on a $O_H(B) = O_{p'}(C_H(B)) = H \cap O(B)$ (cf. ch.VI, cor.1 de la prop.7).

On note $\mathfrak{A}_p$ l'ensemble des p-sous-groupes de G qui ont une intersection non triviale avec un sous-groupe de type (p,p,p) de G; il est clair que $(\mathfrak{A}_p,O)$ est aussi une p-localité à épimorphismes de G et que P_o est un p-sous-groupe $(\mathfrak{A}_p,O)$-normal dans G; d'après la définition de la notion de p-sous-groupe $(\mathfrak{A}_p,O)$-normal (cf. ch.IV, §1), tout p-sous-groupe $(\mathfrak{A}_p,O)$-essentiel A de G contient alors l'un des conjugués de P_o dans G et par suite, on a rang$(A) \geq 3$. Si q est un nombre premier différent de p (pas nécessairement dans π), il résulte maintenant du théorème du ch.VI, §2, qu'il existe un S_q-groupe Q_1 de $(\mathfrak{A}_p,O)$ normalisé par P et que $N(Q_1)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{A}_p,O)$-contrôle de G.

Dorénavant, p et q désignent deux éléments distincts de π et P, P_0, $\mathfrak{U}_p$ et Q_1 ont le même sens que ci-dessus; en échangeant les rôles de p et de q, on introduit Q, Q_0, $\mathfrak{U}_q$ et P_1. Nous allons décomposer la démonstration du théorème en une suite de quatorze lemmes; étant donnée la symétrie des hypothèses par rapport à p et à q (qui sera toujours respectée), tous les lemmes sont encore vrais si on échange les rôles de p et q. On remarquera que les lemmes 1, 2, 7, 10 et 12 restent vrais même si q n'appartient pas à π.

<u>Lemme 1</u>. <u>Le groupe</u> $N(P_0.Q_1)$ <u>est un sous-groupe de O-contrôle de</u> G <u>relativement à</u> p.

<u>Démonstration</u>: Puisque $N(Q_1)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{U}_p,O)$-contrôle de G et puisque P_0 appartient à $\mathfrak{U}_p$, on a
$$N(P_0) = O(P_0).(N(P_0) \cap N(Q_1)) \quad \text{(cf. ch.IV, lemme 1);}$$
comme $O(P_0)$ est un p'-groupe, pour tout sous-groupe A de P, on a alors
$$N(P_0) \cap N(A) = (O(P_0) \cap C(A)).(N(P_0) \cap N(Q_1) \cap N(A))$$
(cf. ch.VI, lemme 4); de plus, $O(P_0) \cap C(A)$ est contenu dans $O(A)$ (cf. ch.VI, cor.1 de la prop.1). D'après le lemme 1 du ch.IV appliqué à A et à $N(P_0)$, on en déduit que
$$N(A) = O(A).(N(P_0) \cap N(Q_1) \cap N(A)) = O(A).(N(P_0.Q_1) \cap N(A))$$
et le lemme résulte alors du corollaire 1 du ch.IV, prop.1.

<u>Lemme 2</u>. <u>Tout</u> $\{p,q\}$<u>-sous-groupe</u> H <u>de</u> G <u>tel que</u> $O_p(H)$ <u>appartienne à</u> $\mathfrak{U}_p$, <u>possède un conjugué dans</u> G <u>qui est contenu dans</u> $N(P_0.Q_1)$.

<u>Démonstration</u>: Posons $A = O_p(H)$, $N = N(P_0.Q_1)$ et $K = O(A).H$; en vertu du lemme 1, quitte à remplacer H par l'un de ses conjugués dans G, nous pouvons supposer que N contient A; on a alors $N(A) = O(A).N_N(A)$ (cf. ch.IV, lemme 1) et par suite, on a $K = O(A).(K \cap N)$. D'autre part, Q_1 étant un S_q-groupe de $(\mathfrak{U}_p,O)$, si A appartient à $\mathfrak{U}_p$, Q_1 contient un S_q-groupe de $O(A)$ (cf. ch.VI, §2, déf.). Il en résulte que $|K|_{\{p,q\}} = |K \cap N|_{\{p,q\}}$ et comme K est p-résoluble (cf. (12), ch.4, th.3.3), H possède un conjugué dans K qui est contenu dans $N \cap K$ (cf. (15), cor.D.5.2).

<u>Lemme 3</u>. <u>Tout</u> p<u>-sous-groupe</u> A <u>de</u> G <u>d'ordre</u> $\geq p^2$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{U}_p$.

<u>Démonstration</u>: Nous pouvons supposer que $A \subset P$. Puisque $\mathrm{rang}(P) \geq 3$, P possède un sous-groupe distingué B de type (p,p) (cf. (12), ch.5, th.4.3 et 4.10) et comme $|P : C_P(B)| \leq p$, $C_A(B)$ n'est pas trivial. Soient A_0 un sous-groupe d'ordre p de $C_A(B)$ et D un sous-groupe de type (p,p,p) de P; alors, ou bien $A_0.B$ est un sous-groupe de type (p,p,p), ou bien A_0 est contenu dans B

auquel cas, ou bien $A_o.C_D(B)$ est un sous-groupe de type $(p,p,p,\dots)$, ou bien A_o est contenu dans D ; dans tous les cas, A appartient à $\mathfrak{A}_p$.

<u>Lemme 4. Tout</u> $\{p,q\}$<u>-sous-groupe</u> H <u>de</u> G <u>possède un conjugué dans</u> G <u>qui est contenu soit dans</u> $N(P_o.Q_1)$ <u>soit dans</u> $N(Q_o.P_1)$.

<u>Démonstration</u>: Nous pouvons supposer que H est un élément maximal de l'ensemble des $\{p,q\}$-sous-groupes de G et que $p > q$; alors, d'après les lemmes 2 et 3, il suffit de démontrer que $|O_q(H)| \leq q$ entraîne $|O_p(H)| \geq p^2$. Posons $A = O_p(H)$; d'après nos hypothèses, si $|O_q(H)| \leq q$, H n'est pas un q-groupe et on a $O_{qp}(H) = O_q(H).A$; par conséquent, comme H est p-résoluble (cf. (12), ch.4, th.3.3), A n'est pas trivial et en particulier, $O(A)$ est un p'-groupe. D'autre part, H normalise $C(A)$ et par suite, $H.O_{p',p}(C(A))$ est un groupe p-résoluble; d'après la maximalité de H , $O_{qp}(H)$ contient alors un $S_{\{p,q\}}$-groupe de $O_{p',p}(C(A))$ (cf. (15), cor.D.5.2) et par conséquent, A contient un S_p-groupe de $O_{p',p}(C(A))$, d'où il résulte que l'on a $O(A) = O^p(C(A))$ (cf. ch.VI, §1, déf.). Comme $O(A)$ est un p'-groupe, on en déduit que $O_{p',p}(C(A)) = C(A)$ et par suite, que A contient un S_p-groupe de $C(A)$; comme $|P| \geq p^3$, A est donc d'ordre strictement supérieur à p .

<u>Lemme 5. Un conjugué de</u> P_1 <u>dans</u> G <u>centralise</u> Q_1 .

<u>Démonstration</u>: Nous pouvons supposer que $p > q$ et que $P_1 \subset P$. Dans ces conditions, P_1 normalise Q_1 et si $|Q_1| \leq q$, P_1 le centralise. Si $|Q_1| \geq q^2$, Q_1 appartient à $\mathfrak{A}_q$ (cf. lemme 3) et par suite, il existe $x \in G$ tel que

$$(P.Q_1)^x \subset N(Q_o.P_1) \qquad \text{(cf. lemme 2);}$$

le groupe P^x contient alors P_1 et par suite, P_1 et Q_1^x se normalisent l'un l'autre, donc se centralisent.

Désormais, quitte à modifier notre choix de P , Q , P_1 et Q_1 , nous supposons de plus que P_1 et Q_1 se centralisent l'un l'autre et que P et Q contiennent respectivement P_1 et Q_1 . Dans ces conditions, on dit que p et q sont <u>associés</u> si l'on a

$$P_o \cap P_1 = C_{P_o}(Q_1) \quad \text{et} \quad Q_o \cap Q_1 = C_{Q_o}(P_1)$$

(on voit aisément que ceci ne dépend pas de notre choix de P , Q , P_1 et Q_1 , mais nous n'aurons pas besoin ici de cette remarque). Posons

$$F = (P_o \cap P_1).(Q_o \cap Q_1) \qquad ;$$

nous allons démontrer maintenant que si p et q sont associés, le groupe F satisfait aux conditions 1, 2 et 3 du théorème.

<u>Lemme 6. Si</u> p <u>et</u> q <u>sont associés,</u> $N(F)$ <u>contient</u> $N(P_o.Q_1)$ <u>et</u> $N(Q_o.P_1)$.

<u>Démonstration</u>: Etant donnée la symétrie des hypothèses par rapport à p et à q , il suffit de démontrer que $N(P_o.Q_1)$ normalise $C_{P_o}(Q_1)$ et $Q_o \cap Q_1$. Soit $x \in N(P_o.Q_1)$; l'élément x normalise Q_1 et il existe $y \in Q_1$ tel que $P_o^x = P_o^y$; par suite, on a les égalités suivantes

$$C_{P_o}(Q_1)^x = C_{P_o^x}(Q_1) = C_{P_o^y}(Q_1) = C_{P_o}(Q_1) \qquad .$$

De plus, comme $N(Q_o)$ est un sous-groupe de O-contrôle de G relativement à q et comme x normalise Q_1 , on a $x = zn$ où $z \in O(Q_1)$ et $n \in N(Q_1) \cap N(Q_o)$ (cf. ch.IV, lemme 1); par suite, puisque $O(Q_1)$ centralise Q_1 (cf. ch.VI, §1, déf.), l'élément x normalise $Q_o \cap Q_1$.

<u>Lemme 7. On a</u> $C_P(C_{P_o}(Q_1).Q_1) = Z(C_{P_o}(Q_1))$.

<u>Démonstration</u>: Posons $N = N(P_o.Q_1)$ et $A = P \cap O_{p'p}(N)$; le groupe A contient P_o et nous allons démontrer d'abord que $A = P_o$. On a $N = O_{p'}(N).N_N(A)$ (cf. (C2)) et par suite, $N_N(A)$ est un sous-groupe de C-contrôle de N relativement à p (cf. ch.I, §2, exemple 2); alors, comme N est un sous-groupe de C-contrôle de G relativement à p (cf. lemme 1), il en est de même pour $N(A)$ (cf. ch.I, §3) et par suite, A est un p-sous-groupe C-normal dans G ; par conséquent, d'après la maximalité de P_o , on a $A = P_o$.

Posons $C = C_N(C_{P_o}(Q_1).Q_1)$; il suffit de démontrer que $P \cap C$ est contenu dans P_o . Puisque N normalise $C_{P_o}(Q_1).Q_1$, C est distingué dans N et par suite, on a

$$[P_o, C] \subset (P_o.Q_1) \cap C \subset C_{P_o}(Q_1).Q_1 \qquad ,$$

d'où il résulte que $[P_o, C, C] = 1$. On en déduit que tout p'-sous-groupe de $(C.Q_1)/Q_1$ centralise $(P_o.Q_1)/Q_1$ (cf. (12), ch.5, th.3.6), d'où il résulte que $O^p(C)$ est contenu dans $C_N(P_o).Q_1$ (cf. ch.VI, lemme 1). Or, P_o est un S_p-groupe de $\widetilde{C}(P_o)$ et par suite, $C(P_o)$ possède un p-complément normal. On en déduit que C est contenu dans $O_{p'p}(N)$ et par suite, que $P \cap C$ est contenu dans P_o .

<u>Lemme 8. Si</u> p <u>et</u> q <u>sont associés,</u> $Z(F)$ <u>est un</u> $S_{\{p,q\}}$<u>-groupe de</u> $C(F)$; <u>en particulier, on a</u> $F \neq 1$.

<u>Démonstration</u>: Etant donnée la symétrie des hypothèses par rapport à p et q , il suffit de démontrer que $C_P(F) = Z(C_{P_o}(Q_1))$; nous allons démontrer d'abord que l'on a

$$C_P(C_{Q_o}(P_1)) = C_P(Q_1) \qquad .$$

Puisque $C_{Q_o}(P_1) = Q_o \cap Q_1$, il suffit de démontrer que $C_P(C_{Q_o}(P_1))$ centralise Q_1 ; posons $P_2 = C_P(C_{Q_o}(P_1))$; P_2 et $C_{Q_o}(P_1)$ normalisent Q_1 et ils se centralisent l'un l'autre; dans ces conditions, il suffit de démontrer que P_2 centralise $C_{Q_1}(C_{Q_o}(P_1))$ (cf. (12), ch.5, th.3.4). Or, comme Q_1 centralise P_1 , le groupe $C_{Q_1}(C_{Q_o}(P_1))$ est contenu dans $C_Q(C_{Q_o}(P_1).P_1)$ lequel est égal à $Z(C_{Q_o}(P_1))$ (cf. lemme 7) qui est effectivement centralisé par P_2 . Par suite, P_2 centralise Q_1 et on obtient l'égalité ci-dessus.

En vertu du lemme 7 et de ce que l'on vient de démontrer, on a maintenant les égalités suivantes

$$C_P(F) = C_P(C_{P_o}(Q_1).C_{Q_o}(P_1)) = C_P(C_{P_o}(Q_1).Q_1) = Z(C_{P_o}(Q_1))$$

qui démontrent notre assertion.

Les lemmes 1, 4, 5, 6 et 8 montrent que si p et q sont associés, F est un $\{p,q\}$-sous-groupe nilpotent non trivial de G qui satisfait aux conditions 1, 2 et 3 du théorème. Il nous reste à démontrer maintenant que sous les hypothèses du théorème, p et q sont associés.

<u>Lemme 9. Si</u> A <u>est un sous-groupe de</u> P_o <u>tel que</u> $C_{P_o}(A) = Z(A)$, $C(A)$ <u>possède un</u> p-<u>complément normal</u>.

<u>Démonstration</u>: Posons $N = N(P_o)$; comme N est un sous-groupe de O-contrôle de G relativement à p , on a $N(A) = O(A).N_N(A)$ (cf. ch.IV, lemme 1); de plus, d'après nos hypothèses, A n'est pas trivial et par suite, $O(A)$ est un p'-groupe; par conséquent, il suffit de démontrer que $C_N(A)$ possède un p-complément normal. Si H est un p'-sous-groupe de $C_N(A)$, la conjugaison induit une opération de $H \times A$ sur P_o et d'après nos hypothèses, H centralise $C_{P_o}(A)$; dans ces conditions, on sait que H centralise P_o (cf. (12), ch.5, th.3.4). Il en résulte que $O^p(C_N(A)) \subset C(P_o)$; or, comme P_o est un S_p-groupe de $\tilde{C}(P_o)$, le groupe $C(P_o)$ possède un p-complément normal; par conséquent, $C_N(A)$ possède aussi un p-complément normal.

<u>Lemme 10. Le groupe</u> Q_1 <u>est un élément maximal de l'ensemble des</u> q-<u>sous-groupes de</u> G <u>qui sont normalisés par</u> P .

<u>Démonstration</u>: Soit Q_2 un q-sous-groupe de G contenant Q_1 et normalisé par P ; nous allons démontrer que $Q_2 = Q_1$. Si D est un sous-groupe de type (p,p,p) de P_o , il suffit de démontrer que pour tout sous-groupe B d'ordre p de D , on a $C_{Q_2}(B) = C_{Q_1}(B)$ (cf. (12), ch.5, th.3.16); or, Q_1 étant un

S_q-groupe de $(\mathfrak{U}_p, 0)$, le groupe $C_{Q_1}(B)$ est un S_q-groupe de $O(B)$ (cf. ch.VI, §2, déf.); par conséquent, il suffit de démontrer que pour tout sous-groupe B d'ordre p de P_o , $O(B)$ contient $C_{Q_2}(B)$.

Soit B un sous-groupe d'ordre p de P_o ; posons $A = C_{P_o}(B)$ et $R = C_{Q_2}(B)$. Comme A normalise Q_2 et centralise B , A normalise R et on a $R = C_R(A).[R,A]$ (cf. (12), ch.5, th.3.5); nous allons démontrer que $O(B)$ contient R en montrant qu'il contient $C_R(A)$ et $[R,A]$. Comme A contient B , on a $C_{P_o}(A) \subset A$ et d'après le lemme 9, $C(A)$ possède un p-complément normal qui est alors égal à $O(A)$; par conséquent, $C_R(A)$ est contenu dans $O(A)$, donc dans $O(B)$. D'autre part, puisque P_o est un p-sous-groupe O-normal dans G , on a $N(B) = O(B).(N(B) \cap N(P_o))$ (cf. ch.IV, lemme 1) et par suite, $O(B).N_{P_o}(B)$ est un sous-groupe distingué de $N(B)$; comme $R \subset N(B)$ et $A \subset N_{P_o}(B)$, on en déduit que $[R,A]$ est contenu dans $O(B)$.

<u>Lemme 11</u>. <u>Si</u> Q_1 <u>appartient à</u> $\mathfrak{U}_q$, p <u>et</u> q <u>sont associés</u>.

<u>Démonstration</u>: Puisque P_1 et Q_1 se centralisent l'un l'autre, il suffit de démontrer que P_1 et Q_1 contiennent respectivement $C_{P_o}(Q_1)$ et $C_{Q_o}(P_1)$; nous allons démontrer d'abord que $C_{Q_o}(P_1) \subset Q_1$ et que le groupe $N(P_1)$ contient un S_p-groupe de G . D'après nos hypothèses, il existe $x \in G$ tel que l'on ait
$$(P.Q_1)^x \subset N(Q_o.P_1) \qquad \text{(cf. lemme 2);}$$
puisque $N(Q_o.P_1)$ normalise P_1 et $C_{Q_o}(P_1)$, on en déduit que $P^x \subset N(P_1)$ et que P^x normalise le q-groupe $Q_1^x.C_{Q_o}(P_1)$; d'après la maximalité de Q_1 (cf. lemme 10), on a donc $C_{Q_o}(P_1) \subset Q_1^x$. De plus, comme Q_1^x et Q_1 sont contenus dans $N(Q_o.P_1)$ qui est un sous-groupe de O-contrôle de G relativement à q (cf. lemme 1), on a $x = zn$ où $z \in O(Q_1)$ et $n \in N(Q_o.P_1)$ (cf. ch.I, §3, déf.); puisque z centralise Q_1 et n normalise $C_{Q_o}(P_1)$, il en résulte que Q_1 contient $C_{Q_o}(P_1)$.

Démontrons maintenant que P_1 contient $C_{P_o}(Q_1)$. Puisque $N(P_1)$ contient un S_p-groupe de G , si $P_1 \neq 1$, on voit aisément que P_1 appartient à $\mathfrak{U}_p$; dans ce cas, d'après la première partie de la démonstration (en échangeant les rôles de p et q), on a $C_{P_o}(Q_1) \subset P_1$. Supposons maintenant que $P_1 = 1$; dans ce cas, il suffit de démontrer que $C(Q_1)$ est un p'-groupe. On sait que Q_o est un S_q-groupe de $\tilde{C}(Q_o)$ et par suite, $C(Q_o)$ possède un q-complément normal; comme Q normalise Q_o , Q normalise alors un S_p-groupe de $C(Q_o)$; or, en vertu du lemme 10, Q ne normalise aucun p-sous-groupe non trivial de G ; on en déduit que $C(Q_o)$ est un p'-groupe. De plus, d'après la première partie de la démonstration, on a $Q_o \subset Q_1$ (car $P_1 = 1$) et par suite, $C(Q_1)$ est un p'-groupe.

Lemme 12. Si A est un sous-groupe de type (p,p) de $C_{P_o}(Q_1)$ dont tout sous-groupe d'ordre p appartient à $\mathfrak{U}_p$, A centralise tout q-sous-groupe de G qu'il normalise.

Démonstration: En raisonnant par l'absurde, soit R un élément minimal de l'ensemble des q-sous-groupes de G qui sont normalisés et non centralisés par A . On démontre aisément que A opère irréductiblement sur $R/\Phi(R)$ (cf. (12), ch.3, th. 3.1), d'où il résulte que $R = [R, A]$ (cf. (12) ch.5, th.3.5) et qu'il existe un sous-groupe B d'ordre p de A qui centralise R (cf. (12), ch.3, th.2.3 et ch.5, th.1.4). Démontrons d'abord que $R \subset O(B)$; puisque P_o est un p-sous-groupe O-normal dans G , on a

$$N(B) = O(B).(N(B) \cap N(P_o)) \qquad \text{(cf. ch.IV, lemme 1)}$$

et par suite, $O(B).N_{P_o}(B)$ est distingué dans $N(B)$; comme $R \subset N(B)$ et $A \subset N_{P_o}(B)$, il en résulte que $[R, A]$ est contenu dans $O(B).N_{P_o}(B)$, donc que $R \subset O(B)$.

D'après nos hypothèses, B appartient à $\mathfrak{U}_p$ et normalise Q_1 ; alors, Q_1 étant un S_q-groupe de $(\mathfrak{U}_p,O)$, $C_{Q_1}(B)$ est un S_q-groupe de $O(B)$ (cf. ch.VI, §2, déf.); par conséquent, comme $O(B)$ est un p'-groupe, le groupe $C_{Q_1}(B).A$ est un $S_{\{p,q\}}$-groupe de $O(B).A$; puisque A centralise Q_1 , on en déduit que tout $\{p,q\}$-sous-groupe de $O(B).A$ est nilpotent (cf. (15), cor.D.5.2); en particulier, $R.A$ est nilpotent ce qui contredit notre choix de R .

Lemme 13. Soient A un p-groupe fini et B un q-groupe fini qui opère sur A . Si $\text{rang}(A) \geq 2$ et $\text{rang}(B) \geq 3$, il existe un sous-groupe non trivial de B qui centralise un sous-groupe de A de rang ≥ 2 .

Démonstration: Nous pouvons supposer que B opère fidèlement sur A . Soient B_o un sous-groupe de type (q,q,q) de B , B_1 un sous-groupe d'ordre q^2 de B_o et A_o un élément minimal de l'ensemble des sous-groupes B_o-stables de A sur lesquels B_1 opère fidèlement. On démontre sans difficulté que la représentation de B_o sur le $\underline{Z}/p\underline{Z}$-espace vectoriel $A_o/\Phi(A_o)$ est isomorphe à la somme directe de deux représentations irréductibles non triviales de B_o sur le corps $\underline{Z}/p\underline{Z}$ (cf. (12), ch.3, th.3.1 et th.2.3). Si K_1 , K_2 sont les noyaux de ces représentations, $K_1 \cap K_2$ opère trivialement sur $A_o/\Phi(A_o)$ et par suite, il centralise A_o (cf. (12), ch.5, th.1.4); de plus, comme les quotients B_o/K_1 et B_o/K_2 sont d'ordre q (cf. (12), ch.3, th.2.3), $K_1 \cap K_2$ n'est pas trivial. Il suffit de démontrer maintenant que $\mathrm{rang}(A_0) \geq 2$; or, d'après la décomposition de $A_0/\Phi(A_0)$, on a $\dim_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(A_0/\Phi(A_0)) \geq 2$ et si $q > p$, on a $\dim_{\underline{Z}/p\underline{Z}}(A_0/\Phi(A_0)) \geq 4$ (dans ce cas, les représentations non triviales de B_0 sur $\underline{Z}/p\underline{Z}$ ont une dimension ≥ 2); par suite, A_0 n'est ni cyclique ni quaternionien généralisé, ce qui montre que $\mathrm{rang}(A_0) \geq 2$ (cf. (12), ch.5, th.4.10).

<u>Lemme 14</u>. <u>Pour que</u> p <u>et</u> q <u>soient associés, il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite</u>

1. <u>Il existe un</u> $\{p,q\}$<u>-sous-groupe non trivial</u> E <u>de</u> G <u>tel que</u>
$$p\text{-rang}(N(E)) \geq 3 \quad \underline{\text{et}} \quad q\text{-rang}(N(E)) \geq 3 \quad .$$
2. <u>Il existe</u> $A \in \mathfrak{A}_p$ <u>tel que</u> $q\text{-rang}(N(A)) \geq 3$.

<u>Démonstration</u>: Supposons que la condition 1 soit satisfaite; étant donnée la symétrie des hypothèses par rapport à p et q , nous pouvons supposer que $O_p(E) \neq 1$ (cf. (12), ch.4, th.3.3); dans ces conditions, si D est un sous-groupe de type (p,p,p) de $N(E)$, on a $C_{O_p(E)}(D) \neq 1$ et par suite, $O_p(E)$ appartient à $\mathfrak{A}_p$, d'où il résulte que la condition 2 est également satisfaite (on prend $A = O_p(E)$).

Dorénavant, nous supposons que la condition 2 est satisfaite. Soient A un élément de $\mathfrak{A}_p$ tel que $q\text{-rang}(N(A)) \geq 3$ et B un sous-groupe de type (q,q,q) de $N(A)$; en vertu du lemme 2, il existe $x \in G$ tel que l'on ait
$$(A.B)^x \subset N(P_0.Q_1) \qquad ;$$
alors, B^x normalise Q_1 et si Q_1 n'est pas trivial, $C_{Q_1}(B^x)$ n'est pas trivial non plus; dans ce cas, Q_1 appartient à $\mathfrak{A}_q$ et d'après le lemme 11, p et q sont associés.

Supposons que $Q_1 = 1$; alors, B^x normalise P_0 et nous allons démontrer qu'il existe un sous-groupe non trivial B_0 de B^x et un sous-groupe A_0 de type (p,p) de P_0 tels que tout sous-groupe d'ordre p de A_0 appartienne à $\mathfrak{A}_p$ et $[A_0, B_0] = 1$. Posons $Z/\Omega_1(Z(P_0)) = Z(P_0/\Omega_1(Z(P_0)))$; tout sous-groupe non trivial de Z appartient à $\mathfrak{A}_p$; en effet, si Z_0 est un sous-groupe d'ordre p de Z , le groupe $Z_0.\Omega_1(Z(P_0))$ est distingué dans P_0 et si D est un sous-groupe de type (p,p,p) de P_0 , le groupe $Z_0.\Omega_1(Z(P_0)).C_D(Z_0.\Omega_1(Z(P_0)))$ est toujours de type (p,p,p,...) . De plus, comme $\mathrm{rang}(P_0) \geq 3$, P_0 possède un sous-groupe distingué A_1 de type (p,p) (cf. (12), ch.5, th.4.3 et th.4.10); alors, Z contient A_1 et par suite, on a $\mathrm{rang}(Z) \geq 2$. Enfin, comme B^x normalise P_0 , il normalise Z . L'assertion résulte maintenant du lemme 13 appliqué aux groupes Z et B^x .

Puisque B_0 appartient à $\mathfrak{A}_q$, il résulte à nouveau du lemme 2, qu'il existe $y \in G$ tel que l'on ait $(A_0.B_0)^y \subset N(Q_0.P_1)$. Nous allons démontrer maintenant que $P_1 \neq 1$; en raisonnant par l'absurde, supposons que $P_1 = 1$; alors, A_o^y normalise Q_o et en vertu du lemme 12, il le centralise; par conséquent, $C(Q_o)$ n'est pas un p'-groupe. Or, comme Q_o est un S_q-groupe de $\widetilde{C}(Q_o)$, $C(Q_o)$ possède un q-complément normal et par suite, Q normalise un S_p-groupe de $C(Q_o)$. Par conséquent, Q normalise un p-sous-groupe non trivial de G , ce qui contredit le lemme 10 .

Comme P_1 n'est pas trivial, $C_{P_1}(A_o^y)$ n'est pas trivial non plus et si A_2 est un sous-groupe d'ordre p de $C_{P_1}(A_o^y)$, ou bien $A_2.A_o^y$ est de type (p,p,p) , ou bien A_2 est contenu dans A_o^y et il appartient à $\mathfrak{A}_p$; dans les deux cas, P_1 appartient à $\mathfrak{A}_p$ et en vertu du lemme 11, p et q sont associés.

<u>Corollaire. Les notations étant celles du théorème, supposons que les S_p-groupes et les S_q-groupes de G centralisent respectivement les q-sous-groupes et les p-sous-groupes de G qu'ils normalisent. S'il existe un {p,q}-sous-groupe non trivial E de G tel que</u>

$$p\text{-rang}(N(E)) \geq 3 \quad \underline{\text{et}} \quad q\text{-rang}(N(E)) \geq 3 ,$$

<u>le groupe G possède un $S_{\{p,q\}}$-groupe nilpotent H et tout {p,q}-sous-groupe de G est contenu dans l'un des conjugués de H .</u>

<u>Démonstration</u>: Soit F un {p,q}-sous-groupe nilpotent de G satisfaisant aux conditions 1, 2 et 3 du théorème et notons respectivement F_p et F_q le S_p-groupe et le S_q-groupe de F . D'après la condition 3, on a $C(F) = Z(F).M$ où M est un {p,q}'-sous-groupe caractéristique de C(F) (cf. (12), ch.6, th.2.1). D'après la condition 1, N(F) contient un S_p-groupe P et un S_q-groupe Q de G ; nous allons démontrer d'abord que $[P, Q] \subset M$. En vertu de nos hypothèses, P centralise F_q et Q centralise F_p ; puisque $C(F_p)$ et $C(F_q)$ sont distingués dans N(F) , on a donc $[P, Q] \subset C(F)$ et par suite, P et Q normalisent respectivement les groupes Q.C(F) et P.C(F) ; or, comme P et Q centralisent respectivement $Z(F_q)$ et $Z(F_p)$, on a

$$O_{p'}(Q.C(F)) = Q.M \quad \text{et} \quad O_{q'}(P.C(F)) = P.M ;$$

on en déduit que P et Q normalisent respectivement Q.M et P.M et par suite, on a

$$[P, Q] \subset (P.M) \cap (Q.M) = M .$$

Puisque M contient $[P, Q]$, l'ensemble P.Q.M est un sous-groupe {p,q}-résoluble de G ; soit H un $S_{\{p,q\}}$-groupe de P.Q.M (cf. (15), cor.D.5.2); alors, H est un $S_{\{p,q\}}$-groupe de G et il est nilpotent (car son image dans (P.Q.M)/M l'est). De plus, soit K un {p,q}-sous-groupe de G ; d'après la condition 2, quitte à le remplacer par l'un de ses conjugués, nous pouvons supposer que K est contenu dans N(F) ; alors, quitte à modifier notre choix de P et de

Q , nous pouvons supposer que P et Q contiennent respectivement un S_p-groupe et un S_q-groupe de K ; dans ces conditions, on a $K \subset P.Q.M$ et par suite, K est contenu dans l'un des conjugués de H (cf. (15), cor.D.5.2).

CHAPITRE IX

Sur l'existence d'un π-complément normal

Soient G un groupe fini et π un ensemble de nombres premiers tel que pour tout couple p , q d'éléments de π , p ne divise pas q^2-1 . A l'aide du théorème du ch. VIII, nous allons établir le résultat suivant

Théorème. Supposons que pour tout couple p , q d'éléments de π , G possède un $S_{\{p,q\}}$-groupe et que pour tout π-sous-groupe non trivial E de G , $N(E)$ possède un π-complément normal. Alors, G possède un π-complément normal.

Nous allons démontrer d'abord deux lemmes.

Lemme 1. Soient p un nombre premier, H un sous-groupe de C-contrôle de G relativement à p et P un S_p-groupe de H . On a alors

$$P \cap D(G) = P \cap D(H) \qquad ;$$

en particulier, si H possède un p-facteur non trivial, il en est de même pour G .

Démonstration: Il suffit de démontrer que $P \cap D(H)$ contient $P \cap D(G)$. On sait que $P \cap D(G)$ est engendré par l'ensemble des éléments de la forme $x^{-1}x^y$ où $y \in G$ et $x, x^y \in P$ (cf. (12), ch.7, th.3.4); or, H étant un sous-groupe de C-contrôle de G relativement à p , pour tout $x \in P$ et tout $y \in G$ tels que x^y appartienne à P , il existe $z \in C(x)$ et $h \in H$ tels que l'on ait $y = zh$; on a alors

$$x^{-1}x^y = x^{-1}x^h = [x, h]$$

et par suite, $x^{-1}x^y$ appartient à $P \cap D(H)$; ceci démontre l'assertion.

Lemme 2. Les notations étant celles du lemme 1, posons $P_o = P \cap O_{p',p}(H)$. Si H est p-résoluble, P_o est le plus grand sous-groupe de P C-normal dans G et les groupes $H/O_{p'}(H)$ et $N(P_o)/O_{p'}(N(P_o))$ sont isomorphes.

Démonstration: Puisque $H = O_{p'}(H).N_H(P_o)$ (cf. (C2)), l'inclusion de $N_H(P_o)$ dans H induit un isomorphisme entre les groupes $N_H(P_o)/(N(P_o) \cap O_{p'}(H))$ et $H/O_{p'}(H)$; en particulier, on a

$$O_{p'}(N_H(P_o)) = N(P_o) \cap O_{p'}(H)$$

(car $O_{p'}(H/O_{p'}(H)) = 1$). On en déduit que $N_H(P_o)$ est un sous-groupe de C-contrôle de H relativement à p (cf. ch.I, §2, exemple 2) et d'après nos hypothèses, il est alors un sous-groupe de C-contrôle de G (cf. ch.I, §3); par conséquent, P_o est un p-sous-groupe C-normal dans G (cf. ch.IV, §1, déf.). Notons P_1 le plus grand sous-groupe de P C-normal dans G (cf. ch.IV, prop.3); on a donc

$P_o \subset P_1$ et d'après le lemme 1 du ch.IV, on a
$$N(P_o) = C(P_o).(N(P_o) \cap N(P_1)) \quad ;$$
en particulier, $C(P_o).P_1$ est un sous-groupe distingué de $N(P_o)$ et par suite, le groupe $O_{p'}(H).C_H(P_o).P_1$ est distingué dans H (car $C_H(P_o).P_1$ est distingué dans $N_H(P_o)$).

Supposons que H soit p-résoluble; on sait que
$$C_H(P_o) \subset O_{p',p}(H) \qquad \text{(cf. (12), ch.6, th.3.3).}$$
Alors, d'après ce que l'on vient de démontrer, $O_{p',p}(H).P_1$ est distingué dans H et par suite, P_1 est contenu dans $O_{p',p}(H)$, donc dans P_o ; par conséquent, on a $P_1 = P_o$. De plus, d'après l'inclusion ci-dessus, P_o contient $C_p(P_o)$ et par suite, on a
$$C(P_o) = O_{p'}(C(P_o)).Z(P_o) \qquad \text{(cf. (12), ch.6, th.2.1);}$$
comme $O_{p'}(C(P_o)) = O_{p'}(N(P_o))$, il résulte alors du lemme 1 du ch.IV appliqué à P_o et à H , que l'on a
$$N(P_o) = O_{p'}(N(P_o)).N_H(P_o) \quad ;$$
par conséquent, l'inclusion de $N_H(P_o)$ dans $N(P_o)$ induit un isomorphisme entre les groupes $N_H(P_o)/(H \cap O_{p'}(N(P_o)))$ et $N(P_o)/O_{p'}(N(P_o))$, et en particulier, on a
$$O_{p'}(N_H(P_o)) = H \cap O_{p'}(N(P_o)) \quad .$$

Nous avons donc démontré que les groupes $H/O_{p'}(H)$ et $N(P_o)/O_{p'}(N(P_o))$ sont tous les deux isomorphes à $N_H(P_o)/O_{p'}(N_H(P_o))$; par suite, ils sont isomorphes entre eux.

<u>Démonstration du théorème</u>: En raisonnant par récurrence sur $|G|$, il suffit de démontrer qu'il existe un sous-groupe distingué K de G tel que G/K soit un π-groupe non trivial; en effet, il est clair que le groupe K satisfait alors aux hypothèses du théorème (car l'intersection de K avec un $S_{\{p,q\}}$-groupe de G est un $S_{\{p,q\}}$-groupe de K) et par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, il possède un π-complément normal M ; alors, M est égal à l'ensemble des π'-éléments de K , donc de G , et par suite, M est un π-complément normal de G .

Nous pouvons supposer que tout élément de π divise $|G|$; de plus, d'après un théorème de Frobenius (cf. (12), ch.7, th.4.5), nous pouvons supposer que $|\pi| \geq 2$; en particulier, les nombres premiers 2 et 3 n'appartiennent pas à π (car si $p \geq 5$, 2 et 3 divisent p^2-1).

Supposons d'abord qu'il existe $p \in \pi$ tel que $p\text{-rang}(G) \leq 2$; nous allons démontrer que pour tout p-sous-groupe A de G , le quotient $N(A)/C(A)$ est un p-groupe. Nous pouvons supposer que $A \neq 1$; alors, d'après nos hypothèses, $N(A)$ possède un π-complément normal et par suite, $N(A)/C(A)$ est un π-groupe; or, comme $\text{rang}(A) \leq 2$, pour tout automorphisme de A d'ordre premier q différent de p , q divise p^2-1 (cf. (12), ch.5, th.4.15); par conséquent, $N(A)/C(A)$ est un p-groupe. Dans ce cas, G possède un p-complément normal (cf. (12), ch.7, th.4.5) et l'existence de K est démontrée.

Désormais, nous supposons que pour tout $p \in \pi$, on a p-rang$(G) \geq 3$. Soit $p \in \pi$; d'après nos hypothèses, pour tout p-sous-groupe non trivial A de G , $N(A)$ possède un π-complément normal et comme 2 n'appartient pas à π , $N(A)/O_{\pi'}(N(A))$ est résoluble (cf. (6)); en particulier, $N(A)$ est p-résoluble; par conséquent, d'après le corollaire du ch.VIII, prop., p satisfait aux conditions $(\pi 1)$, $(\pi 2)$ du ch.VIII. De plus, d'après nos hypothèses, si $p, q \in \pi$, G possède un $S_{\{p,q\}}$-groupe lequel contient un sous-groupe de type (p,p,p) et un sous-groupe de type (q,q,q) . Par conséquent, d'après le théorème du ch.VIII, pour tout $p \in \pi$ et tout $q \in \pi - \{p\}$, il existe un $\{p,q\}$-sous-groupe non trivial F_{pq} tel que $N(F_{pq})$ soit un sous-groupe de C-contrôle de G relativement à p et à q .

Soient p, q deux éléments distincts de π ; comme $F_{pq} \neq 1$, $N(F_{pq})$ possède un π-complément normal et par suite, il possède un S_π-groupe H_{pq} (cf. (12), ch.6, th.2.1); de plus, H_{pq} est résoluble (cf. (6)) et comme l'inclusion de H_{pq} dans $N(F_{pq})$ induit un isomorphisme entre H_{pq} et $N(F_{pq})/O_{\pi'}(N(F_{pq}))$, H_{pq} est encore un sous-groupe de C-contrôle de G relativement à p et à q (cf. ch.I, §2, exemple 2).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'existence de K . Soient $p \in \pi$, P un S_p-groupe de G et P_0 le plus grand sous-groupe de P C-normal dans G (cf. ch.IV, prop.3); comme p satisfait à la condition $(\pi 2)$ du ch.VIII, on a $P_0 \neq 1$ et par suite, $N(P_0)$ possède un π-complément normal; par conséquent, le quotient $N(P_0)/O_{p'}(N(P_0))$ est un π-groupe non trivial et par suite, il existe $q \in \pi$ tel que ce quotient possède un q-facteur non trivial (cf. (6)). Si $q = p$, en vertu du lemme 1 appliqué à $N(P_0)$, G possède un p-facteur non trivial. Si $q \neq p$, d'après le lemme 2 appliqué à H_{pq} , celui-ci possède un q-facteur non trivial et d'après le lemme 1, il en est de même pour G . Dans les deux cas, G possède un sous-groupe distingué K tel que G/K soit un π-groupe non trivial.

APPENDICE I

Les p-sous-groupes essentiels des groupes du type de Lie

Soient p un nombre premier, $\mathfrak{K}$ un corps fini de caractéristique p, R_0 un système de racines irréductible et réduit et G_0 un groupe de Chevalley associé à R_0 et $\mathfrak{K}$ (cf. (17), §3); suivant les notations de (17), §3, on a

$$G_0 = < \{x_\alpha(t)\}_{t \in \mathfrak{K},\ \alpha \in R_0} > .$$

Notons respectivement R_0^+ et R_0^- les ensembles des racines positives et negatives de R_0 par rapport à une base et posons

$$U_0 = < \{x_\alpha(t)\}_{t \in \mathfrak{K},\ \alpha \in R_0^+} > \quad , \quad V_0 = < \{x_\alpha(t)\}_{t \in \mathfrak{K},\ \alpha \in R_0^-} > .$$

Notons σ le produit des automorphismes de G_0 induits par un automorphisme ρ du graphe de Dynkin associé à R_0 et par un automorphisme θ de $\mathfrak{K}$ satisfaisant aux conditions (1),(2) de (17), page 178; l'automorphisme σ stabilise U_0 et V_0 ; on note respectivement U et V les sous-groupes des points fixes de σ dans U_0 et V_0 .

On pose $G = < U,V >$ et on dit que G est un <u>groupe fini du type de Lie relativement à</u> ρ (si l'on prend $\rho = id$, on a $G = G_0$). Dans cet appendice, nous allons déterminer les p-sous-groupes essentiels de G ; puis, pour $p \geq 5$, nous allons calculer les groupes simples associés aux p-sous-groupes essentiels de certains sous-groupes de $Aut(G^k)$, $k > 0$ (ce calcul est utilisé dans la démonstration du théorème 2 du ch.V).

Tout d'abord nous allons faire quelques remarques sur la structure de G .

<u>Il existe un sous-groupe</u> N <u>de</u> G , <u>un</u> p'-<u>sous-groupe distingué</u> H <u>de</u> N <u>et un sous-ensemble</u> S <u>de</u> N/H <u>tels que</u> (a) <u>le groupe</u> H <u>normalise</u> U <u>et</u> V, (b) <u>on ait</u> $N \cap U = 1$, <u>et</u> (c) <u>le quadruplet</u> $(G, U.H, N, S)$ <u>soit un système de Tits</u> (suivant la terminologie de (3), ch.IV, §2); en effet, d'après le théorème 12.1.1, la proposition 8.2.1 et le théorème 13.5.4 de (5), l'assertion est vraie pour l'image de G dans $G_0/Z(G_0)$; comme $Z(G_0)$ est un p'-groupe (cf. (17), §3, lemme 28 et cor.2, page 41), il suffit de prendre N et H égaux aux images réciproques dans G des sous-groupes de $G_0/Z(G_0)$ décrits dans (5).

Posons $B = U.H$; alors, <u>on a</u> $B = N_G(U)$ et en particulier, U <u>est un</u> S_p<u>-groupe de</u> G ; en effet, comme $N_G(U)$ contient B , on a $N_G(U) = B.N_N(U).B$ (cf. (3), ch.IV, §2, th.3) et comme N normalise H , on a $N_N(U) \subset N_N(B) \subset B$ (cf. (3), ch.IV, §2, th.4).

Posons $W = N/H$; pour tout $w \in W$, on note $n(w)$ un représentant de w dans N , on écrit U^w au lieu de $U^{n(w)}$ et on pose $U_w = U \cap U^w$; alors, *pour tout* $s \in S$, U_s *est distingué dans* U ; en effet, s est associé à une orbite J de ρ dans la base de R_0 (cf. (5), prop.8.2.1, prop.13.1.2 et th. 13.5.4) et si l'on note $(R_0)_J$ l'ensemble des éléments de R_0 qui sont engendrés par J , on a

$$U_0 \cap U_0^{n(s)} = < \{x_\alpha(t)\}_{t \in \mathfrak{K}\ ,\ \alpha \in R_0^+ - (R_0)_J} >$$

(car le premier membre contient le deuxième et d'après le théorème 4' de (17), §3, les deux membres ont le même ordre); or, comme σ stabilise U_0 et $n(s)$, on a $U_s = U \cap (U_0 \cap U_0^{n(s)})$; l'assertion résulte alors du lemme 16 de (17), §3 (car $R_0^+ - (R_0)_J$ est un idéal de R_0^+).

Nous empruntons les notations de (3), ch.IV, §2.

Lemme 1. Soient $s \in S$, $w \in W$ *et* $x \in C(w)$. *Supposons que l'on ait* $l_S(w) < l_S(sw)$. *Alors,* $U \cap U^x$ *contient strictement* $U \cap U^{n(s)x}$ *et on a*

$$U = U_s.(U \cap U^{x^{-1}}) \quad .$$

Démonstration: D'après nos hypothèses, on a $C(s).C(w) = C(sw)$ (cf. (3), ch.IV, §2, th.2); soient $y, y' \in C(s)$ et $z, z' \in C(w)$ tels que $yz = y'z'$; on a alors $z = (y^{-1}y')z'$ et d'après l'égalité ci-dessus, $y^{-1}y'$ n'appartient pas à $C(s)$, d'où il résulte qu'il appartient à B (cf. (3), ch.IV, §2, déf.1(T3)). On en déduit que

$$|C(s)||C(w)| = |C(sw)||B|$$

et en calculant $|C(s)|$, $|C(w)|$ et $|C(sw)|$, on obtient

$$|B^{n(s)} \cap B||B \cap B^{x^{-1}}| = |B^{n(s)} \cap B^{x^{-1}}||B| \quad ;$$

comme U est égal à l'ensemble des p-éléments de B , on a alors

$$|U_s||U \cap U^{x^{-1}}| = |U^s \cap U^{x^{-1}}||U| \quad .$$

D'autre part, il est clair que l'on a

$$|U_s||U \cap U^{x^{-1}}| = |U_s.(U \cap U^{x^{-1}})||U_s \cap U^{x^{-1}}| \quad .$$

On en déduit les égalités suivantes

$$U^s \cap U^{x^{-1}} = U_s \cap U^{x^{-1}} \quad \text{et} \quad U = U_s.(U \cap U^{x^{-1}}) \quad ;$$

en particulier, on a $U^{n(s)x} \cap U \subset U^x \cap U$; de plus, comme $U_s \neq U$, on a

$$|U^{n(s)x} \cap U| = |U^s \cap U^{x^{-1}}| < |U \cap U^{x^{-1}}| = |U^x \cap U| \quad .$$

Lemme 2. Pour tout $s \in S$ *et tout* $x \in G$ *tels que* $U_s \subset U^x$, *l'élément* x *appartient à* $G_{\{s\}}$. *En particulier, si* s *et* s' *sont deux éléments distincts de* S , *les groupes* U_s *et* $U_{s'}$ *ne sont pas conjugués dans* G .

Démonstration: Posons $w = C^{-1}(Bx^{-1}B)$; si $l_S(w) < l_S(sw)$, en vertu du lemme 1, on a

$$U = U_s.(U \cap U^x) = U \cap U^x$$

et par suite, x appartient à B. Supposons que $l_S(sw) < l_S(w)$; on a alors $C(w) = C(s).C(sw)$ (cf. (3), ch.IV, §2, th.2) et par suite, on a $x = zn(s)b$ où $b \in B$ et $z^{-1} \in C(sw)$ (car $n(s)^2 \in B$); comme $H^{n(s)} = H$, B et $n(s)$ normalisent U_s et d'après nos hypothèses, on a $U_s \subset U^z$; par suite, on a

$$U = U_s.(U \cap U^z) = U \cap U^z \qquad \text{(cf. lemme 1);}$$

on en déduit que z appartient à B et par conséquent, que $x \in G_{\{s\}}$.

<u>Lemme 3</u>. <u>Pour tout</u> $s \in S$, <u>on a</u> $N_G(U_s) = G_{\{s\}}$ <u>et</u> $M_G(U_s,U) = B$.

<u>Démonstration</u>: En vertu du lemme 2, $G_{\{s\}}$ contient $N_G(U_s)$; or, $n(s)$, H et U normalisent U_s et on a $G_{\{s\}} = B \cup Bn(s)B$; ceci démontre la première égalité. Démontrons la deuxième; comme $N_G(U) = B \subset N_G(U_s)$, B est contenu dans $M_G(U_s,U)$ et il suffit de démontrer que B satisfait à la condition (M2) du ch.II. Soit $x \in N_G(U_s) - B$; on a alors $x = bn(s)b'$ où $b, b' \in B$, et par suite, on a

$$|B \cap B^x|_p = |B \cap B^{n(s)}|_p = |U \cap U^s| ,$$

d'où il résulte que U_s est un S_p-groupe de $B \cap B^x$.

Nous sommes en mesure de déterminer les p-sous-groupes essentiels de G. Rappelons que "p-sous-groupe essentiel" équivaut à "p-sous-groupe 1-essentiel" (cf. ch.III, cor.2 du th.1). Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des doubles flèches à but maximal de la 1-localité de G relative à p (cf. ch.III, déf.); on écrira les éléments de $\mathcal{D}$ sans l'indice 1.

<u>Proposition 1</u>. <u>Avec les notations précédentes, l'ensemble</u> $\{U_s\}_{s \in S}$ <u>est un système de représentants des classes de conjugaison des p-sous-groupes essentiels de</u> G. <u>De plus, l'ensemble</u> $\{(U,1,n(s),U_s)\}_{s \in S}$ <u>est un système directeur minimal de</u> $\mathcal{D}$ <u>et un système de représentants des classes d'échangeabilité des éléments irréductibles de</u> $\mathcal{D}$.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 3, pour tout $s \in S$, U_s est un p-sous-groupe essentiel de G, $(U,1,n(s),U_s)$ est un élément irréductible de $\mathcal{D}$ et tout élément irréductible de $\mathcal{D}$ dont la source est un conjugué de U_s dans G, est échangeable avec $(U,1,n(s),U_s)$ (cf. ch.III, th.1 et ses corollaires). D'après le lemme 2 et le corollaire du ch.III, th.2, il suffit de démontrer maintenant que l'ensemble $\mathcal{C} = \{(U,1,n(s),U_s)\}_{s \in S}$ est un système directeur de $\mathcal{D}$; de plus, puisque tout élément de $\mathcal{D}$ est engendré par l'ensemble des éléments de la forme $(U,1,x,A)$, il suffit de démontrer qu'un tel élément est engendré par la réunion de $\mathcal{C}$ et de l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments de longueur 1 de $\mathcal{D}$.

Posons $w = C^{-1}(BxB)$; on raisonne par récurrence sur $l_S(w)$; si $l_S(w) = o$, x appartient à B et on a

$$(U,1,x,A) = (U,1,x,U)(U,1,A)\quad .$$

Supposons que $l_S(w) \geq 1$; il existe alors $s \in S$ et $v \in W$ tels que l'on ait $w = sv$ et $l_S(v) < l_S(w)$; par conséquent, on a $C(w) = C(s).C(v)$ (cf. (3), ch.IV, §2, th.2) et il existe $b \in B$ et $y \in C(v)$ tels que $x = bn(s)y$. Or, d'après le lemme 1 appliqué à v et à y , U^y contient $U \cap U^x$ et par suite, il contient A ; il résulte alors de l'hypothèse de récurrence, que $(U,1,y,A)$ est engendré par $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$. De plus, comme $A \subset U^x \cap U^y$, A est contenu dans $(U_s)^y$. L'assertion résulte maintenant de l'égalité suivante

$$(U,1,x,A) = (U,1,y,A) + (U,1,b,U)(U,y,A) + (U,b,U)(U,1,n(s),U_s)(U_s,y,A)\quad .$$

<u>Corollaire 1</u>. <u>Avec les notations précédentes, le groupe</u> 1 <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> G <u>si et seulement si l'on a</u> $|S| = 1$.

<u>Démonstration</u>: Le corollaire résulte de la proposition 1 ci-dessus et des lemmes 61 et 62 de (17), §11.

Dans l'appendice II nous aurons besoin du corollaire suivant

<u>Corollaire 2</u>. <u>Le groupe</u> 1 <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $GL(n,\mathfrak{K})$ <u>si et seulement si l'on a</u> $n = 2$.

<u>Démonstration</u>: Comme $|GL(n,\mathfrak{K})/SL(n,\mathfrak{K})|$ est premier à p , lorsque 1 est un p-sous-groupe essentiel de $GL(n,\mathfrak{K})$, il l'est aussi de $SL(n,\mathfrak{K})$ (cf. ch.II, cor.1 de la prop.9) et d'après le corollaire 1, on a $n = 2$. La réciproque ne présente aucune difficulté.

Dorénavant, <u>nous supposons que</u> $p \geq 5$ <u>et que</u> G_o <u>est le groupe de Chevalley adjoint</u> (cf. (17), page 45 et (5), page 198); dans ces conditions, on sait que G_o <u>et</u> G <u>sont simples</u> (cf. (5), th.11.1.2 et th.14.4.1). Soient k un entier positif, G^k le produit direct de k copies de G et A un p-sous-groupe de $Aut(G^k)$; on identifie G^k à son image canonique dans $Aut(G^k)$ et on pose $K = A.G^k$. Nous allons déterminer le groupe simple associé à A , lorsque A est un p-sous-groupe essentiel de K (cf. ch.II, prop.7). On obtiendra le résultat suivant

<u>Proposition 2</u>. <u>Avec les notations précédentes, soit</u> P <u>un</u> S_p-<u>groupe de</u> K <u>contenant</u> A . <u>Supposons que</u> A <u>soit un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> K . <u>Le groupe</u> $S_K(A)$ <u>est isomorphe à l'un des groupes suivants</u>: $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$ <u>et on a</u> $O_{pp'}(X_K(A)) \subset M_K(A,P)$.

D'abord, nous allons faire quelques remarques sur la structure de $\mathrm{Aut}(G^k)$ et démontrer deux lemmes. Les notations et les hypothèses sont toujours celles de la proposition 2.

Soient E l'ensemble des sous-groupes distingués minimaux de G^k, $\Sigma(E)$ le groupe des permutations de E et Q un S_p-groupe de $\Sigma(E)$. Il est clair que l'opération de $\mathrm{Aut}(G^k)$ sur G^k induit un homomorphisme de $\mathrm{Aut}(G^k)$ dans $\Sigma(E)$. D'autre part, tout élément de E est isomorphe à G et comme G n'est pas abélien, les projections induisent une bijection entre E et l'ensemble des k facteurs de G^k ; en particulier, cette bijection définit un homomorphisme injectif de $\Sigma(E)$ dans $\mathrm{Aut}(G^k)$ qui est une section du précédent; on identifie $\Sigma(E)$ à son image dans $\mathrm{Aut}(G^k)$. Alors, en identifiant $\mathrm{Aut}(G)^k$ à son image canonique dans $\mathrm{Aut}(G^k)$, <u>on a</u>

$$\mathrm{Aut}(G^k) = \mathrm{Aut}(G)^k.\Sigma(E) \quad \underline{\text{et}} \quad \mathrm{Aut}(G)^k \cap \Sigma(E) = 1 .$$

On sait que tout élément γ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ induit un automorphisme γ_0 de G_0 définit par la formule $\gamma_0(x_\alpha(t)) = x_\alpha(\gamma(t))$ où $t \in \mathfrak{K}$ et $\alpha \in R_0$ (cf. (17), page 158); il est clair que γ_0 stabilise U_0 et V_0 ; de plus, γ_0 commute à l'automorphisme de G induit par ρ (cf. (17), page 157) et par suite, comme $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ est cyclique, γ_0 et σ commutent. On a donc une opération de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ sur G qui stabilise U, V, N et H et qui opère trivialement sur W ; en particulier, <u>pour tout</u> $w \in W$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ <u>stabilise</u> U^w.

En vertu des lemmes 17 et 63 de (17), l'opération de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ sur G est fidèle (si $\rho \neq \mathrm{id}$, U contient toujours l'un des groupes décrits dans les assertions (b),(c),(d),(e) du lemme 63 de (17)); on identifie $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ à son image dans $\mathrm{Aut}(G)$ et on note Π l'unique S_p-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. Ainsi, Π normalise U et d'après les théorèmes 30 et 36 de (17), §11, <u>le groupe</u> $U.\Pi$ <u>est un</u> S_p<u>-groupe de</u> $\mathrm{Aut}(G)$; en effet, les automorphismes diagonaux (cf. (17), page 158) sont d'ordres premiers à p et les automorphismes du graphe de Dynkin sont d'ordres 1, 2 ou 3 (cf. (17), page 156).

Si L est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$, on identifie L^k à son image canonique dans $\mathrm{Aut}(G)^k$; il est clair que $\Sigma(E)$ normalise L^k dans $\mathrm{Aut}(G^k)$. Alors, d'après nos remarques précédentes, <u>le groupe</u> $(U.\Pi)^k.Q$ <u>est un</u> S_p<u>-groupe de</u> $\mathrm{Aut}(G^k)$. De plus, soit $w \in W$; comme Π normalise U et U^w, il normalise U_w et par suite, <u>le groupe</u> $\Pi^k.Q$ <u>normalise</u> $(U_w)^k$. On a alors le résultat suivant

<u>Lemme 4. Avec les notations précédentes, supposons que</u> A <u>soit transitif sur</u> E. <u>Il existe</u> $s \in S$, $x \in \mathrm{Aut}(G^k)$ <u>et un sous-groupe</u> D <u>de</u> $\Pi^k.Q$, <u>tels que l'on ait</u> $A^x = (U_s)^k.D$ <u>et</u> $P^x = U^k.D$.

<u>Démonstration</u>: Quitte à remplacer A et P par ses conjugués par un même élément de $\mathrm{Aut}(G^k)$, nous pouvons supposer que l'on a $P \subset (U.\Pi)^k.Q$. Posons $D = P \cap (\Pi^k.Q)$; comme $U^k \subset P \subset U^k.(\Pi^k.Q)$, on a alors

$$P = U^k.D \quad \text{et} \quad K = G^k.D$$

Soit $y \in N_K(A) - M_K(A,P)$; comme $(U^k)^y$ est un S_p-groupe de G^k, il existe $z = (z_1,\dots,z_k) \in G^k$ tel que l'on ait $(U^k)^y = (U^k)^z$; or, d'après le théorème 8.4.3 et la proposition 13.5.3 de (5), pour tout $i \leq k$, il existe $b_i \in B$, $w_i \in W$ et $u_i \in U$ tels que l'on ait $z_i = b_i n(w_i) u_i$; par suite, si l'on pose $u = (u_1,\dots,u_k)$, on a

$$(U^k)^y = (U^{w_1} \times \dots \times U^{w_k})^u$$

Par conséquent, quitte à remplacer A par l'un de ses conjugués dans P, nous pouvons supposer que l'on a

$$(U^k)^y = U^{w_1} \times \dots \times U^{w_k}$$;

dans ces conditions, nous allons démontrer que tous les w_i sont égaux.

Soit $j \leq k$; nous allons démontrer que l'on a $w_1 = w_j$; comme A est transitif sur E, il existe un élément a de A qui envoie le premier facteur dans le j-ième; de plus, comme $A^y = A$, l'élément a normalise $(U^k)^y$; enfin, comme $A \subset (U.\Pi)^k.Q$, il existe $u = (u_1,\dots,u_k) \in U^k$, $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_k) \in \Pi^k$ et $q \in Q$ tels que l'on ait $a = u\pi q$. On en déduit que

$$(U^{w_1})^{u_1\pi_1} = U^{w_j}$$

et comme Π normalise U^{w_j}, l'élément $n(w_j)(u_1)^{-1}n(w_1)^{-1}$ appartient à B (car $B = N_G(U)$), d'où il résulte que $Bn(w_j)B = Bn(w_1)B$, donc que $w_j = w_1$ (cf. (3), ch.IV, §2, th.1).

Posons $w = w_1$; d'après ce qui précède, on a donc $(U^k)^y = (U^w)^k$. D'autre part, y ne normalise pas U^k ; en effet, comme A n'est pas un S_p-groupe de K, A ne contient pas U^k et par suite, il ne contient pas $N_{U^k}(A)$ (cf. (01)); comme y n'appartient pas à $M_K(A,P)$, l'assertion résulte du lemme 1 du ch.II. Par conséquent, on a $w \neq 1$ et il existe alors $s \in S$ et $v \in W$ tels que l'on ait $w = sv$ et $l_S(v) < l_S(w)$; nous allons démontrer que l'on a

$$v = 1 \quad \text{et} \quad A = (U_s)^k.D$$

Puisque $D \subset \Pi^k.Q$, le groupe D normalise $(U^v)^k$ et $(U^w)^k$; posons $P_1 = (U^v)^k.D$ et $P_2 = (U^w)^k.D$; démontrons d'abord que l'on a

$$A \subset P \cap P_1 \cap P_2 \cap P^y \quad \text{et} \quad P \cap P_1 \neq A \neq P_2 \cap P^y$$

Comme $A^y = A$, A est contenu dans P^y et il normalise $(U^w)^k$; on a donc

$$A \subset N_P((U^w)^k) = (N_U(U^w))^k.D = (U_w)^k.D \subset P_2$$

et comme A ne contient pas $(U^w)^k$ (car A ne contient aucun S_p-groupe de G^k), A est différent de $P_2 \cap P^y$ (car $(U^w)^k = (U^k)^y \subset P_2 \cap P^y$). De plus, en vertu du lemme 1 appliqué à v, U_v contient strictement U_w et par suite, d'après la première inclusion ci-dessus, $P \cap P_1$ contient strictement A (car on a $P \cap P_1 = (U_v)^k.D$).

D'après notre choix de y, $(P,1,y,A)$ est un élément irréductible de $\mathcal{D}$ (cf. ch.III, th.1); il résulte alors de l'assertion précédente et de la proposition 2 du ch.III, que l'on a

$$A = P_1 \cap P_2 = (U^v \cap U^w)^k.D \quad .$$

En particulier, U contient $U^v \cap U^w$ (car P contient A); or, d'après le lemme 1 appliqué à v, on a

$$U = U_s.(U \cap U^{v^{-1}})$$

et par suite, on a $\qquad U^v = (U^v \cap U^w).(U^v \cap U)$;

on en déduit que $U^v = U^v \cap U$ et par suite, que l'on a $v = 1$. On a donc $A = (U \cap U^s)^k.D = (U_s)^k.D$ en vertu de l'égalité ci-dessus.

Notons W_o le groupe de Weyl de R_o et ρ_ϱ l'automorphisme de W_o induit par ρ (cf. (5), page 217); on sait que dans tous les cas ($\rho = id$ ou $\rho \neq id$), W s'identifie au sous-groupe des points fixes de ρ_o dans W_o (cf. (5), prop.8.2.1 et prop.13.5.2). D'après le corollaire 3 de (3), ch.VI, §1, prop.17, W_o possède un unique élément w_o de plus grande longueur et on a $w_o(R_o^+) = R_o^-$ et $w_o^2 = 1$. On en déduit que w_o appartient à W (car ρ_o conserve la longueur des éléments de W_o) et que l'on a $V = U^{w_o}$.

Pour tout $s \in S$, on pose $V_s = U \cap V^s$ et $Y_s = < V_s, (V_s)^s >$ (i.e. $V_s = U_{w_o s}$ et $(V_s)^s = U^s \cap U^{w_o}$); alors, d'après le lemme 1 appliqué à sw_o <u>on a</u> $U = U_s.V_s$; de plus, comme U et $n(s)$ normalisent U_s, <u>le groupe</u> Y_s <u>normalise</u> U_s .

Notons $\mathfrak{K}^\theta$ le corps des points fixes de θ dans $\mathfrak{K}$ et considérons l'opération canonique de $Aut(\mathfrak{K})$ sur les groupes $SL(2,\mathfrak{K})$, $SL(2,\mathfrak{K}^\theta)$ et $SU(3,\mathfrak{K})$. On a alors le résultat suivant qui nous donne la structure de Y_s .

<u>Lemme 5. Pour tout</u> $s \in S$, <u>il existe un homomorphisme</u> φ_s <u>de l'un des groupes</u> $SL(2,\mathfrak{K})$, $SL(2,\mathfrak{K}^\theta)$, $SU(3,\mathfrak{K})$ <u>dans</u> G <u>qui commute aux éléments de</u> $Aut(\mathfrak{K})$ <u>et qui a</u> Y_s <u>comme image. De plus, on a</u> $U_s \cap Y_s = 1$ <u>et</u> $U_s.Y_s$ <u>est un sous-groupe distingué de</u> $N_G(U_s)$ <u>qui contient</u> U .

<u>Démonstration</u>: Soit $s \in S$; on sait que s est associé à une orbite J de ρ dans la base de R_o (cf. (5), prop.8.2.1, prop.13.1.2 et th.13.5.4); notons $(R_o^+)_J$ l'ensemble des éléments de R_o^+ qui sont engendrés par J et posons

$$X_J^+ = < \{x_\alpha(t)\}_{t \in \mathfrak{K},\ \alpha \in (R_o^+)_J} > \ , \quad X_J^- = < \{x_{-\alpha}(t)\}_{t \in \mathfrak{K},\ \alpha \in (R_o^+)_J} > \quad ;$$

on a alors $\quad U_0 \cap V_0^{n(s)} = X_J^+ \quad$ et $\quad U_0^{n(s)} \cap V_0 = X_J^-$;

en effet, dans chaque cas, le premier membre contient le deuxième et d'après le théorème 4' de (17), §3, les deux membres ont le même ordre. Comme σ stabilise U_0 , V_0 et $n(s)$, on en déduit que V_s et $(V_s)^s$ sont respectivement égaux aux sous-groupes des points fixes de σ dans X_J^+ et dans X_J^- .

Pour tout $\alpha \in R_0$, posons $Y_\alpha = \langle \{x_\alpha(t), x_{-\alpha}(t)\}_{t \in \mathfrak{K}} \rangle$; d'après le théorème 6.3.1 de (5), il existe un homomorphisme φ_α de $SL(2,\mathfrak{K})$ dans G_0 tel que pour tout $t \in \mathfrak{K}$, on ait

$$\varphi_\alpha(\{\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\}) = x_\alpha(t) \qquad \text{et} \qquad \varphi_\alpha(\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{smallmatrix}\}) = x_{-\alpha}(t) \quad ;$$

il est clair que φ_α commute aux éléments de $Aut(\mathfrak{K})$ et que l'on a $Im(\varphi_\alpha) = Y_\alpha$. Supposons d'abord que les racines qui appartiennent à J soient deux à deux orthogonales; d'après la proposition 9 de (3), ch.VI, §1, on a alors $(R_0^+)_J = J$ et par suite, d'après le théorème 5.2.2 de (5), si α , β sont deux éléments distincts de J , les groupes Y_α et Y_β se centralisent l'un l'autre; par conséquent, la famille $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ définit un homomorphisme φ'_s du produit direct $SL(2,\mathfrak{K})^J$ dans G_0 qui commute encore aux éléments de $Aut(\mathfrak{K})$ et qui a le groupe $\langle X_J^+, X_J^- \rangle$ comme image. De plus, l'opération de ρ sur J induit une opération de ρ sur $SL(2,\mathfrak{K})^J$ qui est compatible avec φ'_s et l'automorphisme de G_0 induit par ρ (cf. (5), prop. 12.2.3); par conséquent, si l'on note τ le produit des automorphismes de $SL(2,\mathfrak{K})^J$ induits par ρ et par θ , on a

$$\sigma \circ \varphi'_s = \varphi'_s \circ \tau \quad .$$

Enfin, d'après le lemme 17 de (17), §3, on a

$$|SL(2,\mathfrak{K})^J|_p = |\mathfrak{K}^J| = |X_J^+|$$

et par suite, la restriction de φ'_s à un S_p-groupe de $SL(2,\mathfrak{K})^J$ est injective.

Notons respectivement T^+ et T^- les ensembles des matrices $\{\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\}$ et $\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{smallmatrix}\}$ où t parcourt les éléments de $\mathfrak{K}$; d'après ce qui précède, φ'_s induit un isomorphisme entre le groupe des points fixes de τ dans $(T^+)^J$ (resp. dans $(T^-)^J$) et le groupe des points fixes de σ dans X_J^+ (resp. dans X_J^-) lequel est égal à V_s (resp. à $(V_s)^s$); le calcul des points fixes de τ dans $(T^+)^J$ et $(T^-)^J$ montre alors que φ'_s induit un homomorphisme φ_s de l'un des groupes $SL(2,\mathfrak{K})$, $SL(2,\mathfrak{K}^\theta)$ dans G qui commute aux éléments de $Aut(\mathfrak{K})$ et qui a Y_s comme image.

Comme $p \geq 5$, J ne possède deux racines non orthogonales que lorsque R_0 est du type A_{2n} et $J = \{\alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ où α_n et α_{n+1} sont les racines de la base de R_0 associées aux sommets n et $n+1$ du graphe de Dynkin (cf. (17), §10, cor. du th.29); dans ce cas, G_0 et G sont respectivement isomorphes aux groupes $PSL(2n+1,\mathfrak{K})$ et $PSU(2n+1,\mathfrak{K})$ (cf. (5), th. 11.3.2 et th. 14.5.1). De plus, les isomorphismes exhibés dans (5) commutent aux éléments de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. Enfin, si l'on munit $\mathfrak{K}^{2n+1}$ de la forme unitaire décrite dans (5), th. 14.5.1, et on note $u_0,\dots,u_{2n}$ sa base canonique, un simple calcul montre alors que Y_s est l'image du plus grand sous-groupe de $SU(2n+1,\mathfrak{K})$ qui stabilise le sous-espace

$$\mathfrak{K}.u_{n-1} + \mathfrak{K}.u_n + \mathfrak{K}.u_{n+1}$$

et opère trivialement sur le sous-espace orthogonal; or, il est clair qu'un tel sous-groupe est isomorphe à $SU(3,\mathfrak{K})$. L'existence de φ_s est donc démontrée.

Démontrons maintenant la deuxième assertion du lemme. D'après la première, $Y_s/Z(Y_s)$ est isomorphe à l'un des groupes suivants: $PSL(2,\mathfrak{K})$, $PSL(2,\mathfrak{K}^\theta)$, $PSU(3,\mathfrak{K})$, donc il est simple (car $p \geq 5$), et $Z(Y_s)$ est un p'-groupe; comme Y_s normalise U_s , il en résulte que $U_s \cap Y_s = 1$. Comme $U = U_s.V_s$, le groupe $U_s.Y_s$ contient U . De plus, comme H normalise U et V et comme $n(s)$ normalise H , H normalise U_s , V_s et $(V_s)^s$ et par suite, H normalise $U_s.Y_s$. Enfin, $n(s)$ normalise U_s et échange V_s et $(V_s)^s$, donc normalise $U_s.Y_s$. Il résulte alors du lemme 3, que le groupe $U_s.Y_s$ est distingué dans le groupe $N_G(U_s)$.

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition 2.

<u>Démonstration de la proposition 2</u>: On raisonne par récurrence sur k . Comme A est un p-sous-groupe essentiel de K , on a $A \neq P$ et par suite, A ne contient aucun S_p-groupe de G^k ; soit O une orbite de A dans E telle que A ne contienne aucun S_p-groupe du produit L des éléments de O et posons $|O| = h$; alors, le groupe L est distingué dans K et isomorphe à G^h ; par conséquent, la conjugaison induit un homomorphisme f de K dans $\mathrm{Aut}(G^h)$.

Supposons que $h \neq k$ et posons $K' = f(K)$, $A' = f(A)$ et $P' = f(P)$; il est clair que $f(G^k) = G^h$ et par suite, que l'on a $K' = A'.G^h$. De plus, d'après notre choix de O , A ne contient pas $P \cap L$, donc il ne contient pas $N_{P\cap L}(A)$ (cf. (01)) et par suite, on a

$$N_K(P \cap L) \cap N_K(A) \subset M_K(A,P) \qquad \text{(cf. ch.II, lemme 1);}$$

par conséquent, comme $\mathrm{Ker}(f) = C_K(L)$, on a

$$\mathrm{Ker}(f) \cap N_K(A) \subset M_K(A,P) \qquad .$$

Il résulte alors de la proposition 9 du ch.II appliqué à K et à $\mathrm{Ker}(f)$, que A' est un p-sous-groupe essentiel de K' et que l'on a

$$f(M_K(A,P)) = M_{K'}(A',P') \quad , \quad f(X_K(A)) = X_{K'}(A') \quad , \quad S_K(A) \simeq S_{K'}(A') \qquad ;$$

de plus, d'après la première égalité et l'inclusion ci-dessus, on a

$$f^{-1}(M_{K'}(A',P')) \cap N_K(A) = M_K(A,P)$$

et d'après la deuxième égalité, on a

$$f(O_{pp'}(X_K(A))) \subset O_{pp'}(X_{K'}(A')) \qquad .$$

La proposition résulte alors de l'hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant que A soit transitif sur E ; d'après le lemme 4, nous pouvons supposer qu'il existe un élément s de S et un sous-groupe D de $\Pi^k.Q$ tels que l'on ait

$$A = (U_s)^k.D \quad \text{et} \quad P = U^k.D \quad .$$

On a alors $A \cap G^k = (U_s)^k$ et par suite, $N_K(A)$ normalise $(U_s)^k$; par conséquent, comme D normalise $(U_s)^k$ et comme $K = G^k.D$, on a

$$N_K(A) \subset N_K((U_s)^k) = (N_G(U_s))^k.D \quad .$$

D'autre part, d'après le lemme 5, le groupe $U_s.Y_s$ est distingué dans $N_G(U_s)$ et comme Π normalise U , U^s , V et V^s , il est normalisé par Π ; par conséquent, $(U_s.Y_s)^k$ est un sous-groupe distingué de $(N_G(U_s))^k.D$. On en déduit que $N_K(A)$ normalise $(U_s.Y_s)^k$ et par suite, que $A.(N_K(A) \cap (Y_s)^k)$ est un sous-groupe distingué de $N_K(A)$ (car $(U_s)^k \subset A$). De plus, comme $U_s.Y_s$ contient U (cf. lemme 5), A ne contient aucun S_p-groupe de $(U_s.Y_s)^k$ et par suite, A n'est pas un S_p-groupe de $A.(N_K(A) \cap (Y_s)^k)$ (cf. (O1)). D'après la définition de $X_K(A)$ (cf. ch.II, §1), on a donc

$$X_K(A) \subset A.(N_K(A) \cap (Y_s)^k) \quad .$$

Nous allons calculer $N_K(A) \cap (Y_s)^k$; démontrons d'abord que l'on a

$$N_K(A) \cap (Y_s)^k = C_K(D) \cap (Y_s)^k \quad .$$

Comme $A = (U_s)^k.D$, le groupe $C_K(D) \cap (Y_s)^k$ est contenu dans $N_K(A)$; réciproquement, soit $x \in N_K(A) \cap (Y_s)^k$; comme Π normalise Y_s , D normalise $(Y_s)^k$ et par suite, on a

$$[D,x] \subset A \cap (Y_s)^k = (U_s \cap Y_s)^k = 1 \qquad \text{(cf. lemme 5);}$$

par conséquent, $N_K(A) \cap (Y_s)^k$ est contenu dans $C_K(D)$.

Calculons maintenant les points fixes de D dans $(Y_s)^k$. Puisque A est transitif sur E , D l'est également et pour tout $i \leq k$, il existe un élément a_i de D qui envoie le premier facteur dans le i-ième; désormais, nous identifions $\Sigma(E)$ au groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,k\}$; comme $D \subset \Pi^k.Q$, pour tout $i \leq k$, il existe alors $(\pi_{i1},\dots,\pi_{ik}) \in \Pi^k$ et $q_i \in Q$ tels que l'on ait $a_i = (\pi_{i1},\dots,\pi_{ik})q_i$ et $q_i(1) = i$.

Posons $\gamma_i = \pi_{i1}$ pour tout $i \leq k$, et notons δ l'homomorphisme de Y_s dans $(Y_s)^k$ définit par la formule

$$\delta(x) = (\gamma_1(x),\dots,\gamma_k(x)) \quad \text{où} \quad x \in Y_s \quad ;$$

alors, si $(x_1,\dots,x_k)$ est un élément de $C_K(D) \cap (Y_s)^k$, en écrivant que pour tout $i \leq k$, a_i et $(x_1,\dots,x_k)$ commutent, on obtient $(x_1,\dots,x_k) = \delta(x_1)$;

par conséquent, on a $\qquad C_K(D) \cap (Y_s)^k \subset \delta(Y_s)$.

Enfin, soient Π_* le sous-groupe de Π engendré par la réunion des ensembles $\{\pi_1 y_1(y_{q(1)})^{-1},\dots,\pi_k y_k(y_{q(k)})^{-1}\}$ où $(\pi_1,\dots,\pi_k)q$ parcourt les éléments de D , et Y_* le sous-groupe des points fixes de Π_* dans Y_s ; on voit maintenant sans difficulté, que pour tout $x \in Y_s$, D stabilise $\delta(x)$ si et seulement si Π_* stabilise x ; on a donc

$$C_K(D) \cap (Y_s)^k = \delta(Y_*) \quad .$$

Nous allons déterminer la structure de Y_* . Soient respectivement $\mathfrak{K}_*$ et $\mathfrak{K}_*^\theta$ les corps des points fixes de Π_* dans $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}^\theta$; il est clair que les groupes des points fixes de Π_* dans $SL(2,\mathfrak{K})$, $SL(2,\mathfrak{K}^\theta)$ et $SU(3,\mathfrak{K})$ sont respectivement isomorphes à $SL(2,\mathfrak{K}_*)$, $SL(2,\mathfrak{K}_*^\theta)$ et $SU(3,\mathfrak{K}_*)$. De plus, d'après le lemme 5, il existe un homomorphisme φ_s de l'un des groupes $SL(2,\mathfrak{K})$, $SL(2,\mathfrak{K}^\theta)$, $SU(3,\mathfrak{K})$ dans G qui commute aux éléments de Π_* et qui a Y_s comme image. Comme Π_* est un p-groupe et $Ker(\varphi_s)$ est un p'-groupe (il est contenu dans le centre), on en déduit que φ_s induit un homomorphisme surjectif de l'un des groupes $SL(2,\mathfrak{K}_*)$, $SL(2,\mathfrak{K}_*^\theta)$, $SU(3,\mathfrak{K}_*)$ dans Y_* (cf. ch.VI, lemme 1); par conséquent, si l'on note Z_s l'image par φ_s du centre de $SL(2,\mathfrak{K})$, $SL(2,\mathfrak{K}^\theta)$ ou $SU(3,\mathfrak{K})$ suivant le cas, le quotient $Y_*/(Y_* \cap Z_s)$ est un groupe simple isomorphe à l'un des groupes suivants: $PSL(2,p^n)$, $PSU(3,p^{2n})$, $n \geq 1$; en particulier, on a

$$Z(Y_*) = Y_* \cap Z_s \subset Z(Y_s) \quad .$$

D'après les assertions précédentes, on a maintenant

$$X_K(A) \subset A.(N_K(A) \cap (Y_s)^k) = A.\delta(Y_*)$$

et par suite, $X_K(A)/A$ est isomorphe à un sous-groupe distingué de Y_* ; comme $X_K(A)/A$ n'est pas un p'-groupe (cf. ch.II, §1, déf.), d'après la structure de Y_*, on a $\qquad X_K(A) = A.\delta(Y_*) \quad$ et $\quad O_{pp'}(X_K(A)) = A.\delta(Z(Y_+))$.

On en déduit que $S_K(A)$ est isomorphe à l'un des groupes annoncés. De plus, comme $Z(Y_*)$ centralise Y_s , $\delta(Z(Y_*))$ centralise $(Y_s)^k$; or, on vient de démontrer que $\delta(Y_*)$ centralise D et on sait que Y_s normalise U_s ; il en résulte que $\delta(Z(Y_*))$ normalise P (car $P = U^k.D$ et $U = U_s.V_s$) et par suite, qu'il est contenu dans $M_K(A,P)$ (cf. ch.II, déf.); on a donc l'inclusion de l'énoncé.

APPENDICE II

Les p-sous-groupes essentiels des groupes symétriques

Soient E un ensemble fini, $\Sigma(E)$ le groupe des permutations de E et p un nombre premier. Nous allons calculer les p-sous-groupes essentiels de $\Sigma(E)$.

Si $O \subset E$, on note $\Sigma(E)_O$ le stabilisateur de O dans $\Sigma(E)$ et ω_O l'homomorphisme de $\Sigma(E)_O$ dans $\Sigma(O)$ induit par la restriction à O des éléments de $\Sigma(E)_O$. Soit Ω une partition de E ; on note $\Sigma(E)_\Omega$ le stabilisateur de Ω dans $\Sigma(E)$ et π_Ω l'homomorphisme de $\Sigma(E)_\Omega$ dans $\Sigma(\Omega)$ induit par l'opération de $\Sigma(E)_\Omega$ sur E ; la famille $\{\omega_O\}_{O \in \Omega}$ définit un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\pi_\Omega)$ et $\prod_{O \in \Omega} \Sigma(O)$: on identifie ces groupes à l'aide de cet isomorphisme. En particulier, pour tout $O \subset E$, on identifie $\Sigma(E)_O$ et $\Sigma(O) \times \Sigma(E-O)$ et en conséquence, on identifie $\Sigma(O)$ au sous-groupe de $\Sigma(E)$ qui stabilise O et qui opère trivialement sur $E-O$.

__Lemme 1.__ __Soient A un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$ et Ω l'ensemble des orbites de A dans E. Le groupe A est égal au produit des $\omega_O(A)$ où $O \in \Omega$ et il satisfait à l'une des conditions suivantes__

1. __Pour tout $O \in \Omega$, le groupe $\omega_O(A)$ est un S_p-groupe de $\Sigma(O)$.__
2. __Il existe $O \in \Omega$ tel que $\omega_O(A)$ soit un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(O)$ et tel que $\omega_{E-O}(A)$ soit un S_p-groupe de $\Sigma(E-O)$.__

__Démonstration__: Posons $K = \mathrm{Ker}(\pi_\Omega)$ et $B = \prod_{O \in \Omega} \omega_O(A)$; alors, on a $A \subset B \subset K$ et comme $N(A)$ stabilise Ω, $N(A)$ normalise K. Si A est un S_p-groupe de $N_K(A)$, A est un S_p-groupe de K (cf. (01)) et par suite, on a $A = B$ et A satisfait à la condition 1. Supposons que A ne soit pas un S_p-groupe de $N_K(A)$; $X(A)$ est alors contenu dans K (cf. ch.II, §1, déf.) et par suite, A est un p-sous-groupe essentiel de K (cf. ch.II, prop.8). Comme $K = \prod_{O \in \Omega} \Sigma(O)$, il résulte alors du corollaire 2 du ch.II, §2, que $A = B$ et qu'il existe $O \in \Omega$ tel que $\omega_O(A)$ soit un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(O)$ et tel que pour tout $O' \in \Omega - \{O\}$, le groupe $\omega_{O'}(A)$ soit un S_p-groupe de $\Sigma(O')$. On en déduit que $N(A)$ stabilise O et par suite, qu'il est contenu dans $\Sigma(O) \times \Sigma(E-O)$; par conséquent, A est un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(O) \times \Sigma(E-O)$ et comme $\omega_O(A)$ n'est pas un S_p-groupe de $\Sigma(O)$, $\omega_{E-O}(A)$ est un S_p-groupe de $\Sigma(E-O)$ (cf. ch.II, §2, cor.2).

Par conséquent, les notations étant celles du lemme 1, pour décrire A il suffit d'étudier la partition Ω et les p-sous-groupes essentiels de $\Sigma(O)$ qui sont transitifs sur O . Nous allons résoudre d'abord la deuxième question.

Notons $\mathfrak{K}$ le corps $\underline{Z}/p\underline{Z}$ et soit V un espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$ de dimension finie; on dit qu'une suite $\{V_i\}_{i=0,\dots,n}$ de sous-espaces vectoriels de V est un <u>drapeau de</u> V si l'on a $V_0 = \{0\}$, $V_n = V$ et si V_{i-1} est strictement contenu dans V_i pour $1 \leq i \leq n$; on dit alors que n est la <u>longueur du drapeau</u>.

Soit $\mathfrak{D} = \{V_i\}_{i=0,\dots,n}$ un drapeau de V ; on note $A(\mathfrak{D})$ l'ensemble des applications σ de V dans V qui satisfont à la condition suivante

(A) <u>Pour tout triplet</u> i, x, u <u>où</u> $1 \leq i \leq n$, $x \in V$ <u>et</u> $u \in V_i$, $\sigma(x+u)$ <u>appartient à</u> $\sigma(x) + u + V_{i-1}$.

On note $L(\mathfrak{D})$ le stabilisateur de $\mathfrak{D}$ dans $GL(V)$ et $AL(\mathfrak{D})$ l'ensemble des éléments de $L(\mathfrak{D})$ qui induissent l'identité dans les quotients V_i/V_{i-1} , $1 \leq i \leq n$. On a alors $AL(\mathfrak{D}) = A(\mathfrak{D}) \cap GL(V) = A(\mathfrak{D}) \cap L(\mathfrak{D})$ et on voit aisément que $\sigma \in A(\mathfrak{D})$ <u>et</u> $\tau \in L(\mathfrak{D})$ <u>entraîne</u> $\tau\sigma\tau^{-1} \in A(\mathfrak{D})$. Enfin, on note $T(V)$ le groupe des translations de V ; il est clair que $T(V) \subset A(\mathfrak{D})$.

<u>Lemme 2</u>. <u>Avec les notations précédentes, posons</u> $e_i = \dim V/V_i$, $0 \leq i \leq n$, <u>et</u> $h(\mathfrak{D}) = \sum_{i=1}^{n} (e_{i-1} - e_i)p^{e_i}$. <u>L'ensemble</u> $A(\mathfrak{D})$ <u>est un p-sous-groupe de</u> $\Sigma(V)$ <u>et son cardinal est égal à</u> $p^{h(\mathfrak{D})}$.

<u>Démonstration</u>: Nous allons démontrer d'abord que $A(\mathfrak{D}) \subset \Sigma(V)$; soient $\sigma \in A(\mathfrak{D})$, $x, y \in V$ tels que $x \neq y$ et i le premier entier positif tel que $y - x \in V_i$; d'après la condition (A), on a alors $\sigma(y) = \sigma(x) + (y-x) + v$ où $v \in V_{i-1}$ et par suite, on a $\sigma(y) \neq \sigma(x)$; par conséquent, σ est une application injective, donc bijective.

Soient $\sigma, \tau \in A(\mathfrak{D})$, $x \in V$ et $u \in V_i$ où $1 \leq i \leq n$; on a alors $\tau(x+u) = \tau(x) + u + v$ où $v \in V_{i-1}$ (cf. (A)) et par suite, on a $\sigma\tau(x+u) = \sigma\tau(x) + (u+v) + w$ où $w \in V_{i-1}$ (cf. (A)); par conséquent, $\sigma\tau(x+u)$ appartient à $\sigma\tau(x) + u + V_{i-1}$. On en déduit que $\sigma\tau \in A(\mathfrak{D})$. Ceci démontre que $A(\mathfrak{D})$ est un sous-groupe de $\Sigma(V)$.

Nous allons calculer maintenant l'ordre de $A(\mathfrak{D})$. Soit $\{W_i\}_{i=0,\dots,n}$ un drapeau de V tel que, pour tout $i \leq n$, W_{n-i} soit un complément de V_i dans V et notons π_i la projection de V sur W_{n-i} (on a $\pi_0 = id$). Soit σ une application de V dans V et posons

$$a_i(\sigma) = (\sigma - id) - (\sigma - id)\pi_i \quad \text{où } 1 \leq i \leq n \quad ;$$

nous allons démontrer d'abord que σ appartient à $A(\mathfrak{D})$ si et seulement si elle satisfait à la condition suivante

(A') <u>Pour tout</u> i , <u>où</u> $1 \leq i \leq n$, <u>on a</u> $a_i(\sigma)(W_{n-i+1} - W_{n-i}) \subset V_{i-1}$.
Supposons que σ appartienne à $A(\mathfrak{D})$ et soit $x \in W_{n-i+1}$; puisque $x - \pi_i(x)$ appartient à V_i , on a $\sigma(\pi_i(x)) \in \sigma(x) + \pi_i(x) - x + V_{i-1}$ (cf. (A)) et par suite, $a_i(\sigma)(x)$ appartient à V_{i-1} Supposons que σ satisfasse à la condition (A'); en raisonnant par récurrence sur $n-j$ $(1 \leq j \leq n)$, nous allons démontrer que $x \in W_{n-j+1}$ et $u \in W_{n-j+1} \cap V_i$ entraîne $\sigma(x + u) \in \sigma(x) + u + V_{i-1}$, pour tout couple i, j où $1 \leq i, j \leq n$. Nous pouvons supposer que $u \neq 0$; dans ce cas, $u \in W_{n-j+1} \cap V_i$ entraîne $j \leq i$, d'où il résulte que $\pi_j(u) \in V_i$; comme $\pi_j(x)$ et $\pi_j(u)$ appartiennent à W_{n-j} , on a grâce à l'hypothèse de récurrence

$$\sigma(\pi_j(x) + \pi_j(u)) = \sigma(\pi_j(x)) + \pi_j(u) + v \quad \text{où} \quad v \in V_{i-1} \qquad ;$$

en transformant cette égalité, on obtient

$$\sigma(x + u) = \sigma(x) + u + a_j(\sigma)(x + u) - a_j(\sigma)(x) + v$$

et comme $a_j(\sigma)(W_{n-j}) = \{0\}$, $\sigma(x + u)$ appartient à $\sigma(x) + u + V_{i-1}$. En particulier, pour $j = 1$, ceci démontre que σ satisfait à la condition (A); par conséquent, σ appartient à $A(\mathfrak{D})$.

D'après l'assertion que l'on vient de démontrer, l'application qui à σ fait correspondre $(\sigma(0), a_1(\sigma), \ldots, a_n(\sigma))$ induit une bijection entre $A(\mathfrak{D})$ et le produit

$$V \times V_0^{(W_n - W_{n-1})} \times \ldots \times V_{n-1}^{(W_1 - W_0)} \qquad ;$$

par conséquent, on a

$$|A(\mathfrak{D})| = |V| \prod_{i=1}^{n-1} \left(|V_i|^{(|W_{n-i}| - |W_{n-i-1}|)} \right)$$

d'où on obtient tout de suite $|A(\mathfrak{D})| = p^{h(\mathfrak{D})}$.

<u>Lemme 3.</u> <u>Avec les notations précédentes, soit</u> Ω <u>une partition de</u> V . <u>Le groupe</u> $A(\mathfrak{D})$ <u>stabilise</u> Ω <u>si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel</u> W <u>de</u> V <u>et un entier positif</u> $i \leq n$ <u>tels que l'on ait</u>

$$V_{i-1} \subset W \subset V_i \quad \underline{\text{et}} \quad \Omega = V/W \qquad .$$

<u>Démonstration</u>: Si $1 \leq i \leq n$ et si W est un sous-espace vectoriel de V_i qui contient V_{i-1} , pour tout $\sigma \in A(\mathfrak{D})$ et tout $x \in V$ on a $\sigma(x + W) = \sigma(x) + W$ (cf. (A)). Supposons maintenant que $A(\mathfrak{D})$ stabilise Ω ; en particulier, $T(V)$ stabilise Ω et par suite, il existe un sous-espace vectoriel W de V tel que l'on ait $\Omega = V/W$. De plus, nous allons démontrer que si W n'est pas contenu dans V_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $V_i \subset W$; en effet, si $x \in W - V_i$ et $y \in V_i$, il existe $\sigma \in AL(\mathfrak{D})$ tel que l'on ait $\sigma(x) = x + y$; puisque $\sigma(0) = 0$, σ stabilise W et par conséquent, y appartient à W . On en déduit qu'il existe i tel que l'on ait $V_{i-1} \subset W \subset V_i$.

<u>Lemme 4. Avec les notations précédentes, on a</u> $N(A(\mathfrak{D})) = A(\mathfrak{D}).L(\mathfrak{D})$. <u>En particulier,</u> $N(A(\mathfrak{D}))/A(\mathfrak{D})$ <u>est isomorphe à</u> $\prod_{i=1}^{n} GL(V_i/V_{i-1})$.

<u>Démonstration</u>: Puisque $L(\mathfrak{D})$ normalise $A(\mathfrak{D})$, il suffit de démontrer qu'un élément σ de $N(A(\mathfrak{D}))$ appartient à $A(\mathfrak{D}).L(\mathfrak{D})$; puisque $A(\mathfrak{D})$ contient $T(V)$, nous pouvons supposer que $\sigma(0) = 0$. D'après le lemme 3, pour tout $i \leq n$, σ stabilise la partition V/V_i (car elle est la seule partition $A(\mathfrak{D})$-stable de cardinal $|V/V_i|$) et comme $\sigma(0) = 0$, σ stabilise V_i . Soient $x \in V$ et τ_x la translation de V définie par x ; puisque l'élément $\sigma\tau_x\sigma^{-1}$ appartient à $A(\mathfrak{D})$, pour tout $i \leq n$ et tout $v \in V_i$, $(\sigma\tau_x\sigma^{-1})(v)$ appartient alors à $\sigma(x) + v + V_{i-1}$; on en déduit que pour tout trio i, x, u où $1 \leq i \leq n$, $x \in V$ et $u \in V_i$, $\sigma(x + u)$ appartient à $\sigma(x) + \sigma(u) + V_{i-1}$ (on prend $v = \sigma(u)$). En particulier, ceci démontre que pour tout $i \leq n$, σ induit une permutation de V_i/V_{i-1} qui appartient à $GL(V_i/V_{i-1})$; il existe donc $\lambda \in L(\mathfrak{D})$ tel que pour tout $i \leq n$, λ et σ induisent la même permutation de V_i/V_{i-1} ; par conséquent, pour tout $i \leq n$ et tout $u \in V_i$, $(\lambda^{-1}\sigma)(u)$ appartient à $u + V_{i-1}$. Il en résulte que pour tout trio i, x, u où $1 \leq i \leq n$, $x \in V$ et $u \in V_i$, $(\lambda^{-1}\sigma)(x + u)$ appartient à $(\lambda^{-1}\sigma)(x) + u + V_{i-1}$; par suite, $\lambda^{-1}\sigma$ appartient à $A(\mathfrak{D})$.

On revient à l'étude de $\Sigma(E)$. Soient O et Ω des ensembles finis; on identifie chaque élément σ de $\Sigma(O)$ (resp. τ de $\Sigma(\Omega)$) à la permutation de $O \times \Omega$ qui à (x,y) fait correspondre $(\sigma(x),y)$ (resp. $(x,\tau(y))$); on remarquera que σ et τ commutent dans $\Sigma(O \times \Omega)$. Si G est un sous-groupe de $\Sigma(O)$, on identifie chaque application f de Ω dans G à la permutation de $O \times \Omega$ qui à (x,y) fait correspondre $(f(y)(x),y)$; on note G^{Ω} l'ensemble de ces permutations.

<u>Lemme 5. Supposons que</u> $|E| = p^h$. <u>Si</u> A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe de</u> $\Sigma(E)$ <u>transitif sur</u> E , E <u>admet une structure d'espace vectoriel sur</u> $\mathfrak{K}$ <u>et un drapeau</u> $\mathfrak{D}$ <u>tels que l'on ait</u> $A \subset A(\mathfrak{D})$ <u>et</u> $N(A) \subset N(A(\mathfrak{D}))$.

<u>Démonstration</u>: On raisonne par récurrence sur $|E|$; nous pouvons supposer que $|E| > 1$. Soient A un p-sous-groupe de $\Sigma(E)$ transitif sur E , Ω l'ensemble des orbites de $\Phi(A)$ dans E et O un élément de Ω ; pour tout $O' \in \Omega$ soit $\alpha_{O'}$ un élément de A tel que $\alpha_{O'}(O) = O'$, et on choisit $\alpha_O = id_E$. L'application de $O \times \Omega$ dans E qui à tout élément (x,O') de $O \times \Omega$ fait correspondre $\alpha_{O'}(x)$ est alors une bijection; dorénavant, nous identifions E à $O \times \Omega$ à l'aide de cette bijection. Soit $\sigma \in \Sigma(E)_{\Omega}$; pour tout $O' \in \Omega$, la permutation $(\alpha_{O'})^{-1}\sigma\alpha_{O''}$ où $O'' = \sigma^{-1}(O')$ stabilise O ; on note f_{σ} l'application de Ω

dans $\Sigma(O)$ définie par la formule

$$f_\sigma(O') = \omega_O((\alpha_{O'})^{-1}\sigma\alpha_{O''}) \quad \text{où} \quad O' \in \Omega \quad \text{et} \quad O'' = \sigma^{-1}(O') \qquad ;$$

en vertu des identifications faites, f_σ et $\pi_\Omega(\sigma)$ sont alors des permutations de E qui stabilisent Ω et on a $\sigma = f_\sigma\pi_\Omega(\sigma)$.

Posons $B = \omega_O(A \cap \Sigma(E)_O)$ et $C = \pi_\Omega(A)$; nous allons démontrer que

$$A \subset (B^\Omega).C \quad \text{et} \quad N_{\Sigma(E)}(A) \subset (B^\Omega).N_{\Sigma(O)}(B).N_{\Sigma(\Omega)}(C) \qquad .$$

Rappelons que $N_{\Sigma(O)}(B)$ et $N_{\Sigma(\Omega)}(C)$ se centralisent l'un l'autre dans $\Sigma(E)$; il est clair qu'ils normalisent B^Ω . Soit $\sigma \in N_{\Sigma(E)}(A)$; puisque $N_{\Sigma(E)}(A)$ normalise $\Phi(A)$, il stabilise Ω et par conséquent, on a $\sigma = f_\sigma\pi_\Omega(\sigma)$; il est clair que $\pi_\Omega(\sigma)$ normalise C et que si σ appartient à A , il appartient à C . De plus, pour tout $O' \in \Omega$, la permutation $(\alpha_{O'})^{-1}\sigma\alpha_{\sigma^{-1}(O')}$ normalise A et si σ appartient à A , elle appartient à $A \cap \Sigma(E)_O$; par suite, $f_\sigma(O')$ normalise B dans $\Sigma(O)$ et si σ appartient à A , il appartient à B . Enfin, si $O', O'' \in \Omega$, un simple calcul montre que $f_\sigma(O')(f_\sigma(O''))^{-1}$ appartient à B . Par conséquent, f_σ appartient à $(B^\Omega).N_{\Sigma(O)}(B)$ et si σ appartient à A , f_σ appartient à B^Ω . On en déduit les inclusions annoncées.

Comme A est transitif sur E , B et C sont respectivement transitifs sur O et sur Ω . Comme $\mathrm{Ker}(\pi_\Omega)$ contient $\Phi(A)$, C est abélien p-élémentaire; par conséquent, C est régulier sur Ω et l'application de C dans Ω qui à σ fait correspondre $\sigma(O)$ est bijective; elle induit sur Ω une structure d'espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$ telle que C coïncide avec l'ensemble des translations et telle que O soit l'élément neutre. D'autre part, $\Phi(A)$ n'est pas transitif sur E (cf. (12), ch.5, th.1.1) et par suite, on a $|O| < |E|$; d'après l'hypothèse de récurrence, O admet donc une structure d'espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$ et un drapeau $\mathfrak{D}' = \{V'_i\}_{i=0,\dots,n}$ tels que l'on ait

$$B \subset A(\mathfrak{D}') \quad \text{et} \quad N_{\Sigma(O)}(B) \subset N_{\Sigma(O)}(A(\mathfrak{D}')) \qquad .$$

Il résulte maintenant des assertions précédentes que $(A(\mathfrak{D}')^\Omega).C$ contient A (car il contient $(B^\Omega).C$) et que $N_{\Sigma(E)}(A)$ normalise $(A(\mathfrak{D}')^\Omega).C$ (car $N_{\Sigma(O)}(B)$ et C se centralisent l'un l'autre et $N_{\Sigma(\Omega)}(C)$ normalise $A(\mathfrak{D}')^\Omega$ dans $\Sigma(E)$). D'autre part, à l'aide de l'identification de E et $O \times \Omega$, on munit E de la structure d'espace vectoriel produit; la suite $\mathfrak{D} = \{V_i\}_{i=0,\dots,n+1}$ définie par $V_i = V'_i$ pour tout $i \leq n$ et $V_{n+1} = E$ est alors un drapeau de E muni de cette structure. Par conséquent, il suffit de démontrer maintenant que $A(\mathfrak{D}) = (A(\mathfrak{D}')^\Omega).C$.

Comme C coïncide avec l'ensemble des translations de Ω , C est contenu dans l'ensemble des translations de E , donc dans $A(\mathfrak{D})$. Nous allons démontrer que $A(\mathfrak{D})$ contient $A(\mathfrak{D}')^{\Omega}$; soient $f \in A(\mathfrak{D}')^{\Omega}$ et $x = (x', 0')$ un élément de E ; si $u = (u', 0'')$ est un élément de V_{n+1} $(= E)$ on a

$$f(x + u) = f(x) + u + (y, 0)$$

où

$$y = f(0' + 0'')(x' + u') - f(0')(x') - u' ,$$

et par suite, $f(x + u)$ appartient à $f(x) + u + V_n$; de plus, comme $f(0')$ appartient à $A(\mathfrak{D}')$, pour tout i où $1 \leq i \leq n$, et tout $u \in V_i$ on a

$$f(0')(x' + u) = f(0')(x') + u + v \quad \text{où} \quad v \in V_{i-1}$$

et par suite, on a $f(x + u) = f(x) + u + v$, d'où il résulte que $f(x + u)$ appartient à $f(x) + u + V_{i-1}$; par conséquent, f appartient à $A(\mathfrak{D})$. Ceci démontre que $A(\mathfrak{D})$ contient $(A(\mathfrak{D}')^{\Omega}).C$; or, d'après le lemme 2, on a

$$|A(\mathfrak{D})| = |A(\mathfrak{D}')|^{|\Omega|}|\Omega|$$

et par suite, $A(\mathfrak{D})$ et $(A(\mathfrak{D}')^{\Omega}).C$ ont le même ordre; on a donc l'égalité.

Nous sommes en mesure de calculer les p-sous-groupes essentiels de $\Sigma(E)$ qui sont transitifs sur E .

<u>Proposition 1. Supposons que</u> $|E| = p^h$ <u>et soit</u> A <u>un p-sous-groupe de</u> $\Sigma(E)$ <u>transitif sur</u> E . <u>Le groupe</u> A <u>est un p-sous-groupe essentiel de</u> $\Sigma(E)$ <u>si et seulement si</u> E <u>admet une structure d'espace vectoriel sur</u> $\mathfrak{K}$ <u>et un drapeau</u> $\mathfrak{D}$ <u>de longueur</u> $h-1$ <u>tels que l'on ait</u> $A = A(\mathfrak{D})$. <u>S'il en est ainsi,</u> $X(A)/A$ <u>est isomorphe à</u> $SL(2,p)$.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 5, E admet une stucture d'espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$ et un drapeau $\mathfrak{D} = \{V_i\}_{i=0,\dots,n}$ tels que $A \subset A(\mathfrak{D})$ et $N(A) \subset N(A(\mathfrak{D}))$; si A est un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$, on a $A = O_p(N(A))$ (cf. ch.II, déf.) et par suite, A est égal à $N_{A(\mathfrak{D})}(A)$, donc à $A(\mathfrak{D})$; par conséquent, il suffit de démontrer que $A(\mathfrak{D})$ est un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$ si et seulement si $n = h-1$ et que lorsqu'il en est ainsi, $X(A(\mathfrak{D}))/A(\mathfrak{D})$ est isomorphe à $SL(2,p)$.

D'après le lemme 4, $N(A(\mathfrak{D}))/A(\mathfrak{D})$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{n} GL(V_i/V_{i-1})$; par conséquent, $A(\mathfrak{D})$ est un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$ si et seulement si le groupe 1 est un p-sous-groupe essentiel de $\prod_{i=1}^{n} GL(V_i/V_{i-1})$ (cf. ch.II, prop.10). Or, 1 est un p-sous-groupe essentiel de ce produit si et seulement s'il existe i tel que 1 soit un p-sous-groupe essentiel de $GL(V_i/V_{i-1})$ et tel que pour tout $j \neq i$, $GL(V_j/V_{j-1})$ soit un p'-groupe (cf. ch.II, §2, cor.2); en outre, 1 est un p-sous-groupe essentiel de $GL(V_i/V_{i-1})$ si et seulement si $\dim(V_i/V_{i-1}) = 2$ (cf. app.I, cor.2). On en déduit que $A(\mathfrak{D})$ est un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$ si et seulement si $n = h-1$ et que dans ce cas, $N(A(\mathfrak{D}))/A(\mathfrak{D})$ est isomorphe à $(\mathfrak{K}^*)^{h-2} \times GL(2,p)$; on a donc dans ce cas $X(A(\mathfrak{D}))/A(\mathfrak{D}) \simeq SL(2,p)$ (cf. ch.II, prop.10).

Nous allons calculer maintenant les p-sous-groupes essentiels de $\Sigma(E)$ qui satisfont à la condition 2 du lemme 1.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> A <u>un</u> p-<u>sous-groupe de</u> $\Sigma(E)$; <u>Supposons qu'il existe une orbite</u> O <u>de</u> A <u>dans</u> E <u>telle que</u> $\omega_O(A)$ <u>ne soit pas un</u> S_p-<u>groupe de</u> $\Sigma(O)$. <u>Alors</u>, A <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $\Sigma(E)$ <u>si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes</u>

1. <u>On a</u> $A = \omega_O(A) \times \omega_{E-O}(A)$.

2. <u>Le groupe</u> $\omega_O(A)$ <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $\Sigma(O)$ <u>transitif sur</u> O <u>et le groupe</u> $\omega_{E-O}(A)$ <u>est un</u> S_p-<u>groupe de</u> $\Sigma(E-O)$. <u>S'il en est ainsi</u>, $X(A)/A$ <u>est isomorphe à</u> $SL(2,p)$.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 1, si A est essentiel dans $\Sigma(E)$, il satisfait aux conditions 1 et 2. Supposons que A satisfasse aux conditions 1 et 2 ; si O' est une orbite de A dans E-O , $\omega_{O'}(A)$ est alors un S_p-groupe de $\Sigma(O')$; par conséquent, N(A) stabilise O et il est contenu dans $\Sigma(O) \times \Sigma(E-O)$. Posons $H = \Sigma(O) \times \Sigma(E-O)$; d'après les conditions 1 et 2 , A est un p-sous-groupe essentiel de H et $X_H(A)/A$ est isomorphe à $X_{\Sigma(O)}(\omega_O(A))/\omega_O(A)$ (cf. ch.II, §2, cor.2); comme $\omega_O(A)$ est transitif sur O , il résulte de la proposition 1 que $X_{\Sigma(O)}(\omega_O(A))/\omega_O(A)$ est isomorphe à $SL(2,p)$. Comme $N(A) = N_H(A)$, on en déduit que A est un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$ et que $X(A)/A$ est isomorphe à $SL(2,p)$ (cf. ch.II, prop.10).

Il nous reste à calculer les p-sous-groupes essentiels de $\Sigma(E)$ qui satisfont à la condition 1 du lemme 5. Nous étudions d'abord un cas particulier.

<u>Lemme 6</u>. <u>Le groupe</u> 1 <u>est un</u> p-<u>sous-groupe essentiel de</u> $\Sigma(E)$ <u>si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite</u> (a) $5 \leq p \leq |E| \leq 2p$ (b) $p = 2$ <u>et</u> $|E| = 3$ (c) $p = 3$ <u>et</u> $4 \leq |E| \leq 6$.

<u>Démonstration</u>: Soit P un S_p-groupe de $\Sigma(E)$; nous allons calculer $M(1,P)$. Supposons que $|E| > 2p$ et soit K l'ensemble des cycles de longueur p de $\Sigma(E)$; on voit aisément que si $\sigma, \tau \in K$, il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i=0,\dots,n}$ d'éléments de K telle que $\sigma = \alpha_0$, $\tau = \alpha_n$ et telle que si $1 \leq i \leq n$, α_{i-1} et α_i commutent; par conséquent, comme $M(1,P)$ contient au moins un élément de K , $M(1,P)$ contient K (cf. ch.II, lemme 1); ainsi, pour tout $\alpha \in \Sigma(E)$, $M(1,P) \cap M(1,P)^\alpha$ contient K et par suite, α appartient à $M(1,P)$ (cf. ch.II, cond.(M2)); on a donc $M(1,P) = \Sigma(E)$ si $|E| > 2p$.

Si $|E| < 2p$, on a $|P| \leq p$ et par suite, on a $M(1,P) = N(P)$ (cf. ch.II, prop.2). Si $p = 2$ et $|E| = 4$, $\Sigma(E)$ possède un 2-sous-groupe distingué non trivial et par suite, on a $M(1,P) = \Sigma(E)$ (cf. ch.II, lemme 1).

Enfin, supposons que $|E| = 2p \neq 4$; soient O_1, O_2 les orbites de P dans E et posons $\Omega = \{O_1, O_2\}$; nous allons démontrer que $M(1,P) = \Sigma(E)_\Omega$. Le groupe $\Sigma(E)_\Omega$ contient $N(P)$ et pour tout $\alpha \in \Sigma(E) - \Sigma(E)_\Omega$, l'intersection $\Sigma(E)_\Omega \cap (\Sigma(E)_\Omega)^\alpha$ stabilise la partition $\{O_i \cap \alpha^{-1}(O_j)\}_{i,j=1,2}$, donc elle est un p'-groupe; par conséquent, $\Sigma(E)_\Omega$ contient $M(1,P)$ (cf. ch.II, déf.M(A,P)). D'autre part, $\Sigma(O_1)$ et $\Sigma(O_2)$ se centralisent l'un l'autre dans $\Sigma(E)$ et par suite, chacun normalise l'intersection de P avec l'autre, d'où il résulte qu'ils sont contenus dans $M(1,P)$ (cf. ch.II, lemme 1); comme $\Sigma(E)_\Omega$ normalise $\Sigma(O_1) \times \Sigma(O_2)$, $\Sigma(E)_\Omega$ est donc contenu dans $M(1,P)$ (cf. ch.II, lemme 1).

D'après le calcul précédent, on a $M(1,P) \neq \Sigma(E)$ si et seulement si l'une des conditions (a),(b),(c) de l'énoncé est satisfaite, ce qui démontre le lemme.

Si Ω est un ensemble fini, H un sous-groupe de $\Sigma(\Omega)$ et K un groupe fini, on note $K \sim H$ le <u>produit en couronne de</u> K <u>par</u> H (i.e. le produit semi-direct de K^Ω par H, où H opère sur K^Ω permutant les composantes de chaque élément); on identifie K^Ω et H à leurs images dans $K \sim H$; de plus, on identifie K au sous-groupe de K^Ω des applications constantes à l'aide du morphisme diagonal. On note $\Lambda(\Omega)$ le <u>groupe des permutations paires de</u> Ω et Z_n le groupe $\underline{Z}/n\underline{Z}$.

<u>Proposition 3. Soient</u> A <u>un p-sous-groupe de</u> $\Sigma(E)$, Ω_k <u>l'ensemble des orbites de</u> A <u>dans</u> E <u>de cardinal</u> p^k <u>et</u> Ω <u>la réunion des</u> Ω_k, $k \geq o$. <u>Supposons que pour toute orbite</u> O <u>de</u> A <u>dans</u> E, $\omega_O(A)$ <u>soit un</u> S_p<u>-groupe de</u> $\Sigma(O)$. <u>Alors,</u> A <u>est un p-sous-groupe essentiel de</u> $\Sigma(E)$ <u>si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes</u>

1. <u>On a</u> $A = \prod_{O \in \Omega} \omega_O(A)$.

2. <u>Il existe un entier</u> $h \geq o$ <u>tel que pour tout</u> $k \geq o$ <u>différent de</u> h, <u>on ait</u> $|\Omega_k| < p$ <u>et tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite</u> (a) $5 \leq p \leq |\Omega_h| \leq 2p$ (b) $p = 2$ <u>et</u> $|\Omega_h| = 3$ (c) $p = 3$ <u>et</u> $4 \leq |\Omega_h| \leq 6$ (d) $p = 3 = |\Omega_h|$ <u>et</u> $h \geq 1$. <u>S'il en est ainsi,</u> $X(A)/A$ <u>est isomorphe à</u> $[(Z_{p-1})^h \sim \Lambda(\Omega_h)]/(Z_{p-1})^h$ <u>si</u> $p \neq 2$ <u>et à</u> $\Sigma(\Omega_h)$ <u>si</u> $p = 2$.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 1, si A est essentiel dans $\Sigma(E)$, il satisfait à la condition 1 ci-dessus; par conséquent, nous pouvons supposer que $A = \prod_{O \in \Omega} P_O$ où P_O est un S_p-groupe de $\Sigma(O)$ pour tout $O \in \Omega$. D'après les lemmes 2 et 5, si O est un élément de Ω de cardinal p^k, O admet une structure d'espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$ et un drapeau $\mathfrak{D}_O$ de longueur k tels que l'on ait $P_O = A(\mathfrak{D}_O)$; par conséquent, $N_{\Sigma(O)}(P_O)/P_O$ est isomorphe à $(Z_{p-1})^k$ (cf. lemme 4). Un simple calcul montre alors que $N_{\Sigma(E)}(A)/A$ est isomorphe à $\prod_{k \geq o} [(Z_{p-1})^k \sim \Sigma(\Omega_k)]$;

posons $G_k = (Z_{p-1})^k \sim \Sigma(\Omega_k)$ et $G = \prod_{k \geq o} G_k$; le groupe A est donc un p-sous-groupe essentiel de $\Sigma(E)$ si et seulement si 1 est un p-sous-groupe essentiel de G et lorsqu'il en est ainsi, $X(A)/A$ est isomorphe à $X_G(1)$ (cf. ch.II, prop.10).

D'après le corollaire 2 du ch.II, §2, le groupe 1 est un p-sous-groupe essentiel de G si et seulement s'il existe un entier h , $h \geq o$, tel que 1 soit un p-sous-groupe essentiel de G_h et tel que pour tout entier k , $k \geq o$ et $k \neq h$, G_k soit un p'-groupe; de plus, dans ces conditions on a

$$X_G(1) = X_{G_h}(1) \quad .$$

Or, G_k est un p'-groupe si et seulement si l'on a $|\Omega_k| < p$. Par conséquent, il suffit de démontrer que 1 est un p-sous-groupe essentiel de G_h si et seulement si l'une des conditions (a),(b),(c),(d) de l'énoncé est satisfaite et que dans ce cas, $X_{G_h}(1)$ est isomorphe à $[(Z_{p-1})^h \sim \Lambda(\Omega_h)]/(Z_{p-1})^h$ ou à $\Sigma(\Omega_h)$ suivant que $p \neq 2$ ou que $p = 2$.

Posons $H = G_h$ et soit P un S_p-groupe de H . Si $|\Omega_h| \geq 2p$, on a $\text{rang}(P) \geq 2$ et par suite, $M_H(1,P)$ contient $O_{p'}(H)$ (cf. ch.II, prop.4); dans ce cas, 1 est un p-sous-groupe essentiel de H si et seulement s'il l'est de $\Sigma(\Omega_h)$ (cf. ch.II, prop.9), donc si et seulement si $p \neq 2$ et $|\Omega_h| = 2p$ (cf. lemme 6). Si $|\Omega_h| < 2p$, on a $|P| \leq p$ et par suite, on a $M_H(1,P) = N_H(P)$ (cf. ch.II, prop.2); dans ce cas, 1 est un p-sous-groupe essentiel de H si et seulement si P n'est pas distingué dans H , donc si et seulement si soit $5 \leq p \leq |\Omega_h|$, soit $p = 3 < |\Omega_h|$, soit $p = 3 = |\Omega_h|$ et $h \geq 1$, soit $p = 2 < |\Omega_h|$. Par conséquent, 1 est un p-sous-groupe essentiel de H si et seulement si l'une des conditions (a),(b),(c),(d) de l'énoncé est satisfaite. En outre, on voit aisément que H est isomorphe à $(Z_{p-1})^h \times (H/(Z_{p-1})^h)$; si 1 est un p-sous-groupe essentiel de H , le calcul des sous-groupes distingués de $H/(Z_{p-1})^h$ montre que $X_H(1)$ est isomorphe à $[(Z_{p-1})^h \sim \Lambda(\Omega_h)]/(Z_{p-1})^h$ si $p \neq 2$ et à $\Sigma(\Omega_h)$ si $p = 2$.

APPENDICE III

Les foncteurs équilibrés dans les groupes infinis

Soient G un groupe, p un nombre premier et A un groupe fini abélien p-élémentaire qui opère sur G. Un A-foncteur équilibré à valeurs dans G est une application W de l'ensemble des sous-groupes non triviaux de A dans l'ensemble des p'-sous-groupes finis A-stables de G qui satisfait à la condition suivante

(W) Pour tout couple B, C de sous-groupes non triviaux de A tels que $C \subset B$, on a $W(B) = W(C) \cap C_G(B)$.

Par exemple, si H est un p'-sous-groupe fini A-stable de G, l'application qui à tout sous-groupe non trivial B de A fait correspondre $C_H(B)$ est un A-foncteur équilibré à valeurs dans G.

Soit W un A-foncteur équilibré à valeurs dans G; d'après la condition (W), si B est un sous-groupe non trivial de A, B centralise $W(B)$; de plus, si B, C sont des sous-groupes non triviaux de A, on a

$$W(B) \cap C_G(C) = W(C) \cap C_G(B) .$$

On pose $|W| = \prod_{1 \neq B \subset A} |W(B)|$ et $W(1) = \langle \bigcup_{1 \neq B \subset A} W(B) \rangle$.

Soit H un sous-groupe de G. Si H est A-stable, l'application qui à tout sous-groupe non trivial B de A fait correspondre $W(B) \cap H$, est un A-foncteur équilibré à valeurs dans H (relativement à l'opération de A sur H induite par celle de A sur G); on le note $\mathrm{Res}_{H,G} W$. On dit que H est un sous-groupe de (A, W) s'il satisfait aux conditions suivantes

(H1) Le groupe H est A-stable.

(H2) Pour tout sous-groupe non trivial B de A, on a $C_H(B) \subset W(B)$.

On remarquera que l'inclusion de la condition (H2) entraîne $C_H(B) = W(B) \cap H$. On voit aisément que pour tout sous-groupe non trivial B de A, $W(B)$ est un sous-groupe de (A,W) et que tout sous-groupe A-stable d'un sous-groupe de (A,W) est un sous-groupe de (A,W). Comme $W(A) \subset W(B)$ pour tout sous-groupe non trivial B de A, le conjugué d'un sous-groupe de (A,W) par un élément de $W(A)$ est encore un sous-groupe de (A,W). De plus, si K et L sont deux p'-sous-groupes finis de (A,W) (i.e. deux p'-sous-groupes finis de G qui vérifient (H1) et (H2)) et si $K.L = L.K$, $K.L$ est un p'-sous-groupe fini de (A,W); en effet, $K.L$ est alors un p'-sous-groupe fini de G qui est A-stable et pour tout sous-groupe non trivial B de A, on a

$$C_{K.L}(B) = C_K(B).C_L(B)$$

car le nombre de décompositions d'un élément de $K.L$ en produit d'éléments de K

et de L est premier à p .

Soit K un sous-groupe distingué A-stable de G ; posons $\bar{G} = G/K$ et pour tout sous-groupe H de G , notons $\bar{H}$ l'image de H dans $\bar{G}$. L'application qui à tout sous-groupe non trivial B de A fait correspondre $\overline{W(B)}$ est un A-foncteur équilibré à valeurs dans $\bar{G}$ (relativement à l'opération induite de A sur $\bar{G}$), que l'on note $\mathrm{Cores}_{G,\bar{G}}W$; en effet, si B , C sont des sous-groupes non triviaux de A , on a

$$\overline{W(C) \cap C_G(B)} = \overline{W(C)} \cap C_{\bar{G}}(B) \qquad \text{(cf. ch.VI, lemme 1)}$$

et par conséquent, l'application ci-dessus satisfait à la condition (W). Soit H un sous-groupe de G ; on voit aisément que <u>si</u> K <u>est un sous-groupe de</u> (A,W) <u>et</u> $\bar{H}$ <u>est un sous-groupe de</u> $(A,\mathrm{Cores}_{G,\bar{G}}W)$, $H.K$ <u>est aussi un sous-groupe de</u> (A,W) .

Nous allons étudier les p'-sous-groupes finis de (A,W) ; d'après les conditions (H1),(H2) et le lemme suivant, <u>si</u> $|A| \geq p^2$, <u>tout</u> p'-<u>sous-groupe fini de</u> (A,W) <u>est contenu dans</u> $W(1)$.

<u>Lemme 1. Soit</u> H <u>un</u> p'-<u>groupe fini sur lequel</u> A <u>opère. Si</u> $|A| \geq p^2$, H <u>est engendré par la réunion des sous-groupes</u> $C_H(B)$ <u>où</u> B <u>parcourt les sous-groupes d'indice</u> p <u>de</u> A .

<u>Démonstration</u>: Le groupe A stabilise un S_q-groupe Q de H pour chaque q (cf. (12), ch.6, th.2.2); nous pouvons donc supposer que H est un q-groupe où q est un nombre premier $\neq p$; la démonstration est alors analogue à celle de (12), ch. 5, th.3. 16.

Soit q un nombre premier différent de p et Q un q-sous-groupe fini de (A,W) ; on dit que Q est un S_q-<u>groupe de</u> (A,W) si pour tout sous-groupe non trivial B de A , Q contient un S_q-groupe de $W(B)$. Il est clair que Q <u>est un</u> S_q-<u>groupe de</u> (A,W) <u>si et seulement si</u>

$$|\mathrm{Res}_{Q,G}W| = |W|_q$$

De plus, <u>si</u> $|A| \geq p^2$, <u>tout</u> S_q-<u>groupe de</u> (A,W) <u>est un élément maximal de l'ensemble des</u> q-<u>sous-groupes finis de</u> (A,W) ; en effet, si on a $Q \subset Q'$, Q et Q' étant respectivement un S_q-groupe et un q-sous-groupe fini de (A,W) , pour tout sous-groupe non trivial B de A , on a alors

$$C_Q(B) = Q \cap W(B) = Q' \cap W(B) = C_{Q'}(B) \qquad \text{(cf. (H2))}$$

et par suite, on a $Q = Q'$ (cf. (H1) et lemme 1); le théorème suivant montre que la réciproque est vraie lorsque $|A| \geq p^3$.

<u>Théorème 1. Soient</u> q <u>un nombre premier différent de</u> p <u>et</u> W <u>un</u> A<u>-foncteur équilibré à valeurs dans</u> G . <u>Si</u> $|A| \geq p^3$, <u>il existe un</u> S_q<u>-groupe</u> Q <u>de</u> (A,W) <u>et pour tout</u> q<u>-sous-groupe fini</u> Q' <u>de</u> (A,W) , <u>il existe</u> $z \in W(A)$ <u>tel que l'on ait</u> $Q' \subset Q^z$.

Nous allons décomposer la démonstration du théorème en une suite de quatre lemmes. Les notations sont toujours celles du théorème et nous supposons que $|A| \geq p^3$.

<u>Lemme 2. Si</u> Q_1 , Q_2 <u>sont deux</u> q<u>-sous-groupes finis de</u> (A,W) <u>non contenus l'un dans l'autre, il existe un</u> q<u>-sous-groupe fini</u> Q <u>de</u> (A,W) <u>et deux éléments</u> z_1 , z_2 <u>de</u> $W(A)$ <u>tels que</u> $Q_1 \cap Q_2$ <u>soit strictement contenu dans les intersections</u> $Q_1 \cap Q^{z_1}$ <u>et</u> $Q_2 \cap Q^{z_2}$.

<u>Démonstration</u>: Posons $Q_0 = Q_1 \cap Q_2$; d'après nos hypothèses, on a $Q_0 \neq Q_i$, $i = 1,2$. Soit R_i un élément minimal de l'ensemble des sous-groupes A-stables de Q_i qui contiennent strictement Q_0 , $i = 1,2$; Q_0 est alors distingué dans R_i , le quotient R_i/Q_0 est abélien q-élémentaire et A opère irréductiblement sur R_i/Q_0 , $i = 1,2$; par conséquent, l'image de A dans $\mathrm{Aut}(R_i/Q_0)$ est cyclique (cf. (12), ch.3, th.2.3); comme $|A| \geq p^3$, on en déduit qu'il existe un sous-groupe non trivial B de A qui opère trivialement sur R_1/Q_0 et sur R_2/Q_0 ; puisque R_i est un sous-groupe de (A,W) , on a alors

$$R_i = (W(B) \cap R_i).Q_0 \quad , \quad i=1,2 \text{ (cf. (H2) et ch.VI, lemme 1).}$$

Posons $L = W(B) \cap N_G(Q_0)$; puisque L est un p'-sous-groupe fini A-stable de G qui contient $W(B) \cap R_i$, $i=1,2$, il existe un S_q-groupe A-stable R de L et deux éléments z_1 , z_2 de $C_L(A)$ tels que l'on ait

$$W(B) \cap R_i \subset R^{z_i} \quad , \quad i=1,2 \qquad \text{(cf. (12), ch.6, th.2.2);}$$

posons $Q = R.Q_0$; nous allons démontrer que Q , z_1 et z_2 satisfont aux conditions de l'énoncé. Puisque R et Q_0 sont respectivement des q-sous-groupes A-stables de $W(B)$ et de Q_1 , ils sont des q-sous-groupes finis de (A,W) et par suite, il en est de même pour Q . De plus, on a $C_L(A) \subset W(A)$ (cf. (W)) et par suite, z_1 et z_2 appartiennent à $W(A)$. Enfin, d'après les égalités et les inclusions ci-dessus, on a $R_i \subset Q^{z_i}$, $i=1,2$, et par suite, Q_0 est strictement contenu dans $Q_i \cap Q^{z_i}$, $i=1,2$ (car $Q_0 \neq R_i$ et $R_i \subset Q_i \cap Q^{z_i}$).

<u>Lemme 3. Si</u> $Q_1, \ldots, Q_n$ <u>sont des</u> q<u>-sous-groupes finis de</u> (A,W) , <u>il existe des éléments</u> $z_1, \ldots, z_n$ <u>de</u> $W(A)$ <u>tels que le sous-groupe engendré par la réunion des</u> $(Q_i)^{z_i}$, $i=1,\ldots,n$, <u>soit un</u> q<u>-sous-groupe fini de</u> (A,W) .

Démonstration: En raisonnant par récurrence sur n, on se ramène sans difficulté au cas où $n = 2$. Dans ce cas, on raisonne par récurrence sur $|W|_q/|\mathrm{Res}_{Q_1 \cap Q_2, G}W|$. Si l'un des groupes Q_1 ou Q_2 contient l'autre, on prend $z_1 = z_2 = 1$. Supposons que Q_1 et Q_2 ne soient pas contenus l'un dans l'autre; il résulte des lemmes 1, 2 et de la condition (H2), qu'il existe un q-sous-groupe fini Q de (A,W), des éléments u_1, u_2 de $W(A)$ et des sous-groupes B_1, B_2 d'indice p de A tels que $Q_1 \cap Q_2 \cap W(B_i)$ soit strictement contenu dans $Q_i \cap Q^{u_i} \cap W(B_i)$, $i=1,2$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe alors $x_1, x_2, y_1, y_2 \in W(A)$ tels que les sous-groupes

$$R_1 = \langle (Q_1)^{x_1}, Q^{u_1y_1} \rangle \quad \text{et} \quad R_2 = \langle (Q_2)^{x_2}, Q^{u_2y_2} \rangle$$

soient des q-sous-groupes finis de (A,W) ; on a maintenant

$$Q \subset (R_i)^{(u_iy_i)^{-1}} \quad , \quad i = 1, 2$$

et comme $Q^{u_1} \cap W(B_1)$ contient strictement $Q_1 \cap Q_2 \cap W(B_1)$ (et $u_1 \in W(A)$), il résulte à nouveau de l'hypothèse de récurrence, qu'il existe $w_1, w_2 \in W(A)$ tels que le sous-groupe

$$R = \langle (R_1)^{(u_1y_1)^{-1}w_1}, (R_2)^{(u_2y_2)^{-1}w_2} \rangle$$

soit un q-sous-groupe fini de (A,W) ; il suffit alors de prendre

$$z_i = x_i(u_iy_i)^{-1}w_i \quad , \quad i = 1, 2 \qquad .$$

Lemme 4. Il existe un S_q-groupe de (A,W).

Démonstration: Pour tout sous-groupe non trivial B de A, soit Q_B un S_q-groupe A-stable de $W(B)$ (cf. (12), ch.6, th.2.2); en vertu du lemme 3, il existe des éléments z_B de $W(A)$ tels que le sous-groupe Q engendré par la réunion des $(Q_B)^{z_B}$, où B parcourt les sous-groupes non triviaux de A, soit un q-sous-groupe fini de (A,W). Or, si B est un sous-groupe non trivial de A, on a $W(A) \subset W(B)$ (cf. (W)) et par suite, $(Q_B)^{z_B}$ est encore un S_q-groupe de $W(B)$. Par conséquent, Q est un S_q-groupe de (A,W).

Lemme 5. Soient Q un S_q-groupe et Q' un q-sous-groupe fini de (A,W). Il existe $z \in W(A)$ tel que l'on ait $Q' \subset Q^z$.

Démonstration: En vertu du lemme 3, il existe $u, v \in W(A)$ tels que le sous-groupe $R = \langle Q^u, (Q')^v \rangle$ soit un q-sous-groupe fini de (A,W) ; or, Q^u est un élément maximal de l'ensemble des q-sous-groupes finis de (A,W) (car il est un S_q-groupe de (A,W)); par suite, on a $R = Q^u$ et il suffit de prendre $z = uv^{-1}$.

<u>Corollaire. Les notations étant celles du théorème 1, si</u> $|A| \geq p^3$ <u>et si</u> $|W|$ <u>est une puissance de</u> q , $W(1)$ <u>est l'unique</u> S_q<u>-groupe de</u> (A,W) .

<u>Démonstration</u>: D'après le théorème 1, si $|A| \geq p^3$, il existe un S_q-groupe Q de (A,W) et si $|W|$ est une puissance de q , Q contient $W(1)$; or, tout p'-sous-groupe fini de (A,W) est contenu dans $W(1)$ lorsque $|A| \geq p^2$ (cf. (H1), (H2) et lemme 1); on a donc $Q = W(1)$.

<u>Théorème 2. Soit</u> W <u>un A-foncteur équilibré à valeurs dans</u> G . <u>Supposons que</u> $|A| \geq p^3$ <u>et que</u> G <u>soit résoluble. Le groupe</u> $W(1)$ <u>est alors un</u> p'<u>-sous-groupe fini de</u> (A,W) .

Nous allons décomposer la démonstration du théorème 2 en une suite de trois lemmes. Dans tous les lemmes nous supposons que $|A| \geq p^3$.

<u>Lemme 6. Soient</u> W <u>et</u> W' <u>deux A-foncteurs équilibrés à valeurs dans</u> G . <u>Supposons que pour tout sous-groupe non trivial</u> B <u>de</u> A , $W(B)$ <u>normalise</u> (resp. <u>centralise</u>) $W'(B)$. <u>Alors</u>, $W(1)$ <u>normalise</u> (resp. <u>centralise</u>) $W'(1)$.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 1 appliqué à chaque $W(B)$, le groupe $W(1)$ est engendré par la réunion des $W(C)$ où $|A:C| = p$; il en est de même pour $W'(1)$. Par conséquent, il suffit de démontrer que pour tout couple B , C de sous-groupes d'indice p de A , le groupe $[W(B), W'(C)]$ est contenu dans $W'(1)$ (resp. égal à 1); or, comme $|A| \geq p^3$, l'intersection $B \cap C$ n'est pas triviale et on a $W(B) \subset W(B \cap C)$ et $W'(C) \subset W'(B \cap C)$ (cf. (W)); l'assertion résulte alors de nos hypothèses.

<u>Lemme 7. Soit</u> W <u>un A-foncteur équilibré à valeurs dans</u> G . <u>Si pour tout sous-groupe non trivial</u> B <u>de</u> A , $W(B)$ <u>est abélien, le groupe</u> $W(1)$ <u>est un</u> p'<u>-sous-groupe fini et abélien de</u> (A,W) .

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 6, $W(1)$ est alors abélien (on prend $W' = W$); par conséquent, si $B_1, \ldots, B_n$ sont les sous-groupes non triviaux de A , on a $W(1) = W(B_1). \ldots .W(B_n)$ et par suite, $W(1)$ est un p'-sous-groupe fini de (A,W) .

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème 2; nous allons démontrer un résultat plus précis.

<u>Lemme 8. Soit</u> W <u>un A-foncteur équilibré à valeurs dans</u> G . <u>Supposons que l'on ait</u> $\bigcap_{n \geq 1} D^n(G) = 1$. <u>Le groupe</u> $W(1)$ <u>est alors un</u> p'<u>-sous-groupe fini de</u> (A,W).

<u>Démonstration</u>: On raisonne par récurrence sur $|W|$; nous pouvons supposer que l'on a $W(1) = G \neq 1$. Posons $W' = \mathrm{Res}_{D(G),G}W$; d'après nos hypothèses, on a $D(G) \neq G$ et par suite, il existe un sous-groupe non trivial B de A tel que l'on ait $W'(B) \neq W(B)$; il résulte alors de l'hypothèse de récurrence, que $W'(1)$ est un p'-sous-groupe fini de (A,W') , donc de (A,W) . D'autre part, en vertu du lemme 6, $W'(1)$ est distingué dans G ; posons $\overline{G} = G/W'(1)$ et $\overline{W} = \mathrm{Cores}_{G,\overline{G}}W$; comme $W'(1)$ est un p'-sous-groupe fini de (A,W) , il suffit de démontrer maintenant que $\overline{G}$ est un p'-sous-groupe fini de $(A,\overline{W})$; or, d'après nos hypothèses, on a $\overline{G} = \overline{W}(1)$ et pour tout sous-groupe non trivial B de A , $\overline{W}(B)$ est abélien (car on a $D(W(B)) \subset W(B) \cap D(G) \subset W'(1)$); l'assertion résulte alors du lemme 7.

<u>Corollaire</u>. <u>Supposons que</u> $|A| \geq p^3$ <u>et soit</u> W <u>un</u> A-<u>foncteur équilibré à valeurs dans</u> G . <u>Tout sous-groupe résoluble de</u> G <u>qui est engendré par la réunion d'un ensemble de</u> p'-<u>sous-groupes finis de</u> (A,W) , <u>est également un</u> p'-<u>sous-groupe fini de</u> (A,W) .

<u>Démonstration</u>: Soit H un tel sous-groupe; d'après nos hypothèses, A stabilise H . Posons $W_H = \mathrm{Res}_{H,G}W$; d'après le théorème 2, $W_H(1)$ est un p'-sous-groupe fini de (A,W_H) , donc de (A,W) ; or, il est clair que tout sous-groupe de (A,W) qui est contenu dans H , est un sous-groupe de (A,W_H) et on sait que $W_H(1)$ contient tous les p'-sous-groupes finis de (A,W_H) (cf. (H1),(H2) et lemme 1); d'après nos hypothèses, on a donc $H = W_H(1)$, ce qui démontre le corollaire.

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> W <u>un</u> A-<u>foncteur équilibré à valeurs dans</u> G . <u>Supposons que</u> $|A| \geq p^4$ <u>et que, pour tout sous-groupe non trivial</u> B <u>de</u> A , $W(B)$ <u>soit résoluble. Le groupe</u> $W(1)$ <u>est alors un</u> p'-<u>sous-groupe fini et résoluble de</u> (A,W) .

Nous allons établir d'abord quatre lemmes (le premier est démontré dans (10), lemme 2.5, sous une forme légèrement différente).

<u>Lemme 9</u>. <u>Soient</u> q <u>un nombre premier différent de</u> p <u>et</u> H <u>un</u> p'-<u>groupe fini</u> q-<u>résoluble. Supposons que</u> A <u>opère sur</u> H <u>et que</u> $|A| \geq p^2$. <u>On a alors</u>

$$\bigcap_{|A:B| = p} O_{q'}(C_H(B)) = O_{q'}(H) \cap C_H(A) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Posons $K = \bigcap_{|A:B| = p} O_{q'}(C_H(B))$; puisque, pour tout sous-groupe B de A , on a $O_{q'}(H) \cap C_H(B) \subset O_{q'}(C_H(B))$ (cf. (O3)), K contient $O_{q'}(H) \cap C_H(A)$; de plus, A opère trivialement sur K ; par conséquent, il suffit de démontrer que K est contenu dans $O_{q'}(H)$. Posons $\overline{H} = H/O_{q'}(H)$; en vertu du lemme 1, $O_q(\overline{H})$ est engendré par la réunion des sous-groupes $C_{O_q(\overline{H})}(B)$ où B parcourt les

sous-groupes d'indice p de A ; or, si B est un tel groupe, K est contenu dans $O_{q'}(C_H(B))$ et par suite, l'image $\bar{K}$ de K dans $\bar{H}$ est contenue dans $O_{q'}(C_{\bar{H}}(B))$ (cf. ch.VI, lemme 1), d'où il résulte que $\bar{K}$ centralise $C_{O_q(\bar{H})}(B)$; on en déduit que $\bar{K}$ centralise $O_q(\bar{H})$; comme H est q-résoluble et K est un q'-groupe, on a donc $\bar{K} = 1$ (cf. (12), ch.6, th.3.4).

Dans les trois lemmes suivants, les notations et les hypothèses sont celles du théorème. Pour tout nombre premier q différent de p et tout sous-groupe B de A d'ordre $\geq p^2$, on pose

$$V_q(B) = \bigcap_{|B:C| = p} O_{q'}(W(C)) \qquad ;$$

on voit aisément à l'aide de la condition (W), que $V_q(B)$ <u>est un q'-sous-groupe distingué de</u> $W(B)$.

<u>Lemme 10. Si</u> $|W|$ <u>est divisible par deux nombres premiers distincts, il existe un nombre premier</u> q <u>qui divise</u> $|W|$ <u>et un sous-groupe</u> B <u>de</u> A <u>d'ordre</u> $\geq p^2$ <u>tels que l'on ait</u> $V_q(B) \neq 1$.

<u>Démonstration</u>: Soient q et r deux nombres premiers distincts et supposons qu'ils divisent $|W|$. Soit Q un S_q-groupe de (A,W) (cf. th.1); puisque q divise $|W|$, on a $Q \neq 1$; soient Z un élément minimal de l'ensemble des sous-groupes non triviaux A-stables de $Z(Q)$ et B le noyau de l'opération de A sur Z ; il est clair que Z est un groupe abélien q-élémentaire sur lequel A opère irréductiblement et par suite, on a $|B| \geq p^3$ (cf. (12), ch.3, th.2.3). Démontrons d'abord que pour tout sous-groupe non trivial C de B , on a

$$Z \subset O_{q'q}(W(C)) \qquad ;$$

comme $W(C)$ contient $C_Q(C)$ (cf. (H2)), on a $Z \subset W(C)$; de plus, Z centralise Q et celui-ci contient un S_q-groupe de $W(C)$; comme $W(C)$ est résoluble, il en résulte l'inclusion annoncée (cf. (12), ch.6, th.3.3).

On distingue deux cas suivant que l'ensemble $\mathfrak{N}$ des q'-sous-groupes finis de (A,W) qui sont normalisés et non centralisés par Z , est vide ou non. Supposons que $\mathfrak{N}$ soit vide; nous allons démontrer que l'on a $Z \subset V_r(B)$. Soit C un sous-groupe non trivial de B ; puisque $O_{q'q}(W(C))$ contient Z , Z normalise $O_{q'}(W(C))$ et puisque $\mathfrak{N} = \emptyset$, il le centralise; on en déduit que Z est contenu dans $O_q(W(C))$, donc dans $O_{r'}(W(C))$. Comme ceci est vrai pour tout sous-groupe d'indice p de B , on a donc $Z \subset V_r(B)$.

Supposons que $\mathfrak{N}$ soit non vide; soient N un élément minimal de $\mathfrak{N}$ et C le noyau de l'opération de B sur N ; nous allons démontrer que l'on a

$$|C| \geq p^2 \quad \text{et} \quad N \subset V_q(C) \qquad .$$

Notons L le produit semi-direct de Z et A (avec l'opération induite de A

sur Z); il est clair que la conjugaison et l'opération de A sur G induissent une opération de L sur G et que N est un élément minimal de l'ensemble des $\{p,q\}'$-sous-groupes finis L-stables de G qui ne sont pas centralisés par Z. On en déduit aisément que N est un s-groupe, s étant un nombre premier différent de p et q (cf. (12), ch.6, th.2.2), que l'on a $N = [Z, N]$ (cf. (12), ch.5, th.3.5) et que L opère irréductiblement sur $N/\Phi(N)$ (cf. (12), ch.3, th.3.1). Par conséquent, les noyaux des opérations de L sur N et sur $N/\Phi(N)$ coïncident (cf. (12), ch.5, th.1.4) et l'image de $Z(L)$ dans $\mathrm{Aut}(N/\Phi(N))$ est cyclique (cf. (12), ch.3, th.2.2); comme $B \subset Z(L)$, on en déduit que l'on a $|C| \geq p^2$.
D'autre part, soit D un sous-groupe non trivial de C ; comme D centralise N, on a $N \subset W(D)$ (cf. (H2)); or, on a $N = [Z, N]$ et nous avons démontré ci-dessus que l'on a $Z \subset O_{q'q}(W(D))$; on en déduit que $N \subset O_{q'}(W(D))$ (car N est un q'-groupe). Comme ceci est vrai pour tout sous-groupe d'indice p de C, on a donc $N \subset V_q(C)$.

Lemme 11. Soit q un nombre premier $\neq p$. Si B, C sont des sous-groupes de A d'ordres $\geq p^2$ tels que $C \subset B$, on a

$$V_q(B) = V_q(C) \cap C_G(B) .$$

Démonstration: Il est clair que B centralise $V_q(B)$; par conséquent, nous pouvons supposer que $C \neq B$. Soit D un sous-groupe d'indice p de C ; puisque D centralise $W(D)$, l'opération de A sur G induit une opération de B/D sur $W(D)$; comme $|B/D| \geq p^2$ il résulte du lemme 9 et de la condition (W), que $O_{q'}(W(D)) \cap C_G(B)$ est égal à l'intersection des $O_{q'}(W(E))$, où E parcourt les sous-groupes d'indice p de B qui contiennent D ; or, tout sous-groupe d'indice p de B contient un sous-groupe d'indice p de C ; on en déduit les égalités suivantes

$$V_q(C) \cap C_G(B) = \Big(\bigcap_{|C:D|=p} O_{q'}(W(D))\Big) \cap C_G(B) = \bigcap_{|B:E|=p} O_{q'}(W(E)) = V_q(B) ,$$

ce qui démontre le lemme.

Si q est un nombre premier différent de p et si C est un sous-groupe d'ordre p de A, on note $V_q(C)$ le sous-groupe de G engendré par la réunion des $V_q(B)$ où B parcourt les sous-groupes de A qui contiennent strictement C ; de plus, on note V_q l'application qui à tout sous-groupe non trivial B de A fait correspondre $V_q(B)$.

Lemme 12. Soit q un nombre premier $\neq p$. Pour tout sous-groupe non trivial B de A, $V_q(B)$ est un q'-sous-groupe distingué de $W(B)$. De plus, V_q est un A-foncteur équilibré à valeurs dans G.

Démonstration: Nous allons démontrer les deux assertions en même temps. Si C est un sous-groupe de A d'ordre $\geq p^2$, on sait déjà que $V_q(C)$ est un q'-sous-groupe distingué de $W(C)$ et que pour tout sous-groupe B de A qui contient C, on a

$$V_q(B) = V_q(C) \cap C_G(B) \qquad \text{(cf. lemme 11).}$$

Dorénavant, C est un sous-groupe d'ordre p de A. Si B est un sous-groupe de A d'ordre $\geq p^2$ qui contient C, on a $V_q(B) \subset O_{q'}(W(C))$; en effet, en vertu du lemme 11, il suffit de démontrer l'inclusion lorsque $|B| = p^2$, auquel cas elle résulte de la définition de $V_q(B)$; en particulier, ceci démontre que $V_q(C)$ est un q'-sous-groupe de $W(C)$.

Puisque C centralise $W(C)$, l'opération de A sur G induit une opération de A/C sur $W(C)$; nous allons définir deux (A/C)-foncteurs équilibrés à valeurs dans $W(C)$, relativement à cette opération. On note W_C et $V_{q,C}$ les applications qui à tout sous-groupe non trivial B/C de A/C font correspondre respectivement $W(B)$ et $V_q(B)$; on démontre aisément à l'aide de la condition (W) et du lemme 11, qu'elles sont des (A/C)-foncteurs équilibrés à valeurs dans $W(C)$. De plus, d'après le lemme 1 appliqué à A/C opérant sur $W(C)$ et d'après la définition de $V_q(C)$, on a

$$W_C(1) = W(C) \quad \text{et} \quad V_{q,C}(1) = V_q(C) \qquad .$$

Nous sommes en mesure de démontrer que $W(C)$ normalise $V_q(C)$ et que pour tout sous-groupe B de A qui contient C, on a

$$V_q(B) = V_q(C) \cap C_G(B) \qquad .$$

La première assertion résulte des égalités précédentes et du lemme 6 appliqué à W_C et $V_{q,C}$; en effet, on a $|A/C| \geq p^3$ et on sait que pour tout sous-groupe D de A d'ordre $\geq p^2$, $V_q(D)$ est distingué dans $W(D)$. Démontrons la deuxième; C centralise $W(C)$ et celui-ci contient $V_q(C)$; nous pouvons donc supposer que $B \neq C$. Comme $W(C)$ est résoluble, il résulte du théorème 2 que $V_{q,C}(1)$ est un sous-groupe de $(A/C, V_{q,C})$; comme $V_{q,C}(1) = V_q(C)$, on en déduit

$$V_q(C) \cap C_G(B) = V_{q,C}(1) \cap C_{W(C)}(B/C) = V_q(B) \qquad \text{(cf. (H2)).}$$

Démonstration du théorème: On raisonne par récurrence sur $|W|$; nous pouvons supposer que l'on a $W(1) = G$; de plus, en vertu du corollaire du théorème 1, nous pouvons supposer que $|W|$ est divisible par deux nombres premiers distincts. Dans ce cas, en vertu du lemme 10, il existe un nombre premier q qui divise $|W|$ et tel que l'on ait $|V_q| \neq 1$. D'autre part, en vertu du lemme 12, q ne divise pas $|V_q|$ et pour tout sous-groupe non trivial B de A, $W(B)$ contient et normalise $V_q(B)$. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, $V_q(1)$ est un p'-sous-groupe fini et résoluble de (A,V_q) et d'après le lemme 6, il est distingué dans G (car $G = W(1)$).

Posons $\overline{G} = G/V_q(1)$ et $\overline{W} = \mathrm{Cores}_{G,\overline{G}}W$; puisque $V_q(1)$ est un sous-groupe de (A,V_q) , il est un sous-groupe de (A,W) et par suite, il suffit de démontrer maintenant que $\overline{G}$ est un p'-sous-groupe fini et résoluble de $(A,\overline{W})$. On voit aisément que l'on a $\overline{G} = \overline{W}(1)$ et que $|\overline{W}|$ divise $|W|/|V_q|$; comme $|V_q| \neq 1$, l'assertion résulte à nouveau de l'hypothèse de récurrence.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J.L. ALPERIN — Silow intersections and fusion, J.Algebra, 6 (1967), 222–241

(2) H. BENDER — Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt, J.Algebra, 17 (1971), 527–554

(3) N. BOURBAKI — "Groupes et algèbres de Lie", Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968

(4) H. CARTAN et S. EILENBERG — "Homological algebra", Princeton University Press, Princeton – New Jersey, 1956

(5) R.W. CARTER — "Simple groups of Lie type", John Wiley & Sons, London – New York – Sydney – Toronto, 1972

(6) W. FEIT et J.G. THOMPSON — Solvability of groups of odd order, Pac.Jour.Math., 13 (1963), 775–1029

(7) G. GLAUBERMAN — A characteristic subgroup of a p-stable group, Canad.J.Math., 20 (1968), 1101–1135

(8) G. GLAUBERMAN — Global and local properties of finite groups, dans "Finite simple groups", Powell and Higman, Academic Press, London – New York, 1971

(9) G. GLAUBERMAN — A sufficient condition for p-stability, Proc.London Math.Soc., 25 (1972), 253–287

(10) D.M. GOLDSCHMIDT — Solvable signalizer functors on finite groups, J.Algebra, 21 (1972), 137–148

(11) D.M. GOLDSCHMIDT — 2-Signalizer functors on finite groups, J.Algebra, 21 (1972), 321–340

(12) D. GORENSTEIN — "Finite groups", Harper & Row, New York – Evanston – London, 1968

(13) D. GORENSTEIN — Centralizer of involutions in finite simple groups dans "Finite simple groups", Powell and Higman, Academic Press, London – New York, 1971

(14) D. GORENSTEIN et J.H. WALTER — On the maximal subgroups of finite simple groups, J.Algebra, 1 (1964), 168–213

(15) P. HALL — Theorems like Silow's, Proc.London Math.Soc., 6 (1956), 286–304

(16) B. MITCHELL "Theory of categories", Academic Press, New York - London, 1965

(17) R. STEINBERG "Lectures on Chevalley groups" (notes mimeographiques), Yale University, 1967

(18) J.G. THOMPSON Quadratic pairs, dans "Actes du Congrés Int. Math. 1970", Gauthier-Villars, Paris, 1971, Tome 1, 375-376 (démonstration à paraître)

Luis PUIG
3 rue Jules Guesde Appt.322
94140 ALFORTVILLE