MÉMOIRES DE LA S. M. F.

RENÉ OUZILOU

Structures symplectiques faibles et intégrabilité globale de certains systèmes hamiltoniens

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 13-28
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__13_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 13 - 28.

STRUCTURES SYMPLECTIQUES FAIBLES ET INTEGRABILITE GLOBALE DE CERTAINS SYSTEMES HAMILTONIENS

par René OUZILOU

Le physicien a à coeur de croire que les champs de vecteurs qu'il rencontre sont complets ; à charge au mathématicien de montrer que c'est vrai. La méthode la plus souvent utilisée pour cela est celle de l'énergie, ce qui convient tout particulièrement aux systèmes hyperboliques ; ceux-ci sont en effet déterminés à partir de leur énergie par l'intermédiaire d'une forme symplectique qui présente l'inconvénient de n'être que faiblement non dégénérée, inconvénient d'ailleurs inhérent à la nature de tels systèmes, lesquels ne sont pas partout définis sur l'espace de phases.

Le résultat principal de cet exposé consiste à étendre aux variétés de Sobolev un résultat de P. Chernoff et J. Marsden concernant un hamiltonien de la forme K+V sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, le "potentiel" V étant positif et l'"énergie cinétique" K étant une forme quadratique minorée par celle de $\mathcal{H}$. Le modèle global correspondant ici à K est une fonction dont le hessien possède cette propriété par rapport à la métrique de Sobolev. Le principe essentiel permettant cette généralisation est un résultat de J.P. Penot qui assure que deux points d'une variété de Sobolev $\mathcal{V}$ peuvent être joints par une géodésique minimisante dès qu'ils sont dans la même composante connexe de $\mathcal{V}$ [5].

Au préalable, des précisions sur le cas linéaire sont apportées pour essayer de montrer que les méthodes symplectiques sont plus agréables que les méthodes traditionnelles de l'analyse fonctionnelle ([6] et [7], par exemple) quand il s'agit de résoudre le problème de Cauchy dans le cas hyperbolique.

1. STRUCTURES SYMPLECTIQUES LINEAIRES.

1.1. GENERALITES. - Pour tout espace de Banach $\mathcal{E}$, on désignera par $\mathcal{E}'$ le dual topologique fort de $\mathcal{E}$, par $C_{\mathcal{E}}$ l'injection canonique de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}''$. Pour toute application linéaire continue $L : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ portant sur des espaces de Banach, on notera L' la transposée topologique $\mathcal{F}' \to \mathcal{E}'$ de L. Pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$, on notera $I_{\mathcal{A}}$ l'injection canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$.

Rappelons que l'identité :

$$\varphi(x,y) = (\tilde{\varphi}.x).y \quad ; \quad x,y \in \mathcal{E}$$

définit une correspondance biunivoque entre les formes bilinéaires continues $\mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sur un espace de Banach réel $\mathcal{E}$ et les applications linéaires continues $\tilde{\varphi} : \mathcal{E} \quad \mathcal{E}'$. Une telle forme φ est symétrique (resp. antisymétrique) si, et seulement si, $\tilde{\varphi}'\circ C_{\mathcal{E}} = \tilde{\varphi}$ (resp. $\tilde{\varphi}'\circ C_{\mathcal{E}} = -\tilde{\varphi}$). Pour tout sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, la restriction $\varphi_{\mathcal{F}}$ de φ à F correspond à l'application linéaire continue $I'_{\mathcal{F}} \circ \tilde{\varphi} \circ I_{\mathcal{F}}$; de façon plus générale, pour toute application linéaire continue $L : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$, l'image réciproque $L^{*}_{i}\varphi$ de φ par L est définie par l'application linéaire continue $L'\circ \tilde{\varphi} \circ L : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$.

Une forme bilinéaire continue $\varphi : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$, symétrique ou antisymétrique, est dite *faiblement* (resp. *fortement*) *non dégénérée* lorsque $\tilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est injective (resp. bijective). Notons que, grâce à Hahn-Banach, si φ est faiblement non dégénérée et si $\mathcal{E}$ est réflexif, alors l'image de $\tilde{\varphi}$ est dense dans $\mathcal{E}'$.

Par *forme symplectique faible* (resp. *forte*) sur un espace de Banach réel $\mathcal{B}$, on entendra une forme bilinéaire continue, antisymétrique $\varphi : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathbb{R}$, faiblement (resp. fortement) non dégénérée.

Soit $h : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne continue sur un espace de Banach complexe $\mathcal{E}$; alors Re. h (resp. Im.h) est une forme R-bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique). Inversement, une forme bilinéaire symétrique continue σ et une forme bilinéaire antisymétrique continue ω, sur un même espace de Banach réel $\mathcal{B}$, sont dites *compatibles* s'il existe une structure complexe J sur $\mathcal{B}$ (i.e. $J^2=-I$) telle que $\sigma+i\omega : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathbb{C}$ soit une forme J-hermitienne, ce qui a lieu si, et seulement si, $\tilde{\sigma} = \tilde{\omega}\circ J$; dans ces conditions, si l'une des deux formes σ ou ω est faiblement (resp. fortement) non dégénérée, il en est de même de l'autre et ces deux formes sont invariantes par J. On peut donc affirmer que :

<u>PROPOSITION 1</u>. – *Etant donnée sur un espace de Banach réel $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire continue, symétrique, $\sigma : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathbb{R}$, faiblement (resp. fortement) non dégénérée, il existe une correspondance biunivoque canonique entre les formes symplectiques faibles (resp. fortes) $\omega : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ compatibles avec σ et les structures complexes J sur $\mathcal{B}$ qui laissent σ invariante.*

Dans le cas d'un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$, de produit scalaire σ, ce résultat se complète par le théorème de structure que voici, qui précise un résultat connu ([3] p. 7).

PROPOSITION 2. - *Sur un espace de Hilbert réel* $(\mathcal{H},\sigma)$, *les* formes symplectiques *faibles se présentent canoniquement sous la forme* $P^*\omega$, ω *étant une forme symplectique (forte !) compatible avec* σ *et* P *un opérateur auto-adjoint* >0 *commutant avec la structure complexe* J *définie par* ω *sur* $\mathcal{H}$. *Une telle forme symplectique* $P^*\omega$ *est* forte *si, et seulement si* P *est bijectif.*

Preuve. - Tout d'abord il est clair que, pour toute forme symplectique ω sur $\mathcal{H}$ et tout opérateur symétrique injectif S, partout défini sur $\mathcal{H}$, $S^*\omega$ est faiblement non dégénérée du fait que l'image de S est dense dans $\mathcal{H}$. Si, de plus, ω est compatible avec σ et si S commute avec l'opérateur complexe J défini par ω, alors $\widetilde{S^*\omega} = J\circ S^2 = S^2\circ J$ et ceci est une décomposition polaire, ce qui détermine J et S lorsque cet opérateur symétrique est positif.

Réciproquement, si A est un opérateur antisymétrique injectif, partout défini sur $\mathcal{H}$, l'image de A est dense dans $\mathcal{H}$, ce qui fait que, dans la décomposition polaire :

$$A = J\circ|A|$$

(commutative du fait que A est normal), J est un opérateur orthogonal et, de :

$$|A|\circ J = J\circ|A| = -|A|\circ J^*$$

on déduit $J^* = -J$, ce qui assure que J est une structure complexe sur $\mathcal{H}$ qui détermine une forme symplectique ω compatible avec σ et, en posant $P = A^{1/2}$, on voit bien alors que la forme symplectique déterminée par A est égale à $P^*\omega$.

q.e.d.

Exemples classiques. - Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ; la forme symplectique canonique sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ est définie par l'opérateur canonique de complexification

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix}$$

De façon plus générale, pour tout espace de Banach réel $\mathcal{B}$, on a sur $\mathcal{B}\times\mathcal{B}'$ une forme symplectique faible définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_{\mathcal{B}'} \\ C_{\mathcal{B}} & 0 \end{bmatrix}$$

Cette forme symplectique est forte si, et seulement si $\mathcal{B}$ est réflexif.

1.2. ORTHOGONALITE. - Soit $\omega : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ une forme symplectique faible sur un espace de Banach $\mathcal{B}$. Pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ l'orthogonal de $\tilde{\omega}(\mathcal{A})$, au sens de la dualité entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, est appelé l'orthogonal de $\mathcal{A}$ suivant ω ; c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$ qu'on note ${}^{\omega}\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A} \supset {}^{\omega}\mathcal{A}$), on dit que $\mathcal{A}$ est ω-*isotrope* (resp. ω-*coisotrope*). Si ces deux conditions sont réunies, i.e. $\mathcal{A} = {}^{\omega}\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$ qu'on dira ω-*bisotrope*.

Notons que, lorsque ω est fortement non dégénérée et que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$, le biorthogonal ${}^{\omega\omega}\mathcal{A}$ s'identifie à l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

La notion d'orthogonalité relative à la 2-forme canonique ω d'un produit hilbertien $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ permet de "raffraîchir" la théorie de l'adjonction dans le cas *réel*. En effet, le graphe de l'adjoint A^* d'un opérateur R-linéaire A défini sur un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{H}$ est identique à l'orthogonal suivant ω du graphe de A, de sorte qu'on peut dire que A est symétrique (resp. auto-adjoint) si, et seulement si, son graphe est ω-isotrope (resp. ω-bisotrope). Avec cette façon de voir, on peut aussi retrouver aisément le fait qu'un opérateur A sur $\mathcal{H}$ est fermable si, et seulement si, le domaine de définition de A^* est dense dans $\mathcal{H}$.

DEFINITION. - *Un sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{V}$ d'un espace de Banach symplectique $(\mathcal{B},\omega)$ est dit* ω-lagrangien *s'il est ω-isotrope et s'il admet un supplémentaire fermé ω-isotrope $\mathcal{W}$.*

La décomposition en somme directe topologique :

$$\mathcal{B} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

ainsi définie est dite ω-lagrangienne.

Exemple. - La décomposition canonique de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$ est lagrangienne pour la forme symplectique canonique de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$.

PROPOSITION. - *Considérons pour un sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{V}$ de $\mathcal{B}$ les assertions suivantes relatives à une forme symplectique faible ω sur $\mathcal{B}$:*

i) a) $\mathcal{V}$ est lagrangien ;

b) $\mathcal{V}$ est un sous-espace isotrope maximal ;

c) $\mathcal{V}$ est bisotrope.

Alors a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).

ii) Si $\mathcal{B}$ est un espace de Hilbert réel et si ω est fortement non dégénérée, alors c) $\Rightarrow$ a).

Preuve :

i) a) $\Rightarrow$ b). Soient $\mathcal{W}$ un supplémentaire lagrangien de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ un sous-espace isotrope contenant $\mathscr{V}$. Alors, pour tout $x \in \mathscr{V}$ la projection de x sur $\mathscr{W}$ parallèlement à $\mathscr{V}$ est orthogonale à $\mathscr{V}$ et, comme elle est orthogonale à $\mathscr{W}$, elle est forcément nulle.

b) $\Rightarrow$ c). Pour tout $x \in \mathscr{B}$, orthogonal à $\mathscr{V}$, le sous-espace $\mathscr{V} + Rx$ est évidemment isotrope ce qui, par hypothèse, donne $x \in \mathscr{V}$.

ii) Sous réserve de prendre l'image réciproque de ω par un opérateur symétrique bijectif P de $\mathscr{B}$, conformément à (1.1., prop. 2), on peut supposer que ω est définie par une structure complexe J compatible avec le produit scalaire de $\mathscr{H}$ et alors l'hypothèse se traduit par le fait que $J\mathscr{V}$ est orthogonal à $\mathscr{V}$ et que tout $x \in \mathscr{B}$ orthogonal à $J\mathscr{V}$ est dans $\mathscr{V}$. Mais alors tout vecteur orthogonal à $\mathscr{V} \oplus J\mathscr{V}$ est nul et, puisque $\mathscr{V}$ et $J\mathscr{V}$ sont orthogonaux, ceci donne :

$$\mathscr{B} = \mathscr{V} \oplus J\mathscr{V}$$

En application de ceci, on retrouve aisément un résultat très classique :

COROLLAIRE. - *Les opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert réel* $\mathscr{H}$ *sont exactement les opérateurs symétriques maximaux de* $\mathscr{H}$.

Preuve. - Le fait qu'un opérateur auto-adjoint sur $\mathscr{H}$ soit symétrique maximal résulte de c) $\Rightarrow$ b). La réciproque résulte du fait que, si on prolonge $\mathbb{R}$-linéairement un opérateur A sur $\mathscr{H}$ en un point $x_o \in \mathscr{D}_{A^*}$ par la valeur $A^* x_o$ en x_o, on obtient, si A est symétrique, un opérateur symétrique $\tilde{A}$.

Remarque. - L'équivalence de a) et b) dans le cas hilbertien a été signalée pour la première fois par A. WEINSTEIN ([8], § 5).

2. SYSTEMES HAMILTONIENS LINEAIRES.

2.1. SUR UN CHAÎNON DE DENSITE. - Un chaînon d'espaces de Banach (réels) consiste en un couple $(\mathscr{B}_o, \mathscr{B}_1)$ d'espaces de Banach tels que $\mathscr{B}_1$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}_o$ et que l'injection canonique $\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_o$ soit continue. Si de plus $\mathscr{B}_1$ est dense dans $\mathscr{B}_o$, on dit alors que $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_o)$ est un chaînon de densité dans la catégorie des espaces de Banach (réels). Voici, en dehors des exemples classiques constitués par les espaces H^s, un exemple intéressant :

Considérons un opérateur linéaire $A : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ défini sur un sous-espace dense d'un espace de Banach $\mathscr{B}$ et munissons $\mathscr{D}$ de la *topologie du graphe* de A, i.e. la topologie la moins fine qui rende A continu ainsi que l'injection canonique $I_{\mathscr{D}}$. On fait ainsi de $\mathscr{D}$ un e.v.t. normable par $x \to \|A.x\| + \|x\|$ ($= \|x\|_A$). (Lorsque $A : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ est bijectif et $A^{-1} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ continu, cet e.v.t. est normable par

$x \mapsto \|A.x\|$). Cet espace normable $\mathcal{D}$ est complet si, et seulement si, A est fermé (i.e., rappelons-le, le graphe de A est fermé dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$). De façon plus générale, l'injection canonique $\mathcal{D} \to \mathcal{B}$ induit une application linéaire du complété $\mathcal{D}^A$ de $(\mathcal{D}, \|.\|_A)$ dans $\mathcal{B}$; cette application linéaire est injective si, et seulement si, l'opérateur A est fermable ; on a alors une chaîne de densité :

$$\mathcal{D} \to \mathcal{D}^A \to \mathcal{B}$$

et le prolongement canonique de A à $\mathcal{D}^A$ s'identifie à la fermeture de A.

Il est bon de noter que, étant donnés un chaînon de densité $(\mathcal{B}_o, \mathcal{B}_1)$ et une forme symplectique *forte* ω sur $\mathcal{B}_o$, la restriction de ω à $\mathcal{B}_1$ est toujours une forme symplectique *faible* si $\mathcal{B}_1$ n'est pas identique à $\mathcal{B}_o$. De la sorte, on a sur tout produit $H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$ une forme symplectique faible canonique par restriction de la forme symplectique canonique de $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$.

Soient $(\mathcal{B}_o, \mathcal{B}_1)$ un chaînon d'espaces de Banach, $A : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_o$ un opérateur linéaire continu et $\omega : \mathcal{B}_o \times \mathcal{B}_o \to \mathbb{R}$ une forme antisymétrique continue. Comme il est d'usage, notons $i_A\omega$ la 1-forme antisymétrique définie sur $\mathcal{B}_1$ par :

$$i_A\omega(x).h = \omega(A.x,h) \quad ; \quad x,h \in \mathcal{B}_1$$

et posons :

$$(1) \qquad H(x) = \frac{1}{2}\ \omega(A.x,x)$$

(C'est ce qu'on appelle *l'énergie* de A suivant ω).

Alors, le calcul différentiel sur l'espace de Banach $\mathcal{B}_1$ donne :

$$\begin{aligned} di_A\omega(x).(h,k) &= (D(i_A\omega)(x).h).k - (D(i_A\omega).k).h \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} (\omega(A.(x+th),k) - \omega(A.(x+tk),h)) \\ &= \omega(A.h;k) - \omega(A.k,h). \end{aligned}$$

De même, on obtient facilement

$$dH(x).h = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} H(x+th) = \frac{1}{2}\ (\omega(A.x,h) + \omega(A.h,x))$$

d'où il résulte que :

<u>PROPOSITION 1</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $i_A\omega$ *est une forme différentielle* fermée *sur* $\mathcal{B}_1$ *;*
ii) L'opérateur A *est antisymétrique par rapport à la restriction de* ω *sur* $\mathcal{B}_1$.

iii) $dH = i_A\omega$.

DEFINITION. - *In abstracto, nous dirons qu'un opérateur linéaire* $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}_o$ *défini sur un sous-espace vectoriel dense* $\mathcal{D}$ *d'un espace de Banach* $\mathfrak{B}_o$ *est* hamiltonien *s'il existe une forme symplectique faible* ω *sur* $\mathfrak{B}_o$ *telle que* A *soit antisymétrique par rapport à* ω. *Dans ces conditions,* A *est fermable (ce que nous verrons en (2.2) au moyen de l'adjonction symplectique), ce qui permet d'appliquer la proposition 1 à la fermeture* $\hat{A} : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_o$ *de* A.

COROLLAIRE. - *Soit* $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}_o$ *un opérateur linéaire* ω*-hamiltonien, alors son énergie* H *est* Gâteaux-différentiable *sur* $\mathcal{D}$ *pour la topologie de* $\mathfrak{B}_o$.

Preuve. - D'après la proposition 1, H est Fréchet-différentiable sur $\mathcal{D}$ pour la topologie de $\mathfrak{B}_1$ et comme celle-ci est plus forte que celle de $\mathfrak{B}_o$ sur $\mathcal{D}$ et que $i_A\omega(x) = \tilde{\omega}(A.x) \in \mathfrak{B}_o$, H reste Gâteaux-différentiable pour $\mathfrak{B}_o$ avec la même différentielle.

PROPOSITION 2 (Principe de conservation de l'énergie). - *Soit* $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}$ *un opérateur linéaire hamiltonien. Si l'énergie* H *de* A *est* continue *sur* $\mathfrak{B}$, *c'est une* intégrale première *de* A *(i.e.* H *reste constant au cours de tout mouvement dans* $\mathcal{V}$, *tangent à* A *au sens de* $\mathfrak{B}$*).*

Preuve. - Ceci résulte de la règle de dérivation des applications composées, compte tenu de (prop. 1, iii), compte tenu du fait (qui résulte du précédent corollaire) que H est Fréchet-différentiable pour la topologie de $\mathfrak{B}$ si, et seulement si, elle est continue pour cette topologie.

Exemple hilbertien. - Soit B un opérateur antisymétrique partiellement défini sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_o$. Alors, l'opérateur :

$$\begin{bmatrix} 0 & I_{\mathcal{H}_o} \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

est antisymétrique par rapport à la 2-forme canonique de $\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o$ et l'énergie de cet opérateur est :

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{2} (\|y\|^2 - \langle Bx|x \rangle).$$

On peut affirmer cet exemple en considérant une chaîne hilbertienne de densité $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_o$, en supposant que B est défini sur $\mathcal{H}_2$. Alors, la restriction à $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1$ de l'opérateur précédent est antisymétrique par rapport à la structure symplectique faible induite sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_o$ par la 2-forme canonique de $\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o$. C'est exactement ce qui se passe pour :

L'équation des ondes d'une particule libre. - Considérons, pour tout entier $s \geqslant 0$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont toutes les dérivées distributionnelles jusqu'à l'ordre s sont de carré intégrable. Le laplacien Δ est un opérateur linéaire continu de H^{s+1} dans H^{s-1} et, en intégrant par parties on obtient, pour tout couple (f,g) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$< \Delta f.g >_s = - < \nabla f.\nabla g >_s = < f.\Delta g >_s \ ;$$

comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ cette double identité reste vraie dans H^{s+1}, ce qui assure que $\Delta : H^{s+1} \to H^{s-1}$ est symétrique et que l'opérateur hamiltonien :

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} \quad : H^{s+1} \times H^s \times H^s \times H^{s-1}$$

admet pour énergie :

$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{2} (\|\nabla f\|^2_{s-1} + \|g\|^2_{s-1})$$

laquelle est évidemment *continue* sur $H^s \times H^{s-1}$.

Cette façon de voir les choses permet d'obtenir tout de suite le principe de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} (\int \dot{f}^2 + m^2 \int f^2 + \int \|\nabla f\|^2)$$

le long de toute solution $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre de masse m :

$$\ddot{y} = \Delta y - m^2 y.$$

2.2. <u>ADJONCTION SYMPLECTIQUE</u>. - Soit $\omega : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{R}$ une forme symplectique faible. On peut entreprendre, par rapport à ω, une théorie de l'adjonction analogue à celle qu'on fait sur les espaces hilbertiens.

Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}_A \to \mathfrak{H}$ étant donné sur un sous-espace dense de $\mathfrak{H}$, on considère l'ensemble des couples $(x,\dot{x}) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tels que, pour tout $y \in \mathcal{D}_A$:

$$\omega(x,A.y) + \omega(\dot{x},y) = 0 \ ;$$

c'est un sous-espace vectoriel *fermé* de $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *fonctionnel* en x.

L'opérateur $A^{\omega} : \mathcal{D}_{A^{\omega}} \to \mathfrak{B}$ ainsi défini s'appelle l'adjoint de A par rapport à ω (ou l'*adjoint symplectique* de A lorsqu'on ne juge pas utile de rappeler ω).

Cette étude prend un aspect plus géométrique lorsqu'on munit $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ de la forme symplectique Ω définie par :

$$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega} & 0 \end{bmatrix} \quad ;$$

le graphe de A^{ω} est alors l'orthogonal de celui de A par rapport à Ω.

Notons que A est ω-hamiltonien si, et seulement si, $A \subset A^{\omega}$. Lorsque $A = A^{\omega}$, on dit que A est *symplectiquement auto-adjoint* (skew-adjoint chez [3]). Ceci a lieu si, et seulement si, le graphe de A est bisotrope pour Ω. Il est donc clair que tout opérateur symplectiquement auto-adjoint est fermé et que tout opérateur hamiltonien est fermable.

La symétrie canonique $(x,y) \longmapsto (y,x)$ de $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ préservent évidemment la forme Ω, on peut affirmer que, pour tout opérateur linéaire injectif A, à image dense, défini sur un sous-espace dense de $\mathcal{B}$:

$$(A^{-1})^{\omega} = (A^{\omega})^{-1}.$$

Notons que, lorsque A est antisymétrique par rapport à ω, il suffit que son image soit dense pour qu'il soit injectif.

De ces deux dernières remarques on déduit que :

PROPOSITION. - *Tout opérateur linéaire* surjectif $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}$, ω-antisymétrique *est bijectif et* symplectiquement auto-adjoint. *De plus* $A^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ *est* continu.

(La dernière assertion résulte du théorème du graphe fermé).

Exemple canonique. - Soit $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_o$ une chaîne de densité hilbertienne. Sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_o$ muni de la structure symplectique faible induite par la structure symplectique forte canonique de $\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o$ on a, pour tout opérateur linéaire $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_o$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix}^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B^{*} & 0 \end{bmatrix}$$

On peut donc affirmer que, sur $H^{s} \times H^{s-1}$ l'opérateur des ondes (pour une particule de masse m) :

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 I & 0 \end{bmatrix} \quad : H^{s+1} \times H^s \to H^s \times H^{s-1}$$

est symplectiquement auto-adjoint, compte tenu du fait bien connu que $\Delta : H^{s+1} \to H^{s-1}$ est auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H^{s-1}.

2.3. <u>FLOTS HAMILTONIENS</u>. - Etant donné un champ de vecteurs $A : \mathcal{D} \to T\mathfrak{B}$ sur une partie $\mathcal{D}$ d'une variété banachique $\mathfrak{B}$, rappelons qu'un *flot global* (de classe C°) pour A sur $\mathfrak{B}$ consiste en un groupe F_t à un paramètre d'homéomorphismes de $\mathfrak{B}$ laissant $\mathcal{D}$ invariante, tel que, en tout $x \in \mathcal{D}$, $F_t(x)$ soit une fonction de t dérivable en 0 et que :

$$\dot{F}_o(x) = A(x)$$

Dans ces conditions, $F_t(x)$ est une fonction dérivable de t et :

$$\dot{F}_t(x) = A.F_t(x) \qquad ; \qquad x \in \mathcal{D}$$

A fortiori, le champ de vecteurs A est intégrable ; on dit même dans ce cas qu'il est *globalement intégrable*.

Si $\mathfrak{B}$ est un espace de Banach et $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}$ un opérateur linéaire admettant un flot global *linéaire* F_t, alors A commute avec tous les F_t ; c'est ce qui se passe notamment pour un opérateur hamiltonien A.

<u>PROPOSITION</u>. - *Soient* (B,ω) *un espace de Banach symplectique et* $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}$ *un opérateur linéaire hamiltonien admettant un flot global* F_t *sur* $\mathfrak{B}$. *Alors*

i) Les F_t *sont* linéaires *et préservent sur* $\mathcal{D}$ *la forme* ω *et l'énergie de* A.

ii) F_t *est un groupe à un paramètre fortement continu dont le générateur infinitésimal est identique à la* fermeture *de* A.

iii) A *est* essentiellement ω-auto-adjoint *(i.e. la fermeture* $\bar{A}$ *de* A *est un opérateur* ω*-auto-adjoint).*

Preuve :

i) L'identité $\omega(F_t.x,F_t.y) = \omega(x,y)$ s'obtient par dérivation par rapport à t, compte tenu de la continuité de ω et de ce que A est ω-antisymétrique ; la linéarité des F_t résulte alors de l'identité $\omega(F_t.x,y) = \omega(x,F_{-t}.y)$.

La préservation de l'énergie s'obtient elle aussi par dérivation par rapport à t, compte tenu de la commutativité de A et de F_t.

ii) Ceci est une propriété générale valable pour tout opérateur linéaire $B : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}$ admettant sur $\mathfrak{B}$ un flot global linéaire ([3], p. 53-54 ; remarque 4).

iii) De la formule évidente :

$$F_t.x = x + \int_0^t A\, F_s(x).ds \qquad ; \qquad x \in \mathcal{D}$$

on déduit aisément que le générateur infinitésimal d'un groupe à 1 paramètre d'automorphismes de $(\mathfrak{B},\omega)$ est symplectiquement auto-adjoint ([3], p. 31).

2.4. CAS D'UNE ENERGIE STRICTEMENT POSITIVE. - Considérons sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$ un opérateur linéaire $A : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$, antisymétrique et surjectif. Alors, on sait que A est bijectif, antiadjoint et que $A^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est continu ; de la sorte : $(x.y) \longmapsto \langle A^{-1}.x,y \rangle$ est une forme symplectique faible qui fait de A un opérateur hamiltonien d'énergie $x \longmapsto \|x\|^2$.

Examinons la réciproque de cette situation et considérons, de façon un peu plus générale, un espace de Banach symplectique $(\mathfrak{B},\omega)$ et un opérateur linéaire hamiltonien $A : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}$ dont l'*énergie* est *strictement positive*, i.e. il existe une constante $c > o$ telle que

$$\omega(A.x,x) \geqslant c\|x\|^2 \qquad ; \qquad x \in \mathcal{D}$$

Alors, $\|x\|_2 = \omega(A.x,x)^{1/2}$ est une norme préhilbertienne sur $\mathcal{D}$ rendant continue l'injection canonique $\mathcal{D} \to \mathfrak{B}$, de sorte que, si on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{D}$, on a une application linéaire canonique $\mathcal{H} \to \mathfrak{B}$.

PROPOSITION 1 :

i) L'application canonique $\mathcal{H} \to \mathfrak{B}$ *est* injective.
*ii) L'*adjoint symplectique *de* A *est* surjectif.

Preuve :

i) Il suffit de montrer que, si une suite $x_n \in \mathcal{D}$ converge vers x dans $\mathcal{H}$ et vers 0 dans $\mathfrak{B}$, alors x=0 ; or, sous ces hypothèses, on a, pour tout $y \in \mathcal{D}$:

$$\langle y,x \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle y,x_n \rangle = \lim_{n \to +\infty} \omega(A.y,x_n) = \omega(A.y,0) = 0$$

et, puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$, on a bien x = 0.

ii) Pour tout $b \in \mathfrak{B}$, considérons la forme linéaire continue sur $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B} : y \longmapsto \omega(b,y)$. L'identification canonique $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ assure l'existence d'un vecteur $\dot{b} \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\omega(b,y) + \omega(\dot{b},A.y) = 0$$

Mais alors $\dot{b} \in \mathcal{D}_{A^\omega}$ et $b = A^\omega.\dot{b}$.

COROLLAIRE. - *Si* A *est* globalement intégrable, *alors* 0 *est une valeur* régulière *de* A.

Preuve. - Ceci résulte de ii), compte tenu de ce que, d'après (2.3., prop.), A^ω est identique à la fermeture $\bar{A}$ de A.

Réciproquement, on a la condition suffisante que voici :

PROPOSITION 2. - *Si* A : $\mathcal{D} \to \mathcal{B}$ *est un opérateur* symplectiquement auto-adjoint *à énergie* continue *et* strictement positive *sur* $\mathcal{B}$, *alors* $\mathcal{B}$ *est hilbertisable par cette énergie et* A *est* globalement intégrable.

Preuve. - La première assertion est évidente. La seconde assertion résulte de ce que A est évidemment antisymétrique pour le produit scalaire défini sur $\mathcal{B}$ par son énergie, et qu'il est surjectif d'après (prop. 1,ii)) ; ces deux raisons font que A est anti-auto-adjoint pour cet espace de Hilbert $\mathcal{B}$ et, par conséquent, le théorème de Stone pour les espaces de Hilbert réel assure alors que A est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'isométries linéaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{B}$.

Retour à l'exemple fondamental. - L'opérateur des ondes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 I & 0 \end{bmatrix} : H^{s+1} \times H^s \to H^s \times H^{s-1}$$

pour une particule libre de masse $m > 0$ vérifie les hypothèses de cette dernière proposition du fait que, pour $x = (f,\dot{f})$, l'énergie H(x) vaut :

$$H(x) = \nabla(A.x,x) = \| f\|^2_{s-1} + m^2\|f\|^2_{s-1} + \|\dot{f}\|^2_{s-1},$$

ce qui donne les inégalités :

$$\inf(1,m^2)(\|f\|^2_s + \|\dot{f}\|^2_{s-1}) \leq H(x) \leq \mathrm{Sup}(1,m^2).(\|f\|^2_s + \|\dot{f}\|^2_{s-1})$$

et on retrouve au passage, en parfaite conformité avec la théorie des semi-groupes d'opérateurs, que tous les nombres strictement positifs sont des valeurs régulières du laplacien.

3. SYSTEMES HAMILTONIENS SUR LES VARIETES DE DIMENSION INFINIE.

3.1. STRUCTURES SYMPLECTIQUES FAIBLES. - Sur une variété banachique réelle $\mathcal{V}$ une structure symplectique faible (resp. forte) consiste en une forme différentielle de degré 2, fermée (i.e. $d\Omega = 0$) et telle que, pour tout $v \in \mathscr{V}$, $\Omega_v : T_v\mathscr{V} \times T_v\mathscr{V} \to \mathbb{R}$ soit faiblement (resp. fortement) non dégénérée. Le premier exemple d'une telle structure est fourni par la 2-forme canonique d'un fibré cotangent $T'\mathscr{W}$; cette 2-forme est obtenue par recollement compte tenu du fait que, pour tout isomorphisme $f : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ d'espaces de Banach, $f \times (f')^{-1}$ est un isomorphisme $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1' \to \mathscr{B}_2 \times \mathscr{B}_2'$ d'espaces de Banach symplectiques. Rappelons aussi que $\Omega = -d\lambda$, λ étant la 1-forme canonique de Liouville i.e. la 1-forme sur $T'\mathscr{W}$ caractérisée par $\omega^*(\lambda) = \omega$ pour toute 1-forme différentielle ω sur $\mathscr{W}$.

A partir de la 2-forme canonique Ω sur $T'\mathscr{W}$ et d'un 2-tenseur symétrique $g : T\mathscr{W} \times T\mathscr{W} \to \mathbb{R}$, on obtient sur $T\mathscr{W}$ une forme symplectique faible (resp. forte) $\tilde{g}^* \Omega$ si g est faiblement (resp. fortement) non dégénéré.

Soit $(\mathscr{V}_o, \mathscr{V}_1)$ un chaînon dans la catégorie des variétés, i.e. la variété $\mathscr{V}_1$ est une partie de la variété $\mathscr{V}_o$ et l'injection canonique $\mathscr{V}_1 \to \mathscr{V}_o$ est une quasi-immersion (cf. [1]). Si $T\mathscr{V}_1$ est une partie dense de $T\mathscr{V}_o$ (on dit alors que $(\mathscr{V}_o, \mathscr{V}_1)$ est un chaînon de densité), alors la restriction à $\mathscr{V}_1$ d'une structure symplectique forte sur $\mathscr{V}_o$ est une structure symplectique faible. En particulier, on obtient sur la restriction de $T'\mathscr{V}_o$ au-dessus de $\mathscr{V}_1$ une structure symplectique faible canonique.

Etant donnée une structure symplectique faible Ω sur une variété $\mathscr{V}$, on convient de dire qu'une fonction $H : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et un champ de vecteurs X sur $\mathscr{V}$, partiellement défini sur une partie dense $\mathscr{D}_X$ de $\mathscr{V}$ sont en *correspondance hamiltonienne* si on a sur $\mathscr{D}_X$:

$$i_X\Omega = dH.$$

Dans une telle correspondance, la donnée de H caractérise X et inversement la donnée de X caractérise H à une constante additive près si $\mathscr{V}$ est connexe ; de façon précise, on a (localement) sur tout ouvert $\mathscr{U}$ étoilé, d'un espace de Banach

$$H(x) = H(a) + \int_0^1 \langle i_X\Omega((1-t)a + tx), x - a\rangle \, dt$$

Mais la différence essentielle avec le cas de la dimension finie, c'est que la donnée de H n'entraîne pas l'existence de X. Lorsque X existe, il convient encore de ne pas généraliser trop vite les résultats connus en la matière en dimension finie : X peut, par exemple, n'être même pas localement intégrable. Signalons toutefois une condition suffisante d'intégrabilité locale de X ; si l'application fibrée :

$$\tilde{\Omega} : T\mathscr{V} \to T'\mathscr{V}$$

est transversale à l'image de dH, alors l'image de X est une sous-variété de $T\mathcal{V}$ ce qui permet de faire de $\mathcal{D}_X$ une variété immergée dans $\dot{\mathcal{V}}$ qui fait de $X : \mathcal{D}_X \to T\mathcal{V}$ un relèvement de classe C^1 ([1], § 8.6) qu'on peut donc intégrer localement.

Le formalisme hamiltonien permet de définir très simplement le "spray" géodésique d'un tenseur symétrique faiblement non dégénéré $g : T\mathcal{V} \times T\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ par la formule :

$$i_X(\hat{g}^*\Omega) = \frac{1}{2}\, d\hat{g}$$

en designant par $\hat{g}$ la forme quadratique définie par g sur $T\mathcal{V}$. Ebin et Marsden ont montré l'existence de ce spray sur la variété tangente à l'espace $\mathcal{D}_\mu$ automorphismes d'une variété compacte M munie d'un élément de volume μ.

Si H et K sont deux fonctions de classe C^1 sur $(\mathcal{V},\Omega)$ en correspondance hamiltonienne avec respectivement deux champs de vecteurs X et Y définis sur la même partie dense $\mathcal{D}$ de $\mathcal{V}$ alors on peut définir sur $\mathcal{D}$ le crochet de Poisson de H et K par :

$$\{H,K\} = \Omega(X,Y)$$

et il est alors aisé de montrer le résultat suivant qui généralise le principe de conservation de l'énergie :

<u>PROPOSITION</u>. - *Le long de toute intégrale* c_t *de* X *on a :*

$$\frac{d}{dt}(K \circ c_t) = \{K,H\} \circ c_t$$

(La démonstration de ([3], p. 82) reste encore valable sous les hypothèses adoptées ici).

3.2. <u>SUR LES VARIETES DE SOBOLEV</u>. - Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne modelée sur un espace de Hilbert (e.g. la variété $H^s(\xi)$ de sections H^s d'une submersion riemannienne ξ à base compacte de dimension $n < 2s$). Supposons de plus que deux points d'une même composante connexe de $\mathcal{M}$ peuvent être toujours jointes par une géodésique minimisante, ce qui est justement le cas de $\mathcal{M} = H^s(\xi)$, d'après [5], alors :

<u>LEMME</u>. - *Soit* $K : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *admettant un point critique* a *et telle que* ∇dK *(le hessien de* K*) soit uniformément strictement positif par rapport à* g *(i.e., il existe une constante* $c > 0$ *telle que, en tout point de* $\mathcal{M}$*, la forme quadratique définie par* ∇dK *soit supérieure à* c.g*). Alors, pour tout point* x *de la*

composante connexe de a, *on a :*

$$\frac{c}{2}\, d^2(a,x) + K(a) \leqslant K(x)$$

d *étant la distance définie canoniquement sur* $\mathcal{M}$ *par la structure riemannienne* g.

Preuve. – Soit γ une géodésique minimisante de a à x telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$. De l'hypothèse faite sur K et de l'identité :

$$\frac{d^2}{dt^2}(K\circ\gamma) = (\nabla dK)_{\gamma_t}(\dot\gamma_t, \dot\gamma_\tau)$$

on déduit, pour tout $t \in [0,1]$:

$$c d^2(a,x)\, t \leqslant \frac{d}{dt}(K\circ\gamma)$$

du fait que a est un point critique de K, d'où :

$$\frac{c}{2}\, d^2(a,x) \leqslant K\circ\gamma \Big|_{t=o}^{t=1}$$

<u>DEFINITION</u>. – *Par chaînon de* Rellich riemannien *nous entendrons un chaînon* $(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}_1)$ *de variétés riemanniennes tel que tout borné de* $\mathcal{M}_1$ *soit relativement compact dans* $\mathcal{M}_o$. *C'est notamment le cas d'un chaînon* $(H^s(\xi), H^{s+1}(\xi))$ *constitué par une submersion riemannienne (pour le détail, voir [5]).*

Notation. – $\xi : P \to S$ étant une submersion riemannienne, pour tout couple (r,s) d'entiers $\geqslant 0$ tels que $r > s$, nous désignerons par $H^r \times H^s(\xi)$ la restriction à $H^r(\xi)$ du fibré tangent $TH^s(\xi)$. De la sorte on définit des chaînons de Rellich de densité :

$$H^{s+1} \times H^s(\xi) \to TH^s(\xi) \to H^s \times H^{s-1}(\xi),$$

ce qui fournit en particulier sur tout $H^{s+1} \times H^s(\xi)$ une structure symplectique faible à partir de la métrique riemannienne canonique de $H^s(\xi)$.

<u>THEOREME</u>. – *Soit* K *(resp.* V*) une fonction de classe* C^2 *(resp.* C^1*) définie sur un espace* $\mathcal{M}_s = H^s \times H^{s-1}(\xi)$. *On suppose que* K+V *est en correspondance hamiltonienne avec un champ de vecteurs* $X : \mathcal{M}_{s+1} \to T\mathcal{M}_s$ *localement intégrable. Si* $V \geqslant 0$, *si* K *admet un point critique* a *et si son hessien est uniformément strictement positif par rapport à la métrique canonique de* $\mathcal{M}_s$, *alors* X *est globalement intégrable sur toute la composante connexe de* a.

Preuve. – Le lemme précédent assure que les trajectoires de X sont bornées dans

$\mathcal{M}_{s+1}$ donc relativement compactes dans $\mathcal{M}_s$, compte tenu aussi du principe de préservation de l'énergie K+V. Mais grâce à un résultat général concernant les pseudo-groupes à un paramètre d'un espace topologique (cf. [1], par exemple), on peut dire alors que les trajectoires de X sont paramétrées de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque. - Ce résultat généralise le fait que l'équation de Klein-Gordon d'une particule en interaction mésonique avec le champ ambiant :

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi - m^2\varphi - k\varphi^3$$

est globalement intégrable dans les espaces H^s pour s assez grand (cf. [3], p. 96).

Pour un traitement en profondeur de l'équation de Klein-Gordon (sans interaction) sur un espace-temps stationnaire, on pourra consulter la thèse de C. MORENO [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BHATIA-HAJEK, *Local semi-dynamical systems* (Springer-Verlag, Lectures Notes in mathematics, 90), 1969.

[2] BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fasc. rés. I et II, Hermann 1967 et 1971.

[3] CHERNOFF-MARSDEN, *Properties of Infinite dimensional hamiltonien systems*, (Springer-Verlag, Lecture Notes in mathematics, 425), 1974.

[4] MORENO, *Sur les noyaux de la théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe* (Thèse d'Etat, Université Claude-Bernard de LYON), 1975.

[5] PENOT, *Topologie faible sur les variétés de Banach, Application aux géodésiques des variétés de Sobolev* (J. Differential Geometry 9 ; 141-168), 1974.

[6] VHO-KHAC-KHOAN, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles*, T. 2, Vuibert 1972.

[7] YOSIDA, *Functional Analysis* (Springer-Verlag), 1966.

[8] WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds* (Advances in Math. 6, 329-346), 1971.

René OUZILOU
Université de St-Etienne
U.E.R. de Mathématiques
23, rue Dr Paul Michelon

42100 SAINT ETIENNE