HERVE MOULIN

Prolongement des jeux à deux joueurs de somme nulle. Une théorie abstraite des duels

Mémoires de la S. M. F., tome 45 (1976)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__45__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 45, 1976, 111 p.
(Thèse Sc. math., Univ. Paris-IX, 1975)

PROLONGEMENTS DES JEUX À DEUX JOUEURS DE SOMME NULLE.

UNE THÉORIE ABSTRAITE DES DUELS.

par Hervé MOULIN

Table des matières. 5

O. Introduction. 6

Notations utilisées. 9

Chapitre I. PROLONGEMENTS.

I.1. Définition d'un prolongement. 11
I.2. Forme transposée d'un prolongement. 13
I.3. Exemples de prolongements. 15
a) Le prolongement mixte. 15
b) Un autre exemple. 16

Chapitre II. PROLONGEMENTS SANS ECHANGE D'INFORMATION.

II.1. Définition et caractérisation. 18
II.2. Le rôle du prolongement mixte. 20
II.3. Une majoration du saut de dualité. 24
II.4. L'exemple des jeux iterés sans échange d'information. 25
a) Définition exemples. 25
b) Jouabilité des jeux iterés : cas où X et Y sont finis. 28
c) Jouabilité des jeux iterés : cas général. 33
d) Stratégies "aléatoires et correlées" d'Aumann. 36

Chapitre III. PROLONGEMENTS PAR ECHANGE D'INFORMATION.

III.1. Définition. Exemples. 38
III.2. Caractérisation des prolongements par échange d'information. 40
III.3. Les prolongements par échange d'information jouables. 42
III.4. Un exemple : l'échange explicite d'information. 48
III.5. Autres exemples de prolongements par échange d'information. 52

Chapitre IV. PROLONGEMENTS COMPOSES. JEUX ITERES.

IV.1. Définition des prolongements composés. 54
IV.2. Caractérisation des prolongements avec échange partiel d'information. 56
IV.3. Les jeux iterés avec échange partiel d'information. 60
a) Définition, exemples. 60
b) Une majoration du saut de dualité. 65
c) Jeux iterés jouables et information parfaite. 71

Chapitre V. PROLONGEMENTS JOUABLES ET FONCTIONS VALEURS.

V.1. Fonctions valeurs et couples (sup inf, inf sup). 74
V.2. Caractérisations des fonctions valeurs. 77
a) Résultats globaux. 77
b) Un théorème d'interpolation. 85
V.3. Fonctions valeurs et prolongements avec échange partiel d'information. 89
V.4. Caractérisation des prolongements jouables. 96

Chapitre VI. APPENDICE : LE JEU ITERE ERGODIQUE.

VI.1. Définition. 99
VI.2. Résolution du jeu iteré ergodique. 101
VI.3. Compléments dans le cas fini. Exemples. 107

Bibliographie. 111

0. Introduction.

a) La théorie des jeux décrit formellement les situations que plusieurs individus (les joueurs) peuvent influencer et qu'ils apprécient différamment.
Le cas le plus simple qu'envisage la théorie (cf. [Von Neumann, Morgenstern]) est celui des jeux à deux personnes de somme nulle : les deux joueurs ont une appréciation exactement opposée de la situation. Appelons Xavier et Yves ces deux joueurs et désignons par X l'ensemble des stratégies pures de Xavier et par Y l'ensemble des stratégies pures de Yves. C'est à dire que Xavier controle librement la stratégie $x \in X$ et que Yves controle librement $y \in Y$. Lorsque les deux joueurs ont choisi leur stratégie pure, soient x et y, la situation qui en résulte est décrite par le couple (x,y). L'appréciation que Xavier porte sur cette situation (son "utilité") est décrite par une fonction g, dite fonction de gain :

(1) $$g : X \times Y \to R$$

Plus le gain $g(x,y)$ est grand et plus Xavier est satisfait de cette situation.
Dire que le jeu est "de somme nulle", revient à dire que Yves sera d'autant plus satisfait de la situation que le gain $g(x,y)$ est plus petit. Autrement dit l'"utilité" de Yves est décrite par la fonction $-g$.

b) A partir de ce schéma, la théorie tente de définir un "bon" comportement de Xavier et un "bon" comportement de Yves, c'est à dire de privilégier certaines situations au vu de la fonction de gain g. Précisons cela : si Xavier choisit la stratégie pure x, il est certain de s'assurer, quoique joue Yves, un gain au moins égal à :

(2) $$\inf_y g(x,y).$$

Donc un choix approprié de x lui permettra de s'assurer un gain supérieur ou égal à

(3) $$\sup_x \inf_y g(x,y)$$

(en supposant que ce "sup" est atteint). De la même façon on constate que Yves, en jouant "bien", peut s'assurer un gain inférieur ou égal à :

(4) $$\inf_y \sup_x g(x,y)$$

(n'oublions pas que Yves cherche à minimiser le gain). Or, quelle que soit la fonction de gain g, le gain minimal de Xavier ((3)) et le gain maximal de Yves ((4)) sont liés par :

(5) $\sup_x \inf_y g(x,y) \leq \inf_y \sup_x g(x,y)$.

Donc, nous avons deux cas à envisager, selon que l'inégalité (5) est, ou non, une égalité :

<u>1er cas</u> : $\sup_x \inf_y g(x,y) = \inf_y \sup_x g(x,y)$.

Dans ce cas considérons une stratégie $\bar{x}$ de Xavier qui lui permet de s'assurer $\sup_x \inf_y g(x,y)$ et une stratégie $\bar{y}$ de Yves qui lui permet de s'assurer $\inf_y \sup_x g(x,y)$ (en supposant que le "sup" est atteint dans (3), comme l'"inf" dans (4)).

Alors appelons "valeur" du jeu et notons v cette quantité commune ($v = \sup_x \inf_y g(x,y) = \inf_y \sup_x g(x,y)$). On a :

(6) $\forall x \in X \quad g(x,\bar{y}) \leq \sup_x g(x,\bar{y}) = v = \inf_y g(\bar{x},y) \leq g(\bar{x},y) \quad \forall y \in Y$.

Par conséquent $(\bar{x},\bar{y})$ est un "point selle" de la fonction v c'est à dire qu'il vérifie :

(7) $\forall x \in X \quad g(x,\bar{y}) \leq g(\bar{x},\bar{y}) = v \leq g(\bar{x},y) \quad \forall y \in Y$.

Et la situation $(\bar{x},\bar{y})$ constitue bien l'équilibre cherché puisque si, à partir de cet équilibre, Xavier (ou Yves) change de stratégie, cela ne peut que lui nuire.

<u>2eme cas</u> : $\sup_x \inf_y g(x,y) < \inf_y \sup_x g(x,y)$.

Dans ce cas il n'existe pas de point selle ((7)) et le modèle ne permet pas de sélectionner un équilibre en un sens satisfaisant, ni un comportement "optimal" de Xavier ou Yves. Il permet simplement d'indiquer que la valeur du jeu (si nous arrivons à lui donner un sens) sera nécessairement un nombre de "l'intervalle de dualité"

(8) $[\sup_x \inf_y g(x,y), \inf_y \sup_x g(x,y)]$.

c) L'intérêt de la théorie des jeux est maintenant de proposer des moyens d'éliminer l'instabilité fondamentale des jeux dont l'intervalle de dualité n'est pas réduit à un point (2ème cas). Et ce but ne peut être atteint qu'en enrichissant la structure mathématique du modèle. La solution traditionnelle (cf. [Von Neumann Morgenstern]) est la suivante : Supposons que Xavier et Yves puissent choisir de jouer, non seulement une de leurs stratégies pures, mais aussi toute répartition de probabilité sur l'ensemble de leurs stratégies pures et ceci de façon mutuellement indépendante. Alors si Xavier "joue" la répartition de probabilité P et si Yves "joue" la répartition de probabilité Q, le gain qui en résulte est le suivant :

(9) $$\int_{X\times Y} g(x,y)dP(x)dQ(y).$$

Le résultat fondamental (connu sous le nom de Théorème du minimax de Von Neumann) est que le jeu ainsi redéfini possède une valeur, appelé la valeur mixte du jeu, qui appartient à l'intervalle de dualité (lorsque X ou Y est fini).

d) Au cours de la redéfinition du jeu que nous venons d'indiquer l'opération mathématique utilisée a été la suivante :

i) On a prolongé l'ensemble des stratégies pures de Xavier (resp. Yves) à son "enveloppe convexe" : l'ensemble des répartitions de probabilité sur X (resp. Y).

ii) On a prolongé la fonction de gain g, initialement définie sur X x Y en une fonction de gain définie sur le produit des ensembles de stratégies prolongées (les répartitions de probabilité sur X et Y). Ce prolongement de la fonction g a consisté essentiellement en une linéarisation ((9)).

e) Dans cette étude nous allons, de façon analogue, définir abstraitement une large classe d'opérations de prolongements de ce type (le prolongement mixte sera un cas particulier de prolongement). Chaque prolongement sera donc une redéfinition des règles du jeu, et décrira donc une nouvelle "façon de jouer le jeu". Les prolongements qui nous intéresseront particulièrement seront les prolongements "jouables" c'est à dire tels que pour toute fonction de gain initiale, la fonction de gain prolongée possède une valeur (chapitre I). Ensuite nous étudierons plus spécialement certains types particuliers de prolongements :

α) Nous définirons d'abord les prolongements sans échange d'information entre les 2 joueurs (chapitre II) dont le prototype est le prolongement mixte. Mais nous définirons beaucoup d'autres prolongements qui correspondent à des façons différentes de jouer le jeu, et qui, toutes, donnent à la fonction de gain prolongée la valeur mixte.

β) Nous définirons ensuite les prolongements par échange d'information (chapitre III) dont un exemple typique est le suivant : Xavier choisit le premier sa stratégie pure et informe Yves de son choix, et Yves choisit alors sa stratégie pure. Nous verrons qu'il y a beaucoup d'autres prolongements par échange d'information jouables et qui donnent à la fonction de gain prolongée des valeurs différentes.

γ) Dans le chapitre IV nous définissons les prolongements avec échange partiel d'information, c'est à dire ceux qui sont un mélange (un composé) de prolongements des deux types précédents.

δ) Nous en venons alors à l'étude de tous les prolongements jouables (chapitre V) : à toute fonction de gain initiale g de tels prolongements associent la valeur v(g) de la fonction prolongée. Nous caractériserons toutes les "fonctions valeur" $g \to v(g)$ qu'on peut ainsi obtenir. Nous montrerons ensuite que toutes les fonctions valeur peuvent être obtenues à l'aide d'un prolongement avec échange partiel d'information (en ce sens les prolongements avec échange partiel d'information sont donc exhaustifs).

ε) Enfin dans l'Appendice nous étudierons un prolongement très particulier : le jeu itéré ergodique qui conduit à la résolution d'un intéressant problème de programmation dynamique.

Notations utilisées.

a) Si Z désigne un ensemble, $A(Z)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions bornées sur Z. C'est un espace de Banach pour la norme :

(0.1) $\quad h \in A(Z) \qquad \|h\| = \sup_{z \in Z} |h(z)|$

Il est muni de l'ordre partiel :

(0.2) $\quad h_1 \geq h_2 \ : \ \forall z \in Z \quad h_1(z) \geq h_2(z)$

et on désigne par $\theta \in A(Z)$ la fonction constante et égale à 1.

On désigne par $A'(Z)$ le dual topologique de $A(Z)$ et par $A_1'(Z)$ son simplexe, c'est à dire l'ensemble convexe (et faiblement compact) des formes linéaires μ sur $A(Z)$ qui sont "positives et de masse 1" :

(0.3) $\quad \forall h \in A(Z) \ : \ h \geq 0 \Rightarrow [\mu,h] \geq 0$

(0.4) $\quad [\mu,\theta] = 1.$

Nous notons δ l'injection cannonique :

(0.5) $\quad \delta : Z \to A_1'(Z) \quad \forall z \in Z \quad \forall h \in A(Z) \quad [\delta_z,h] = h(z).$

b) Si X et Y désignent 2 ensembles alors $A(X)$ et $A(Y)$ sont naturellement inclus dans $A(X \times Y)$ par i et j :

(0.6) $\quad g \in A(X) : i(g)(x,y) = g(x) \quad i(g) \in A(X \times Y)$

Les transposés i' et j' de ces injections envoient $A'_1(X \times Y)$ dans $A'_1(X)$ et $A'_1(Y)$ respectivement. On les note p_X et p_Y respectivement.
Si $\otimes$ désigne le produit tensoriel, défini si μ ou ν est une mesure discrète.

(0.7) $\quad \mu \in A'_1(X); \ \nu \in A'_1(Y) \qquad \mu \otimes \nu \in A'_1(X \times Y)$

alors on a :

(0.8) $\quad p_X(\mu \otimes \nu) = \mu; \quad p_Y(\mu \otimes \nu) = \nu.$

Ce travail n'a pu être mené à bien que grâce aux multiples conseils et aux encouragements permanents de Monsieur J.P. AUBIN. Qu'il veuille bien accepter, en guise de modeste retour, l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens également à remercier Monsieur J.M. LASRY pour son importante collaboration, et Messieurs I. EKELAND, F. LANERY et L. TARTAR pour leurs conseils amicaux.

I. PROLONGEMENTS.

I.1. DEFINITION D'UN PROLONGEMENT.

On se donne 2 ensembles X et Y qui sont appelés respectivement les ensembles de stratégies pures de Xavier et de Yves.

Définition (I.1).

Un prolongement p des jeux sur X x Y est la donnée des cinq objets suivants :

(I.1) $p = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, i, j, \pi)$

où i et j sont 2 injections

(I.2) $i : X \to \mathcal{X} \quad j : Y \to \mathcal{Y}$

et où π est un opérateur linéaire :

(I.3) $\pi : A(X \times Y) \to A(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$

tel que :

(I.4) π est positif et $\pi(\theta) = \theta$

et tel que :

(I.5)

i) $\forall g \in A(X \times Y)\ \forall x \in X\ \inf\limits_{y\in Y} g(x,y) \leq \inf\limits_{\eta\in \mathcal{Y}} \pi g(i(x),\eta)$

ii) $\forall g \in A(X \times Y)\ \forall y \in Y\ \sup\limits_{x\in X} g(x,y) \geq \sup\limits_{\xi\in \mathcal{X}} \pi g(\xi,j(y))$.

On appelle ensemble des stratégies prolongées les ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$: les injections i et j identifient X et Y respectivement à un sous ensemble de $\mathcal{X}$ et à un sous ensemble de $\mathcal{Y}$ (I.2). Le choix d'une fonction $g \in A(X \times Y)$ détermine un "jeu initial" (Xavier maximise g et Yves minimise g) et le "jeu prolongé" de ce jeu initial est alors (sous forme normale) décrit par la fonction de gain :

(I.6) $\pi g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

Ainsi π est appelé l'opérateur de prolongement.

L'hypothèse (I.4) exprime que cet opérateur est croissant (pour les relations d'ordre de $A(X \times Y)$ et de $A(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$) et laisse invariant les fonctions constantes. L'hypothèse (I.5.i) exprime qu'en jouant une stratégie "pure" i(x) dans le jeu prolongé, Xavier s'assure au moins le même gain qu'en jouant la même stratégie dans le jeu initial. Si cette hypothèse n'était pas satisfaite, Xavier aurait une raison valable de refuser de jouer le jeu prolongé. L'hypothèse (I.5.ii) exprime de même qu'une stratégie "pure" $j(y)$ de Yves lui permet de s'assurer dans le jeu prolongé un gain au moins égal à celui qu'il peut s'assurer dans le jeu initial. De ces deux hypothèses on déduit la :

<u>Proposition</u> (I.1).

<u>Soit</u> $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ <u>un prolongement des jeux sur</u> $X \times Y$. <u>Alors on a</u> :

(I.7) $\quad \forall g \in \mathcal{A}(X \times Y)\ \forall (x,y) \in X \times Y \quad \pi g(i(x),j(y)) = g(x,y)$

<u>et</u>

(I.8) $$\forall g \in \mathcal{A}(X \times Y)\ \sup_x \inf_y g(x,y) \leq \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) \leq \inf_\eta \sup_\xi \pi g(\xi,\eta) \leq \inf_y \sup_x g(x,y)$$

Nous démontrons cette proposition en même temps que la proposition (I.2). Elle montre d'une part (relation (I.7)) que πg est égale à g si on la restreint à $i(X) \times j(X)$ autrement dit que πg mérite bien le nom de fonction "prolongée" de la fonction de gain initiale g. D'autre part la relation (I.8) montre que l'intervalle de dualité $[\sup_x \inf_y g, \inf_y \sup_x g]$ ne peut que réduire au cours du prolongement. Autrement dit si la fonction de gain initiale g possède une "valeur", la fonction prolongée πg possède la même valeur.

Les prolongements les plus intéressants sont les prolongements tels que πg possède toujours une valeur (même si g n'en possède pas) qui appartient donc nécessairement à l'intervalle de dualité $[\sup_x \inf_y g, \inf_y \sup_x g]$.

<u>Définition</u> (I.2).

<u>On dit qu'un prolongement</u> $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ <u>des jeux sur</u> $X \times Y$ <u>est jouable si on a</u> :

(I.9) $$\forall g \in \mathcal{A}(X \times Y)\ \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) = \inf_\eta \sup_\xi \pi g(\xi,\eta)$$

Un prolongement jouable des jeux sur $X \times Y$ décrit donc une "bonne" façon de "jouer" les jeux sur $X \times Y$ puisqu'il décrit comment prolonger les espaces de stratégies de Xavier et Yves, et comment prolonger la fonction de gain initiale, pour obtenir un jeu prolongé possédant toujours une valeur, c'est à dire un jeu prolongé "equilibré". L'étude des prolongements jouables (au chapitre V) caractérisera toutes les "bonnes" façons de jouer le jeu initial et nous permettra de justifier a posteriori l'hypothèse de linéarité de l'opérateur π (seule hypothèse dans la définition (I.1) qui n'est "naturelle" que du point de vue strictement mathématique).

I.2. FORME TRANSPOSEE D'UN PROLONGEMENT.

Nous allons donner une caractérisation plus maniable des prolongements :

<u>Proposition</u> (I.2).

<u>Soient</u> X et Y <u>fixés ainsi que les espaces de stratégies prolongées</u> $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ <u>et les injections</u> (i,j) <u>vérifiant</u> (I.2). <u>Alors la relation</u> :

(I.10) $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ \forall(\xi,\eta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \quad \pi g(\xi,\eta) = [\pi^*(\xi,\eta),g]$

<u>définit une bijection entre l'ensemble des opérateurs linéaires</u> π <u>vérifiant</u> (I.3) (I.4) (I.5) <u>et l'ensemble des applications</u> π^* :

(I.11) $\quad \pi^* : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to A_1'(X \times Y)$

<u>vérifiant</u>

(I.12)
i) $\forall x \in X\ \forall \eta \in \mathcal{Y}\ \ \pi^*(i(x),\eta) \in \delta_x \otimes A_1'(Y)$

ii) $\forall y \in Y\ \forall \xi \in \mathcal{X}\ \ \pi^*(\xi,j(y)) \in A_1'(X) \otimes \delta_y$.

<u>Démonstration des propositions</u> (I.1) <u>et</u> (I.2).

Soit $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ un prolongement. Remarquons d'abord que π est un opérateur continu. En effet l'inégalité suivante, toujours vraie :

(I.13) $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ -\|g\|\theta \leq g \leq \|g\|\theta$

entraine d'après (I.4) :

(I.14) $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ -\|g\|\theta \leq \pi g \leq \|g\|\theta$.

Donc :

(I.15) $\quad \forall g \in A(X \times Y) \quad \|\pi g\| \leq \|g\|$ et $\|\pi\theta\| = \|\theta\|$

c'est à dire que π est de norme 1. Par conséquent si (ξ,η) est fixé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, l'application :

(I.16) $\quad \pi^*(\xi,\eta) : A(X \times Y) \to \mathbb{R} : \pi^*(\xi,\eta)[g] = \pi g(\xi,\eta)$

est un élément de $A'(X \times Y)$. De plus $\pi^*(\xi,\eta)$ est dans $A'_1(X \times Y)$ à cause de (I.4). Vérifions maintenant que π^* a la propriété (I.12.i). D'après (I.5.i) on a :

(I.17) $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ \forall x \in X \quad \inf[\delta_x \otimes \delta_y, g] \leq \inf_\eta [\pi^*(i(x),\eta),g].$

Supposons qu'il existe un η dans $\mathcal{Y}$ tel que

(I.18) $\quad \pi^*(i(x),\eta) \notin \delta_x \otimes A'_1(Y).$

D'après le théorème de Hahn Banach ($\delta_x \otimes A'_1(Y)$ est un convexe faiblement compact de $A'(X \times Y)$) nous pouvons séparer $\pi^*(i(x),\eta)$ de $\delta_x \otimes A'_1(Y)$, autrement dit il existe $g \in A(X \times Y)$ tel que :

(I.19) $\quad [\pi^*(i(x),\eta),g] < \inf_{\nu \in A'_1(Y)} [\delta_x \otimes \nu, g].$

Or il est immédiat de vérifier que :

(I.20) $\quad \inf_{\nu \in A'_1(Y)} [\delta_x \otimes \nu, g] = \inf_{y \in Y} [\delta_x \otimes \delta_y, g]$

Les relations (I.19) et (I.20) contredisent l'inégalité (I.17) donc π^* vérifie (I.12.i). On montre de même qu'il vérifie (I.12.ii).

Ces 2 propriétés entrainent :

(I.21) $\quad \forall (x,y) \in X \times Y \quad \pi^*(i(x),j(y)) = \delta_x \otimes \delta_y.$

qui n'est autre que la relation (I.7). Quant à la relation (I.8) elle est une conséquence directe des relations (I.5.i) et (I.5.ii). Donc la proposition (I.1) est démontrée. Pour démontrer la proposition (I.2) nous devons encore montrer que si π^* est une application de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dans $A'_1(X \times Y)$ vérifiant (I.12) alors la relation (I.10) définit un opérateur de prolongement des jeux sur $X \times Y$. Soit donc $\pi : A(X \times Y) \to A(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ défini par la relation (I.10). Alors la linéarité de l'opérateur π est évidente ainsi que sa positivité. L'égalité : $\pi(\theta) = \theta$ est vraie puisque $\pi^*(\xi,\eta)$ est un élément de $A'_1(X \times Y)$.
Enfin on a, d'après (I.12)

(I.22) $\quad \inf_\eta \pi g(i(x),\eta) = \inf_\eta [\pi^*(i(x),\eta), g] \geq \inf_{\nu \in A'_1(Y)} [\delta_x \otimes \nu, g]$

Donc, d'après (I.20) :

(I.23) $\quad \inf_\eta \pi g(i(x),\eta) \geq \inf_y [\delta_x \otimes \delta_y, g] = \inf_y g(x,y).$

On démontre de même que π vérifie (I.5.ii).

■

Remarque (I.1).

On aurait pu définir π^* à l'aide de la transposition : le transposé π' de l'opérateur π

(I.24) $\quad \pi' \; A'(X \times \mathcal{Y}) \to A'(X \times Y)$

est visiblement positif puisque π l'est. Puisque π laisse invariant les fonctions constantes on a clairement :

(I.25) $\quad \pi'[A'_1(X \times \mathcal{Y})] \subset A'_1(X \times Y)$.

Alors π^* s'identifie à la restriction de π' à $\delta(X \times \mathcal{Y})$ et π' à l'application linéarisée de π^* (cf. [Aubin, Moulin]).

Définition (I.3).

Deux prolongements des jeux sur $X \times Y$, $p^1 = (\mathcal{X}^1, \mathcal{Y}^1, i^1, j^1, \pi^1)$ et $p^2 = (\mathcal{X}^2, \mathcal{Y}^2, i^2, j^2, \pi^2)$ sont isomorphes s'il existe 2 bijections $b : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{X}^2$ et $c : \mathcal{Y}^1 \to \mathcal{Y}^2$ telles que :

(I.26) $\quad b \circ i^1 = i^2; \quad c \circ j^1 = j^2$

(I.27) $\quad \forall (\xi^1, \eta^1) \in \mathcal{X}^1 \times \mathcal{Y}^1 \quad (\pi^1)^*(\xi^1, \eta^1) = (\pi^2)^*(b(\xi^1), c(\eta^1))$.

Il est clair que si p^1 et p^2 sont isomorphes on a pour toute stratégie $\xi^1 \in \mathcal{X}^1$:

(I.28) $\quad \inf_{\eta^1} \pi^1 g(\xi^1, \eta^1) = \inf_{\eta^2} \pi^2 g(b(\xi^1), \eta^2)$

et de même pour toute stratégie $\eta^1 \in \mathcal{Y}^1$

(I.29) $\quad \sup_{\xi^1} \pi^1 g(\xi^1, \eta^1) = \sup_{\xi^2} \pi^2 g(\xi^2, c(\eta^1))$.

Donc si les prolongements p_1 et p_2 sont isomorphes, l'intervalle de dualité $[\sup_\xi \inf_\eta \pi^i g(\xi,\eta), \inf_\eta \sup_\xi \pi^i g(\xi,\eta)]$ ne dépend pas de i (i = 1,2).

I.3. EXEMPLES DE PROLONGEMENTS.

a) Le prolongement mixte. Supposons que X ou Y est fini (dans le cas général cf [Tijs]).

L'exemple fondamental de prolongement des jeux sur X x Y est le prolongement mixte p_m :

(I.30) $\quad p_m = (A_1'(X), A_1'(Y), \delta_X, \delta_Y, \pi_m)$

où δ_X et δ_Y sont les injections cannoniques définies en (0.5) qui identifient respectivement X et Y aux mesures de Dirac de $A_1'(X)$ et $A_1'(Y)$, et où π_m est l'opérateur suivant (qui a un sens puisque X ou Y est fini) :

(I.31) $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ \forall(\mu,\nu) \in A_1'(X) \times A_1'(Y) : \pi_m g(\mu,\nu) = [\mu \otimes \nu, g].$

Autrement dit la "forme transposée" π^* du prolongement mixte est l'application

(I.32) $\quad \mu \in A_1'(X),\ \nu \in A_1'(Y) : \pi_m^*(\mu,\nu) = \mu \otimes \nu \in A_1'(X \times Y).$

Il est clair que pour tout g, la fonction $\pi_m g$ est affine par rapport à μ et ν et continue si on munit $A_1'(X)$ et $A_1'(Y)$ de leurs topologies faibles. Et pour ces topologies $A_1'(X)$ et $A_1'(Y)$ sont convexes compacts. Donc la fonction $\pi_m g$ possède un point selle (cf. [Fan]) donc une valeur ce qui prouve que le prolongement mixte est jouable. Nous noterons $v_m(g)$ la "valeur mixte" de g :

(I.33) $\quad \forall g \in A(X \times Y) \quad v_m(g) = \max_\mu \min_\nu \pi_m g(\mu,\nu) = \min_\nu \max_\mu \pi_m g(\mu,\nu)$

b) <u>Un autre exemple</u>.

Supposons que X et Y soient des ensembles finis à 2 éléments. Nous allons donner un exemple de prolongement où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ont 4 éléments. Nous remarquons d'abord qu'<u>à isomorphisme près</u> nous pourrons toujours nous ramener au cas à : $Y = X = \{1,2\} \subset \mathcal{Y} = \mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$. Nous allons représenter un tel prolongement par une matrice (4.4). En effet une fonction $g \in A(X \times Y)$ peut être représentée (suivant la représentation traditionnelle en théorie des jeux) par une matrice (2.2) dont les lignes représentent les éléments de X et les colonnes ceux de Y. Soit donc

(I.34) $\quad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Alors πg sera représenté de la même façon par une matrice (4.4) dont les éléments seront des combinaisons convexes de a, b, c, d (puisque $\pi^*(\xi,\eta) \in A_1'(X \times Y)$. Comme d'autre part X est identifié à un sous ensemble de $\mathcal{X}$ par i et Y à un sous ensemble de $\mathcal{Y}$ par j, les 2 premières lignes de la matrice représentant πg "seront" les stratégies pures de Xavier et les 2 premières colonnes celles de Yves. Autrement dit en haut et à gauche de la matrice πg on retrouve la matrice g. Considérons l'exemple particulier où l'opérateur π est défini par la relation :

$$(\text{I}.35) \qquad \pi g = \left.\underbrace{\left[\begin{array}{cccc} a & b & a & b \\ c & d & d & c \\ a & d & a & (\frac{a+b+c+d}{4}) \\ c & b & (\frac{a+b+c+d}{4}) & c \end{array}\right]}_{y}\right\} X$$

La condition (I.5.i) est vérifiée car dans la première ligne de πg tous les termes sont des combinaisons convexes de a et b et de même dans la seconde. De même la condition (I.5.ii) est vérifiée car dans la première colonne de πg tous les termes sont combinaison convexes de a et c et de même dans la seconde. Donc (I.35) représente bien un prolongement. Sous cette forme abstraite, on ne "voit" pas à quelle façon de jouer il correspond. Il s'agit en fait d'un prolongement ergodique (chapitre VI) et nous décrirons en détail comment on le joue dans le chapitre VI.

Mais ce qu'on peut remarquer directement sur la matrice πg c'est que cette matrice a toujours un point selle quelsque soient a, b, c, d. (Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier). Autrement dit le prolongement décrit en (I.35) est jouable.

Dans les chapitres II et III, nous allons successivement étudier 2 familles de prolongements qui constitueront autant d'exemples de prolongements.

II. PROLONGEMENTS SANS ECHANGE D'INFORMATION.

II.1. DEFINITION ET CARACTERISATION.

Dans cette partie nous identifierons $A(X)$ et $A(Y)$ respectivement avec les sous ensembles de $A(X \times Y)$ des fonctions qui ne dépendent pas de y et des fonctions qui ne dépendent pas de x.

Les projections $p_X : A_1'(X \times Y) \to A_1'(X)$ et $p_Y : A_1'(X \times Y) \to A_1'(Y)$ définies en (0) sont donc caractérisées par :

(II.1) $\forall m \in A_1'(X \times Y)\ \forall g \in A(X)\ [p_X(m),g] = [m,g]$

(II.2) $\forall m \in A_1'(X \times Y)\ \forall g \in A(Y)\ [p_Y(m),g] = [m,g]$

Définition (II.1).

On dit que le prolongement $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ est sans échange d'information s'il vérifie la propriété suivante :

(II.3) $\pi[A(X)] \subset A(\mathcal{X})$ et $\pi[A(Y)] \subset A(\mathcal{Y})$.

Cette propriété s'interprète de la façon suivante : si la fonction de gain initiale g ne dépend pas de y ($g \in A(X)$) cela signifie que dans ce jeu Yves est une "potiche". Si dans le jeu prolongé πg il n'est plus une potiche cela signifie qu'il a réussi à avoir une influence sur le comportement de son adversaire. Comme cette influence ne lui vient pas d'un rôle "objectif" dans la fonction de gain initiale g il est naturel de dire qu'elle provient d'un échange d'information (ici de Yves vers Xavier). Nous verrons dans les exemples (cf. (II.§4) et surtout le théorème de décomposition (IV.§2)) d'autres justifications de cette terminologie. On peut déjà vérifier que le prolongement mixte est sans échange d'information. Le théorème (II.1) montrera qu'il joue un rôle crucial parmi les prolongements sans échange d'information. Notons enfin que (II.3) entraine :

(II.4) $\pi(A(X) + A(Y)) \subset A(\mathcal{X}) + A(\mathcal{Y})$.

Autrement dit si la fonction de gain initiale g est "décentralisée" par rapport aux 2 joueurs :

(II.5) $g(x,y) = h(x) + \ell(y)$

il en est de même de la fonction de gain prolongée. Les prolongements sans échange d'information "respectent donc la décentralisation".
Nous allons maintenant les caractériser à l'aide de la forme transposée π^*.

Proposition (II.1).

Un prolongement $p = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, i, j, \pi)$ est sans échange d'information si et seulement si sa forme transposée π^* vérifie :

$$\text{(II.6)} \quad \begin{aligned} &\text{i)} \quad \forall \xi \in \mathcal{X} \quad p_X[\pi^*(\xi,\eta)] \text{ ne dépend pas de } \eta \\ &\text{ii)} \quad \forall \eta \in \mathcal{Y} \quad p_Y[\pi^*(\xi,\eta)] \text{ ne dépend pas de } \xi \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit p un prolongement sans échange d'information et soit $g \in \mathcal{A}(X)$. Alors on a, d'après (II.1) :

$$\text{(II.7)} \qquad \pi g(\xi,\eta) = [\pi^*(\xi,\eta),g] = [p_X(\pi^*(\xi,\eta)),g]$$

et d'après l'hypothèse (II.3), $\pi g(\xi,\eta)$ ne dépend pas de η. Donc pour tous g, ξ, η et η' on a :

$$\text{(II.8)} \qquad [p_X(\pi^*(\xi,\eta)),g] = [p_X(\pi^*(\xi,\eta')),g]$$

ce qui est exactement la propriété (II.6.i). On montre de même la propriété (II.6.ii). La réciproque est évidente à l'aide de la même relation (II.7). ∎

Notation.

Si p est un prolongement sans échange d'information on pourra donc poser :

$$\text{(II.9)} \qquad \xi \in \mathcal{X} \qquad \pi_X^*(\xi) = p_X[\pi^*(\xi,\eta)] \in \mathcal{A}_1'(X)$$

$$\text{(II.10)} \qquad \eta \in \mathcal{Y} \qquad \pi_Y^*(\eta) = p_Y[\pi^*(\xi,\eta)] \in \mathcal{A}_1'(Y)$$

L'exemple type de prolongements sans échange d'information est le prolongement mixte (cf. I.§3.a). Les applications π_X^* et π_y^* associés sont alors l'identité de $\mathcal{A}_1'(X)$ et $\mathcal{A}_1'(Y)$ respectivement, puisque :

$$\text{(II.11)} \qquad (\mu,\nu) \in \mathcal{A}_1'(X) \times \mathcal{A}_1'(Y) \quad p_X(\mu \otimes \nu) = \mu; \quad p_Y(\mu \otimes \nu) = \nu.$$

II.2. LE RÔLE DU PROLONGEMENT MIXTE.

Dans cette section nous supposons que X ou Y est fini.
Le théorème (II.1) établit que la valeur mixte du jeu (I.33) appartient à l'intervalle de dualité de tous les prolongements sans échange d'information.

<u>Théorème</u> (II.1)

<u>Soit un prolongement</u> $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ <u>sans échange d'information</u>. <u>Alors si</u> $v_m(g)$ <u>désigne la valeur mixte du jeu</u> $g \in A(X \times Y)$ <u>on a</u> :

(II.12) $\forall g \in A(X \times Y)$

$$\sup_x \inf_y g(x,y) \leq \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) \leq v_m(g) \leq \inf_\eta \sup_\xi \pi g(\xi,\eta) \leq$$
$$\leq \inf_y \sup_x g(x,y).$$

<u>Démonstration</u>.

D'après les inégalités (I.8) que vérifient tous les prolongements il nous suffit de démontrer

(II.13) $\forall g \in A(X \times Y) \quad \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) \leq v_m(g)$

et l'autre inégalité s'obtient de façon analogue. Fixons $g \in A(X \times Y)$ et $\xi \in \mathcal{X}$. Alors si $y \in Y$ on a (proposition (I.2)) :

(II.14) $\pi^*(\xi,j(y)) \in A_1'(X) \otimes \delta_y$

Et puisque :

(II.15) $\pi_X^*(\xi) = p_X(\pi^*(\xi,j(y)))$

est indépendant de y, il vient finalement :

(II.16) $\pi^*(\xi,j(y)) = \pi_X^*(\xi) \otimes \delta_y$

Donc

(II.17) $\inf_{\eta\in\mathcal{Y}} \pi g(\xi,\eta) \leq \inf_{y\in Y} [\pi^*(\xi,j(y)),g] = \inf_{y\in Y} [\pi_X^*(\xi) \otimes \delta_y,g].$

Or par définition de $v_m(g)$, si μ est un élément de $A_1'(X)$:

(II.18) $\inf_{y\in Y} [\mu \otimes \delta_y,g] = \inf_{\nu\in A_1'(Y)} [\mu \otimes \nu,g] \leq v_m(g).$

Finalement (II.17) et (II.18) entrainent

(II.19) $\inf_{\eta\in\mathcal{Y}} \pi g(\xi,\eta) \leq v_m(g).$

Comme ξ et g étaient quelconque, l'inégalité (II.13) est démontrée. ∎

D'après ce théorème, les seuls prolongements sans échange d'information qui sont <u>jouables</u> (définition (I.2)) donnent à toute fonction de gain initiale g la valeur mixte comme valeur du jeu prolongé πg. Si on ne s'intéresse qu'au choix de la valeur que réalise un prolongement jouable, on conclut que tous les prolongements jouables sans échange d'information ne se distinguent pas du prolongement mixte. Nous allons étudier, à titre d'exemple, une classe plus restrictive de prolongements sans échange d'information, les prolongements quasi-mixtes :

<u>Définition</u> (II.2).

<u>Un prolongement</u> $p = (X, \mathcal{Y}, i, j, \pi)$ <u>est dit quasi-mixte s'il existe</u> 2 <u>applications</u> π_X^* <u>et</u> π_Y^* :

(II.20) $\pi_X^* : X \to A_1'(X)$ <u>et</u> $\pi_Y^* : \mathcal{Y} \to A_1'(Y)$

<u>telles que</u>

(II.21) $\forall(\xi,\eta) \in X \times \mathcal{Y} : \pi^*(\xi,\eta) = \pi_X^*(\xi) \otimes \pi_Y^*(\eta)$.

Il est clair qu'un prolongement quasimixte est sans échange d'information et, d'après la définition du produit tensoriel de $\pi_X^*(\xi) \in A_1'(X)$ par $\pi_Y^*(\eta) \in A_1'(Y)$, qu'il vérifie la relation :

(II.22) $[\forall(x,y) \in X \times Y \quad g(x,y) = h(x)\ell(y)] \Rightarrow [\pi g(\xi,\eta) = \pi_X h(\xi)\ \pi_Y \ell(\eta)]$.

Autrement dit un prolongement quasimixte transforme les fonctions g qui sont le produit d'un élément de $A(X)$ par un élément de $A(Y)$ en des fonctions qui sont le produit d'un élément de $A(X)$ par un élément de $A(\mathcal{Y})$ (cette décomposition n'ayant d'intérêt du point de vue stratégique que si h et ℓ sont positives).

<u>Remarque</u> (II.1).

Si p est un prolongement quasimixte et si les applications associées π_X^* et π_Y^* sont surjectives, alors p est jouable, puisque le prolongement mixte est jouable. Dans la proposition (II.2) on montre qu'une condition analogue est <u>nécessaire</u> pour qu'un prolongement quasimixte soit jouable (dans le cas où X et Y sont finis et ont même cardinal).

Proposition (II.2).

Supposons que X et Y sont finis. Alors un prolongement quasimixte $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ est jouable (et la valeur de πg est la valeur mixte) si

$$\text{(II.23)} \quad \begin{cases} \text{i)} \ \pi_X^*(\mathcal{X}) \text{ est dense dans } A_1'(X) \\ \text{ii)} \ \pi_Y^*(\mathcal{Y}) \text{ est dense dans } A_1'(Y). \end{cases}$$

Réciproquement si X et Y ont même cardinal les seuls prolongements quasimixtes jouables sont ceux qui vérifient (II.23).

Démonstration.

Supposons que (II.23) soit vraie et posons :

$$\text{(II.24)} \qquad \mu \in A_1'(X) \ : \ L(\mu,g) = \inf_{\nu \in A_1'(Y)} [\mu \otimes \nu, g] = \inf_{y \in Y} [\mu \otimes \delta_y, g]$$

Donc $\mu \to L(\mu,g)$, qui est l'infimum d'un nombre fini (Y est fini) de formes linéaires continues, est continue et on a :

$$\text{(II.25)} \qquad \sup_{\xi \in \mathcal{X}} L(\pi_X^*(\xi),g) = \max_{\mu \in A_1'(X)} L(\mu,g) = v_m(g)$$

(puisque $\pi_X^*(\mathcal{X})$ est dense dans $A_1'(X)$).

Or :

$$\text{(II.26)} \qquad v_m(g) = \sup_{\xi \in \mathcal{X}} L(\pi_X^*(\xi),g) = \sup_{\xi \in \mathcal{X}} \inf_{y \in Y} [\pi_X^*(\xi) \otimes \delta_y, g] = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta).$$

On démontre de même que :

$$\text{(II.27)} \qquad v_m(g) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta).$$

Réciproquement supposons que par exemple $\pi_X^*(\mathcal{X})$ n'est pas dense dans $A_1'(X)$ et soit $\bar{\mu} \in A_1'(X)$ un élément qui n'est pas dans l'adhérence de $\pi_X^*(\mathcal{X})$.

Posons $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ et :

$$\text{(II.28)} \qquad \bar{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$$

et supposons X ordonné de sorte que $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sont non nuls et $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n$ sont nuls. Soit alors g la fonction de $A(X \times Y)$ donnée sous sa forme matricielle :

$$(\text{II}.29)\qquad X\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 & M & \dots & M \\ & \frac{1}{\alpha_2} & & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0\,\frac{1}{\alpha_k} & M & \dots & M \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & M & \dots & M \end{bmatrix}}^{Y}\right. \begin{matrix} \left.\right\} k \\ \\ \left.\right\} n-k \end{matrix} \qquad \text{où } M > \sup_{i=1,\dots k}\left|\frac{1}{\alpha_i}\right|$$

(on utilise ici le fait que Y a au moins autant d'éléments que X. Si nous avions supposé (II.23.ii) faux nous aurions utilisé le fait que X a au moins autant d'éléments que Y). Alors on a clairement, si $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}$:

$$(\text{II}.30)\qquad L(\mu,g) = \inf\{\inf_{i=1,\dots k}\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\}, M\} = \inf_{i=1,\dots k}\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\}.$$

Donc :

$$(\text{II}.31)\qquad L(\bar{\mu},g) = 1 = v_m(g)$$

Or il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\text{II}.32)\qquad \forall\mu \in \pi_X^*(X)\qquad \|\mu-\bar{\mu}\|_\infty \geq \varepsilon$$

où $\|\ \|_\infty$ désigne la norme du sup.

Donc si $\mu \in \pi_X^*(X)$ et $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}$, il existe i tel que

$$(\text{II}.33)\qquad i \leq k \text{ et } \lambda_i \leq \alpha_i - \frac{\varepsilon}{2k}$$

Sinon on aurait en effet :

$$(\text{II}.34)\qquad \forall i \leq k\quad \lambda_i > \alpha_i - \frac{\varepsilon}{2k}$$

Or (II.34) entraine, puisque $1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$

$$(\text{II}.35)\qquad \forall i \leq k\quad \lambda_i < \alpha_i + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par la même sommation (II.34) entraine aussi :

$$(\text{II}.36)\qquad \forall i > k\quad \lambda_i < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Et les inégalités (II.34) (II.35) et (II.36) contredisent (II.32).

On déduit alors de (II.30) et (II.33) :

(II.37) $\quad \forall \mu \in \pi_X^*(X) \; : \; L(\mu,g) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2k}.$

Donc :

(II.38) $\quad \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) = \sup_{\mu \in \pi_X^*(X)} L(\mu,g) \leq v_m(g) - \frac{\varepsilon}{2k}.$

Or si p est un prolongement jouable, d'après le théorème (II.1) la valeur de πg est égale à $v_m(g)$. Nous obtenons la contradiction désirée. ∎

II.3. UNE MAJORATION DU SAUT DE DUALITE.

Dans cette section nous supposons encore que X ou Y est fini.

Soit $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ une prolongement sans échange d'information. Alors nous pouvons définir un <u>prolongement quasimixte associé</u> dont les ensembles de stratégies étendues sont les mêmes, et dont l'opérateur $\bar{\pi}$ est défini par sa "forme transposée" $\bar{\pi}^*$ (cf. Proposition (I.2)) :

(II.39) $\quad \bar{\pi}^*(\xi,\eta) = \pi_X^*(\xi) \otimes \pi_Y^*(\eta).$

Nous notons $\| \; \|_*$ la norme duale de la norme de $A(X \times Y)$, qui fait de $A'(X \times Y)$ un espace de Banach.

<u>Théorème</u> (II.2).

<u>Soit</u> $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ <u>un prolongement sans échange d'information</u>. <u>Supposons que le prolongement quasimixte associé est jouable</u>. <u>Alors, pour toute fonction de gain initiale</u> g <u>dans</u> $A(X \times Y)$ <u>on a</u> :

(II.40) $\quad |\inf_\eta \sup_\xi \pi g(\xi,\eta) - \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta)| \leq 2\|g\| \sup_{\xi,\eta} \|\pi^*(\xi,\eta) - \pi_X^*(\xi) \otimes \pi_Y^*(\eta)\|_*$

<u>Corollaire</u> (II.1).

<u>Si les applications</u> π_X^* <u>et</u> π_Y^* <u>sont surjectives dans</u> $A_1'(X)$ <u>et</u> $A_1'(Y)$ <u>respectivement, alors l'inégalité</u> (II.40) <u>est vraie</u>.

Le corollaire (II.1) découle immédiatement de la remarque (II.1). D'après la proposition (II.2), lorsque X et Y sont finis, l'inégalité (II.40) est vraie si on suppose seulement que π_X^* et π_Y^* sont d'image dense dans $A_1'(X)$ et $A_1'(Y)$ respectivement.

<u>Démonstration du théorème</u> (II.2).

On a toujours, d'après l'égalité (I.10)

(II.41) $\forall g \in A(X \times Y)\ \|\pi g-\bar{\pi} g\|_{A(X \times Y)} \leq \|g\| \sup\limits_{(\xi,\eta)} \|\pi^{*}(\xi,\eta)-\bar{\pi}^{*}(\xi,\eta)\|_{*}$

De plus, si h et ℓ sont 2 éléments de $A(X \times Y)$

(II.42) $\left|\sup\limits_{\xi} \inf\limits_{\eta} h(\xi,\eta) - \sup\limits_{\xi} \inf\limits_{\eta} \ell(\xi,\eta)\right| \leq \|h-\ell\|_{A(X \times Y)}$

et de même

(II.43) $\left|\inf\limits_{\eta} \sup\limits_{\xi} h(\xi,\eta) - \inf\limits_{\eta} \sup\limits_{\xi} \ell(\xi,\eta)\right| \leq \|h-\ell\|_{A(X \times Y)}$

Comme $\bar{\pi} g$ a pour valeur $v_m(g)$ l'inégalité (II.40) découle immédiatement de (II.41) (II.42) et (II.43).

∎

II.4. L'EXEMPLE DES JEUX ITERES SANS ECHANGE D'INFORMATION.

a) Définition, exemples.

Nous notons $S = A_1'(\mathbb{N}^2)$ le simplexe du dual de $A(\mathbb{N}^2) = \ell^{\infty}(\mathbb{N}^2)$. (Cf. (0)). Nous notons aussi : $\tilde{X} = X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de X et $\tilde{Y} = Y^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de Y. Si $\tilde{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dans $\tilde{X}$ et $\tilde{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\tilde{Y}$ on note :

(II.44) $\forall g \in A(X \times Y)\quad g(\tilde{x},\tilde{y}) = (g(x_i,y_j))_{i,j\in\mathbb{N}} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}^2)$.

Définition (II.3).

Soit a un élément de S. On appelle jeu itéré de mesure a le prolongement p_a :

(II.45) $p_a = (\tilde{X},\tilde{Y},i,j,\pi_a)$

où les injections i et j identifient les éléments de X (resp. Y) aux suites constantes de $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{Y}$) :

(II.46) $x \in X,\ i(x) = (x,\dots,x,\dots);\ y \in Y,\ j(y) = (y,\dots,y,\dots)$

et où l'opérateur π_a est défini par :

(II.47) $\forall g \in A(X \times Y)\ \forall(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y}\quad \pi_a g(\tilde{x},\tilde{y}) = [a,g(\tilde{x},\tilde{y})]$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un prolongement à l'aide de la proposition (I.2).

La forme linéaire $\pi_a^{\star}(\tilde{x},\tilde{y})$ définie par :

(II.48) $\forall g \in A(X \times Y)\ [\pi_a^{\star}(\tilde{x},\tilde{y}),g] = [a,g(\tilde{x},\tilde{y})]$

est bien dans $A_1'(X \times Y)$ (attention : dans la relation (II.48) le premier crochet est celui de la dualité entre $A'(X \times Y)$ et $A(X \times Y)$ et le second celui de la dualité entre $[\ell^{\infty}(\mathbb{N}^2)]'$ et $\ell^{\infty}(\mathbb{N}^2)$).

En effet la positivité de $\pi_a^{\star}(\tilde{x},\tilde{y})$ est claire (a est positive) et si $g = \theta_{X \times Y}$ alors $g(\tilde{x},\tilde{y}) = \theta_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ donc :

(II.49) $[\pi_a^{\star}(\tilde{x},\tilde{y}),\theta] = 1$

Il nous faut maintenant montrer que $\pi_a^{\star}$ vérifie les relations (I.12). Fixons $\tilde{x}_0 = i(x_0) = (x_0,\ldots,x_0,\ldots)$ et $\tilde{y}$ dans $\tilde{Y}$. Nous devons prouver l'existence d'un élément m de $A_1'(Y)$ tel que :

(II.50) $\pi_a^{\star}(\tilde{x}_0,\tilde{y}) = \delta_{x_0} \otimes m.$

Autrement dit, si $g \in A(X \times Y)$ s'écrit

(II.51) $\forall (x,y) \in X \times Y\quad g(x,y) = h(x)\ell(y)$ avec $h \in A(X)$ et $\ell \in A(Y)$

il faut vérifier que :

(II.52) $[\pi_a^{\star}(\tilde{x}_0,\tilde{y}),g] = h(x_0).[m,\ell]_{(A'(Y),A(Y))}.$

Or d'après la définition (II.44) on a :

(II.53) $g[\tilde{x}_0,\tilde{y}] = (u_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ avec $u_{ij} = h(x_0).\ell(y_j).$

Donc :

(II.54) $[\pi_a^{\star}(\tilde{x}_0,\tilde{y}),g] = [a,(u_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}] = h(x_0)\ [a,(\ell(y_j))_{j\in\mathbb{N}}].$

Soit, si p_2 désigne la seconde projection de S sur $[\ell^{\infty}(\mathbb{N})]_1'$:

(II.55) $[\pi_a^{\star}(\tilde{x}_0,\tilde{y}),g] = h(x_0)\ [p_2(a),\ \ell[\tilde{y}]]_{([\ell^{\infty}(\mathbb{N})]',\ \ell^{\infty}(\mathbb{N}))}$

et il est clair que la forme linéaire m :

(II.56) $\ell \in A(Y) \to [m,\ell] = [p_2(a),\ \ell[\tilde{y}]]$

est dans le simplexe $A_1'(Y)$ puisque $p_2(a)$ est dans le simplexe $[\ell^{\infty}(\mathbb{N})]_1'$.

Un cas particulier important.

Lorsque $a \in [\ell^\infty(\mathbb{N}^2)]'$ est en fait dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$ alors la définition (II.3) s'explicite :

(II.57) $\quad a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \quad a_{ij} \geq 0 \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = 1$

et

(II.58) $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ \forall(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y} \quad \pi_a g(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} g(x_i,y_j).$

Par exemple, π_1 est l'opérateur associé à un jeu itété

(II.59) $\quad \pi_1 g(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(x_i,y_i).$

Le jeu prolongé est obtenu en répétant N fois le jeu initial et en prenant pour gain la moyenne arithmétique des gains rencontrés.

L'opérateur π_2 est associé à un autre jeu itéré :

(II.60) $\quad \pi_2 g(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{3}\,[g(x_1,y_1)+g(x_1,y_2)+g(x_1,y_3)]$

Dans le jeu prolongé, Xavier joue simplement une stratégie pure et Yves peut jouer toutes les stratégies mixtes qui sont de la forme :

(II.61) $\quad \nu = \frac{1}{3}\,[\delta_{y_1} + \delta_{y_2} + \delta_{y_3}]$.

Définissons enfin les opérateurs π_3 et π_4 associés à 2 autres jeux itérés :

(II.62) $\quad \pi_3 g(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+j-2} g(x_i,y_i)$

(II.63) $\quad \pi_4 g(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{45}\, g(x_1,y_1) + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2j-2}\right] g(x_1,y_j)$

$$+ \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2i-2}\right] g(x_i,y_1) + \sum_{\substack{i,j=2\\ i\neq j}}^{+\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+j-2} g(x_i,y_j)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, dans chacune de ces séries, la somme des coefficients vaut 1.

Proposition (II.3).

Quel que soit a dans S le jeu itéré p_a est sans échange d'information.

Démonstration.

En effet $p_X(\pi_a^*(\tilde{x},\tilde{y}))$ est caractérisé par :

(II.64) $\forall g \in A(X, \quad [p_X(\pi_a^*(\tilde{x},\tilde{y})),g] = [a,g(\tilde{x},\tilde{y})]$

(or si g ne dépend pas de y, alors $g(\tilde{x},\tilde{y})$ ne dépend pas de $\tilde{y}$, donc $p_X(\pi_a^*(\tilde{x},\tilde{y}))$ ne dépend pas de $\tilde{y}$). La proposition (II.1) établit alors le résultat cherché.

b) <u>Jouabilité des jeux itérés sans échange d'information : cas où X et Y sont finis</u>.

<u>Théorème</u> (II.3).

<u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont finis</u> ($|X| = n$, $|Y| = p$) <u>il existe un élément</u> a <u>de</u> $\ell^1(\mathbb{N}^2)$ <u>tel que le jeu itéré (sans échange d'information) de mesure</u> a <u>est jouable (et la valeur de</u> πg <u>est la valeur mixte)</u>. <u>Par exemple on pourra choisir</u>

(II.65) $\bar{a} = (\bar{a}_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \quad \bar{a}_{ij} = \frac{1}{np}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{j-1}.$

<u>Démonstration</u>.

Nous allons montrer que le prolongement $p_{\bar{a}}$ est jouable. Pour cela nous allons calculer son forme transposée $\pi_{\bar{a}}^*$:

(II.66) $\forall g \in A(X \times Y)\ \forall(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y} \quad [\pi_{\bar{a}}^*(\tilde{x},\tilde{y}),g] = \sum_{i,j=1}^{\infty} \bar{a}_{ij}\, g(x_i,y_j).$

Donc on a :

(II.67) $\forall(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y} \quad \pi_{\bar{a}}^*(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \bar{a}_{ij}\,\delta_{x_i} \otimes \delta_{y_j}$

et par conséquent, d'après (II.65) :

(II.68) $\forall(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y} \quad \pi_{\bar{a}}^*(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \delta_{y_j}\right)$

où on a posé :

(II.69) $\alpha_i = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \quad \beta_j = \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{j-1}.$

Si on note :

(II.70) $\forall\tilde{x} \in \tilde{X} \quad \pi_X^*(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i} \in A_1'(X)$

et

(II.71) $\forall\tilde{y} \in \tilde{Y} \quad \pi_Y^*(\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \delta_{y_j} \in A_1'(Y).$

On constate, (définition (II.2)) que $p_{\underset{a}{-}}$ est un prolongement quasimixte, et il suffit donc de prouver, (proposition (II.2)) que π_X^* et π_Y^* sont surjectifs. Nous allons montrer par exemple que π_X^* est surjectif (ce qui entraine que π_Y^* l'est aussi puisque n et p sont quelconques). Soit donc μ un élément de $A_1'(X)$.

Puisque X est de cardinal n, μ peut s'écrire :

(II.72) $\quad \mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta_k$ où on a posé $X = \{1,\dots,n\}$.

Définissons par récurrence les 2 suites x_i et μ^i :

(II.73) $\quad x_i \in \{1,\dots,n\}, \quad \mu^i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^i \delta_k \in A'(X)$

à l'aide des relations :

(II.74) $\quad x_1 = \inf \{k/\mu_k \geq \frac{1}{n}\}$

(II.75) $\quad \mu^1 = \mu - \frac{1}{n}\delta_{x_1}$

et

(II.76) $\quad x_{i+1} = \inf \{k/\mu_k^i \geq \frac{(n-1)^i}{n^{i+1}}\}$

(II.77) $\quad \mu^{i+1} = \mu^i - \frac{(n-1)^i}{n^{i+1}}\delta_{x_{i+1}}.$

D'abord (II.74) a un sens puisque $\mu \in A_1'(X)$. Donc (II.75) définit un élément μ^1 dans $A_+'(X)$: le sous ensemble des formes linéaires continues positives sur $A(X)$. Et on a :

(II.78) $\quad \langle \mu^1, \theta \rangle = \frac{n-1}{n}$

Donc x_2 est bien défini et $\mu^2 \in A_+'(X)$. On a :

(II.79) $\quad \langle \mu^2, \theta \rangle = \langle \mu', \theta \rangle - \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$.

Donc x_3 est bien défini est ainsi de suite. Si μ^i vérifie :

(II.80) $\quad \langle \mu^i, \theta \rangle = \frac{(n-1)^i}{n^i}$

alors d'après (II.77) :

(II.81) $\quad \langle \mu^{i+1}, \theta \rangle = \langle \mu^i, \theta \rangle - \frac{(n-1)^i}{n^{i+1}} = \frac{(n-1)^{i+1}}{n^{i+1}}.$

Donc la relation (II.80) est vraie pour tout i et x_i est bien défini pout tout i. Et (II.76), (II.77) montrent (récurrence) que μ^i est positive. Nous allons montrer maintenant que si $\tilde{x} = (x_i)_{i\in N}$ alors on a :

(II.82) $\quad \pi^*_X(\tilde{x}) = \mu$

ce qui achèvera la démonstration. Or d'après (II.75) et (II.77) on a clairement :

(II.83) $\quad \mu^{i+1} = \mu - [\frac{1}{n}\delta_{x_1} + \frac{(n-1)}{n^2}\delta_{x_2} + \dots + \frac{(n-1)^{i-1}}{n^i}\delta_{x_i}]$

Comme pour tout i, μ^{i+1} est une mesure positive il vient :

(II.84) $\quad \pi^*_X(\tilde{x}) \leq \mu.$

Mais comme :

(II.85) $\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{i-1}}{n^i} = +1$

la mesure $\pi^*_X(x)$ est dans $A_1^+(X)$ ainsi que μ. Donc l'égalité (II.82) est vraie. ∎

Le théorème (II.3) établit l'existence, lorsque X et Y sont finis d'une façon <u>déterministe</u> de jouer le jeu initial qui donne la même valeur que le prolongement mixte. C'est une supériorité par rapport aux traditionnelles "stratégies mixtes" puisque ces dernières ne permettent d'obtenir la valeur mixte qu'au bout d'un nombre infini d'expériences aléatoires, et seulement avec la probabilité 1. Alors que, dans le prolongement $p_{\bar{a}}$, un point selle du jeu $\pi_{\bar{a}}g$ est constitué de 2 suites de stratégies pures parfaitement déterminées. Si de plus, on ne réclame qu'une précision ε, alors on a une façon <u>déterministe</u> de jouer le jeu, ne comportant qu'<u>un nombre fini</u> de stratégies et qui a pour valeur la valeur mixte à ε-près. En effet si $\tilde{X}_N$ désigne l'ensemble des suites à N éléments dans X et $\tilde{Y}_N$ l'ensemble des suites à N éléments dans Y, alors le jeu dont la forme normale est :

(II.86) $\quad \pi^N g : \tilde{X}_N \times \tilde{Y}_N \to \mathbb{R} \quad \pi^N g(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{N} \bar{a}_{ij} g(x_i,y_j)$

constitue ce "jeu mixte approché". De façon plus précise :

<u>Corollaire</u> (II.2).

<u>Il existe un couple</u> $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0) \in \tilde{X}_N \times \tilde{Y}_N$ <u>tel que</u>

(II.87) $\quad \forall(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{X}_N \times \tilde{Y}_N : \pi^N g(\tilde{x},\tilde{y}_0) - 2\varepsilon(N) \leq \pi^N g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0) \leq \pi^N g(\tilde{x}_0,\tilde{y}) + 2\varepsilon(N)$

et

(II.88) $\quad |\pi^N g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0) - v_m(g)| \leq \varepsilon(N)$

où on a posé

(II.89) $\quad \varepsilon(N) = \|g\|.[(\frac{n-1}{n})^N + (\frac{p-1}{p})^N].$

Démonstration.

Il suffit de choisir un point selle $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ du jeu $\pi_{\bar{a}} g$ et de ne conserver que les N premiers termes de ces 2 suites. On a alors :

(II.90) $\quad \forall \tilde{x},\tilde{y} \quad \pi_{\bar{a}} g(\tilde{x},\tilde{y}_0) \leq \pi_{\bar{a}} g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0) = v_m(g) \leq \pi_{\bar{a}} g(\tilde{x}_0,\tilde{y}).$

Et on remarque que :

(II.91) $\quad \lambda = |\pi_{\bar{a}} g(\tilde{x},\tilde{y}) - \pi^N g(\tilde{x},\tilde{y})| = |\sum_{\substack{i>N \\ \text{ou } j>N}} \bar{a}_{ij} g(x_i,y_j)|.$

Donc

(II.92) $\quad \lambda \leq \|g\|.[\sum_{\substack{i=1,\ldots N \\ j>N}} \bar{a}_{ij} + \sum_{\substack{j=1,\ldots N \\ i>N}} \bar{a}_{ij} + \sum_{i,j=N+1}^{+\infty} \bar{a}_{ij}].$

Soit :

(II.93) $\quad \lambda \leq \|g\|.[(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i)(\sum_{j>N} \beta_j) + (\sum_{j=1}^{N} \beta_j)(\sum_{i>N} \alpha_i) + (\sum_{i>N} \alpha_i)(\sum_{j>N} \beta_j)]$

Comme :

(II.94) $\quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 - (\frac{n-1}{n})^N$ et $\sum_{j=1}^{N} \beta_j = 1 - (\frac{p-1}{p})^N$

il vient finalement :

(II.95) $\quad \lambda \leq \|g\|.[(\frac{p-1}{p})^N + (\frac{n-1}{n})^N - (\frac{p-1}{p})^N(\frac{n-1}{n})^N]$

Le corollaire est acquis.

Remarque (II.2).

Si n et p sont grands et si on choisit $N \sim n \text{ Log } 2n$ (n et p étant du même ordre de grandeur) on trouve que $\varepsilon(N)$ est de l'ordre de $\frac{\|g\|}{n}$.
Donc il faut jouer environ (n Log 2n) stratégies pures pour obtenir la valeur mixte avec une précision de $\frac{1}{n}$.

Exemples.

Reprenons les exemples de jeux itérés donnés de (II.59) à (II.63). On constate aisément que p_1 et p_2 ne sont jamais jouables, mais que le prolongement p_3 est précisément celui qu'indique le théorème (II.3) lorsque X et Y ont chacun 3 éléments. Donc si X et Y ont tous deux au plus 3 éléments le jeu itéré p_3 est jouable. Sinon, on vérifie aisément qu'il ne l'est pas.

Examinons maintenant l'exemple p_4. Ce prolongement n'est pas quasimixte, mais le prolongement quasimixte associé est p_3. En effet la forme transposée π_a^* de l'opérateur π_a (cas général (II.58)) est :

(II.96) $$\pi_a^*(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij}\delta_{x_i} \otimes \delta_{y_j}$$

et par conséquent les applications $(\pi_a)_X^*$ et $(\pi_a)_Y^*$ sont :

(II.97) $$(\pi_a)_X^*(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i\delta_{x_i} \quad \text{où } a_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}$$

(II.98) $$(\pi_a)_Y^*(\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{+\infty} a^j\delta_{y_j} \quad \text{où } a^j = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}.$$

Dans le cas particulier de p_4 on trouve :

(II.99) $$a_i = \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{i-1}; \quad a^j = \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{j-1}$$

Donc le prolongement quasimixte associé à p_4 est p_3 et lorsque X et Y ont moins de 3 éléments, il est jouable. Donc nous pouvons appliquer le théorème (II.2), et obtenir une majoration du saut de dualité de p_4. Pour cela il faut calculer la quantité :

(II.100) $$\sup_{\tilde{x},\tilde{y}} \|\pi^*(\tilde{x},\tilde{y})-\pi_X^*(\tilde{x}) \otimes \pi_Y^*(\tilde{y})\|_* = \sup_{\tilde{x},\tilde{y}} \Big\| \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij}\delta_{x_i} \otimes \delta_{y_j} - \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_i a^j \delta_{x_i} \otimes \delta_{y_j} \Big\|_*$$

c'est à dire :

(II.101) $$\sum_{i,j=1}^{+\infty} |a_{ij}-a_i a^j|.$$

Dans le cas de p_4 on trouve $\frac{16}{45}$. La majoration cherchée est donc :

(II.102) $$\forall g \in A(X \times Y) \ \left|\inf_y \sup_x g(x,y) - \sup_x \inf_y g(x,y)\right| \leq \tfrac{16}{45}\|g\|.$$

Nous reprenons maintenant l'étude de la jouabilité des jeux itérés (sans échange d'information) et nous traitons le cas général.

c) Jouabilité des jeux itérés sans échange d'information : cas général.

Théorème (II.4).

Si X et Y sont infinis il n'existe pas d'élément a dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$ tel que le jeu itéré (sans échange d'information) de mesure a soit jouable.

Démonstration.

Nous allons construire une fonction $g \in A(X \times Y)$ telle que, pour tout a à support fini dans $[0,N] \times [0,N]$, on ait :

$$\text{(II.103)} \quad 0 = \sup_{\tilde{x}} \inf_{\tilde{y}} [a, g(\tilde{x},\tilde{y})]; \; \inf_{\tilde{y}} \sup_{\tilde{x}} [a, g(\tilde{x},\tilde{y})] = 1.$$

Donc pour tout a dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$, le jeu $\pi_a g$ n'a pas de valeur (car il existe N et un élément b à support fini dans $[0,N] \times [0,N]$ tel que $\|a-b\|_* \leq \frac{1}{10}$). Nous choisissons $X_0 = \{1,\ldots,n,\ldots\} \subset X$ et $Y_0 = \{1,\ldots,p,\ldots\} \subset Y$, deux sous ensembles dénombrables de X et de Y et nous définissons :

$$\text{(II.104)} \quad g(n,p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ divise } n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ; \; g(X \setminus X_0, Y_0) = 0;$$
$$g(X_0, Y \setminus Y_0) = 1; \; g(X \setminus X_0, Y \setminus Y_0) = \frac{1}{2}.$$

Si a est une mesure à support dans $[0,N] \times [0,N]$:

$$\text{(II.105)} \quad \pi_a g(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} g(x_i, y_j)$$

et pour tout $\tilde{x}$ fixé, on a :

$$\text{(II.106)} \quad 0 \leq \inf_{\tilde{y}} \pi_a g(\tilde{x},\tilde{y}) \leq \inf_{y \in Y_0} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} g(x_i, y) = 0$$

puisque, $x_1,\ldots x_N$ étant fixés on peut toujours choisir $p \in \mathbb{N}$ qui ne divise aucun des entiers de $\{x_1,\ldots x_N\} \cap X_0$.

De même pour tout $\tilde{y}$ fixé

$$\text{(II.107)} \quad 1 = \sup_{x \in X_0} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} g(x, y_j) \leq \sup_{\tilde{x}} \pi_a g(\tilde{x},\tilde{y}) \leq 1$$

puisque, $y_1,,,y_N$ étant fixés on peut choisir pour x le plus petit commun multiple des entiers de $\{y_1,\ldots,y_N\} \cap X_0$.

∎

Le théorème (II.4) montre que, dans le cas général, les jeux itérés jouables auront une mesure a dans $[\ell^\infty(\mathbb{N}^2)]'$ mais non dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$. Nous allons définir une famille de telles mesures dans le théorème (II.5). Mais sachant que la construction d'une mesure dans $[\ell^\infty(\mathbb{N}^2)]' \setminus \ell^1(\mathbb{N}^2)$ utilise toujours le lemme de Zorn (via le théorème de Hahn Banach le plus souvent), il ne faut pas s'étonner que les prolongements de jeux associés, encore déterministes, présentent une part d'irréalisme. De toutes façons ceci n'affectera pas les stratégies optimales et la valeur (mixte). La relation :

$$\text{(II.108)} \quad v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \; : \; [\mathrm{Lim},v] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i$$

lorsque cette limite existe, définit une forme linéaire continue Lim sur le sous espace de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites dont la moyenne de Cesaro converge. D'après le théorème de Hahn Banach il existe donc une infinité de prolongements de Lim à $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tout entier, tels que :

$$\text{(II.109)} \quad \mathrm{Lim} \in [\ell^\infty(\mathbb{N})]' \text{ et } \|\mathrm{Lim}\|_* = 1.$$

Nous notons T leur ensemble et remarquons que T est inclus dans le simplexe $[\ell^\infty(\mathbb{N})]'_1$. En effet, si θ désigne la suite constante et égale à 1, $[\mathrm{Lim},\theta] = 1$ résulte de (II.108), et s'il existait une suite positive v telle que :

$$\text{(II.110)} \quad [\mathrm{Lim},v] < 0$$

alors $w = \frac{v}{\|v\|}$ serait positive et vérifierait (II.110), et on obtiendrait :

$$\text{(II.110)'} \quad [\mathrm{Lim},\theta-w] > 1 ; \; \|\theta-w\| \leq 1$$

ce qui est une contradiction de (II.109). (Pour plus de détails sur ces limites de Banach voir par exemple [Dunford-Schwartz]).

Théorème (II. 5)

Supposons que X est infini et que Y est fini ($|Y| = p$). Notons $\beta = (\frac{1}{p}(\frac{p-1}{p})^{j-1}) \in \ell^1(\mathbb{N})$. Alors tout jeu itéré (sans échange d'information) dont la mesure a est dans $T \otimes \beta$ est jouable (et donne à $\pi_a g$ la valeur mixte).

L'opérateur de prolongement π_a d'un tel jeu itéré est donc défini par :

$$\text{(II - 111)} \quad \pi_a g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathrm{Lim}_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g(x_i, y_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \, \mathrm{Lim}_i \,(g(x_i, y_j))$$

Démonstration du théorème.

Montrons d'abord que p_a est un prolongement quasimixte. Choisissons pour cela une fonction g dans $A(X \times Y)$ de la forme :

(II.112) $\forall(x,y) \in X \times Y \quad g(x,y) = h(x)\ell(y)\,;\ h \in A(X)\ \ell \in A(Y)$

et supposons que $a = \alpha \otimes \beta$, où α est un élément de T. Alors on a :

(II.113) $[\pi_a^*(\tilde{x},\tilde{y}),g] = [a,g[\tilde{x},\tilde{y}]] = [\alpha,h[\tilde{x}]].[\beta,\ell[\tilde{y}]]$

Si on définit π_X^* et π_Y^* par :

(II.114) $\forall h \in A(X)\ [\pi_X^*(\tilde{x}),h] = [\alpha,h[\tilde{x}]]$

et

(II.115) $\forall \ell \in A(Y)\ [\pi_Y^*(\tilde{y}),\ell] = [\beta,\ell[\tilde{y}]]$

il est clair qu'on obtient 2 applications :

(II.116) $\pi_X^* : \tilde{X} \to A_1'(X)$ et $\pi_Y^* : \tilde{Y} \to A_1'(Y)$

telles que :

(II.117) $\pi_a^*(\tilde{x},\tilde{y}) = \pi_X^*(\tilde{x}) \otimes \pi_Y^*(\tilde{y})$.

Nous avons vu (Théorème II - 3) que $\pi_Y{}^*$ est surjective. Montrons que $\pi_X{}^*$ est surjective. Si μ est un élément de $A'_1(X)$ (par exemple) il existe une suite

$\tilde{x} = (x_i)$ d'éléments de X tels que :

(II.118) $\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}$

converge faiblement vers μ (il suffit par exemple de remarquer que l'enveloppe convexe de $\delta(X)$ est faiblement dense dans $A_1'(X)$). On a alors pour tout h fixé dans $A(X)$

(II.119) $[\mu,h] = \lim\limits_{N\to+\infty} [\mu_N,h] = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(x_i)$.

Soit d'après (II.108) et (II.114)

(II.120) $[\mu,h] = [\alpha,h[\tilde{x}]] = [\pi_X^*(\tilde{x}),h]$

Donc π_X^* est surjective et le théorème est démontré.

d) Les stratégies "aléatoires et correlées" d'Aumann.

Dans [Aumann], Aumann propose la façon suivante de jouer le jeu initial g : On se donne un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ (loterie) et 2 sous σ-algèbres $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ de $\mathcal{A}$. Xavier choisit alors, comme stratégie prolongée, une application ξ :

(II.121) $\xi : \Omega \to X$, ξ est $\mathcal{A}_X$-mesurable

et Yves choisit une application η :

(II.122) $\eta : \Omega \to Y$, η est $\mathcal{A}_Y$-mesurable.

On dit que les σ-algèbres $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ traduisent l'information de Xavier et Yves : autrement dit, une fois que "la nature" a tiré au sort un élément de Ω, Xavier sait à quels évènements de $\mathcal{A}_X$, ω appartient ou non, et Yves sait à quels évènements de $\mathcal{A}_Y$ ω appartient ou non. Le paiement est ensuite l'espérance du paiement aléatoire $g(\xi(\omega),\eta(\omega))$. Cette façon de jouer le jeu initial est clairement un prolongement des jeux sur X x Y : $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) est l'ensemble des applications $\mathcal{A}_X$-mesurables (resp. $\mathcal{A}_Y$-mesurables) de Ω dans X (resp. Y) et les stratégies pures s'identifient aux applications constantes de Ω dans X (resp. Y).
L'opérateur de prolongement est alors :

(II.123) $\pi g(\xi,\eta) = \int_\Omega g(\xi(\omega),\eta(\omega))dp(\omega)$

On vérifie aisément que π est positif, que $\pi(\theta) = \theta$ et que les relations (I.5) sont vraies. De plus si g ne dépend pas de x (resp. y), il est clair que πg ne dépend pas de ξ (resp. η) donc que ce prolongement est sans échange d'information. Donc s'il est jouable, il donnera à πg la valeur mixte.

Mais nous allons montrer que lorsque la loterie est au plus dénombrable ce prolongement est isomorphe à un jeu itéré sans échange d'information. Supposons donc Ω au plus dénombrable. Alors $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre de tous les sous ensembles de Ω (quitte à faire un passage au quotient approprié). De même $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ possèdent une base qui est une partition au plus dénombrable de Ω.
Soient : $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ces 2 partitions. Alors une stratégie prolongée $\xi \in \mathcal{X}$ s'identifie à une suite de stratégies pures $\tilde{x} \in \tilde{X}$ par les relations :

(II.124) $\forall i \quad \xi(A_i) = x_i$

De même on peut identifier $\eta \in \mathcal{Y}$ et $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ par les relations :

(II.125) $\forall j \quad \eta(B_j) = y_j$.

Enfin, si on pose :

(II.126) $\forall i,j \; P(A_i \cap B_j) = a_{ij}$

l'opérateur de prolongement (II.123) s'écrit :

(II.127) $\pi g(\xi,\eta) = \pi g(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij} g(x_i,y_j)$

Et nous obtenons l'isomorphisme cherché avec le jeu itéré de mesure $a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$.

On constate même que <u>tous</u> les jeux itérés dont la mesure est dans $\ell^1(N^2)$ peuvent être obtenus à l'aide de loteries au plus dénombrables. En particulier le théorème (II.3) implique :

<u>Si X et Y sont finis il existe une loterie dénombrable, qui réalise un prolongement jouable et donne au jeu la valeur mixte</u>.

Si $|X| = n$ et $|Y| = p$, la loterie tirera au sort 2 nombres entiers indépendants n_1 et n_2 avec une distribution Laplacienne de paramètre $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{p-1}{p}$ respectivement. Ensuite Xavier sera informé de n_1, et Yves de n_2. De même le corollaire (II.2) devient : Dans les mêmes conditions une loterie à N éléments permet de réaliser un prolongement jouable avec une précision $\varepsilon(N)$:

(II.128) $\varepsilon(N) = \|g\| . ((\frac{n-1}{n})^N + (\frac{p-1}{p})^N)$.

III. PROLONGEMENTS PAR ECHANGE D'INFORMATION.

III.1. DEFINITION, EXEMPLES.

Soit $\mathcal{F}(Y,X)$ l'ensemble des applications de Y dans X. L'injection i identifie X au sous-ensemble de $\mathcal{F}(Y,X)$ formé des applications constantes :

(III.1) $i : X \to \mathcal{F}(Y,X) \quad \forall y \in Y \quad i(x)(y) = x.$

De même Y s'identifie au sous-ensemble des applications constantes de $\mathcal{F}(X,Y)$ (par l'injection j). Si ξ est dans $\mathcal{F}(Y,X)$ et η dans $\mathcal{F}(X,Y)$ on note $F(\xi,\eta)$ l'ensemble, éventuellement vide, des points fixes de l'application : $(x,y) \to (\xi(y),\eta(x))$. Autrement dit :

(III.2) $F(\xi,\eta) = \{(x,y) \in X \times Y \ / \ \xi(y) = x \text{ et } \eta(x) = y\}.$

Définition (III.1).

Un couple $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un "couple décisionnel" si :

(III.3) $i(X) \subset \mathcal{X}$; $\mathcal{X}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}(Y,X)$

(III.4) $j(Y) \subset \mathcal{Y}$; $\mathcal{Y}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}(X,Y)$

(III.5) $\forall(\xi,\eta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \quad F(\xi,\eta) \neq \emptyset.$

Définition (III.2).

Soit $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un couple décisionnel. Choisissons pour tout couple (ξ,η) un point de $F(\xi,\eta)$ noté $f(\xi,\eta)$. Alors $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ est un prolongement des jeux sur X x Y si on pose :

(III.5)' $\forall g \in \mathcal{A}(X \times Y) \quad \forall(\xi,\eta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \quad \pi g(\xi,\eta) = g(f(\xi,\eta)).$

Définissons en effet l'application π^* :

(III.6) $\pi^* : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{A}_1'(X \times Y) \quad \pi^*(\xi,\eta) = \delta_{f(\xi,\eta)}.$

Remarquons que $F(i(x),\eta)$ est réduit au point $(x,\eta(x))$ et que $F(\xi,j(y))$ est réduit au point $(\xi(y),y)$. Par conséquent :

(III.7) $\pi^*(i(x),\eta) = \delta_x \otimes \delta_{\eta(x)}; \quad \pi^*(\xi,j(y)) = \delta_{\xi(y)} \otimes \delta_y.$

En particulier π^* vérifie les relations (I.12), et definit donc un opérateur de prolongement π_0 par la relation (I.10). Or cette relation s'écrit :

(III.8) $\pi_0 g(\xi,\eta) = [\pi^*(\xi,\eta),g] = [\delta_{f(\xi,\eta)},g] = g(f(\xi,\eta)) = \pi g(\xi,\eta)$.

Un tel prolongement associé à un couple décisionnel sera appelé un prolongement <u>par échange d'information</u>. En effet dans le jeu prolongé, la fonction de gain prolongée πg prend les mêmes valeurs que g, mais l'emploi de stratégies qui sont des règles de décision par chacun des joueurs leur permet d'utiliser de l'information sur le comportement de l'adversaire. Ce point va être précisé plus loin (cf. (III.§3) et surtout (III.§4)).

<u>Exemple</u> (III.1).

Le couple $(F(Y,X),j(Y))$ est décisionnel et l'unique prolongement par échange d'information associé a pour opérateur de prolongement l'opérateur π :

(III.9) $\pi g : F(Y,X) \times j(Y) \to \mathbb{R} \quad \pi g(\xi,j(y)) = g(\xi(y),y)$.

Il est jouable : fixons ε et choisissons un élément ξ_ε dans $F(Y,X)$ tel que :

(III.10) $\forall y \in Y \quad g(\xi_\varepsilon(y),y) \geq \sup_x g(x,y) - \varepsilon$

Nous en déduisons que pour tout ε :

(III.11) $\sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) = \sup_\xi \inf_y g(\xi(y),y) \geq \inf_y \sup_x g(x,y) - \varepsilon$

Cette relation, comparée à la relation (I.8) montre que la valeur de πg est $\inf_y \sup_x g(x,y)$. Ce prolongement, qui est le plus avantageux pour Xavier, est réalisable de la façon suivante : Yves choisit sa stratégie pure et Xavier est informé de ce choix avant de choisir sa propre stratégie. Xavier dispose donc de "toute" l'information.

<u>Exemple</u> (III.2).

Le couple $(F(Y,X), F(X,Y))$ n'est pas un couple décisionnel : il est impossible de faire en sorte que Xavier soit informé de ce que joue Yves avant de jouer et que Yves soit informé de ce que joue Xavier avant de jouer !

<u>Remarque</u> (III.1).

D'après la définition des couples décisionnels réalisables, X est une famille d'éléments de $F(Y,X)$ et peut donc contenir 2 fois la même application ξ. En effet si ξ a 2 points fixes avec au moins un élément de Y, la même application ξ conduit à 2 stratégies différentes selon que l'on attribue à (ξ,η) tel ou tel de ces points fixes.

III.2. CARACTERISATION DES PROLONGEMENTS PAR ECHANGE D'INFORMATION.

Nous allons caractériser les prolongements par échange d'information à l'aide de la "forme transposée" π^* (cf. remarque (I.1)).

Théorème (III.1).

Un prolongement $p = (X,Y,i,j,\pi)$ est isomorphe à un prolongement par échange d'information si et seulement si pour tout couple (ξ,η) de stratégies étendues, il existe un couple (x,y) (nécessairement unique) de stratégies pures telles que :

(III.12) $\quad \pi^*(\xi,\eta) = \pi^*(\xi,j(y)) = \pi^*(i(x),\eta)$.

Autrement dit un prolongement est par échange d'information si pour tout couple (ξ,η) de stratégies prolongées, Xavier peut jouer une stratégie pure x qui est "équivalente" à ξ contre la stratégie η de Yves (et vice versa pour Yves).

Démonstration.

Si p est isomorphe à un prolongement par échange d'information $p_0 = (X_0,Y_0,i_0,j_0,\pi_0)$, appelons b et c les bijections : $b : X \to X_0$ et $c : Y \to Y_0$. (cf. définition (I.3)). On constate que pour prouver (III.12) il suffit de démontrer cette relation pour le prolongement p_0 :

(III.13) $\quad \pi^*(\xi,\eta) = \pi^*(\xi,j(y)) \Leftrightarrow \pi_0^*(b(\xi),c(\eta)) = \pi_0^*(b(\xi),j_0(y))$

(puisque $c \circ j = j_0$).

Or puisque p_0 est par échange d'information on a :

(III.14) $\quad \pi_0^*(\xi_0,\eta_0) = \delta_x \otimes \delta_y$ avec $\xi_0(y) = x$; $\eta_0(x) = y$

et on a vu (cf. (III.7)) que :

(III.15) $\quad \pi_0^*(\xi_0,i(y)) = \delta_{\xi_0(y)} \otimes \delta_y = \delta_x \otimes \delta_y$

(III.16) $\pi_0(i(x),\eta_0) = \delta_x \otimes \delta_{\eta_0(x)} = \delta_x \otimes \delta_y$.

Montrons maintenant la réciproque : soit p un prolongement vérifiant (III.12) alors, d'après la proposition (I.2) on a :

(III.17) $\pi^*(\xi,j(y)) \in A_1'(X) \otimes \delta_y$; $\pi^*(i(x),\eta) \in \delta_x \otimes A_1'(Y)$.

Donc (III.12) et (III.17) donnent :

(III.18) $\pi^*(\xi,\eta) = \pi^*(\xi,j(y)) = \pi^*(i(x),\eta) = \delta_x \otimes \delta_y$.

Ceci entraine en particulier l'unicité du couple (x,y). Si ξ est dans X on note $\overset{''}{\xi} \in F(Y,X)$ l'application définie par :

(III.19) $\forall y \in Y \quad \delta_{\overset{''}{\xi}(y)} = p_X(\pi^*(\xi,j(y)))$

et si η est dans Y on note $\overset{''}{\eta} \in F(X,Y)$ l'application :

(III.20) $\forall x \in X \quad \delta_{\overset{''}{\eta}(x)} = p_Y(\pi^*(i(x),\eta))$.

Alors si $\overset{''}{X}$ désigne la famille des $\overset{''}{\xi}$ et $\overset{''}{Y}$ celle des $\overset{''}{\eta}$ nous montrerons d'abord que $(\overset{''}{X},\overset{''}{Y})$ est un couple décisionnel : en effet $i''(x)$ est défini par :

(III.21) $\forall y \in Y \quad \delta_{i''(x)(y)} = p_X(\pi^*(i(x),j(y))) = \delta_x$

et donc $i''(x)$ est l'application constante et égale à x.
De même $j''(y)$ est l'application constante et égale à y. Soit maintenant un point quelconque $(\overset{''}{\xi},\overset{''}{\eta})$ dans $\overset{''}{X} \times \overset{''}{Y}$. Il provient d'un unique couple (ξ,η) (puisque $\overset{''}{X}$ et $\overset{''}{Y}$ sont des familles, c'est à dire s'identifient aux applications $\xi \to \overset{''}{\xi}$ et $\eta \to \overset{''}{\eta}$). Nous notons (x,y) l'unique point de X x Y vérifiant (III.18). Alors on a :

(III.22) $\delta_{\overset{''}{\xi}(y)} = p_X(\pi^*(\xi,j(y))) = p_X(\delta_x \otimes \delta_y) = \delta_x$.

Donc $\overset{''}{\xi}(y) = x$. De même, on montre que $\overset{''}{\eta}(x) = y$. (Finalement nous avons montré que $F(\overset{''}{\xi},\overset{''}{\eta})$ est non vide, donc que $(\overset{''}{X},\overset{''}{Y})$ est un couple décisionnel. Si on définit maintenant l'application $\overset{''}{\pi}{}^*$:

(III.23) $\overset{''}{\pi}{}^* : \overset{''}{X} \times \overset{''}{Y} \to A_1'(X \times Y) \quad \overset{''}{\pi}{}^*(\overset{''}{\xi},\overset{''}{\eta}) = \pi^*(\xi,\eta) = \delta_{(x,y)}$

il est clair que $\overset{''}{\pi}{}^*$ est la forme transposée d'un opérateur de prolongement par échange d'information associé au couple décisionnel $(\overset{''}{X},\overset{''}{Y})$ et que ce prolongement est isomorphe au prolongement p.

∎

III.3. LES PROLONGEMENTS PAR ECHANGE D'INFORMATION JOUABLES.

Dans ce paragraphe nous identifierons une application de Y dans X (ou de X dans Y) avec son graphe dans X x Y. Donc une famille $\mathcal{X}$ (ou $\mathcal{Y}$) de règles de décisions est considérée comme une famille de parties de X x Y.

Définition (III.2).

Soit A un ensemble de parties d'un ensemble Z. On appelle conjugué de A et on note A^* l'ensemble des parties de Z suivant :

(III.24) $A^* = \{T \subset Z \ / \ \forall S \in A \quad T \cap S \neq \emptyset\}$.

Lemme (III.1).

On a toujours

(III.25) $A^{**} = \{T \subset Z \ / \ \exists S \in A \quad T \supset S\}$.

Démonstration.

Posons :

(III.26) $\hat{A} = \{T \subset Z \ / \ \exists S \in A \quad T \supset S\} \supset A$.

Soit S un élément de $\hat{A}$. Il existe un élément S_0 de A, contenu dans S. Quelque soit T dans A^*, T rencontre S_0 par définition de A^*, donc T rencontre S. Donc S est dans A^{**}. Nous venons de montrer :

(III.27) $A \subset \hat{A} \subset A^{**}$.

Démontrons maintenant le lemme : soit $S \in A^{**}$ nous voulons prouver que S est dans $\hat{A}$. Supposons que ce ne soit pas vrai; alors on a :

(III.28) $\forall T \in A \qquad T \not\subset S$

Autrement dit :

(III.29) $\forall T \in A \qquad \exists\, z_T \in T;\ z_T \notin S$

Posons :

(III.30) $R = \bigcup_{T \in A} \{z_T\}$.

Alors il est clair que R est un élément de A^* et que d'autre part :

(III.31) $R \cap S = \emptyset$.

C'est la contradiction cherchée.

Théorème (III.2).

Soit $\mathcal{X}$ une famille d'éléments de $F(Y,X)$ contenant les applications constantes et soit $\mathcal{Y}$ une famille d'éléments de $F(X,Y)$ contenant les applications constantes. Alors il est équivalent de dire :

i) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est une couple décisionnel et un au moins des prolongements par échange d'information associés est jouable.

ii) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un couple décisionnel et tous les prolongements par échange d'information associés sont jouables.

iii) On a :

(III.32) $\mathcal{X}^{**} = \mathcal{Y}^{*}$

iv) On a :

(III.33) $\mathcal{Y}^{**} = \mathcal{X}^{*}$

Démonstration.

Etape 1.

Supposons que iii) est vraie et démontrons ii). D'abord $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est réalisable car on a d'après iii) et le lemme (III.1)

(III.34) $\mathcal{X} \subset \hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^{**} = \mathcal{Y}^{*}$

Autrement dit si $\xi \in \mathcal{X}$ et $\eta \in \mathcal{Y}$, leurs graphes se coupent, c'est à dire que $F(\xi,\eta)$ est non vide.

Montrons maintenant que tous les prolongements par échange d'information associés à $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ sont jouables : procédons par l'absurde et supposons qu'il en existe un qui ne le soit pas. C'est à dire qu'il existe une section f de F et une fonction de gain g telle que :

(III.35) $\sup_{\xi} \inf_{\eta} g(f(\xi,\eta)) = \alpha < \beta = \inf_{\eta} \sup_{\xi} g(f(\xi,\eta))$.

Or puisque $\mathcal{Y}$ contient les applications constantes, pour tout ξ fixé on a :

(III.36) $\inf_\eta g(f(\xi,\eta)) \leq \inf_y g(f(\xi,j(y))) = \inf_y g(\xi(y),y)$.

Comme d'autre part $f(\xi,\eta)$ est un élément du type $(\xi(y),y)$ (cf. la définition de $F(\xi,\eta)$ (III.2)) nous en déduisons :

(III.37) $\forall\xi \; \inf_\eta g(f(\xi,\eta)) = \inf_y g(\xi(y),y)$

et de même

(III.38) $\forall\eta \; \sup_\xi g(f(\xi,\eta)) = \sup_x g(x,\eta(x))$

Donc la relation (III.35) s'écrit :

(III.39) $\sup_\xi \inf_y g(\xi(y),y) = \alpha < \beta = \inf_\eta \sup_x g(x,\eta(x))$.

Donc pour tout ξ il existe y_ξ et pour tout η il existe x_η tels que :

(III.40) $g(\xi(y_\xi),y_\xi) \leq \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3} < \alpha + \frac{2(\beta-\alpha)}{3} \leq g(x_\eta,\eta(x_\eta))$.

Considérons :

(III.41) $S = \{(\xi(y_\xi),y_\xi)\}_{\xi\in\mathcal{X}}$; $T = \{(x_\eta,\eta(x_\eta))\}_{\eta\in\mathcal{Y}}$

Alors il est clair que T est disjoint de S. De plus pour tout η, T rencontre le graphe de η. Donc $T \in \mathcal{Y}^*$. Enfin pour tout ξ il y a un point du graphe de ξ qui est dans S, donc le graphe de ξ n'est pas inclus dans T. Donc $T \notin \hat{\mathcal{X}}$. C'est la contradiction cherchée. Nous avons montré iii) $\Rightarrow$ ii) et ii) $\Rightarrow$ i) est clair.

<u>Etape 2</u>.

Supposons maintenant i) et démontrons iii). Pour tout (ξ,η) dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ on a :

(III.42) $\xi \cap \eta \neq \emptyset$ (les applications sont identifiées à leur graphe).

Donc $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}^*$ ce qui entraine clairement : $\hat{\mathcal{X}} \subset \mathcal{Y}^*$. Il nous reste à montrer que $\hat{\mathcal{X}} \supset \mathcal{Y}^*$. Si ce n'est pas le cas il existe une partie A de X x Y telle que :

(III.43) $A \notin \hat{\mathcal{X}} : \forall\xi \in \mathcal{X} \quad \xi \not\subset A$

et que :

(III.44) $A \in \mathcal{Y}^* : \forall\eta \in \mathcal{Y} \quad A \cap \eta \neq \emptyset$

Autrement dit on a :

(III.45) $\forall \xi \ \exists y \ (\xi(y),y) \notin A$

et

(III.46) $\forall \eta \ \exists x \ (x,\eta(x)) \in A$.

Soit g l'élément suivant de $\mathcal{A}(X \times Y)$:

(III.47) $g(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in A \\ 0 \text{ si } (x,y) \notin A \end{cases}$

Par hypothèse, il existe une section f de F telle que le prolongement par échange d'information associé est jouable. D'après les relations (III.37) et (III.45) on a alors :

(III.48) $\forall \xi \ \inf_{\eta} g(f(\xi,\eta)) = \inf_{y} g(\xi(y),y) \leq 0$

D'après les relations (III.38) et (III.46), on a aussi :

(III.49) $\forall \eta \ \sup_{\xi} g(f(\xi,\eta)) = \sup_{x} g(x,\eta(x)) \geq 1$.

Finalement :

(III.50) $\sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) = 0 < 1 = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta)$

c'est la contradiction désirée.

Etape 3.

Enfin la symétrie en ξ et η des hypothèses iii) et iv) montre que iv) équivaut à i) et le théorème est démontré.

Remarque (III.2).

Au cours de la démonstration du théorème nous avons établi les relations (III.37) et (III.38) qui assurent que si le couple $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est décisionnel les nombres $\sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta)$ et $\inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta)$ ne dépendent pas du choix de la section f. Donc si un des prolongements par échange d'information associés à $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est jouable ils le sont tous (théorème III.2) et de plus ils ont la même valeur. Ceci montre qu'on peut toujours supposer que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des sous-ensembles de $F(Y,X)$ et de $F(X,Y)$ et qu'il est en fait sans intérêt d'envisager le cas où ce sont des familles (cf. remarque (III.1)).

Définition (III.3).

Soient $\mathcal{X}$ un sous ensemble de $F(Y,X)$ contenant les applications constantes et soit $\mathcal{Y}$ un sous ensemble de $F(X,Y)$ contenant les applications constantes. Alors on dit que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est jouable si l'une des 2 conditions équivalentes suivantes est vraie :

(III.51) $\mathcal{X}^{**} = \mathcal{Y}^{*}$

(III.52) $\mathcal{Y}^{**} = \mathcal{X}^{*}$

c'est à dire si $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un couple décisionnel et si les prolongements par échange d'information associés sont jouables.

Nous allons maintenant interpréter la condition de jouabilité (III.51) (ou (III.52)).

Nous remarquons d'abord que puisque $\mathcal{X}$ contient les constantes, tout élément T de $\mathcal{X}^{*}$ est le graphe d'une correspondance $T : X \to Y$. En effet pour tout x T rencontre $\{x\} \times Y$. Nous identifions les éléments de $\mathcal{X}^{*}$ et les correspondances associées :

Définition (III.4).

Soit $\mathcal{X}$ un sous ensemble de $F(Y,X)$ contenant les constantes. On appelle réponse possible de Yves à $\mathcal{X}$ une correspondance de X dans Y qui est dans $\mathcal{X}^{*}$ et dont le graphe y est minimal au sens de l'inclusion. On note $\mathcal{X}^{+}$ leur ensemble.

On définit de même l'ensemble $\mathcal{Y}^{+}$ des réponses possibles de Xavier à $\mathcal{Y}$.

Le théorème (III.2) entraine alors :

Corollaire (III.1).

Supposons que X et Y sont finis. Soit $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un couple :

(III.53) $X \subset \mathcal{X} \subset F(Y,X)$; $Y \subset \mathcal{Y} \subset F(X,Y)$.

Alors $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est jouable si et seulement si l'une des 2 conditions équivalentes suivantes est vraie :

(III.54) $\mathcal{X}^{+}$ <u>ne contient que des applications et</u> $\mathcal{X}^{+} = \mathcal{Y}$

(III.55) $\mathcal{Y}^{+}$ <u>ne contient que des applications et</u> $\mathcal{Y}^{+} = \mathcal{X}$.

<u>Démonstration</u>.

Nous allons démontrer par exemple que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est jouable si et seulement si (III.54) est vraie.. D'après le théorème (III.2) et la définition (III.3) nous devons montrer que la relation (III.52) est vraie si et seulement si la relation (III.54) l'est.

Supposons $\mathcal{X}^{*} = \mathcal{Y}^{**}$ alors $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}^{*}$ (lemme (III.1)). Or un élément de $\mathcal{Y}$ est le graphe d'une application de X dans Y. Puisque tous les éléments de $\mathcal{X}^{*}$ sont des correspondances de X dans Y, il est donc minimal pour l'inclusion dans $\mathcal{X}^{*}$. Donc : $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}^{+}$.
Soit maintenant une correspondance T de $\mathcal{X}^{+}$. Alors T est dans $\mathcal{X}^{*}$ donc dans $\mathcal{Y}^{**}$, par conséquent il existe un élément η de $\mathcal{Y}$ tel que $T \supset \eta$. Puisque η est dans $\mathcal{X}^{*}$ et que T y est minimal on a donc : $T = \eta$. Finalement on vient de montrer $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{+}$ ce qui établit au passage que $\mathcal{X}^{+}$ ne contient que des applications.
Réciproquement supposons que $\mathcal{X}^{+}$ ne contienne que des applications (il contient en tout cas les applications constantes de X dans Y) et montrons que $(\mathcal{X},\mathcal{X}^{+})$ est jouable. Il suffit de vérifier (théorème (III.2))

(III.56) $\mathcal{X}^{*} = (\mathcal{X}^{+})^{**}$.

Or l'inclusion

(III.57) $\mathcal{X}^{*} \supset (\mathcal{X}^{+})^{**}$

est claire d'après $\mathcal{X}^{+} \subset \mathcal{X}^{*}$ et le lemme (III.1). Dans l'autre sens il suffit de remarquer que tout élément de $\mathcal{X}^{*}$ contient un élément minimal dans $\mathcal{X}^{*}$ pour l'inclusion ($\mathcal{X}$ est fini par hypothèse).

■

<u>Remarque</u> (III.3).

Nous aurions pu aussi définir des prolongements par échange d'information dont les stratégies prolongées sont des ensembles de correspondances de Y dans X (Xavier) et de X dans Y (Yves). Dans ce cas la condition de jouabilité de $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ devenait simplement $\mathcal{X}^+ = \mathcal{Y}$ (ou $\mathcal{Y}^+ = \mathcal{X}$).

Remarque (III.4).

L'interprétation du corollaire (III.1) est la suivante : un couple $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (où $\mathcal{X}$ est un ensemble de "règles de décision" pour Xavier et $\mathcal{Y}$ un ensemble de règles de décision pour Yves) est jouable si et seulement si Yves exploite au maximum ses possibilités de réponse contre $\mathcal{X}$ (et vice versa pour Xavier). Autrement dit, si un couple $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est jouable, l'échange d'information y est maximal, au sens de la relation d'ordre suivante :

(III.58) $\left[\begin{array}{l}\text{Dans } (\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1) \text{ l'échange d'information est plus grand que dans} \\ (\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2)\text{, si et seulement si : } \mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1 \text{ et } \mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}_1\end{array}\right.$

III.4. UN EXEMPLE : L'ECHANGE EXPLICITE D'INFORMATION.

Une façon simple, et habituelle en théorie des jeux, d'exprimer que Yves possède une information sur la stratégie pure que va choisir Xavier est la suivante : On se donne une relation d'équivalence r sur X telle que, avant de choisir sa stratégie pure y, Yves est informé de r(x). Nous allons décrire un schéma où chacun des joueurs possède plusieurs informations successives (relations d'équivalence de plus en plus fines) sur le comportement de l'adversaire. Nous identifierons une relation d'équivalence r et sa surjection cannonique :

(III.59) $r : X \to \dot{X}$

et nous dirons que r est plus fine que r' ($r < r'$) si et seulement si :

(III.60) $\forall x, x' \in X : r(x) = r(x') \Rightarrow r'(x) = r'(x')$.

Soit alors 2 suites finies de relations d'équivalence :

(III.61) $r_1 > r_2 > \dots > r_N$ relations définies sur X

(III.62) $s_1 > s_2 > \dots > s_N$ relations définies sur Y.

La connaissance de $S_i(y)$ est un renseignement sur y d'autant plus précis que i augmente. Appelons $X(r_1,\dots r_N;S_1,\dots S_N)$ l'ensemble des applications ξ de Y dans X telles que :

$$\text{(III.63)} \quad \begin{cases} S_1(y) = S_1(y') \Rightarrow r_1(\xi(y)) = r_1(\xi(y')) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ S_N(y) = S_N(y') \Rightarrow r_N(\xi(y)) = r_N(\xi(y')). \end{cases}$$

On définit symétriquement $Y(S_1,\dots S_N;r_1,\dots r_N)$. Notons e la relation d'égalité et $\emptyset$ la relation d'équivalence qui a une seule classe d'équivalence.

<u>Lemme</u> (III.2).

<u>On a</u> $X^+(r_1,\dots r_N;S_1,\dots S_N) = Y(S_1,\dots S_N,e;\emptyset,r_1,\dots,r_N)$ <u>et</u> X^+ <u>ne comporte donc que des applications</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit η dans $Y(S_1,\dots S_N,e;\emptyset,r_1,\dots r_N)$, on a donc :

$$\text{(III.64)} \quad \begin{cases} \emptyset(x) = \emptyset(x') \Rightarrow S_1(\eta(x)) = S_1(\eta(x')) \text{ i.e. } S_1(\eta(x)) \text{ constant} \\ r_1(x) = r_1(x') \Rightarrow S_2(\eta(x)) = S_2(\eta(x')) \\ \qquad\vdots \\ r_{N-1}(x) = r_{N-1}(x') \Rightarrow S_N(\eta(x)) = S_N(\eta(x')) \\ r_N(x) = r_N(x') \Rightarrow \eta(x) = \eta(x'). \end{cases}$$

Montrons que η a un unique point fixe avec tout élément ξ de $X(r_1,\dots r_N;S_1,\dots S_N)$. Les relations (III.64) montrent que η passe successivement au quotient en $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{N+1}$:

$$\text{(III.65)} \quad \begin{cases} \eta_1 : X/\emptyset \to Y/S_1 \quad \text{i.e. } \eta_1 \in Y/S_1 \\ \eta_2 : X/r_1 \to Y/S_2 \\ \qquad\vdots \\ \eta_N : X/r_{N-1} \to Y/S_N \\ \eta_{N+1} : X/r_N \to Y \end{cases}$$

et les relations (III.63) montrent que ξ passe au quotient en $\xi_1,\dots\xi_N$:

$$(\text{III.66}) \quad \begin{cases} \xi_1 : Y/S_1 \to X/r_1 \\ \xi_2 : Y/S_2 \to X/r_2 \\ \quad\vdots \\ \xi_N : Y/S_N \to X/r_N \end{cases}$$

Supposons que (x,y) soit dans $F(\xi,\eta)$

$$(\text{III.67}) \quad x = \xi(y);\ y = \eta(x)$$

et appliquons (III.67) aux quotients successifs $\eta_1,\xi_1,\eta_2,\xi_2,\ldots\xi_N,\eta_{N+1}$. Il vient :

$$(\text{III.68}) \quad \begin{cases} S_1(y) = \eta_1;\ \xi_1(S_1(y)) = r_1(x) \\ S_2(y) = \eta_2(r_1(x));\ \xi_2(S_2(y)) = r_2(x) \\ \quad\vdots \\ S_N(y) = \eta_N(r_{N-1}(x));\ \xi_N(S_N(y)) = r_N(x) \\ y = \eta_{N+1}(r_N(x)) \end{cases}$$

Le système (III.68) montre que (x,y) est nécessairement défini par

$$(\text{III.69}) \quad y = \eta_{N+1} \circ \xi_N \circ \eta_N \circ \ldots \circ \eta_2 \circ \xi_1(\eta_1);\ x = \xi(y)$$

Réciproquement montrons que (III.69) définit bien un point de $F(\xi,\eta)$. En effet si on identifie les éléments de Y/S_i avec leurs classes d'équivalence, on a :

$$(\text{III.70}) \quad \eta_1 \supset \eta_2 \circ \xi_1(\eta_1).$$

Puis, d'après (III.63) et (III.61)

$$(\text{III.71}) \quad \xi_1(\eta_1) \supset \xi_2(\eta_2 \circ \xi_1(\eta_1)).$$

Donc en combinant avec (III.64) et (III.62) :

$$(\text{III.72}) \quad \eta_2 \circ \xi_1(\eta_1) \supset \eta_3 \circ \xi_2 \circ \eta_2 \circ \xi_1(\eta_1)$$

On peut continuer ainsi jusqu'à :

$$(\text{III.73}) \quad \eta_N \circ \xi_{N-1} \circ \ldots \circ \xi_1(\eta_1) \supset \eta_{N+1} \circ \xi_N \circ \ldots \circ \xi_1(\eta_1) = y$$

Puis, à l'aide de (III.69)

$$(\text{III.74}) \quad \xi_N \circ \eta_N \circ \ldots \circ \xi_1(\eta_1) \supset \xi(y) = x$$

Et enfin :

(III.75) $\eta_{N+1} \circ \xi_N \circ \ldots \circ \xi_1(\eta_1) = y \supset \eta(x)$

Ce qui démontre que $y = \eta(x)$ et donc que (x,y) est dans $F(\xi,\eta)$. Pour montrer que $\mathcal{Y}(S_1,\ldots S_N,e;\emptyset,r_1,\ldots r_N)$ est égal à l'ensemble des réponses possibles de Yves à $\mathcal{X}(r_1,\ldots r_N;S_1,\ldots S_N)$ on choisit une règle de décision η pour laquelle l'une des relations (III.64) est fausse. Par exemple on suppose qu'il existe x et x' tels que :

(III.76) $S_1(\eta(x)) \neq S_1(\eta(x'))$

on choisit alors la règle de décision ξ :

(III.77) $\xi(y) = x'$ si $y \in S_1(\eta(x))$; $\xi(y) = x$ sinon.

On vérifie que ξ est dans $\mathcal{X}(r_1,\ldots r_N;S_1,\ldots S_N)$ et que $F(\xi,\eta)$ est vide.

■

L'interprétation du prolongement associé au couple jouable $\mathcal{X}(r_1,\ldots r_N,S_1\ldots S_N)$, $\mathcal{Y}(S_1,\ldots S_N,e;\emptyset,r_1,\ldots r_N)$ est la suivante : Yves choisit $\dot{y}_1 \in Y/S_1$ et informe Xavier de ce choix. Puis Xavier tenant compte de ce renseignement choisit $\dot{x}_1 \in X/r_1$ et en informe Yves. Yves choisit alors $\dot{y}_2 \in Y/S_2$ en respectant le renseignement déjà fourni : la classe de $\dot{y}_2$ est incluse dans celle de $\dot{y}_1$. Et ainsi de suite, chacun restreignant de plus en plus son choix et informant alternativement son adversaire de ces restrictions. Finalement, la $N^{\text{ième}}$ intervention de Yves est pour choisir $\dot{y}_N \in Y/S_N$ connaissant $\dot{x}_{N-1} \in X/r_{N-1}$ et respectant les engagements pris : $\dot{y}_N \subset \dot{y}_{N-1}$. Puis Xavier choisit $\dot{x}_N \in X/r_N$ en fonction de $\dot{y}_N$ et enfin Yves choisit le point $y \in Y$ dans la classe $\dot{y}_N$ en fonction de $\dot{x}_N$, informe Xavier de son choix qui choisit alors $x \in X$ dans $\dot{x}_N$. Il s'agit là d'un exemple typique de jeu à information parfaite et il n'est donc pas étonnant que nous trouvions un prolongement jouable (cf. [Gale, Stewart]). Ce qui est plus intéressant, et qui confirme la remarque (III.4), c'est que, la structure d'information de Xavier étant donnée ($\mathcal{X}$ étant donnée), seule la manière de jouer associée où l'on donne à Yves toute l'information "restante" (c'est à dire toutes les réponses possibles) permet de donner dans tous les cas une valeur au jeu.

III.5. AUTRES EXEMPLES DE PROLONGEMENTS PAR ECHANGE D'INFORMATION.

D'après le corollaire (III.1), au moins dans le cas où X et Y sont finis, la recherche des couples $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ qui sont jouables équivaut à la recherche des sous-ensembles $\mathcal{X}$ de $\mathcal{F}(Y,X)$ (contenant les constantes) tels que $\mathcal{X}^+$ ne contient que des applications. Une condition nécessaire nous sera utile :

Lemme (III.3).

<u>Supposons que</u> X <u>et</u> Y <u>soient finis</u>. <u>Pour que</u> $\mathcal{X}^+$ <u>ne contienne que des applications, il faut que l'on ait</u> :

$$\text{(III.77)'}\quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X} \;\; \forall x \in X \;\; [\xi_1^{-1}(x) \neq \emptyset;\; \xi_2^{-1}(x) \neq \emptyset;\; \xi_1^{-1}(x) \cap \xi_2^{-1}(x) = \emptyset]$$
$$\Rightarrow [\exists \xi \in \mathcal{X} \;\; \xi^{-1}(x) = \emptyset \;\underline{\text{et}}\; \xi \subset \xi_1 \cup \xi_2]$$

(la dernière inclusion portant sur les graphes des applications).

Démonstration.

Si la relation (III.77) est fausse il existe ξ_1, ξ_2, x qui la mettent en défaut. Posons :

$$\text{(III.78)}\quad T = (\xi_1 \cup \xi_2)^c \cup (\{x\} \times Y) \subset X \times Y$$

Alors T est dans $\mathcal{X}^*$. En effet si ξ est tel que :

$$\text{(III.79)}\quad \xi^{-1}(x) \neq \emptyset$$

alors ξ coupe $\{x\} \times Y$;

et si ξ est tel que :

$$\text{(III.80)}\quad \xi \not\subset \xi_1 \cup \xi_2$$

Alors ξ coupe $(\xi_1 \cup \xi_2)^c$. Or nous avons supposé que tout élément ξ de $\mathcal{X}$ vérifiait (III.79) ou (III.80). Choisissons maintenant un élément T_0, minimal dans $\mathcal{X}^*$ et inclus dans T. Alors T_0 coupe ξ_1 et ξ_2, donc :

$$\text{(III.81)}\quad T_0 \cap \xi_1 \subset T \cap \xi_1 = \{x\} \times \xi_1^{-1}(x)$$

$$\text{(III.82)}\quad T_0 \cap \xi_2 \subset T \cap \xi_2 = \{x\} \times \xi_2^{-1}(x).$$

Donc $T_0(x)$ (on considère T_0 comme une correspondance de X dans Y) coupe $\xi_1^{-1}(x)$ et $\xi_2^{-1}(x)$ qui sont disjoints par hypothèse. Par conséquent $T_0(x)$ contient au moins deux points et n'est pas une application.

Nous examinons maintenant quelques exemples de sous-ensembles $\mathcal{X}$.

Exemple (III.3).

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des applications constante ($\mathcal{X} = i(X)$). Alors $\mathcal{X}^+ = \mathcal{F}(X,Y)$ ne contient que des applications et le couple $(X,\mathcal{F}(X,Y))$ est jouable. C'est le prolongement le plus avantageux pour Yves : Xavier choisit sa stratégie pure, et Yves est informé de ce choix avant de choisir sa propre stratégie (cf. exemple (III.1)). La valeur de πg est alors : $\sup\limits_x \inf\limits_y g(x,y)$.

Exemple (III.4).

Supposons que $\mathcal{X}$ contienne, outre les applications constantes, une seule application non constante. Alors on vérifie aisément que $\mathcal{X}^+$ ne contient que des applications, donc que le couple $(\mathcal{X},\mathcal{X}^+)$ est jouable.
Par exemple si $X = Y = \{1,2,3\}$ et si la seule règle de décision ξ permise à Xavier qui n'est pas une stratégie pure est :

(III.83) $i = 1,2,3 \quad \xi(i) = i$

cela signifie que Xavier peut jouer, soit une stratégie pure, soit "la même chose que Yves" (sans connaître le choix de Yves). Alors les règles de décision de $\mathcal{X}^+$ sont les applications η telles que :

(III.84) $\exists i \in \{1,2,3\} \quad \eta(i) = i$

Autrement dit Yves est informé de la stratégie de Xavier mais il n'a pas le droit de jouer systématiquement "autre chose" que lui. Le prolongement ainsi construit est jouable.

Exemple (III.5).

Supposons que $\mathcal{X}$ contient, outre les applications constantes, 2 applications non constantes ξ_1 et ξ_2. Alors on déduit aisément du lemme (III.3) que $(\mathcal{X},\mathcal{X}^+)$ est jouable si et seulement si :

(III.85) $\forall x \in \xi_1(Y) \cap \xi_2(Y)$: $\xi_1^{-1}(x) \subset \xi_2^{-1}(x)$ ou bien $\xi_2^{-1}(x) \subset \xi_1^{-1}(x)$.

Par exemple si $X = Y = \{1,2,3\}$ et si les 2 stratégies prolongées ξ_1 et ξ_2 de Xavier qui ne sont pas pures sont :

(III.86) $i = 1,2,3 \quad \xi_1(i) = i$

(III.87) $i = 1,2,3 \quad \xi_2(i) = i+1$ (avec la convention $3+1 = 1$)

cela signifie que Xavier peut jouer, soit une stratégie pure, soit "la même chose" que Yves, soit "le successeur de la stratégie de Yves". Comme ξ_1 et ξ_2 ne vérifient pas (III.85) nous en déduisons qu'il n'existe pas de couple (X,Y) jouable. Autrement dit, il n'existe pas de famille de règles de décision pour Yves "équilibrant" les possibilités stratégiques de Xavier.

<u>Exemple</u> (III.6).

Si $X = Y = \{1,2,3\}$ et si les 2 stratégies prolongées ξ_1 et ξ_2 de Xavier qui ne sont pas pures sont :

(III.88) $\xi_1(1) = \xi_1(3) = 1; \ \xi_1(2) = 2$

(III.89) $\xi_2(1) = \xi_2(3) = 3; \ \xi_2(2) = 2$

cela signifie que Xavier peut jouer, soit une stratégie pure, soit (2 si Yves joue la même chose, ou sinon 1) soit (2 si Yves joue la même chose, ou sinon 3). Alors ξ_1 et ξ_2 vérifient (III.85) donc (X,X^+) est jouable. Donc si Yves peut utiliser toutes les règles de décision "compatibles" avec les possibilités stratégiques de Xavier, alors on obtient un prolongement jouable.

IV. <u>PROLONGEMENTS COMPOSES</u>. <u>JEUX ITERES</u>.

IV.1. DEFINITION DES PROLONGEMENTS COMPOSES.

Dans le but de formaliser la notion "d'échange partiel d'information" nous allons composer les deux types de prolongements que nous venons d'étudier : autrement dit nous allons composer un prolongement sans échange d'information (II) et un prolongement par échange d'information (III).

Ce choix n'est pas fortuit : en effet dans la partie suivante (V.§3) nous montrerons que <u>tous</u> les prolongements jouables, sont, en un certain sens, équivalents à un prolongement composé de ce type.

<u>Proposition</u> (IV.1).

<u>Soit</u> $p_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, i_1, j_1, \pi_1)$ <u>un prolongement des jeux sur</u> X x Y <u>et</u> $p_2 = (\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, i_2, j_2, \pi_2)$ <u>un prolongement des jeux sur</u> $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1$ $(\pi_2 : A(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1) \to A(\mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_2))$. <u>Alors</u> $p = (\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, i_2 \circ i_1, j_2 \circ j_1, \pi_2 \circ \pi_1)$ <u>est un prolongement des jeux sur</u> X x Y. <u>On l'appelle le prolongement composé de</u> p_1 <u>avec</u> p_2.

<u>Démonstration</u>.

Il est clair que $i_2 \circ i_1$ et $j_2 \circ j_1$ sont 2 injections :

(IV.1) $\quad i_2 \circ i_1 : X \to \mathcal{X}_2;\ j_2 \circ j_1 : Y \to \mathcal{Y}_2.$

De même $\pi_2 \circ \pi_1$ est clairement un opérateur linéaire :

(IV.2) $\quad \pi_2 \circ \pi_1 : A(X \times Y) \to A(\mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_2)$

vérifiant (I.4).

Enfin nous allons montrer que l'opérateur transposé $(\pi_2 \circ \pi_1)^*$ vérifie les relations (I.12). Montrons par exemple que (I.12.ii) est vraie. Supposons fixés $\xi_2 \in \mathcal{X}_2$ et $y \in Y$ et montrons que $(\pi_2 \circ \pi_1)^* (\xi_2, j_2 \circ j_1(y))$ est un élément de $A_1'(X) \otimes \delta_y$. Notons $m = (\pi_2 \circ \pi_1)^* (\xi_2, j_2 \circ j_1(y))$ la forme linéaire définie par :

(IV.2)' $\quad \forall g \in A(X \times Y)\ [m,g] = (\pi_2 \circ \pi_1)(g)(\xi_2, j_2 \circ j_1(y)).$

Puisque π_2 est un prolongement des jeux sur $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1$:

(IV.3) $\quad \pi_2^*(\xi_2, j_2(j_1(y))) = \mu \otimes \delta_{j_1(y)} \in A_1'(\mathcal{X}_1) \otimes \delta_{j_1(y)}$

Supposons que $\mu \in A_1'(\mathcal{X}_1)$ est une mesure discrète :

(IV.4) $\quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\xi_1^i};\ \alpha_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Alors on a :

(IV.5) $\quad \pi_2(\pi_1 g)(\xi_2, j_2(j_1(y))) = [(\Sigma \alpha_i \delta_{\xi_1^i}) \otimes \delta_{j_1(y)}, \pi_1 g]_1$

où $[\ ,\ ]_1$ est le crochet de dualité entre $A'(X_1 \times Y_1)$ et $A(X_1 \times Y_1)$.
Donc (IV.2) et (IV.5) entrainent :

(IV.6) $\forall g \in A(X \times Y)\ [m,g] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_1 g(\xi_1^i, j_1(y))$

et comme π_1 est un prolongement :

(IV.7) $\pi_1 g(\xi_1^i, j_1(y)) = [\pi_1^*(\xi_1^i, j_1(y)), g] = [\mu_i \otimes \delta_y, g]$

où $\mu_i \in A_1'(X)$. Finalement on déduit de (IV.6) et (IV.7) :

(IV.8) $\forall g \in A(X \times Y)\ [m,g] = [(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i) \otimes \delta_y, g]$

donc m est un élément de $A_1'(X) \otimes \delta_y$. Si maintenant μ est une mesure quelconque de $A_1'(X_1)$, elle est dans l'adhérence faible de l'ensemble des mesures discrètes, donc m est la limite faible d'une suite généralisée d'éléments de $A_1'(X) \otimes \delta_y$. Comme $A_1'(X)$ est faiblement fermé, nous obtenons :

(IV.9) $(\pi_2 \circ \pi_1)^*(\xi_2, j_2 \circ j_1(y)) \in A_1'(X) \otimes \delta_y$

■

<u>Définition</u> (IV.1).

<u>Un prolongement qui est le composé d'un prolongement sans échange d'information avec un prolongement par échange d'information est appelé un prolongement avec échange partiel d'information</u>.

L'exemple des jeux itérés (IV.§3) fournira une justification de cette terminologie.

IV.2. CARACTERISATION DES PROLONGEMENTS AVEC ECHANGE PARTIEL D'INFORMATION.

<u>Définition</u> (IV.2).

<u>Soit</u> $p = (X, Y, i, j, \pi)$ <u>un prolongement</u>. <u>Une stratégie aveugle de Xavier est une stratégie prolongée</u> ξ <u>telle que</u> :

(IV.10) $p_X(\pi^*(\xi,\eta))$ <u>ne dépend pas de</u> η.

<u>Une stratégie aveugle de Yves est une stratégie prolongée</u> η <u>telle que</u> :

(IV.11) $p_Y(\pi^*(\xi,\eta))$ <u>ne dépend pas de</u> ξ.

Les prolongements sans échange d'information sont précisément ceux dont toutes les stratégies sont aveugles (cf. proposition (II.1)).
Dans tous les prolongements les stratégies pures (ou plutôt leurs images i(X) et j(Y) dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$) sont aveugles, puisque (proposition I.2) :

(IV.12) $\quad p_X(\pi^*(i(x),\eta)) = \delta_x$

(IV.13) $\quad p_Y(\pi^*(\xi,j(y))) = \delta_y$.

Nous allons maintenant caractériser les prolongements avec échange partiel d'information à l'aide des stratégies aveugles.

Théorème (IV.1).

a) Soit $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ un prolongement avec échange partiel d'information. Alors pour tout élément (ξ,η) de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, il existe une stratégie aveugle ξ_0 de Xavier et une stratégie aveugle η_0 de Yves telles que :

(IV.14) $\quad \pi^*(\xi,\eta) = \pi^*(\xi_0,\eta) = \pi^*(\xi,\eta_0) = \pi^*(\xi_0,\eta_0)$

b) Soit $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ un prolongement tel que pour tout élément (ξ,η) de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ il existe une unique stratégie aveugle ξ_0 de Xavier, et une unique stratégie aveugle η_0 de Yves vérifiant (IV.14). Alors p est isomorphe à un prolongement avec échange partiel d'information.

Autrement dit, les prolongements avec échange partiel d'information sont caractérisés (à la restriction d'unicité près) par le fait que, devant un comportement donné de Yves, Xavier peut remplacer toute stratégie prolongée de $\mathcal{X}$ par une stratégie aveugle (et vice versa pour Yves).

Démonstration.

Etape 1.

Soit p un prolongement avec échange partiel d'information : il est le composé de $p_1 = (\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1,i_1,j_1,\pi_1)$ (sans échange d'information), avec $p_2 = (\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2,i_2,j_2,\pi_2)$ (par échange d'information). Choisissons (ξ_2,η_2) dans $\mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_2$, alors d'après le théorème (III.1) il existe (ξ_1,η_1) dans $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1$ tel que :

$$(IV.15)\qquad \pi_2^*(\xi_2,\eta_2) = \pi_2^*(i_2(\xi_1),\eta_2) = \pi_2^*(\xi_2,j_2(\eta_1)) = \delta_{\xi_1} \otimes \delta_{\eta_1}$$

or si $\tilde{\pi}_1$ désigne l'opérateur transposé de π_1, on a pour tous g, ξ et η :

$$(IV.16)\qquad [(\pi_2 \circ \pi_1)^*(\xi,\eta),g] = \pi_2(\pi_1 g)(\xi,\eta) = [\pi_2^*(\xi,\eta),\pi_1 g] = [\tilde{\pi}_1 \circ \pi_2^*(\xi,\eta),g].$$

Par conséquent :

$$(IV.17)\qquad (\pi_2 \circ \pi_1)^* = \tilde{\pi}_1 \circ \pi_2^*.$$

En composant chaque membre de (IV.15) avec $\tilde{\pi}_1$ et en tenant compte de (IV.17), on trouve donc :

$$(IV.18)\qquad \pi^*(\xi_2,\eta_2) = \pi^*(i_2(\xi_1),\eta_2) = \pi^*(\xi_2,j_2(\eta_1)) = \tilde{\pi}_1(\delta_{\xi_1} \otimes \delta_{\eta_1}).$$

Une nouvelle application de (IV.17) donne :

$$(IV.19)\qquad \pi^*(i_2(\xi_1),j_2(\eta_1)) = \tilde{\pi}_1(\pi_2^*(i_2(\xi_1),j_2(\eta_1))) = \tilde{\pi}_1(\delta_{\xi_1} \otimes \delta_{\eta_1})$$

Finalement (IV.18) et (IV.19) montrent que (ξ_2,η_2) et $(i_2(\xi_1),j_2(\eta_1))$ vérifient la relation (IV.14). Il nous reste à montrer que $i_2(\xi_1)$ est une stratégie aveugle de Xavier dans le prolongement p (et de façon analogue que $j_2(\eta_1)$ est une stratégie aveugle de Yves). Il s'agit donc de montrer que $p_X(\pi^*(i_2(\xi_1),\eta_2))$ ne dépend pas de η_2. Or d'après (IV.17) :

$$(IV.20)\qquad p_X(\pi^*(i_2(\xi_1),\eta_2)) = p_X[\tilde{\pi}_1(\pi_2^*(i_2(\xi_1),\eta_2))]$$

La relation (I.12.i) montre qu'il existe ν dans $\mathcal{A}_1'(\mathcal{Y}_1)$ tel que :

$$(IV.21)\qquad p_X(\pi^*(i_2(\xi_1),\eta_2)) = p_X(\tilde{\pi}_1(\delta_{\xi_1} \otimes \nu))$$

Soit g un élément de $\mathcal{A}(X)$. Alors $\pi_1 g$ est dans $\mathcal{A}(X_1)$ puisque le prolongement p_1 est sans échange d'information (cf. définition (II.1)). Donc on a :

$$(IV.22)\qquad [\tilde{\pi}_1(\delta_{\xi_1} \otimes \nu),g] = [\delta_{\xi_1} \otimes \nu,\pi_1 g] = \pi_1 g(\xi_1)$$

Finalement (IV.21) et (IV.22) montrent, pour tout g dans $\mathcal{A}(X)$:

$$(IV.23)\qquad [p_X(\pi^*(i_2(\xi_1),\eta_2)),g] = [\tilde{\pi}_1(\delta_{\xi_1} \otimes \nu),g] = \pi_1 g(\xi_1)$$

On en déduit immédiatement que $p_X(\pi^*(i_2(\xi_1),\eta_2))$ ne dépend pas de η_2 et la partie a) du théorème est établie.

Etape 2.

Soit p un prolongement tel que pour tout élément (ξ,η) de $X \times Y$ il existe un unique couple (ξ_0,η_0) de stratégies aveugles tel que (IV.14) ait lieu. Nous définissons le prolongement $p_1 = (X_1, Y_1, i_1, j_1, \pi_1)$ par

$$\text{(IV.24)} \quad \begin{cases} X_1 \text{ est l'ensemble des stratégies aveugles de Xavier dans p.} \\ Y_1 \text{ est l'ensemble des stratégies aveugles de Yves dans p.} \end{cases}$$

$$\text{(IV.25)} \quad i_1 = i;\ j_1 = j$$

$$\text{(IV.26)} \quad \forall (\xi_0,\eta_0) \in X_1 \times Y_1 : \pi_1^*(\xi_0,\eta_0) = \pi^*(\xi_0,\eta_0).$$

Alors la proposition (I.2) montre que p_1 est un prolongement des jeux sur X x Y et la définition (IV.2) que ce prolongement est sans échange d'information. Nous définissons maintenant le prolongement p_2 des jeux sur $X_1 \times Y_1$:

$$\text{(IV.27)} \quad X_2 = X;\ Y_2 = Y$$

$$\text{(IV.28)} \quad i_2 = \text{identité de } X_1;\ j_2 = \text{identité de } Y_1$$

$$\text{(IV.29)} \quad \forall (\xi,\eta) \in X_2 \times Y_2,\ \forall (\xi_0,\eta_0) \in X_1 \times Y_1 :$$
$$[\pi^*(\xi,\eta) = \pi^*(\xi,\eta_0) = \pi^*(\xi_0,\eta) = \pi^*(\xi_0,\eta_0)] \Rightarrow [\pi_2^*(\xi,\eta) = \delta_{\xi_0} \otimes \delta_{\eta_0}].$$

D'après l'hypothèse faite sur p, la relation (IV.29) définit bien une application π_2^* et cette application vérifie en outre :

$$\text{(IV.30)} \quad [\pi_2^*(\xi,\eta) = \delta_{\xi_0} \otimes \delta_{\eta_0}] \Rightarrow [\pi_2^*(\xi,\eta) = \pi_2^*(\xi_0,\eta) = \pi_2^*(\xi,\eta_0) = \pi_2^*(\xi_0,\eta_0)]$$

(puisqu'à tout couple (ξ,η) on peut associer un <u>unique</u> couple (ξ_0,η_0) vérifiant (IV.14)). Donc π_2^* définit un prolongement p_2 des jeux sur $X_1 \times Y_1$ (proposition (I.2)) et ce prolongement est isomorphe à un prolongement par échange d'information (théorème (III.1)). Il nous reste à montrer que p est le composé de p_1 avec p_2. Nous fixons un couple (ξ,η) dans $X \times Y = X_2 \times Y_2$ et nous appelons (ξ_0,η_0) l'unique élément de $X_1 \times Y_1$ vérifiant (IV.14) et (IV.29). On a alors, pour tous g dans $A(X \times Y)$

$$\text{(IV.31)} \quad [(\pi_2 \circ \pi_1)^*(\xi,\eta),g] = [\pi_2^*(\xi,\eta),\pi_1 g] = \pi_1 g(\xi_0,\eta_0) = [\pi_1^*(\xi_0,\eta_0),g]$$

D'après la relation (IV.26) il vient

(IV.32) $[(\pi_2 \circ \pi_1)^{\star}(\xi,\eta),g] = [\pi^{\star}(\xi_0,\eta_0),g] = [\pi^{\star}(\xi,\eta), g]$

Finalement $(\pi_2 \circ \pi_1)^{\star} = \pi^{\star}$ et la partie b) du théorème est établie.

■

IV.3. LES JEUX ITERES AVEC ECHANGE PARTIEL D'INFORMATION.

a) <u>Définition, exemples</u>.

Nous reprenons l'exemple des jeux itérés introduits en (II.4) mais nous allons cette fois supposer un échange d'information entre les 2 joueurs. Autrement dit si $p_a = (\tilde{X},\tilde{Y},i,j,\pi_a)$ désigne le jeu itéré de mesure a (définition (II.3)) nous allons composer ce prolongement avec un prolongement par échange d'information des jeux sur $\tilde{X} \times \tilde{Y}$. Nous supposons, par exemple, que le jeu itéré se déroule de la façon suivante : Xavier choisit x_1, puis Yves choisit y_1, puis Xavier choisit x_2 etc... Nous voulons exprimer qu'avant de choisir x_n, Xavier est informé de <u>certains</u> des coups qu'a joués Yves jusque là et que la situation est analogue pour Yves. Nous supposons donc données deux parties A et B de $\mathbb{N}$ et nous les interprétons de la façon suivante :

(IV.33) Avant de jouer x_n, Xavier est informé du choix des y_j tels que $j \in B \cap [0,n-1] = B_{n-1}$.

et de même :

(IV.34) Avant de jouer y_n, Yves est informé du choix des x_i tels que $i \in A \cap [0,n] = A_n$.

Remarquons, en particulier, que dans ce processus d'échange d'information, Xavier et Yves sont doués d'une parfaite mémoire. Soit ξ un élément de $F(\tilde{Y},\tilde{X})$ c'est à dire une application de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{X}$. Alors ξ s'identifie à une suite $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'applications :

(IV.35) $\xi_i : \tilde{Y} \to X \quad \forall i \in \mathbb{N}$

par

(IV.36) $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y} \quad \xi(y) = (\xi_i(\tilde{y}))_{i\in\mathbb{N}}$.

De même un élément η de $F(\tilde{X},\tilde{Y})$ s'identifie à une suite $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'applications :

(IV.37) $\quad \eta_j : \tilde{X} \to Y \quad \forall j \in \mathbb{N}$

par

(IV.38) $\quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \quad \eta(\tilde{x}) = (\eta_j(\tilde{x}))_{j\in\mathbb{N}}.$

Lemme (IV.1).

Soient A et B 2 parties de $\mathbb{N}$. Alors le couple $(\mathcal{X}_B,\mathcal{Y}_A)$ suivant est un couple décisionnel :

(IV.39) $\quad \mathcal{X}_B = \{\xi \in F(\tilde{Y},\tilde{X}) / \forall i \ \ \xi_i \in F(\prod_{j\in B_{i-1}} Y_j, X)\}$

(IV.40) $\quad \mathcal{Y}_A = \{\eta \in F(\tilde{X},\tilde{Y}) / \forall j \ \ \eta_j \in F(\prod_{i\in A_j} X_i, Y)\}$

Plus précisément, quels que soient ξ et η, $F(\xi,\eta)$ contient exactement un point de $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ que nous notons $[\xi,\eta]$.

Autrement dit si ξ est dans $\mathcal{X}_B$, ξ_i est indépendant des y_j tels que $j \notin B_{i-1}$, et si η est dans $\mathcal{Y}_A$, η_j est indépendant des x_i tels que $i \notin A_j$.

Démonstration.

Fixant ξ dans $\mathcal{X}_B$ et η dans $\mathcal{Y}_A$, nous devons montrer que l'application :

(IV.41) $\quad \tilde{X} \times \tilde{Y} \to \tilde{X} \times \tilde{Y} : (\tilde{x},\tilde{y}) \to (\xi(\tilde{y}),\eta(\tilde{x}))$

possède un unique point fixe. Nous procédons par récurrence, à l'aide des relations (IV.39) et (IV.40) :

$$(\text{IV.42}) \quad \begin{cases} \xi_1 \text{ ne dépend pas de } \tilde{y} \text{ et s'identifie à un élément } x_1 \in X \\ \eta_1 \text{ dépend seulement de } x_1 \text{ et définit } y_1 = \eta_1(x_1) \\ \xi_2 \text{ dépend seulement de } y_1 \text{ et définit } x_2 = \xi_2(y_1) \\ \eta_2 \text{ dépend seulement de } x_1,\ x_2 \text{ et définit } y_2 = \eta_2(x_1,x_2) \\ \qquad\qquad\vdots \end{cases}$$

On construit ainsi un point fixe $(\tilde{x},\tilde{y})$ dont on vérifie aisément qu'il est unique (cf. démonstration du lemme (III.2)).

■

Nous définissons maintenant le jeu itéré de mesure $a \in S$ et associé à A, B, comme le composé, au sens de la proposition (IV.1), du jeu itéré sans échange d'information de mesure a avec le prolongement par échange d'information associé à $(\mathcal{X}_B, \mathcal{Y}_A)$.

<u>Définition</u> (IV.3).

<u>Soit</u> a <u>un élément de</u> S <u>et</u> A, B <u>2 parties de</u> $\mathbb{N}$. <u>Alors le jeu itéré de mesure</u> a <u>associé à</u> A, B <u>est le prolongement</u> $p = (\mathcal{X}_B, \mathcal{Y}_A, i, j, \overline{\pi}_a)$ <u>où</u> :

(IV.43) $\quad i : X \to \mathcal{X}_B \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{Y} \quad i(x)[\tilde{y}] = (x, x, \ldots, x, \ldots)$

(IV.44) $\quad j : Y \to \mathcal{Y}_A \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \quad j(y)[\tilde{x}] = (y, y, \ldots, y, \ldots)$

<u>et</u>

(IV.45) $\quad \forall g \in \mathcal{A}(X \times Y) \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{X}_B \times \mathcal{Y}_A \quad \overline{\pi}_a g(\xi, \eta) = [a, g([\xi, \eta])]$

<u>où</u> $[\xi, \eta] \in \tilde{X} \times \tilde{Y}$ <u>désigne l'unique élément de</u> $F(\xi, \eta)$.

<u>Exemple</u> (IV.1).

Si $A = B = \emptyset$ alors $\mathcal{X}_B \times \mathcal{Y}_A$ s'identifie à $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ et on retrouve les jeux itérés sans échange d'information.

<u>Exemple</u> (IV.2).

Si $A = \mathbb{N}$ et $B = \emptyset$ alors $\mathcal{X}_A = \tilde{X}$ et $\mathcal{Y}_N$ est l'ensemble des stratégies "non anticipatives" de Yves. Autrement dit Xavier choisit $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, sans aucune information sur le comportement d'Yves, et Yves choisit y_1 après x_1, y_2 après x_2, etc..., en sachant à chaque fois ce que Xavier vient de choisir.

<u>Exemple</u> (IV.3).

Si $A = B = \mathbb{N}$ alors le jeu itéré associé équivaut à un jeu sous forme extensive avec "information parfaite". (cf. [Gale, Stewart]). Xavier choisit x_1, puis Yves choisit y_1, puis Xavier choisit x_2, etc...

On sait qu'"en général" de tels jeux possèdent une valeur (cf. [Gale, Stewart]) donc le prolongement associé est jouable. Le théorème ci-dessous va nous permettre de retrouver ce résultat (dans le cas particulier des jeux itérés).

Exemple (IV.4).

Si $A = B = 2\mathbb{N}$ on a un exemple typique de jeu itéré où chaque joueur est partiellement informé : Xavier et Yves choisissent "en secret" x_{2n+1} et y_{2n+1} mais ils informent leur adversaire du choix de x_{2n} et y_{2n}.

b). Une majoration du saut de dualité.

Théorème (IV.2).

Soit $a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ un élément de $S \cap \ell^1(\mathbb{N}^2)$ c'est à dire :

(IV.46) $\forall i,j : a_{ij} \geq 0. \quad \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij} = 1$

Alors le jeu itéré de mesure a associé à A et B vérifie :

(IV.47) $\forall g \in A(X \times Y)\ (\inf_{\mathcal{Y}_A} \sup_{\mathcal{X}_B} \bar{\pi}_a g(\xi,\eta) - \sup_{\mathcal{X}_B} \inf_{\mathcal{Y}_A} \bar{\pi}_a g(\xi,\eta)) \leq$

$$\leq 2\|g\|.[1 - \sum_{\substack{i\in A\\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B\\ j<i}} a_{ij}].$$

Exemple (IV.5).

Si l'information est parfaite ($A = B = \mathbb{N}$ cf. exemple (IV.3)) alors on a :

(IV.48) $1 - \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j<i}} a_{ij} = 0.$

Donc tous les jeux itérés qui correspondent à un échange "total" d'information sont jouables. Nous allons nous poser 2 questions portant sur cet important cas particulier : d'abord dans le cas où la relation (IV.48) est vraie (ce cas est un peu plus général que celui de l'information parfaite), existe-t-il, pour toute fonction de gain initiale g un point selle du jeu prolongé $\bar{\pi}_a g$? Le corollaire (IV.1) répond à cette question.

Ensuite, les jeux itérés vérifiant la relation (IV.48) sont-ils les seuls qui sont jouables ? Nous répondrons à cette question en IV.§3.c).

Corollaire (IV.1).

Supposons que les ensembles de stratégies pures X et Y sont des espaces topologiques compacts, et que la fonction de gain initiale g est continue. (Si X et Y sont finis ces 2 hypothèses sont vraies). Soit p un jeu itéré dont la mesure a est dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$, associé à A et B et vérifiant (IV.48) (par exemple c'est un jeu à information parfaite). Alors le jeu prolongé $\overline{\pi}_a g$ admet un point selle dans $\mathcal{X}_{\mathbb{N}} \times \mathcal{Y}_{\mathbb{N}}$.

Exemple (IV.6).

Reprenons les exemples (IV.2) et (IV.4) lorsque la mesure a est donnée par :

$$\text{(IV.49)} \qquad [a,g[(x_i,y_j)_{i,j\in\mathbb{N}}]] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}[(\tfrac{1}{2})^{2i-2}g(x_i,y_i) + (\tfrac{1}{2})^{2i-1}g(x_{i+1},y_i)]$$

Alors le théorème (IV.2) permet de majorer le saut de dualité de $\overline{\pi}_a g$, dans le cas de l'exemple (IV.2) par :

$$\text{(IV.50)} \qquad \inf_\eta \sup_\xi \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) - \sup_\xi \inf_\eta \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) \leq \frac{2}{3}\|g\|$$

et dans le cas de l'exemple (IV.4) par

$$\text{(IV.51)} \qquad \inf_\eta \sup_\xi \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) - \sup_\xi \inf_\eta \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) \leq \frac{8}{5}\|g\|.$$

Remarquons que la majoration (IV.51) est assez faible puisque le saut de dualité de $\overline{\pi}_a g$ qui, dans tous les prolongements, est inférieur à celui de g, est donc majoré par $2\|g\|$.

Démonstration du théorème (IV.2) et du corollaire (IV.1).

Etape 1 : Préliminaire : Un lemme de point fixe.

Lemme (IV.2).

Soit (U_n) une suite d'espaces métriques complets uniformément bornés et soit (h_n) une suite d'applications :

$$\text{(IV.52)} \qquad h_n : U_{n+1} \to U_n$$

telle que h_n est α_n-lipschitzienne ($\alpha_n > 0$) et que :

$$\text{(IV.53)} \qquad \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 0$$

Alors il existe une unique suite (x_n) : $x_n \in U_n$ telle que :

$$\text{(IV.54)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = h_n(x_{n+1}).$$

Posons si n est supérieur à p :

(IV.55) $\quad K_n^p = \overline{h_p \circ h_{p+1} \circ \ldots \circ h_n(U_{n+1})} \subset U_p$ où $\overline{Z}$ désigne l'adhérence de Z.

Alors pour tout p fixé la suite $(K_n^p)_{n\geq p}$ est décroissante. Si δ désigne une borne commune du diamètre des U_n on a :

(IV.56) $\quad$ diamètre $(K_n^p) \leq (\prod_{i=p}^{n} \alpha_i)\delta$.

Donc les ensembles fermés $(K_n^p)_{n\geq p}$ ont dans U_p (qui est complet) une intersection réduite à un point que nous appelons x_p :

(IV.57) $\quad \forall n \geq p \quad x_p \in K_n^p \subset U_p$.

Donc

(IV.58) $\quad \forall n \geq p+1 \quad h_p(x_{p+1}) \in h_p(K_n^{p+1}) \subset K_n^p$

Par conséquent $h_p(x_{p+1})$ est dans l'intersection de la suite décroissante $(K_n^p)_{n\geq p+1}$ et est donc égal à x_p. Donc la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie (IV.54).
Une telle suite est unique car si $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une autre suite vérifiant (IV.54) on trouve :

(IV.59) $\quad \forall p_1 < p_2 : d_{p_1}(x_{p_1}, y_{p_1}) \leq (\prod_{i=p_1}^{p_2-1} \alpha_i) d_{p_2}(x_{p_2}, y_{p_2})$

soit

(IV.60) $\quad \forall p_1, \forall p_2 > p_1 : d_{p_1}(x_{p_1}, y_{p_1}) \leq (\prod_{i=p_1}^{p_2-1} \alpha_i)\delta$

Donc $x_{p_1} = y_{p_1}$. Le lemme est acquis.

<u>Etape 2</u> : <u>Définitions et notations</u>.

Soit dans $\mathcal{A}(\tilde{X} \times \tilde{Y})$, l'espace des fonctions bornées dépendant de $x_1, \ldots x_n, \ldots$ et de $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ le sous espace fermé E_n formé des fonctions qui ne dépendent que des x_i tels que $i \in A_{n-1}$ et des y_j tels que $j \in B_{n-1}$. Autrement dit :

(IV.61) $\quad E_n = \mathcal{A}(X^{A_{n-1}} \times Y^{B_{n-1}})$

On convient d'identifier E_1 à $\mathbb{R}$. Définissons de même le sous espace fermé F_n

formé des fonctions qui ne dépendent que des x_i tels que $i \in A_n$ et des y_j tels que $j \in B_{n-1}$. Autrement dit :

$$F_n = A(X^{A_n} \times Y^{B_{n-1}}) \tag{IV.62}$$

Enfin nous définissons les suites (λ_n) et (μ_n) de nombres positifs ou nuls par

$$\lambda_1 = \sum_{\substack{i \in A \\ i \leq j}} a_{ij} + \sum_{\substack{j \in B \\ j < i}} a_{ij} \tag{IV.63}$$

$$\sum_{j \in B_{n-1}} a_{nj} + \mu_n = \lambda_n ;\ n = 1,2,\dots \tag{IV.64}$$

$$\sum_{i \in A_n} a_{in} + \lambda_{n+1} = \mu_n ;\ n = 1,2,\dots \tag{IV.65}$$

Les relations (IV.64) et (IV.65) ainsi que la positivité des a_{ij} montrent que :

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \mu_n \geq \dots \tag{IV.66}$$

De plus ces nombres sont tous positifs ou nuls puisque, en sommant les n premières relations (IV.64), les n premières relations (IV.65), et en tenant compte de (IV.63) il vient :

$$\sum_{\substack{i \in A \\ i \leq j \\ j \leq n}} a_{ij} + \sum_{\substack{j \in B \\ j < i \\ i \leq n}} a_{ij} + \lambda_{n+1} = \sum_{\substack{i \in A \\ i \leq j}} a_{ij} + \sum_{\substack{j \in B \\ j < i}} a_{ij} \tag{IV.67}$$

En remarquant que la série double (a_{ij}) est convergente, on montre ainsi que la limite commune des suites λ_n et μ_n est zéro.

<u>Etape 3</u> : <u>Un système de programmation dynamique</u>.

Nous considérons le système suivant (IV.68) et (IV.69) dont les inconnues sont $V_1 \in E_1$, $W_1 \in F_1, \dots, V_n \in E_n, W_n \in F_n, \dots$

$$n = 1,2,\dots / \lambda_n V_n(x_i, y_j) = \sup_{x_n \in X} \{[\sum_{\substack{j \in B \\ j \leq n-1}} a_{nj} g(x_n, y_j)] + \mu_n W_n(x_i, x_n, y_j)\} \tag{IV.68}$$

$$n = 1,2,\dots / \mu_n W_n(x_i, y_j) = \inf_{y_n \in Y} \{[\sum_{\substack{i \in A \\ i \leq n}} a_{in} g(x_i, y_n)] + \lambda_{n+1} V_{n+1}(x_i, y_j, y_n)\} \tag{IV.69}$$

On vérifie à l'aide des définitions (IV.61) et (IV.62) que ce système a bien un sens autrement dit que les applications ϕ_n et ψ_n définies par :

(IV.70) $W_n \in F_n; \phi_n(W_n)(x_i,y_j) = \sup_{x_n \in X} \{[\sum_{\substack{j\in B\\ j\leq n-1}} a_{nj} g(x_n,y_j)] + \mu_n W_n(x_i,x_n,y_j)\}$

(IV.71) $V_{n+1} \in E_{n+1}; \psi_n(V_{n+1})(x_i,y_j) = \inf_{y_n \in Y} \{[\sum_{\substack{i\in A\\ i\leq n}} a_{in} g(x_i,y_n)]$

$+ \lambda_{n+1} V_{n+1}(x_i,y_j,y_n)\}$

ont pour images respectives :

(IV.72) $\phi_n(F_n) \subset E_n; \psi_n(E_{n+1}) \subset F_n.$

Nous allons maintenant montrer que ce système a une solution.

<u>Premier cas</u>. L'un des λ_n (ou l'un des μ_n) est nul. Supposons par exemple :

(IV.73) $\lambda_1 \neq 0,\ldots,\lambda_{n_0} \neq 0; \mu_{n_0} = 0, \lambda_{n_0+1} = 0,\ldots$

Alors l'équation (IV.68) détermine parfaitement V_{n_0} et par récurrence $W_{n_0-1} = \psi_{n_0-1}(V_{n_0})$ puis $V_{n_0-1} = \phi_{n_0-1}(W_{n_0-1})$ etc...
Quant à l'équation (IV.69) pour $n \geq n_0$ et à l'équation (IV.68) pour $n \geq n_0+1$, elles découlent de 64,65. En choisissant arbitrairement $V_{n_0+1},\ldots$ et $W_{n_0},\ldots,$ on obtient ainsi une infinité de solutions du système.

<u>Deuxième cas</u>. Tous les λ_n, μ_n sont positifs stricts. Alors si on pose :

(IV.74) $W_n \in F_n \quad \phi^*_n(W_n) = \frac{1}{\lambda_n} \phi_n(W_n)$

et

(IV.75) $V_{n+1} \in E_{n+1} \quad \psi^*_n(V_{n+1}) = \frac{1}{\mu_n} \psi_n(V_{n+1})$

on constate que le système (IV.68) (IV.69) s'écrit :

(IV.76) $V_n = \phi^*_n(W_n) \quad n = 1,2,\ldots$

(IV.77) $W_n = \psi^*_n(V_{n+1}) \quad n = 1,2,\ldots$

Or d'après les définitions (IV.70) et (IV.71) si C_n (resp. D_n) désigne la boule de rayon $\|g\|$ dans E_n (resp. F_n) on a clairement d'après (IV.64) et (IV.65) :

(IV.78) $\phi^*_n(D_n) \subset C_n \quad n = 1,2,\ldots$

(IV.79) $\quad \psi_n^*(C_{n+1}) \subset D_n \quad n = 1,2,\ldots$

et de plus :

(IV.80) $\quad \forall W_n^1, W_n^2 \quad \| \phi_n^*(W_n^1) - \phi_n^*(W_n^2) \|_{E_n} \leq \frac{\mu_n}{\lambda_n} \| W_n^1 - W_n^2 \|_{F_n}$

(IV.81) $\quad \forall V_{n+1}^1, V_{n+1}^2 \quad \| \psi_n^*(V_{n+1}^1) - \psi_n^*(V_{n+1}^2) \|_{F_n} \leq \frac{\lambda_{n+1}}{\mu_n} \| V_{n+1}^1 - V_{n+1}^2 \|_{E_{n+1}}$

Donc ϕ_n^* est $\frac{\mu_n}{\lambda_n}$ - lipschitzienne et ψ_n^* est $\frac{\lambda_{n+1}}{\mu_n}$ - lipschitzienne. Le système (IV.76) (IV.77) a donc une solution unique d'après le lemme (IV.2) (Etape 1). Il suffit en effet d'appliquer le lemme (IV.2) au cas où

(IV.82) $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad U_{2p} = D_p; \; U_{2p-1} = C_p$

(IV.83) $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad h_{2p} = \psi_p^*; \; h_{2p-1} = \phi_p^*$

(IV.84) $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p} = \frac{\lambda_{p+1}}{\mu_p}; \; \alpha_{2p-1} = \frac{\mu_p}{\lambda_p}$

et de remarquer que $(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i)$ est une suite convergeant vers zéro puisque (λ_p) et (μ_p) convergent vers zéro.

<u>Etape 4</u> : <u>Fin de la démonstration du théorème</u> (IV.2).

Nous avons donc établi l'existence d'une suite $V_1, W_1, \ldots, V_n, W_n, \ldots$ vérifiant (IV.68) et (IV.69). Considérons alors une stratégie $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de Xavier dans le jeu itéré c'est à dire :

(IV.85) $\quad \forall i \quad \overline{\xi}_i : \tilde{Y} \to X$

et choisissons $\overline{\xi}$ de sorte que l'on ait :

(IV.86) $$\forall \tilde{y} \; \forall n : \lambda_n V_n(\overline{\xi}_i(\tilde{y}), y_j) \leq \Big[\sum_{\substack{j \in B \\ j \leq n-1}} a_{nj}\, g(\overline{\xi}_n(\tilde{y}), y_j) \Big] + \mu_n W_n(\overline{\xi}_i(\tilde{y}), \overline{\xi}_n(\tilde{y}), y_j) + \varepsilon_n$$

(où $\varepsilon_n > 0$ sont des nombres arbitraires que nous ferons tendre vers zéro par la suite).

L'existence d'une telle stratégie $(\overline{\xi}_i)$ appartenant à X_B se démontre par récurrence. On construit aisément $\overline{\xi}_1$ $(\overline{\xi}_1 \in X)$ par :

(IV.87) $\lambda_1 V_1 \leq \mu_1 W_1(\overline{\xi}_1) + \varepsilon_1$

Puis si $\overline{\xi}_1 \ldots \overline{\xi}_{n-1}$ sont construits et ne dépendent que des y_j "permis" par la définition (IV.39) alors dans la relation (IV.86), $\overline{\xi}_n(\tilde{y})$ "n'apparait qu'à droite" et il suffit de faire en sorte qu'il réalise (à ε_n près) le suprémum de la fonction :

(IV.88) $$x_n \to [\sum_{\substack{j\in B\\ j\leq n-1}} a_{nj} g(x_n, y_j)] + \mu_n W_n(\overline{\xi}_i(\tilde{y}), x_n, y_j)$$

Comme les $\overline{\xi}_i(\tilde{y})$ $(i \leq n-1)$ ne dépendent que des y_j tels que $j \in B_{n-1}$ on constate que le terme de droite dans (IV.88) ne dépend (outre de x_n) que des y_j tels que $j \in B_{n-1}$. Donc $\overline{\xi}_n$ peut être choisie indépendante des y_j tels que $j \notin B_{n-1}$ ce qui est la propriété désirée. On prouve de même l'existence d'une stratégie $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_j)_j \in \mathcal{Y}_A$ de Yves telle que :

(IV.89) $$\forall \tilde{x}\ \forall n : \mu_n W_n(x_i, \overline{\eta}_j(\tilde{x})) \geq \sum_{\substack{i\in A\\ i<n}} a_{in} g(x_i, \overline{\eta}_n(\tilde{x})) + \lambda_{n+1} V_{n+1}(x_i, \overline{\eta}_j(\tilde{x}), \overline{\eta}_n(\tilde{x})) - \varepsilon_n.$$

Considérons alors par exemple une suite quelconque $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ et observons ce qui se passe si Xavier joue avec la stratégie $\overline{\xi}$ et Yves avec la stratégie (aveugle) $\tilde{y}$. La relation (IV.69) du système de programmation dynamique et la relation (IV.86) donnent successivement si on note $(\tilde{x}, \tilde{y}) = [\overline{\xi}, \tilde{y}]$:

(IV.90) $$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 V_1 \leq \mu_1 W_1(x_1) + \varepsilon_1 \\ \qquad \mu_1 W_1(x_1) \leq \sum_{\substack{i\in A\\ i\leq 1}} a_{i1} g(x_i, y_1) + \lambda_2 V_2(x_i, y_j) \\ \qquad \vdots \\ \lambda_n V_n(x_i, y_j) \leq \sum_{\substack{j\in B\\ j\leq n-1}} a_{nj} g(x_n, y_j) + \mu_n W_n(x_i, y_j) + \varepsilon_n \\ \mu_n W_n(x_i, y_j) \leq \sum_{\substack{i\in A\\ i\leq n}} a_{in} g(x_i, y_n) + \lambda_{n+1} V_{n+1}(x_i, y_j) \\ \qquad \vdots \end{array}\right.$$

Donc en ajoutant ces inégalités, il vient :

(IV.91) $$\lambda_1 V_1 \leq \sum_{\substack{i\in A\\ i\leq j}} a_{ij} g(x_i, y_j) + \sum_{\substack{j\in B\\ j<i}} a_{ij} g(x_i, y_j) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Ce qui entraine :

$$\text{(IV.92)} \quad \lambda_1 V_1 \leq \bar{\pi}_a g(\bar{\xi},\tilde{y}) + \|g\| \, [1 - \sum_{\substack{i\in A \\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij}] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n .$$

Cette relation est vraie pour tout y et entraine donc

$$\text{(IV.93)} \quad \inf_{\tilde{y}} \bar{\pi}_a g(\bar{\xi},\tilde{y}) = \inf_{\eta} \bar{\pi}_a g(\bar{\xi},\eta) \geq \lambda_1 V_1 - \|g\| \, [1 - \sum_{\substack{i\in A \\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij}] - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

soit finalement, quelle que soit la suite $(\varepsilon_n)_{n\in N}$

$$\text{(IV.94)} \quad \sup_{\xi} \inf_{\eta} \bar{\pi}_a g(\xi,\eta) \geq \lambda_1 V_1 - \|g\| \, [1 - \sum_{\substack{i\in A \\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij}] - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

Si on fait maintenant tendre $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ vers zéro, on obtient la même inégalité sans le terme $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$. A l'aide de $\bar{\eta}$ on démontre de même :

$$\text{(IV.95)} \quad \inf_{\eta} \sup_{\xi} \bar{\pi}_a g(\xi,\eta) \leq \lambda_1 V_1 + \|g\| \, [1 - \sum_{\substack{i\in A \\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij}]$$

le théorème (IV.2) est démontré.

<u>Etape 5</u> : <u>Démonstration du corollaire</u> (IV.1).

Nous supposons que l'égalité (IV.48) est vraie et savons donc que le jeu itéré p est jouable. Nous voulons montrer qu'il possède un point selle. Puisque X et Y sont des espaces topologiques, le sous espace $\bar{E}_n$ de E_n et le sous espace $\bar{F}_n$ de F_n formés des fonctions continues, sont fermés (donc complets) pour la norme du sup. Puisque g est continue et que X et Y sont compacts, les applications ϕ_n et ψ_n définies par (IV.70) et (IV.71) vérifient :

$$\text{(IV.96)} \quad \phi_n(\bar{F}_n) \subset \bar{E}_n ; \; \psi_n(\bar{E}_{n+1}) \subset \bar{F}_n .$$

Donc le système de programmation dynamique (IV.68), (IV.69) admet une solution $V_1 \in \bar{E}_1 = E_1, \; W_1 \in \bar{F}_1, \ldots, \; V_n \in \bar{E}_n, \; W_n \in \bar{F}_n, \ldots$.
A cause de la compacité de X et Y, on peut choisir $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ vérifiant respectivement (IV.86) et (IV.89) avec $\varepsilon_n = 0$. La relation (IV.93) devient alors :

$$\text{(IV.97)} \quad \inf_{\tilde{y}} \bar{\pi}_a g(\bar{\xi},\tilde{y}) = \inf_{\eta} \bar{\pi}_a g(\bar{\xi},\eta) \geq \lambda_1 V_1$$

Et la relation obtenue symétriquement à l'aide de $\bar{\eta}$:

(IV.98) $\quad \sup\limits_{\tilde{x}} \bar{\pi}_a g(\tilde{x},\bar{\eta}) = \sup\limits_{\xi} \bar{\pi}_a g(\xi,\bar{\eta}) \leq \lambda_1 V_1.$

Donc $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ constitue un point selle de $\bar{\pi}_a g$.

c) Jeux itérés jouables et information parfaite.

Nous cherchons maintenant si la majoration indiquée par le théorème (IV.2) est la meilleure possible. Supposons que X et Y sont finis, alors nous savons (théorème (II.3)) qu'il existe un jeu itéré dont la mesure est dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$, qui est sans échange d'information ($A = B = \emptyset$) et qui est jouable. Pour un tel jeu la majoration (IV.47) est simplement :

(IV.99) $\quad \inf\limits_{\eta} \sup\limits_{\xi} \pi_a g(\xi,\eta) - \sup\limits_{\xi} \inf\limits_{\eta} \pi_a g(\xi,\eta) \leq 2\|g\|$

et elle n'est certainement pas la meilleure ! Mais si X et Y sont infinis nous avons le :

Théorème (IV.3).

Si les ensembles de stratégies pures X et Y sont infinis, la majoration (IV.47) est la meilleure majoration du saut de dualité d'un jeu itéré avec échange partiel d'information dont la mesure a est dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$. Autrement dit :

(IV.100)
$$\sup_{\substack{g\in A(X \times Y)\\ g\neq 0}} \frac{1}{\|g\|} [\inf_{\mathcal{Y}_A} \sup_{\mathcal{X}_B} \bar{\pi}_a g(\xi,\eta) - \sup_{\mathcal{X}_B} \inf_{\mathcal{Y}_A} \bar{\pi}_a g(\xi,\eta)] =$$
$$= 2\,[1 - \sum_{\substack{i\in A\\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B\\ j<i}} a_{ij}].$$

Corollaire (IV.2).

Si X et Y sont infinis, les seuls jeux itérés avec échange partiel d'information qui sont jouables sont ceux qui vérifient :

(IV.101)
$$\sum_{\substack{i\in A\\ i\leq j}} a_{ij} + \sum_{\substack{j\in B\\ j<i}} a_{ij} = 1$$

Par exemple si $a_{ij} > 0$ pour tous i et j, les seuls jeux itérés jouables sont ceux où $A = B = \mathbb{N}$, c'est à dire où l'information est parfaite.

Corollaire (IV.3).

Si X et Y sont infinis, aucun jeu itéré sans échange d'information dont la

<u>mesure est dans</u> $\ell^1(\mathbb{N}^2)$ <u>ne réduit strictement (et uniformément sur g) le saut de dualité de</u> g.

Ce corollaire constitue un résultat plus fort que le théorème (II.4).

<u>Démonstration du théorème</u> (IV.3).

Soit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ une partition dénombrable de X ($X_n \neq \emptyset$) et $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ une partition dénombrable de Y ($Y_n \neq \emptyset$). Notons α et β les 2 surjections :

(IV.102) $\alpha : X \to \mathbb{N} \qquad \alpha(x) = n \Leftrightarrow x \in X_n$

(IV.103) $\beta : Y \to \mathbb{N} \qquad \beta(y) = m \Leftrightarrow y \in Y_m$

considérons la fonction $g \in A(X \times Y)$

(IV.104) $g(x,y) = -1$ si $\beta(y) \geq \alpha(x)$

$g(x,y) = +1$ si $\beta(y) < \alpha(x)$

Nous supposons pour l'instant que le support de a est fini, autrement dit qu'il existe N tel que :

(IV.105) $$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} = 1$$

Fixons alors une stratégie $\xi = (\xi_i) \in X_B$ de Xavier. On peut construire par récurrence une suite finie $(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots y_{j_p})$ où $\{j_1, \ldots j_p\} = B_{N-1}$ telle que :

(IV.106) $\forall k \;\; \beta(y_{j_k}) \geq \alpha(x_i)$ si $i \leq j_k$

où on a posé

(IV.107) $\forall i = 1, \ldots N \qquad x_i = \xi_i(y_{j_1}, \ldots y_{j_t})$ où $\{j_1, \ldots j_t\} = B_{i-1}$

(la démonstration est laissée au lecteur).

On choisit ensuite y_j, si $j \leq N$ et $j \notin B_{N-1}$ de sorte que :

(IV.108) $\forall j \leq N \quad j \notin B_{N-1} \quad \beta(y_j) \geq \sup_{i=1,\ldots N} \alpha(x_i)$.

Calculons alors :

(IV.109) $$\lambda = \overline{\pi}_a g(\xi, \tilde{y}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} g(x_i, y_j)$$

on a :

(IV.110) $\lambda = \sum_{\substack{i=1,\dots N \\ j\leq N \\ j\notin B_{N-1}}} a_{ij}g(x_i,y_j) + \sum_{\substack{i=1,\dots N \\ k=1,\dots p}} a_{ij_k} g(x_i,y_{j_k})$

D'après les relations (IV.104) (IV.106) et (IV.108) il vient :

(IV.111) $\lambda \leq - \sum_{\substack{i=1,\dots N \\ j\leq N \\ j\notin B_{N-1}}} a_{ij} - \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{\substack{k=1,\dots p \\ i\leq j_k}} a_{ij_k} \Big) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{\substack{k=1,\dots p \\ j_k\in B_{i-1}}} a_{ij} \Big)$

Donc d'après (IV.105)

(IV.112) $\lambda \leq 2 \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij} - 1$

Finalement nous venons de montrer :

(IV.113) $\forall\xi \in \mathcal{X}_B \quad \inf_{\eta} \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) \leq 2 \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij} - 1$

On démontre symétriquement :

(IV.114) $\forall\eta \in \mathcal{Y}_A \quad \sup_{\xi} \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) \geq 1 - 2 \sum_{\substack{i\in A \\ i<j}} a_{ij}$

Et (IV.113) et (IV.114) entrainent :

(IV.115) $\inf_{\eta} \sup_{\xi} \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) - \sup_{\xi} \inf_{\eta} \overline{\pi}_a g(\xi,\eta) \geq 2(1 - \sum_{\substack{i\in A \\ i\leq j}} a_{ij} - \sum_{\substack{j\in B \\ j<i}} a_{ij})$

Dans le cas général où le support de a n'est pas fini on fixe un $\varepsilon > 0$ et on choisit N tel que :

(IV.116) $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \geq 1 - \varepsilon$

La démonstration se termine de façon identique.

∎

V. PROLONGEMENTS JOUABLES ET FONCTIONS VALEURS.

V.1. FONCTIONS VALEURS ET COUPLES (SUP INF, INF SUP).

Rappelons qu'un prolongement p des jeux sur X x Y est jouable si :

(V.1) $\forall g \in A(X \times Y) \ \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta)$

Si p est un prolongement jouable des jeux sur X x Y, nous appelons fonction valeur associée à p et nous notons v_p la fonction :

(V.2) $v_p : A(X \times Y) \to \mathbb{R} \quad v_p(g) = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta).$

Définition (V.1).

Une fonction valeur est une fonction v :

(V.3) $v : A(X \times Y) \to \mathbb{R}$

telle qu'il existe un prolongement jouable p des jeux sur X x Y tel que :

(V.4) $\forall g \in A(X \times Y) \ v(g) = v_p(g).$

On note V l'ensemble des fonctions valeurs. Nous allons (chapitre V.§2 ci dessous) caractériser les prolongements jouables en considérant comme équivalents deux prolongements jouables qui ont même fonction valeur (par exemple le théorème (II.1) montre que les prolongements sans échange d'information jouables sont tous equivalents au prolongement mixte). C'est donc l'ensemble V des fonctions valeurs que nous allons caractériser. Nous appelons fonction sup inf (resp. inf sup) associée au prolongement p (non nécessairement jouable) la fonction v_p^b :

(V.5) $v_p^b : A(X \times Y) \to \mathbb{R} \quad v_p^b(g) = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta)$

resp. la fonction $v_p^{\#}$:

(V.6) $v_p^{\#} : A(X \times Y) \to \mathbb{R} \quad v_p^{\#}(g) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta).$

Définition (V.2).

Un couple de fonctions $(v^b, v^{\#})$:

(V.7) $\quad v^b, v^\# : \mathcal{A}(X \times Y) \to \mathbb{R}$

<u>est appelé un couple</u> (sup inf, inf sup) <u>s'il existe un prolongement</u> p <u>des jeux sur</u> X x Y <u>tel que</u> :

(V.8) $\quad \forall g \in \mathcal{A}(X \times Y) \quad v^b(g) = v_p^b(g);\ v^\#(g) = v_p^\#(g)$

D'après leur définition, les couples (sup inf, inf sup) vérifient donc :

(V.9) $\quad \forall g \in \mathcal{A}(X \times Y) \quad \sup_x \inf_y g(x,y) \leq v^b(g) \leq v^\#(g) \leq \inf_y \sup_x g(x,y)$

Nous allons voir qu'en fait l'ensemble V des fonctions valeurs permet de caractériser très simplement les couples (sup inf, inf sup).

<u>Proposition</u> (V.1).

<u>Un couple</u> $(v^b, v^\#)$ <u>de fonctions définies sur</u> $\mathcal{A}(X \times Y)$ <u>est un couple</u> (sup inf, inf sup) <u>si et seulement si</u> :

i) $v^b \in V$ et $v^\# \in V$

ii) $\forall g \in \mathcal{A}(X \times Y) : v^b(g) \leq v^\#(g)$.

<u>Démonstration</u>.

Soit d'abord un couple $(v^b, v^\#)$ vérifiant i) et ii) et soient p_1, p_2 2 prolongements jouables tels que :

(V.10) $\quad \forall g : v^b(g) = v_{p_1}(g);\ v^\#(g) = v_{p_2}(g)$

Notons $p_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, i_1, j_1, \pi_1)$ et $p_2 = (\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, i_2, j_2, \pi_2)$. Posons :

(V.11) $\quad \mathcal{X} = \mathcal{Y} = (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)$

et choisissons un 4-uple $(\xi_1^0, \xi_2^0, \eta_1^0, \eta_2^0)$ dans $\mathcal{X}$. Les applications i et j :

(V.12) $\quad i : X \to \mathcal{X} \quad i(x) = (i_1(x), i_2(x), \eta_1^0, \eta_2^0)$

(V.13) $\quad j : Y \to \mathcal{Y} \quad j(y) = (\xi_1^0, \xi_2^0, j_1(y), j_2(y))$

sont des injections. Définissons alors l'application π^* :

(V.14) $\quad \pi^* : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{A}_1'(X \times Y) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \quad \eta = (\xi_1', \xi_2', \eta_1', \eta_2')$

$$\pi^*(\xi,\eta) = \begin{cases} \pi_1^*(\xi_1,\eta_1') \text{ si } (\xi_1,\xi_2) = (\xi_1',\xi_2') \text{ et si } \xi \neq \eta \\ \pi_2^*(\xi_2,\eta_2') \text{ si } (\eta_1,\eta_2) = (\eta_1',\eta_2') \text{ et si } \xi \neq \eta \\ \frac{1}{2}\,\pi_1^*(\xi_1,\eta_1') + \frac{1}{2}\,\pi_2^*(\xi_2,\eta_2') \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que π^* vérifie (I.12) puisque π_1^* et π_2^* le vérifient. Donc d'après la proposition (I.2) l'opérateur π défini par (I.10) est celui d'un prolongement p : $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$.

Fixons $g \in A(X \times Y)$ et choissisons $\xi \in \mathcal{X}$. Il est clair que :

(V.15) $$\inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) \geq \inf\{\inf_{\eta_1'} \pi_1 g(\xi_1,\eta_1'),\ \inf_{\eta_2'} \pi_2 g(\xi_2,\eta_2')\}.$$

Supposons que le terme de droite de (V.15) soit égal à $\inf_{\eta_1'} \pi_1 g(\xi_1,\eta_1')$.

En considérant les η de la forme :

(V.16) $$\eta = (\xi_1,\xi_2,\eta_1',\eta_2') \text{ avec } \eta_2' \neq \eta_2$$

il est clair qu'on obtient :

(V.17) $$\inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) \leq \inf_{\eta_1'} \pi_1 g(\xi_1,\eta_1')$$

Finalement l'inégalité (V.15) est en fait une égalité pour tout ξ, donc :

(V.18) $$\sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) = \inf\{\sup_{\xi_1} \inf_{\eta_1'} \pi_1 g(\xi_1,\eta_1'),\ \sup_{\xi_2} \inf_{\eta_2'} \pi_2 g(\xi_2,\eta_2')\}$$

Donc :

(V.19) $$v_p^b(g) = \inf\{v_{p_1}(g),\ v_{p_2}(g)\} = v^b(g)$$

On démontre de même que $v_p^{\#}(g) = v^{\#}(g)$. Donc $(v^b,v^{\#})$ est une couple (sup inf, inf sup). Réciproquement soit $(v^b,v^{\#})$ un couple (sup inf, inf sup), alors la relation ii) est évidente (cf. (V.9)) et nous devons montrer que v^b et $v^{\#}$ sont dans V. Or il existe un prolongement $(\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ tel que :

(V.20) $$\forall g \in A(X \times Y) \quad v^b(g) = v_p^b(g) = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta).$$

Soit alors $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ et $\overline{j}$ l'injection :

(V.21) $$\overline{j} : Y \to \overline{\mathcal{Y}} \qquad \overline{j}(y)(\xi) = j(y) \in \mathcal{Y}$$

Si nous posons :

(V.22) $$\overline{\pi} : A(X \times Y) \to A(\mathcal{X} \times \overline{\mathcal{Y}}) \quad \overline{\pi} g(\xi,\overline{\eta}) = \pi g(\xi,\overline{\eta}(\xi))$$

il est clair que le prolongement $(X,\overline{Y},i,\overline{j},\overline{\pi})$ est jouable et a pour valeur v_p^b. (cf. exemple (III.1) et (III.3)). On montre de même que $v^{\#}$ est dans V.

■

La proposition (V.1) montre que l'étude des couples (sup inf, inf sup) se ramène à celle des fonctions valeurs.

V.2: CARACTERISATIONS DES FONCTIONS VALEURS.

a) Résultats globaux.

Théorème (V.1).

L'ensemble V des fonctions valeurs est l'ensemble des fonctions v : $A(X \times Y) \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(V.23) \quad \begin{cases} \text{i)} & \forall g \in A(X \times Y)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : v(\lambda g) = \lambda v(g) \\ \text{ii)} & \forall g \in A(X \times Y)\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : v(g + \lambda\theta) = v(g) + \lambda \\ \text{iii)} & \forall g_1, g_2 \in A(X \times Y)\ [g_1 \geq g_2] \Rightarrow [v(g_1) \geq v(g_2)] \\ \text{iv)} & \forall g \in A(X \times Y)\ \sup_x \inf_y g(x,y) \leq v(g) \leq \inf_y \sup_x g(x,y) \end{cases}$$

(Rappelons que $\theta \in A(X \times Y)$ est la fonction constante et égale à 1). Les propriétés i) et ii) expriment qu'une fonction valeur respecte les transformations affines positives de la fonction de gain g, et la propriété iii) exprime qu'elle respecte l'ordre sur les fonctions de gain. Toutes ces propriétés sont les propriétés usuelles de la valeur d'un jeu (cf. par exemple [Owen]). Au sens de la théorie des jeux les propriétés i) à iv) sont donc des propriétés "naturelles" qu'on peut imposer a priori à une fonction valeur. Le théorème (V.1) justifie donc a posteriori l'hypothèse (cruciale dans cette étude) de linéarité des opérateurs de prolongements puisque les prolongements "linéaires" sont suffisants pour obtenir "toutes" les fonctions valeurs. Si g est une fonction de $A(X \times Y)$ nous notons

$$(V.24) \qquad S(g) = \sup_{(x,y)} g(x,y);\ i(g) = \inf_{(x,y)} g(x,y)$$

Définition (V.3).

Une fonction $v : A(X \times Y) \to \mathbb{R}$ est dite positivement 1-lipschitzienne si elle vérifie l'une des 2 propriétés équivalentes suivantes :

(V.25) $\forall g_1, g_2 \in A(X \times Y) : v(g_1) - v(g_2) \leq S(g_1 - g_2)$

(V.26) $\forall g_1, g_2 \in A(X \times Y) : i(g_1 - g_2) \leq v(g_1) - v(g_2) \leq S(g_1 - g_2)$.

Démonstration.

Nous devons montrer : (V.25) $\Rightarrow$ (V.26). Or (V.25) entraine :

(V.27) $v(g_2) - v(g_1) \leq S(g_2 - g_1) = S(-(g_1 - g_2)) = -i(g_1 - g_2)$

c'est à dire :

(V.28) $i(g_1 - g_2) \leq v(g_1) - v(g_2)$

■

Théorème (V.2).

L'ensemble V des fonctions valeurs est l'ensemble des fonctions v : $A(X \times Y) \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\text{(V.29)} \quad \begin{cases} \text{i)} & \forall g \in A(X \times Y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : v(\lambda g) = \lambda v(g) \\ \text{ii)} & v \text{ est positivement 1-lipschitzienne} \\ \text{iii)} & \forall g \in A(X \times Y) \quad \sup_x \inf_y g(x,y) \leq v(g) \leq \inf_y \sup_x g(x,y) \end{cases}$$

Démonstration des théorèmes (V.1) et (V.2).

Etape 1 : Toute fonction valeur vérifie les relations (V.23).

Soit $v \in V$ la fonction valeur du prolongement $p = (X, Y, i, j, \pi)$. Puisque π est linéaire on a pour tout λ positif :

(V.30) $v(\lambda g) = \sup_\xi \inf_\eta \pi(\lambda g)(\xi,\eta) = \sup_\xi \inf_\eta \lambda\pi(g) = \lambda \sup_\xi \inf_\eta \pi(g) = \lambda v(g)$

Puisque $\pi\theta = \theta$ on a :

(V.31) $v(g+\lambda\theta) = \sup_\xi \inf_\eta \pi(g+\lambda\theta)(\xi,\eta) = \sup_\xi \inf_\eta [\pi g(\xi,\eta) + \lambda] = v(g) + \lambda$

Puisque π est positif on a :

(V.32) $g_1 \geq g_2 \Rightarrow \pi(g_1) \geq \pi(g_2) \Rightarrow v(g_1) \geq v(g_2)$

Enfin la propriété iv) résulte de la proposition (I.1).

Etape 2 : Si une fonction v vérifie (V.23) alors elle vérifie (V.29).

Nous allons montrer que si v vérifie (V.23.ii) et (V.23.iii) alors v est positivement 1-lipschitzienne. Or on a toujours :

$$(V.33) \qquad (g_1-g_2) \leq S(g_1-g_2)\theta$$

Donc

$$(V.34) \qquad g_1 \leq g_2 + S(g_1-g_2)\theta$$

Donc

$$(V.35) \qquad v(g_1) \leq v(g_2+S(g_1-g_2)\theta) = v(g_2) + S(g_1-g_2).$$

Etape 3 : V est stable par sup et inf.

Soit $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'éléments de V et soit 0 un indice fixé de A. Soit $p_\alpha = (\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha, \pi_\alpha)$ un prolongement jouable dont la fonction valeur est v_α :

$$(V.36) \qquad \forall g \in A(X \times Y) \quad v_\alpha(g) = v_{p_\alpha}(g) = \sup_{\xi_\alpha\in\mathcal{X}_\alpha} \inf_{\eta_\alpha\in\mathcal{Y}_\alpha} \pi_\alpha g(\xi_\alpha,\eta_\alpha).$$

Soit $\mathcal{X}$ la somme ensembliste des $\mathcal{X}_\alpha$ (cf. [Bourbaki]) et soit i l'injection :

$$(V.37) \qquad i : X \to \mathcal{X} \quad i(x) = i_0(x) \in \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} = \coprod_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$$

Soit $\mathcal{Y}$ le produit cartésien des $\mathcal{Y}_\alpha$ et soit j l'injection :

$$(V.38) \qquad j : Y \to \mathcal{Y} \quad j(y) = (j_\alpha(y))_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha = \mathcal{Y}$$

Définissons alors l'application π^* :

$$(V.39) \qquad \pi^* : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to A_1'(X \times Y) : \pi^*(\xi,\eta) = \pi_\alpha^*(\xi,\eta_\alpha) \text{ si } \xi \in \mathcal{X}_\alpha \text{ et } \eta = (\eta_\alpha)_{\alpha\in A}$$

Alors on a :

$$(V.40) \qquad \forall x \in X \quad \forall \eta = (\eta_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathcal{Y} : \pi^*(i(x),\eta) = \pi_0^*(i_0(x),\eta_0) \in \delta_x \otimes A_1'(Y)$$

Et de même :

$$(V.41) \qquad \forall \xi \in \mathcal{X} \quad \forall y \in Y \quad \exists \alpha : \pi^*(\xi,j(y)) = \pi_\alpha^*(\xi, j_\alpha(y)) \in A_1'(X) \otimes \delta_y.$$

Donc π^* est, d'après la proposition (I.2), la forme transposée de l'opérateur d'un prolongement p. Fixons g dans A(X x Y) et calculons :

(V.42) $\quad v_p^b(g) = \sup_{\xi \in X} \inf_{\eta \in Y} \pi g(\xi,\eta) = \sup_{\alpha \in A} [\sup_{\xi_\alpha \in X_\alpha} \inf_{\eta \in Y} \pi g(\xi_\alpha,\eta)]$

C'est à dire

(V.43) $\quad v_p^b(g) = \sup_{\alpha \in A} [\sup_{\xi_\alpha \in X_\alpha} \inf_{\eta_\alpha \in Y_\alpha} \pi_\alpha g(\xi_\alpha,\eta_\alpha)] = \sup_{\alpha \in A} [v_{p_\alpha}(g)]$

Donc la fonction :

(V.44) $\quad v(g) = \sup_{\alpha \in A} [v_\alpha(g)]$

(qui est toujours définie puisqu'elle est majorée par $\inf_y \sup_x g(x,y)$) est la fonction "sup inf" associée à un prolongement. D'après la proposition (V.1) la fonction v est donc une fonction valeur. On peut aussi remarquer que p est jouable et que v est sa valeur, puisque :

(V.45) $\quad \inf_\eta \sup_\xi \pi g(\xi,\eta) = \inf_\eta [\sup_\alpha(\sup_{\xi_\alpha} \pi g(\xi_\alpha,\eta_\alpha))] = \sup_\alpha(\inf_{\eta_\alpha} \sup_{\xi_\alpha} \pi_\alpha g(\xi_\alpha,\eta_\alpha))$

On démontre symétriquement que l'infimum d'une famille d'éléments de V est dans V.

<u>Etape 4</u> : <u>Si une fonction</u> w : $A(X \times Y) \to \mathbb{R}$ <u>vérifie</u> :

(V.46) $\quad \forall g_1,g_2 \in A(X \times Y) : \exists v \in V : w(g_1) = v(g_1)$ <u>et</u> $w(g_2) = v(g_2)$

<u>alors</u> w <u>est dans</u> V.

Nous allons déduire ce point de l'étape précédente. Puisque w vérifie (V.46), on a :

(V.47) $\quad \forall g \in A(X \times Y) \quad \sup_x \inf_y g(x,y) \leq w(g)$

D'après l'exemple (III.3), il en résulte que l'ensemble $\{v \in V/v \leq w\}$ est non vide. Posons :

(V.48) $\quad v_0 = \sup \{v/v \in V, v \leq w\}$.

Alors v_0 est dans V d'après l'étape 3. Fixons g_0 dans $A(X \times Y)$ et définissons

(V.49) $\quad v_{g_0} = \inf \{v/v \in V,\ v(g_0) = w(g_0)\}$

D'après l'hypothèse (V.46) cette définition a un sens et d'après l'étape 3, v_{g_0} est dans V. De plus (V.46) entraine :

(V.50) $\quad \forall g \in A(X \times Y) \ \exists v \in V : v(g_0) = w(g_0),\ v(g) = w(g)$

Donc :

(V.51) $\quad \forall g \in A(X \times Y) \quad v_{g_0}(g) \leq w(g).$

Finalement on a :

(V.52) $\quad v_{g_0} \leq w$ et $v_{g_0}(g_0) = w(g_0)$

Donc $v_{g_0} \leq v_0$ et par conséquent (puisque $v_0 \leq w$)

(V.53) $\quad w(g_0) = v_{g_0}(g_0) \leq v_0(g_0) \leq w(g_0)$

Donc $w(g_0) = v_0(g_0)$, et comme g_0 était quelconque, w et v_0 coïncident, donc w est dans V.

<u>Etape 5</u> : <u>Si une fonction</u> $v : A(X \times Y) \to \mathbb{R}$ <u>vérifie</u> (V.29) <u>alors pour tous</u> g_1, g_2 <u>dans</u> $A(X \times Y)$ <u>il existe deux éléments</u> m_1 et m_2 <u>dans</u> $A_1'(X \times Y)$ <u>tels que</u> :

(V.54) $\quad [m_1, g_1] \leq v(g_1) \leq [m_2, g_1]$

<u>et</u>

(V.55) $\quad [m_2, g_2] \leq v(g_2) \leq [m_1, g_2]$

Soit v une telle fonction. Fixons g_1 et g_2 dans $A(X \times Y)$ et considérons le jeu à 2 personnes de somme nulle dont les stratégies pures sont $\{1,2\}$ pour le premier joueur, $X \times Y$ pour le second et la fonction de gain L :

(V.56) $\quad i \in \{1,2\} \; (x,y) \in X \times Y \quad \begin{cases} L(1,(x,y)) = g_1(x,y) - v(g_1) \\ L(2,(x,y)) = -g_2(x,y) + v(g_2) \end{cases}$

Supposons que le premier joueur maximise L et notons α la valeur (mixte) du jeu. Alors on aura :

(V.57) $\quad \alpha = \sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{m \in A_1'(X \times Y)} \{\lambda[m, g_1 - v(g_1)\theta] + (1-\lambda)[m, -g_2 + v(g_2)\theta]\}$

Or, on a toujours :

(V.58) $\quad \forall h \in A(Z) : \inf_{m \in A_1'(Z)} [m,h] = \inf_{z \in Z} h(z).$

Donc (V.57) s'écrit aussi :

(V.59) $\quad \alpha = \sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{m \in A_1'(X \times Y)} [m, \lambda(g_1 - v(g_1)\theta) + (1-\lambda)(-g_2 + v(g_2)\theta)]$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} \inf_{(x,y)\in X \times Y} [\lambda(g_1(x,y)-v(g_1))+(1-\lambda)(-g_2(x,y)+v(g_2))]$$

Supposons que α est positive stricte ($\alpha > 0$). Alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que :

(V.60) $$\inf_{(x,y)\in X \times Y} \{(1-\lambda)v(g_2)-\lambda v(g_1) - [(1-\lambda)g_2(x,y)-\lambda g_1(x,y)]\} > 0$$

Supposons que λ est non nul. Alors (V.60) s'écrit :

(V.61) $$\frac{(1-\lambda)}{\lambda} v(g_2)-v(g_1)- \sup_{(x,y)\in X \times Y} [\frac{(1-\lambda)}{\lambda} g_2(x,y)-g_1(x,y)] > 0$$

Mais puisque v est positivement homogène ((V.29.i)), si on pose $g_3 = \frac{1-\lambda}{\lambda} g_2$ il vient :

(V.62) $$v(g_3)-v(g_1) > \sup_{(x,y)\in X \times Y} [g_3(x,y)-g_1(x,y)] = S(g_2-g_1)$$

Ce qui contredit la propriété (V.29.ii) (cf. définition (V.3)). Supposons maintenant que λ est nul, alors (V.60) s'écrit :

(V.63) $$v(g_2) - \sup_{(x,y)\in X \times Y} [g_2(x,y)] > 0$$

Or $v(0) = 0$ d'après (V.29.i) et en appliquant (V.29.ii) au couple $(g_2,0)$ il vient :

(V.64) $$v(g_2) \leq S(g_2) = \sup_{(x,y)\in X \times Y} g_2(x,y)$$

Donc l'hypothèse $\alpha > 0$ est absurde, et la valeur mixte du jeu indiqué est négative ou nulle.
Ceci s'écrit :

(V.65) $$\inf_{m\in A_1^{'}(X \times Y)} \sup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda[m,g_1-v(g_1)\theta]+(1-\lambda)[m,-g_2+v(g_2)\theta]\} \leq 0$$

Autrement dit, si m_1' désigne une stratégie mixte optimale :

(V.66) $$\sup \{[m_1,g_1-v(g_1)\theta], [m_1,-g_2+v(g_2)\theta]\} \leq 0$$

C'est à dire :

(V.67) $$[m_1,g_1] \leq [m_1,v(g_1)\theta] = v(g_1)$$

et

(V.68) $$v(g_2) = [m_1,v(g_2)\theta] \leq [m_1,g_2]$$

En échangement les rôles de g_1 et g_2 on démontre de même qu'il existe m_2 dans $A_1^!(X \times Y)$ tel que :

(V.69) $\quad v(g_1) \leq [m_2,g_1]; \; [m_2,g_2] \leq v(g_2)$

Donc le couple (m_1,m_2) vérifie (V.54) et (V.55).

<u>Etape 6</u> : <u>Fin de la démonstration des théorèmes</u> (V.1) <u>et</u> (V.2).

D'après les étapes 1 et 2 il nous reste à démontrer que si une fonction v vérifie (V.29) alors elle est dans V. D'après l'étape 4 il suffit pour cela d'établir que si on choisit deux éléments g_1 et g_2 de $A(X \times Y)$, alors il existe un prolongement $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$, jouable, et dont la fonction valeur v_p vérifie :

(V.70) $\quad v_p(g_1) = v(g_1); \; v_p(g_2) = v(g_2)$

Nous savons d'autre part que les fonctions valeurs sont les mêmes que les fonctions "sup inf" (cf. proposition (V.1)). Il nous suffit donc de construire le prolongement p de sorte que :

(V.71) $\quad v(g_1) = \sup\limits_{\xi} \inf\limits_{\eta} \pi g_1(\xi,\eta); \; v(g_2) = \sup\limits_{\xi} \inf\limits_{\eta} \pi g_2(\xi,\eta)$

Pour construire p nous allons utiliser deux éléments m_1 et m_2 de $A_1^!(X \times Y)$ qui vérifient (V.54) et (V.55) (Etape 5). Choisissons en outre 2 applications σ_1 et σ_2 :

(V.72) $\quad \sigma_i : Y \to A_1^!(X) : [\sigma_i(y) \otimes \delta_y, g_i] = \sup\limits_{x \in X} g_i(x,y); \; i = 1,2.$

Posons alors :

(V.73) $\quad \mathcal{X} = X \cup \{\xi_1,\xi_2\} \qquad i : X \to \mathcal{X} \qquad i =$ identité de X

(V.74) $\quad \mathcal{Y} = Y \cup \{\eta_1,\eta_2\} \qquad j : Y \to \mathcal{Y} \qquad j =$ identité de Y

choisissons m_3 et m_4 dans $A_1^!(X \times Y)$ tels que :

(V.75) $\quad [m_3,g_1] = v(g_1); \; [m_4,g_2] = v(g_2)$

C'est possible puisque d'après (V.29.ii) on a : $i(g) \leq v(g) \leq S(g)$. Nous choisissons enfin un élément y_0 dans Y et définissons l'application π^* : $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to A_1^!(X \times Y)$ par :

$$x \in X \quad y \in Y : \pi^{*}(x,y) = \delta_x \otimes \delta_y ; \; \pi^{*}(x,\eta_1) = \pi^{*}(x,\eta_2) = \delta_x \otimes \delta_{y_0}$$

$$\text{(V.76)} \qquad \pi^{*}(\xi_1,y) = \sigma_1(y) \otimes \delta_y ; \pi^{*}(\xi_1,\eta_1) = m_2 ; \; \pi^{*}(\xi_1,\eta_2) = m_3$$

$$\pi^{*}(\xi_2,y) = \sigma_2(y) \otimes \delta_y ; \pi^{*}(\xi_2,\eta_1) = m_4 ; \; \pi^{*}(\xi_2,\eta_2) = m_1$$

On constate que π^{*} vérifie (I.12) et est donc la forme transposée d'un opérateur de prolongement π. Calculons maintenant :

(V.77) $\quad \alpha_1 = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g_1(\xi,\eta)$

Si ξ est dans X on a :

(V.78) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(x,\eta) = \inf_{y} g_1(x,y) \leq \sup_{x} \inf_{y} g_1(x,y)$

Donc d'après (V.29.iii) :

(V.79) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(x,\eta) \leq v(g_1)$

Si $\xi = \xi_1$ on a :

(V.80) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(\xi_1,\eta) = \inf \{\inf_{y} [\sigma_1(y) \otimes \delta_y, g_1], [m_2,g_1], [m_3,g_1]\}.$

On déduit donc de (V.72) et (V.75) :

(V.81) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(\xi_1,\eta) = \inf \{\inf_{y} \sup_{x} g_1(x,y), [m_2,g_1], v(g_1)\}$

D'après (V.29.iii) et la relation (V.54) il vient

(V.82) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(\xi_1,\eta) = v(g_1)$

Enfin si $\xi = \xi_2$ on a :

(V.83) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(\xi_2,\eta) = \inf \{\inf_{y} [\sigma_2(y) \otimes \delta_y, g_1], [m_4,g_1], [m_1,g_1]\}$

En vertu de (V.54) on a donc :

(V.84) $\quad \inf_{\eta} \pi g_1(\xi_2,\eta) \leq v(g_1)$

et finalement (V.79), (V.82) et (V.84) entrainent :

(V.85) $\quad \alpha_1 = v(g_1)$

On calcule de même :

(V.86) $\quad \alpha_2 = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g_2(\xi,\eta)$

et pour cela :

(V.87) $\inf\limits_{\eta} \pi g_2(x,\eta) = \inf\limits_{y} g_2(x,y) \leq \sup\limits_{x} \inf\limits_{y} g_2(x,y) \leq v(g_2)$

et

(V.88) $\inf\limits_{\eta} \pi g_2(\xi_1,\eta) \leq \pi g_2(\xi_1,\eta_1) = [m_2,g_2] \leq v(g_2)$

enfin

(V.89) $\inf\limits_{\eta} \pi g_2(\xi_2,\eta) = \inf \{\inf\limits_{y} \sup\limits_{x} g_2(x,y),\ [m_4,g_2],\ [m_1,g_2]\} = v(g_2)$

Finalement $\alpha_2 = v(g_2)$ et la relation (V.88) est démontrée.

■

b) Un théorème d'interpolation.

Ce résultat va caractériser l'existence d'une fonction valeur "interpolant" un ensemble de bipoints $(g_i,\alpha_i)_{i=1,\dots n}$ où $g_i \in A(X \times Y)$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$. C'est à dire l'existence de $v \in V$ telle que :

(V.90) $\forall i = 1,\dots n \qquad v(g_i) = \alpha_i$

Définissons dans $A(X \times Y)$ la relation R :

(V.91) $g_1,g_2 \in A(X \times Y) \quad g_1 R g_2$ signifie : $\exists (x,y),(x',y') \in X \times Y$
tq. $g_1(x,y) \geq 0 \quad g_2(x',y') \leq 0$ et $g_1(x,y)g_2(x',y')-g_2(x,y)g_1(x',y') \geq 0$

et aussi la relation S :

(V.92) $g_1,g_2 \in A(X \times Y)$: $g_1 S g_2$ signifie : $g_1 R g_2$ et $g_2 R g_1$.

Alors nous avons :

Théorème (V.3).

Supposons que X et Y sont finis. Soient des éléments $(g_i)_{i=1,\dots n}$ de $A(X \times Y)$ et des nombres $(\alpha_i)_{i=1,\dots n}$. Alors il existe une fonction valeur v qui interpole les bipoints $(g_i,\alpha_i)_{i=1,\dots n}$ (au sens de (V.90)) si et seulement si on a :

(V.93) $\forall i = 1,\dots n \qquad \sup\limits_{x} \inf\limits_{y} g_i(x,y) \leq \alpha_i \leq \inf\limits_{y} \sup\limits_{x} g_i(x,y)$

(V.94) $\quad \forall i,j = 1,\dots n \quad (g_i-\alpha_i\theta)S(g_j-\alpha_j\theta)$

Démonstration.

D'après la démonstration des théorèmes (V.1) et (V.2) il nous suffit, pour caractériser l'existence d'une fonction valeur v qui interpole les bipoints $(g_i,\alpha_i)_{i=1,\dots n}$ de caractériser l'existence d'une fonction valeur qui interpole (g_1,α_1) et (g_2,α_2) (on utilise un raisonnement en tous points semblable à celui de l'étape 4)).

Etape 1 : Nous allons d'abord montrer qu'une condition nécessaire et suffisante, de l'existence d'une fonction valeur interpolant (g_1,α_1) et (g_2,α_2) est :

(V.95) $\quad \sup\inf g_i \leq \alpha_i \leq \inf\sup g_i \qquad i = 1,2$

(V.96) $\quad \exists m_1, m_2 \in A_1'(X \times Y) : [m_1,g_1] \leq \alpha_1 \leq [m_2,g_1]$

$$[m_2,g_2] \leq \alpha_2 \leq [m_1,g_2]$$

Ces conditions sont suffisantes d'après l'étape 6 de la démonstration des théorèmes (V.1) et (V.2). Elles sont nécessaires : si $v_p \in V$ est tel que :

(V.97) $\quad \alpha_i = v_p(g_i) = \sup_{\xi\in\mathcal{X}} \inf_{\eta\in\mathcal{Y}} \pi g_i(\xi,\eta) \qquad i = 1,2$

alors la relation (V.95) est claire.

Posons maintenant $I_\xi = \pi^*(\xi,\mathcal{Y})$ il vient

(V.98) $\quad \alpha_i = \sup_\xi [\inf_{m\in I_\xi} [m,g_i]] \qquad i = 1,2$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $\xi_i^\varepsilon (i = 1,2)$ tels que :

(V.99) $\quad \alpha_i \geq \inf_{m\in I_{\xi_i^\varepsilon}} [m,g_i] \geq \alpha_i - \varepsilon \qquad i = 1,2$

Si on choisit m_1^ε dans $I_{\xi_2^\varepsilon}$ tel que :

(V.100) $\quad \inf_{m\in I_{\xi_2^\varepsilon}} [m,g_1] \geq [m_1^\varepsilon,g_1] - \varepsilon$

et m_2^ε dans $I_{\xi_1^\varepsilon}$ tel que :

(V.101) $\quad \inf_{m\in I_{\xi_1^\varepsilon}} [m,g_2] \geq [m_2^\varepsilon,g_2] - \varepsilon$

alors on a :

(V.102) $[m_1^\varepsilon, g_1] \leq \varepsilon + \inf_{m \in I_{\xi_2^\varepsilon}} [m, g_1] \leq \varepsilon + \alpha_1$

et

(V.103) $[m_2^\varepsilon, g_1] \geq \inf_{m \in I_{\xi_1^\varepsilon}} [m, g_1] \geq \alpha_1 - \varepsilon$

On a également :

(V.104) $[m_2^\varepsilon, g_2] \leq \varepsilon + \inf_{m \in I_{\xi_1^\varepsilon}} [m, g_2] \leq \alpha_2 + \varepsilon$

et

(V.105) $[m_1^\varepsilon, g_2] \geq \inf_{m \in I_{\xi_2^\varepsilon}} [m, g_2] \geq \alpha_2 - \varepsilon$

Donc $(m_1^\varepsilon, m_2^\varepsilon)$ vérifient les relations (V.96) "à ε près". Par compacité de $A_1'(X \times Y)$, nous en déduisons que tout point d'adhérence (m_1, m_2) de $(m_1^{\frac{1}{n}}, m_2^{\frac{1}{n}})$ vérifie exactement ces relations.

Etape 2 : Il nous reste a caractériser à quelle condition la relation (V.96) est vraie. Nous allons montrer que la relation $(g_2 - \alpha_2\theta) R (g_1 - \alpha_1\theta)$ équivaut exactement à :

(V.106) $\exists m_1 \in A_1'(X \times Y) \quad [m_1, g_1] \leq \alpha_1 ; \ \alpha_2 \leq [m_1, g_2]$

ce qui établira le théorème d'après (V.92) et (V.94). Or (V.106) s'écrit :

(V.107) $\exists m \in A_1'(X \times Y) \quad [m, g_1 - \alpha_1\theta] \leq 0 ; \ [m, -(g_2 - \alpha_2\theta)] \leq 0$

ou encore

(V.108) $\min_{m \in A_1'(X \times Y)} [\sup \{[m, g_1 - \alpha_1\theta], [m, -(g_2 - \alpha_2\theta)]\}] \leq 0$

Soit en posant $h_1 = g_1 - \alpha_1\theta$ et $h_2 = g_2 - \alpha_2\theta$

(V.109) $\min_{m \in A_1'(X \times Y)} \sup_{\lambda \in [0,1]} [\lambda [m, h_1] - (1-\lambda) [m, h_2]] \leq 0$

D'après le théorème du minimax ceci s'écrit :

(V.110) $\max_{\lambda \in [0,1]} \min_{m \in A_1'(X \times Y)} [m, \lambda h_1 - (1-\lambda) h_2] \leq 0$

ou encore :

(V.111) $\max_{\lambda \in [0,1]} \inf_{(x,y) \in X \times Y} [\lambda h_1(x,y) - (1-\lambda) h_2(x,y)] \leq 0$

c'est à dire :

(V.112) $\quad \forall\lambda \in [0,1] : \inf_{(x,y)} [\lambda h_1(x,y)-(1-\lambda)h_2(x,y)] \leq 0$

or la fonction ϕ :

(V.113) $\quad \phi(\lambda) = \inf_{(x,y)} [\lambda h_1(x,y)-(1-\lambda)h_2(x,y)]$

est concave sur $[0,1]$ et y est donc sous-différentiable. La relation (V. 112) équivaut donc à (V - 114) ou (V - 115) :

(V. 114) $\quad \exists\ (x, y) \in X \times Y \quad \forall\ \lambda \in [0, 1] \qquad \lambda h_1(x, y) - (1 - \lambda)\ h_2\ (x, y) \leq 0$

(V. 115) $\quad \exists\ \lambda \in [0, 1] \qquad \phi(\lambda) \leq 0 \quad$ et $0 \in \partial\phi(\lambda)$

Or (V. 114) équivaut à (V. 116):

(V. 116) $\quad \exists\ (x, y) \in X \times Y \qquad h_1(x, y) \leq 0$ et $h_2(x, y) \geq 0$

et (V. 115) équivaut (puisque $\partial\phi(\lambda)$ est un sous ensemble de $\{h_1\ (x, y) + h_2\ (x, y)\}_{(x, y) \in X \times Y}$ et que X x Y est fini) à :

(V. 117) $\quad \exists\ (x, y) \in X \times Y$, $\exists\ (x', y') \in X \times Y \quad \exists\ \lambda \in [0, 1] \quad \lambda h_1(x, y) - (1 - \lambda)h_2(x, y) = h_1(x',y') - (1-\lambda)h_2(x',y') \leq 0$

$h_1(x,y)+h_2(x,y) \geq 0$

$h_1(x',y')+h_2(x',y') \leq 0$

On vérifie aisément que (V.117) entraîne (V.118)

(V.118) $\quad \exists\ (x,y) \in X \times Y \qquad h_1(x',y') \leq 0$

$\exists (x',y') \in X \times Y \qquad h_2(x,y) \geq 0$

et $h_1(x',y')h_2(x,y)-h_2(x',y')h_1(x,y) \leq 0$

et aussi que (V.116) entraîne (V.118) (où l'on choisit $(x',y')=(x,y)$

Réciproquement Si (V.118) est vraie et que (V.116) est fausse alors (V.117) est vraie.

On choisit pour cela λ égal à

(V.119) $$\frac{h_2(x,y)-h_2(x',y')}{h_1(x,y)+h_2(x,y)-h_1(x',y')-h_2(x',y')}$$

Finalement (V.118) équivaut à {(V.116 ou (V.117)} donc à {(V.114) ou (V.115)}, ce qui établit que (V.112) c'est-à-dire (V.106) équivaut à $\mathbf{h_2 R h_1}$,

ce que nous cherchions précisément à montrer.

V.3. FONCTIONS VALEURS ET PROLONGEMENTS AVEC ECHANGE PARTIEL D'INFORMATION.

Nous allons montrer que toute fonction valeur est la fonction valeur d'un prolongement avec échange partiel d'information (définition (IV.1)), autrement dit :

Théorème (V.4).

Tout prolongement jouable est équivalent à un prolongement (jouable) qui est le composé d'un prolongement sans échange d'information avec un prolongement par échange d'information. C'est à dire que pour tout élément v de V, il existe un prolongement avec échange partiel d'information p tel que :

(V.121) $\forall g \in A(X \times Y) \quad v(g) = \sup_{\xi} \inf_{\eta} \pi g(\xi,\eta) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta).$

Démonstration.

Notons V_0 l'ensemble des fonctions valeurs des prolongements jouables avec échange partiel d'information. Nous allons montrer que $V_0 = V$.

Etape 1 : Soit A un ensemble d'indices et soit, pour tout α dans A un prolongement $p_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha, i_\alpha, j_\alpha, \pi_\alpha)$ qui est jouable et qui est le composé de $p_\alpha^1 = (X_\alpha^1, Y_\alpha^1, i_\alpha^1, j_\alpha^1, \pi_\alpha^1)$, sans échange d'information, avec $p_\alpha^2 = (X_\alpha^2, Y_\alpha^2, i_\alpha^2, j_\alpha^2, \pi_\alpha^2)$, par échange d'information. Supposons :

(V.122) $\forall \alpha \in A: (\pi_\alpha^1)_X^*(X_\alpha^1) = A_1'(X); \; (\pi_\alpha^1)_Y^*(Y_\alpha^1) = A_1'(Y)$

Soit Y^1 le sous-ensemble de $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^1$ défini par :

(V.123) $Y^1 = \{\eta^1 = (\eta_\alpha^1)_{\alpha\in A} / (\pi_\alpha^1)_Y^*(\eta_\alpha^1)$ ne dépend pas de $\alpha\}$

et soit X^1 la somme ensembliste $\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha^1$. Choisissons un indice 0 dans A et définissons les 2 injections i^1 et j^1 :

(V.124) $i^1 : X \to X^1 \quad i^1(x) = i_0^1(x) \in X_0^1 \subset X^1$

(V.125) $j^1 : Y \to Y^1 \quad j^1(y) = (j_\alpha^1(y))_{\alpha\in A} \in Y^1$

La définition (V.125) a un sens puisque (proposition (I.2))

(V.126) $\forall \alpha \in A \quad \forall y \in Y: (\pi_\alpha^1)_Y^*(j_\alpha^1(y)) = \delta_y$

Définissons maintenant l'application $(\pi^1)^*$

(V.127) $\quad (\pi^1)^* : X^1 \times Y^1 \to A_1'(X \times Y) : (\pi^1)^*(\xi^1,\eta^1) = (\pi_\alpha^1)^*(\xi^1,\eta_\alpha^1)$
si $\xi^1 \in X_\alpha^1$ et $\eta^1 = (\eta_\alpha^1)$

Alors $(\pi^1)^*$ vérifie les relations (I.12) puisque $(\pi_\alpha^1)^*$ les vérifie et nous venons donc de définir un prolongement $p_1 = (X^1,Y^1,i^1,j^1,\pi^1)$. Ce prolongement est sans échange d'information car

(V.128) $\quad (\pi^1)_X^*(\xi^1,\eta^1) = (\pi_\alpha^1)_X^*(\xi^1)$ si $\xi^1 \in X_\alpha^1$

et

(V.129) $\quad (\pi^1)_Y^*(\xi^1,\eta^1) = (\pi_\alpha^1)_Y^*(\eta_\alpha^1)$ si $\xi^1 \in X_\alpha^1$ ne dépend pas de α_1 donc de ξ^1

Soit maintenant $X^2 \subset F(Y^1,X^1)$ l'ensemble suivant :

(V.130) $\quad X^2 = \{\xi^2 \in F(Y^1,X^1) / \exists \alpha \in A \;\; \exists \xi_\alpha^2 \in X_\alpha^2 : \forall \eta^1 \in Y^1 \xi^2(\eta^1) = \xi_\alpha^2(\eta_\alpha^1)\}$

Comme X_α^2 contient les applications constantes $i_\alpha^2(X_\alpha^1)$, X^2 contient les applications constantes $i^2(X^1)$, si l'injection i^2 est définie par :

(V.131) $\quad i^2 : X^1 \to X^2 \quad i^2(\xi^1)(\eta^1) = i_\alpha^2(\xi^1)(\eta_\alpha^1) = \xi^1$ si $\xi^1 \in X_\alpha^1$.

Nous remarquons maintenant qu'à tout élément $(\eta_\alpha^2)_{\alpha\in A}$ de $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^2$ nous pouvons associer, d'après l'hypothèse (V.122) au moins une application $\eta^2 \in F(X^1,Y^1)$ telle que :

(V.132) $\quad \forall \xi^1 \in X^1 : \eta^2(\xi^1) \in Y^1$ et $[\eta^2(\xi^1)]_\alpha = \eta_\alpha^2(\xi^1)$ si $\xi^1 \in X_\alpha^1$.

Nous notons Y^2 le sous-ensemble de $F(X^1,Y^1)$ ainsi obtenu. Comme Y_α^2 contient les applications constantes $j_\alpha^2(Y_\alpha^1)$, Y^2 contient les applications constantes $j^2(Y^1)$ si l'injection j^2 est définie par :

(V.133) $\quad j_2 : Y^1 \to Y^2 \quad j_2(\eta^1)(\xi^1) = \eta^1$ pout tout ξ^1

On a bien en effet :

(V.134) $\quad$ si $\xi^1 \in X_\alpha^1 \quad [j_2(\eta^1)(\xi^1)]_\alpha = \eta_\alpha^1 = j_\alpha^2(\eta_\alpha^1)(\xi_1)$

Montrons maintenant que (X^2,Y^2) est un couple décisionnel. Nous notons $f_\alpha(\xi_\alpha^2,\eta_\alpha^2)$ la section de la multiapplication $F_\alpha(\xi_\alpha^2,\eta_\alpha^2)$ qui définit le prolongement par échange d'information p_α^2 (cf. définition (III.2)).

Soit un élément (ξ^2,η^2) de $X^2 \times Y^2$ et supposons que ξ^2 "provient" dans la définition (V.130) d'un élément ξ^2_α de X^2_α. Notons aussi $(\eta^2_\alpha)_{\alpha\in A}$ un élément de $\prod_{\alpha\in A} \dot{Y}^2_\alpha$ qui provient d'un élément η^2 dans la définition (V.132). Posons :

$$(V.135) \qquad (\xi^1_\alpha,\eta^1_\alpha) = f_\alpha(\xi^2_\alpha,\eta^2_\alpha) \in X^1_\alpha \times Y^1_\alpha \subset X^1 \times Y^1_\alpha$$

Alors le couple $(\xi^1_\alpha,\eta^2(\xi^1_\alpha)) \in X^1 \times Y^1$ est un point fixe de l'application de $X^1 \times Y^1$ dans lui-même :

$$(V.136) \qquad (\xi^1,\eta^1) \to (\xi^2(\eta^1),\eta^2(\xi^1))$$

En effet il nous suffit de vérifier

$$(V.137) \qquad \xi^2(\eta^2(\xi^1_\alpha)) = \xi^1_\alpha$$

(puisque l'autre égalité est vraie par construction). Or d'après (V.130) :

$$(V.138) \qquad \xi^2(\eta^2(\xi^1_\alpha)) = \xi^2_\alpha([\eta^2(\xi^1_\alpha)]_\alpha)$$

et d'après (V.132) et (V.135) :

$$(V.139) \qquad [\eta^2(\xi^1_\alpha)]_\alpha = \eta^2_\alpha[\xi^1_\alpha] = \eta^1_\alpha$$

Donc, (V.138), (V.139) et (V.135) entrainent :

$$(V.140) \qquad \xi^2(\eta^2(\xi^1_\alpha)) = \xi^2_\alpha(\eta^1_\alpha) = \xi^1_\alpha$$

Nous venons donc de construire une section $f(\xi^2,\eta^2)$ de la multiapplication $F(\xi_2,\eta_2)$, et donc de définir un prolongement $p_2 = (X^2.V^2;^2,i^2,\pi^2)$, par échange d'information, des jeux sur X^1, Y^1 :

$$(V.141) \qquad (\pi^2)^*(\xi^2,\eta^2) = \delta_{f(\xi^2,\eta^2)} \in A_1^!(X^1 \times Y^1)$$

Nous appelons p le prolongement composé de p_1 avec p_2 (cf. proposition (IV.1)). Etudions son opérateur transposé π^* : Soit (ξ^2,η^2) un élément de $X^2 \times Y^2$ et supposons que ξ^2 provient de $\xi^2_\alpha \in X^2_\alpha$ (au sens de (V.130)) cependant que η^2 provient de $(\eta^2_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} Y^2_\alpha$ (au sens de (V.132)). Alors on a d'après (V.135) et (V.140) :

$$(V.142) \qquad f(\xi^2,\eta^2) = (\xi^1_\alpha,\eta^1) \in X^1_\alpha \times Y^1 \text{ et } (\xi^1_\alpha,\eta^1_\alpha) = f_\alpha(\xi^2_\alpha,\eta^2_\alpha)$$

Donc d'après (V.127) et (V.142) :

(V.143) $\pi^*(\xi^2,\eta^2) = (\pi^1)^*(\xi^1_\alpha,\eta^1) = (\pi^1_\alpha)^*(\xi^1_\alpha,\eta^1_\alpha) = \pi^*_\alpha(\xi^2_\alpha,\eta^2_\alpha)$

Nous venons de montrer que le prolongement p vérifie la propriété :

(V.144) $\forall \xi^2,\eta^2 \quad \pi^*(\xi^2,\eta^2) = \pi^*_\alpha(\xi^2_\alpha,\eta^2_\alpha)$ si ξ^2 provient de ξ^2_α
et si η^2 provient de $(\eta^2_\alpha)_{\alpha\in A}$

Cette propriété est très semblable à la définition de l'opérateur π^* dans l'étape 3 de la démonstration des théorèmes (V.1) et (V.2) (relation (V.39)). En fait elle permet, d'une façon rigoureusement identique de montrer que p est jouable et a pour fonction valeur $v = \sup_{\alpha\in A} v_\alpha$. Remarquons enfin que le prolongement p_1 vérifie, en vertu de (V.122), (V.128) et (V.129) :

(V.145) $(\pi^1)^*_X(X^1) = A'_1(X);(\pi^1)^*_Y(Y^1)$.

Donc, dans l'étape 1, nous venons de montrer que si une famille de prolongements jouables avec échange partiel d'information vérifie (V.122) alors il existe un prolongement avec échange partiel d'information vérifiant (V.145), qui est jouable et dont la fonction valeur est le supremum (ou l'infimum, par un raisonnement analogue) des fonctions valeurs des prolongements de la famille.

<u>Etape 2</u> : Soit θ un élément de $A'_1(X \times Y)$. Définissons v_θ par :

(V.146) $$\forall g \in A(X \times Y) \quad v_\theta(g) = \begin{cases} \sup_x \inf_y g(x,y) \text{ si } [\theta,g] \leq \sup_x \inf_y g(x,y) \\ \inf_y \sup_x g(x,y) \text{ si } [\theta,g] \geq \inf_y \sup_x g(x,y) \\ [\theta,g] \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit v un élément de V. Alors il existe 2 familles d'indices $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et pour tout $(\xi,\eta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ un élément $\theta_{\xi,\eta}$ de $A'_1(X \times Y)$, tels que :

(V.147) $\forall g \in A(X \times Y) \quad v(g) = \sup_\xi \inf_\eta [\theta_{\xi,\eta},g]$

(on choisit bien sûr $\theta_{\xi,\eta} = \pi^*(\xi,\eta)$). Remarquons que $v_\theta(g)$ s'écrit aussi :

(V.148) $v_\theta(g) = \inf\{\inf_y \sup_x g, \sup[[\theta,g], \sup_x \inf_y g]\}$

Et puisque v est une fonction valeur on a aussi :

(V.149) $v(g) = \inf\{\inf_y \sup_x g, \sup[v(g), \sup_x \inf_y g]\}$

Or, de (V.147) on déduit :

(V.150) $\sup\,[v(g),\ \sup_x \inf_y g] = \sup_\xi \inf_\eta\,[\sup\,\{\sup_x \inf_y g,\ [\theta_{\xi,\eta},g]\}]$

En effet on a toujours :

(V.151) $\sup\,(a,\ \sup_i b_i) = \sup_i\,(\sup\,(a,b_i))$ et $\sup\,(a,\ \inf_j c_j) = \inf_j\,(\sup\,(a,c_j))$

De (V.150) et (V.149) on déduit :

(V.152) $v(g) = \inf\,\{\inf_y \sup_x g,\ \sup_\xi \inf_\eta\,(A_{\xi,\eta})\}$

où on a posé :

(V.153) $A_{\xi,\eta} = \sup\,\{\sup_x \inf_y g, [\theta_{\xi,\eta},g]\}$

On déduit de relations analogues à (V.151) et de (V.152) que :

(V.154) $v(g) = \sup_\xi \inf_\eta\,[\inf\,\{\inf_y \sup_x g,\ A_{\xi,\eta}\}]$

Finalement de (V.154), (V.153) et (V.148) on tire :

(V.155) $v(g) = \sup_\xi \inf_\eta v_{\theta_{\xi,\eta}}(g).$

Donc l'étape 2 prouve que toute fonction valeur est obtenue à partir des fonctions v_θ et à l'aide des opérations supremum et infimum.

<u>Etape 3</u> : Nous allons montrer que, pour tout θ, v_θ est la fonction valeur d'un prolongement jouable avec échange partiel d'information vérifiant (V.145). D'après l'étape 1 il s'ensuivra que toute enveloppe supérieure de certaines fonctions v_θ, est encore la fonction valeur d'un prolongement du même type. Donc toute enveloppe inférieure d'enveloppes supérieures de fonctions v_θ est dans V_0 (en utilisant encore une fois l'étape 1). Mais l'étape 2 montre qu'on obtient ainsi toutes les fonctions valeurs. Donc V est égal à V_0. Nous fixons donc un élément θ de $A_1'(X \times Y)$ et construisons d'abord un prolongement $p_1 = (\mathcal{X}^1, \mathcal{Y}^1, i^1, j^1, \pi^1)$. Pour cela nous choisissons un symbole α qui n'est pas dans $\tilde{X}$ (l'ensemble des suites à éléments dans X) et un symbole β qui n'est pas dans $\tilde{Y}$, et nous posons :

(V.156) $\mathcal{X}^1 = \tilde{X} \cup \{\alpha\}$ $\qquad i^1 : X \to \mathcal{X} \quad i^1(x) = (x,x,\dots x,\dots)$

(V.157) $\mathcal{Y}^1 = \tilde{Y} \cup \{\beta\}$ $\qquad j^1 : Y \to \mathcal{Y} \quad j^1(y) = (y,y,\dots y,\dots)$

Appelons a un élément de T (cf. chapitre II §4.c). Alors si $(\tilde{x},\tilde{y})$ est un élément de $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ la relation (V.158) définit un élément $(\pi^1)^*(\tilde{x},\tilde{y})$:

$$(V.158) \qquad \forall g \in A(X \times Y) \quad [(\pi^1)^*(\tilde{x},\tilde{y}),g] = [a,(g(x_i,y_i))_{i\in\mathbb{N}}]$$

(dans cette relation, le premier crochet est le crochet de dualité entre $A'(X \times Y)$ et $A(X \times Y)$ et le second celui de la dualité entre $[\ell^\infty(\mathbb{N})]'$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$).

Donc les relations (V.159) et (V.160) caractérisent les applications $(\pi^1)^*_X : \tilde{X} \to A'_1(X)$ et $(\pi^1)^*_Y : \tilde{Y} \to A'_1(Y)$:

$$(V.159) \qquad \forall h \in A(X) \quad [(\pi^1)^*_X(\tilde{x}),h] = [a,h[\tilde{x}]]$$

$$(V.160) \qquad \forall \ell \in A(Y) \quad [(\pi^1)^*_Y(\tilde{y}),\ell] = [a,\ell[\tilde{y}]].$$

Alors nous étendons la définition de $(\pi^1)^*$ à $X^1 \times Y^1$: (on note $\theta_X = p_X(\theta)$ et $\theta_Y = p_Y(\theta)$).

$$(V.161) \qquad \begin{cases} (\pi^1)^*(\tilde{x},\beta) = a \text{ est choisi tel que } p_X(a) = (\pi^1)^*_X(\tilde{x}) \text{ et } p_Y(a) = \theta_Y \\ (\pi^1)^*(\alpha,\tilde{y}) = b \text{ est choisi tel que } p_X(a) = \theta_X \text{ et } p_Y(a) = (\pi^1)^*_Y(\tilde{y}) \\ (\pi^1)^*(\alpha,\beta) = \theta. \end{cases}$$

Il est clair que les relations (V.158) et (V.161) définissent une application $(\pi^1)^*$ telle que :

$$(V.162) \qquad \begin{cases} p_X((\pi^1)^*(\tilde{x},\eta^1)) = (\pi^1)^*_X(\tilde{x}) & \forall \eta^1 \in Y^1 \\ \\ p_X((\pi^1)^*(\alpha,\eta^1)) = \theta_X & \forall \eta^1 \in Y^1 \end{cases}$$

et telle que :

$$(V.163) \qquad \begin{cases} p_Y((\pi^1)^*(\xi^1,\tilde{y})) = (\pi^1)^*_Y(\tilde{y}) & \forall \xi^1 \in X^1 \\ \\ p_Y((\pi^1)^*(\xi^1,\beta)) = \theta_Y & \forall \xi^1 \in X^1 \end{cases}$$

Autrement dit $(\pi^1)^*$ est la forme transposée d'un opérateur de prolongement π^1, tel que le prolongement p_1 est sans échange d'information. De plus, nous avons montré (en (II.§4.c)) que $(\pi^1)^*_X$ et $(\pi^1)^*_Y$ sont surjectives. Donc le prolongement p_1 vérifie la relation (V.145).

Nous définissons maintenant un couple décisionnel $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ où $\mathcal{X} \subset F(\mathcal{Y}^1,\mathcal{X}^1)$ et $\mathcal{Y} \subset F(\mathcal{X}^1,\mathcal{Y}^1)$:

$$(V.164) \qquad \mathcal{X} = \{\xi \in F(\mathcal{Y}^1,\mathcal{X}^1) / \text{ou bien } (\xi \text{ est constante}), \text{ ou bien } (\xi(\tilde{Y}) \subset \tilde{X} \text{ et } \xi(\beta) = \alpha)\}$$

$$(V.165) \qquad \mathcal{Y} = \{\eta \in F(\mathcal{X}^1,\mathcal{Y}^1) / \text{ou bien } (\eta \text{ est constante}), \text{ ou bien } (\eta(\tilde{X}) \subset \tilde{Y} \text{ et } \eta(\alpha) = \beta)\}$$

On vérifie aisément que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un couple décisionnel et on appelle $p_2 = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i^2,j^2,\pi^2)$ un prolongement par échange d'information associé. Ainsi le prolongement p, composé de p_1 avec p_2, est un prolongement avec échange partiel d'information vérifiant (V.145). Nous allons montrer qu'il est jouable et a pour valeur v_θ. Fixons g dans $A(X \times Y)$ alors pour tout $\xi \in \mathcal{X}$ on a (cf. (III.37)) :

$$(V.166) \qquad L(\xi) = \inf_{\eta \in \mathcal{Y}} (\pi^2 \circ \pi^1)(g)(\xi,\eta) = \inf_{\eta^1 \in \mathcal{Y}^1} \pi^1 g(\xi(\eta^1),\eta^1)$$

Choisissons alors $\varepsilon > 0$ et ξ_ε dans $F(\mathcal{Y}^1,\mathcal{X}^1)$ tel que :

$$(V.167) \qquad \begin{cases} \forall \tilde{y} = (y_j)_{j\in N} \ \xi_\varepsilon(\tilde{y}) = \tilde{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ \qquad\qquad \text{avec } \forall i \in \mathbb{N} \ g(x_i,y_i) \geq \inf\limits_y \sup\limits_x g(x,y) - \varepsilon \\ \xi_\varepsilon(\beta) = \alpha \end{cases}$$

Alors ξ_ε est un élément de $\mathcal{X}$, et d'après (V.166), (V.161) et (V.158) :

$$(V.168) \qquad L(\xi_\varepsilon) = \inf \{\pi^1 g(\alpha,\beta), \inf_{\tilde{y}} \pi^1 g(\xi_\varepsilon(\tilde{y}),\tilde{y})\} = \\ = \inf \{[\theta,g], \inf_{\tilde{y}} [a,(g(x_i,y_i))_{i\in N}]\}$$

Donc (V.167) entraine, puisque a est dans $[\ell^\infty(N)]'_1$:

$$(V.169) \qquad L(\xi_\varepsilon) \geq \inf \{[\theta,g], (\inf_y \sup_x g(x,y) - \varepsilon)\}$$

Comme ε était quelconque positif, il vient :

$$(V.170) \qquad \sup_\xi \inf_\eta (\pi^2 \circ \pi^1) g(\xi,\eta) \geq \inf \{[\theta,g], \inf_y \sup_x g(x,y)\}.$$

Choisissons maintenant x_ε dans X tel que :

$$(V.171) \qquad \forall y \in Y \ g(x_\varepsilon,y) \geq \sup_x \inf_y g(x,y) - \varepsilon$$

Alors, si $\xi'_\varepsilon = i^2 \circ i^1(x_\varepsilon)$ désigne l'application constante de $F(Y^1, X^1)$ égale à $i^1(x_\varepsilon) = (x_\varepsilon, \ldots, x_\varepsilon, \ldots)$, ξ'_ε est un élément de X et on a d'après (V.166) :

$$\text{(V.172)} \qquad L(\xi'_\varepsilon) = \inf \{\pi^1 g(i^1(x_\varepsilon), \beta), \inf_{\tilde{y}} \pi^1 g(i^1(x_\varepsilon), \tilde{y})\}$$

Donc d'après (V.161), (V.159) et (V.158) :

$$\text{(V.173)} \qquad L(\xi'_\varepsilon) = \inf \{[\delta_{x_\varepsilon} \otimes \theta_Y, g], \inf_{\tilde{y}} [a, (g(x_\varepsilon, y_i))_{i \in N}]\}$$

Par conséquent (V.171) entraine :

$$\text{(V.174)} \qquad L(\xi'_\varepsilon) \geq \sup_x \inf_y g(x,y) - \varepsilon$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, (V.170) et (V.174) entrainent finalement :

$$\text{(V.175)} \qquad \sup_\xi \inf_\eta (\pi^2 \circ \pi^1) g(\xi, \eta) \geq \sup [\sup_x \inf_y g, \inf \{[\theta, g], \inf_y \sup_x g\}]$$

Or la fonction $v_\theta(g)$ (V.146) peut aussi s'écrire (relation analogue à (V.148)) :

$$\text{(V.176)} \qquad v_\theta(g) = \sup [\sup_x \inf_y g, \inf \{[\theta, g], \inf_y \sup_x g\}]$$

Donc nous avons montré :

$$\text{(V.177)} \qquad \sup_\xi \inf_\eta (\pi^2 \circ \pi^1) g(\xi, \eta) \geq v_\theta(g)$$

On démontre de façon analogue (et en utilisant (V.148)) que :

$$\text{(V.178)} \qquad \inf_\eta \sup_\xi (\pi^2 \circ \pi^1) g(\xi, \eta) \leq v_\theta(g)$$

ce qui prouve que p est jouable et a pour valeur v_θ.

■

V.4. CARACTERISATION DES PROLONGEMENTS JOUABLES.

Si E est un sous-ensemble de $A'_1(X \times Y)$ nous notons $\overline{CO}(E)$ son enveloppe convexe fermée (pour la topologie faible ou forte : c'est la même chose, cf. [Dunford-Schwartz]).

Si P et Q désignent des applications

(V.179) $P : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$; $Q : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

nous noterons $C(P)$ et $D(Q)$ les ensembles :

(V.180) $C(P) = \{\pi^*(P(\eta),\eta)/\eta \in \mathcal{Y}\} \subset A_1'(X \times Y)$

(V.181) $D(Q) = \{\pi^*(\xi,Q(\xi))/\xi \in \mathcal{X}\} \subset A_1'(X \times Y)$.

<u>Lemme</u> (V.1).

<u>Un prolongement</u> $p = (\mathcal{X},\mathcal{Y},i,j,\pi)$ <u>des jeux sur</u> $X \times Y$ <u>est jouable si et seulement si pour tout couple</u> (P,Q) <u>d'applications</u> (V.179) <u>on a</u> :

(V.182) $\overline{CO}\,[C(P)] \cap \overline{CO}\,[D(Q)] \neq \emptyset$

Appelons les applications P et Q respectivement des règles de décision dans l'ensemble des stratégies étendues de Xavier et Yves.

Si maintenant $m \in A_1'(\mathcal{X})$ et $n \in A_1'(\mathcal{Y})$ sont respectivement des stratégies mixtes de l'ensemble des stratégies étendues de Xavier et Yves, alors nous pouvons prolonger la fonction de gain πg (définie sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$) en définissant $\pi g(P,n)$ et $\pi g(m,Q)$ de la façon suivante :

(V.183) $\forall P \in F(\mathcal{Y},\mathcal{X})$; $\forall n \in A_1'(\mathcal{Y})$: $\pi g(P,n) = [n,\pi g(P(.),.)]_{A_1'(\mathcal{Y}),A(\mathcal{Y})}$
où $\pi g(P(.),.)$ est la fonction : $\eta \to \pi g(P(\eta),\eta)$.

(V.184) $\forall m \in A_1'(\mathcal{X})$; $\forall Q \in F(\mathcal{X},\mathcal{Y})$: $\pi g(m,Q) = [m,\pi g(.,Q(.))]_{A_1'(\mathcal{X}),A(\mathcal{X})}$
où $\pi g(.,Q(.))$ est la fonction : $\xi \to \pi g(\xi,Q(\xi))$

On vérifie aisément qu'on a ainsi construit deux "surprolongements" du prolongement p (on a composé p avec deux prolongements différents) dont les ensembles de stratégies prolongées sont respectivement $F(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \times A_1'(\mathcal{Y})$ et $A_1'(\mathcal{X}) \times F(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.
Nous pouvons énoncer le :

<u>Théorème</u> (V.5).

<u>Le prolongement</u> p <u>est jouable si et seulement si pour tout couple</u> (P,Q) <u>de règles de décisions de Xavier et Yves dans l'ensemble des stratégies étendues, il existe un couple</u> (m,n) <u>de stratégies mixtes de Xavier et Yves dans leur ensemble de stratégies étendues, tel que</u> :

(V.185) $\forall g \in A(X \times Y) \quad \pi g(P,n) = \pi g(m,Q)$

Si l'application $(\xi,\eta) \to (P(\eta),Q(\xi))$ admet un point fixe (ξ,η) dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, on vérifie immédiatement que :

(V.186) $\quad \pi g(P,\delta_\eta) = \pi g(\delta_\xi,Q)$

La condition de jouabilité signifie donc que si un couple (P,Q) de règles de décision de Xavier et Yves est incompatible (l'application $(\xi,\eta) \to (P(\eta),Q(\xi))$ ne possède pas de point fixe) il existe un couple (m,n) de stratégies mixtes de Xavier et Yves dans leur ensemble de stratégies étendues, qui réalise un compromis au sens de l'égalité (V.185).

<u>Démonstration du lemme</u> (V.1) <u>et du théorème</u> (V.5).

Supposons que p n'est pas jouable : il existe g dans $A(X \times Y)$ tel que :

(V.187) $\quad \alpha = \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) < \inf_\eta \sup_\xi \pi g(\xi,\eta) = \beta$

Autrement dit pour tout ξ il existe $\eta = Q(\xi)$ tel que :

(V.188) $\quad \pi g(\xi,Q(\xi)) \leq \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3}$.

et pour tout η il existe $\xi = P(\eta)$ tel que :

(V.189) $\quad \pi g(P(\eta),\eta) \geq \beta - (\frac{\beta-\alpha}{3}) = \alpha + \frac{2}{3}(\beta-\alpha)$

Les relations (V.188) et (V.189) s'écrivent donc :

(V.190) $\quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : [\pi^*(P(\eta),\eta),g] \geq \alpha + \frac{2}{3}(\beta-\alpha) > \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3} \geq [\pi^*(\xi,Q(\xi)),g]$

Par conséquent $\overline{CO}(D(P))$ et $\overline{CO}(D(Q))$ sont strictement séparés par l'hyperplan g, c'est à dire que :

(V.191) $\quad \inf_{\mu \in D(P)} [\mu,g] = \inf_{\mu \in \overline{CO}(D(P))} [\mu,g] > \sup_{\nu \in D(Q)} [\nu,g] = \sup_{\nu \in \overline{CO}(D(Q))} [\nu,g]$

En particulier $\overline{CO}(D(P))$ et $\overline{CO}(D(Q))$ sont disjoints.
Réciproquement, s'il existe P et Q tels que $\overline{CO}(D(P))$ et $\overline{CO}(D(Q))$ sont disjoints, le théorème de Hahn-Banach, qui s'applique puisque $A_1'(X \times Y)$ est faiblement compact, montre qu'il existe g vérifiant (V.191). On vérifie aisément qu'on a toujours :

(V.192) $\quad \sup_\xi \inf_\eta \pi g(\xi,\eta) \leq \sup_{\nu \in D(Q)} [\nu,g]$

et

(V.193) $\inf_{\eta} \sup_{\xi} \pi g(\xi,\eta) \geq \inf_{\mu \in D(P)} [\mu,g]$

Donc (V.191) (V.192) et (V.193) montrent que πg n'a pas de valeur. Le lemme (V.1) est établi. Pour établir le théorème (V.5) remarquons que la relation (V.183) définit un élément $\pi^*(P,n)$ dans $A_1'(X \times Y)$, par :

(V.194) $\forall g \in A(X \times Y)\ [\pi^*(P,n),g] = \pi g(P,n)$

L'égalité (V.185) s'écrit alors :

(V.195) $\pi^*(P,n) = \pi^*(m,Q)$

Enfin, le sous-ensemble $\{\pi^*(P,n)/n \in A_1'(Y)\}$ de $A_1'(X \times Y)$ est clairement l'enveloppe convexe fermée des éléments $\pi^*(P,\delta_\eta) = \pi^*(P(\eta),\eta)$. Autrement dit c'est $\overline{CO}(C(P))$. De même on remarque que $\{\pi^*(m,Q)/m \in A_1'(X)\}$ est égal à $\overline{CO}(D(Q))$ et le théorème (V.5) découle immédiatement du lemme (V.1).

Application du lemme (V.1).

Soit par exemple un prolongement des jeux sur X x Y où X et Y sont de cardinal 2, dont les ensembles de stratégies étendues ont chacun 4 éléments. Alors le nombre de couples (P,Q) tels que :

(V.196) l'application $(\xi,\eta) \to (P(\eta),Q(\xi))$ n'a pas de point fixe

est supérieur à 200 ! Donc étudier la jouabilité d'un tel prolongement en appliquant le lemme (V.1), c'est à dire en cherchant si certaines enveloppes convexes de points dans le simplexe de $\mathbb{R}^4$ se coupent, est en pratique extrêmement long.

VI. APPENDICE. LE JEU ITERE ERGODIQUE.

VI.1. DEFINITION.

Nous allons étudier un jeu itéré à information parfaite (IV.§3). Rappelons-en la définition : Si a désigne un élément de $S = [\ell^\infty(\mathbb{N}^2)]_1'$ alors le jeu itéré de mesure a sans échange d'information est le prolongement p_1 :

(VI.1) $\qquad p_1 = (\tilde{X},\tilde{Y},i,j,\pi_a)$

où π_a est défini par :

(VI.2) $\qquad \forall g \in A(X \times Y) \quad \pi_a g(\tilde{x},\tilde{y}) = [a,g[\tilde{x},\tilde{y}]]$.

Nous appelons maintenant stratégies non anticipatives de Xavier et Yves les ensembles $\mathcal{X}_{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{Y}_{\mathbb{N}}$ (cf. (IV.§3.a))

(VI.3) $\qquad \mathcal{X}_{\mathbb{N}} = \{\xi \in F(\tilde{Y},\tilde{X})/\forall i \in \mathbb{N} \quad \xi_i : \tilde{Y} \to X$ ne dépend pas de $y_i,y_{i+1},\dots\}$

(VI.4) $\qquad \mathcal{Y}_{\mathbb{N}} = \{\eta \in F(\tilde{X},\tilde{Y})/\forall j \in \mathbb{N} \quad \eta_j : \tilde{X} \to Y$ ne dépend pas de $x_{j+1},x_{j+2},\dots\}$

On vérifie aisément que $(\mathcal{X}_{\mathbb{N}},\mathcal{Y}_{\mathbb{N}})$ constitue un couple décisionnel et même que pour tout (ξ,η), $F(\xi,\eta)$ a exactement un point. Autrement dit il existe un unique prolongement des jeux sur $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ associé au couple décisionnel $(\mathcal{X}_{\mathbb{N}},\mathcal{Y}_{\mathbb{N}})$ (cf. définition (III.2)). Appelons le p_2. Alors le jeu itéré de mesure a à information parfaite est le composé de p_1 avec p_2.

Il y a une façon plus simple de le définir, en décrivant à quelle façon de jouer le jeu initial il correspond :

(VI.5) $\qquad \begin{cases} \text{Xavier choisit } x_1 \in X \text{ puis Yves (informé de } x_1\text{) choisit} \\ y_1 \in Y, \text{ puis Xavier (informé de } y_1\text{) choisit } x_2 \in X, \text{ etc...} \end{cases}$

Le paiement est alors :

(VI.6) $\qquad [a,(g(x_i,y_j))_{i,j\in\mathbb{N}}]$.

Nous savons (cf. IV.§.3 théorème (IV.2)) que lorsque a est dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$, les jeux itérés à information parfaite sont jouables. Nous pouvons supposer qu'il en est de même dans le cas général, mais puisque chaque élément de $[\ell^\infty(\mathbb{N}^2)]' - \ell^1(\mathbb{N}^2)$ est construit à l'aide du théorème de Hahn-Banach, un tel résultat général semble hors de portée. La jouabilité des jeux itérés dont la mesure est dans $\ell^1(\mathbb{N}^2)$ peut être déduite des résultats généraux de [Gale Stewart] mais, dès que a est dans $[\ell^\infty(\mathbb{N}^2)]' - \ell^1(\mathbb{N}^2)$, elle n'en découle plus.

Nous allons, à titre d'exemple, étudier dans un jeu itéré de ce type la jouabilité, la nature et la construction des stratégies optimales.

Définition (VI.1).

Un jeu itéré ergodique est un jeu itéré à information parfaite, dont la mesure a vérifie

$$(VI.7) \qquad [a, g(\tilde{x},\tilde{y})] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} [g(x_i,y_i) + g(x_{i+1},y_i)]$$

Nous savons (cf. II.§.4.c)) qu'il existe une infinité de mesures a vérifiant (VI.7) et par conséquent une infinité de jeux itérés ergodiques. Mais nous allons montrer en VI.§.2 que non seulement la valeur, mais les stratégies optimales d'un tel jeu ne dépendent pas de la mesure a choisie. Ce qui nous permettra (lorsque le théorème (VI.1) s'applique) de parler "du" jeu itéré ergodique. Terminons ce paragraphe par une description "extensive" du jeu itéré ergodique.

(VI.8) Xavier choisit $x_1 \in X$ puis Yves choisit $y_1 \in Y$ puis Xavier choisit $x_2 \in X$ etc.... . Le jeu est à information parfaite et le paiement est la moyenne de Cesaro des paiements "instantanés" rencontrés :
$g(x_1,y_1), g(x_2,y_1), g(x_2,y_2)$, etc...

VI.2. RESOLUTION DU JEU ITERE ERGODIQUE.

Définition (VI.2).

Dans un jeu itéré à information parfaite on appelle stratégie stationnaire de Yves et on note Q, une application de X dans Y (une règle de décision). On identifie Q à une stratégie non anticipative de Yves par la formule :

$$(VI.9) \qquad Q : \tilde{X} \to \tilde{Y} \quad Q(\tilde{x}) = (Q(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$$

De même on appelle stratégie stationnaire de Xavier et on note (x,P) un couple formé d'une stratégie pure (coup initial) et d'une application de Y dans X (une règle de décision). On identifie (x,P) à une stratégie non anticipative de Xavier par la formule :

(VI.10) $\quad (x,P) : \tilde{Y} \to \tilde{X} \; (x,P)(\tilde{y}) = (x,P(y_1),\ldots,P(y_i),\ldots)$

Nous supposons maintenant que X et Y sont compacts et que g est une fonction continue pour pouvoir résoudre le jeu itéré ergodique qui prolonge le jeu initial g :

Théorème (VI.1).

Supposons que X et Y sont compacts et que g est une fonction continue :
a) Il existe un unique nombre réel v tel que le système suivant, dont les inconnues sont les fonctions continues A(y) et B(x) ait une solution :

$$\text{(VI.11)} \quad \begin{cases} \text{i)} \;\; A(y) = \sup\limits_{x\in X} [g(x,y) + B(x)] - v & \forall y \in Y \\ \text{ii)} \; B(x) = \inf\limits_{y\in Y} [g(x,y) + A(y)] - v & \forall x \in X \end{cases}$$

b) Ce nombre v est la valeur du (de tous les) jeu itéré ergodique qui prolonge le jeu initial g. Toute stratégie stationnaire $(x_1,\overline{P})$ de Xavier telle que $\overline{P}$ vérifie :

$$\text{(VI.12)} \quad \forall y \in Y \quad g(\overline{P}y,y) + B(\overline{P}y) = \sup_{x\in X} [g(x,y) + B(x)]$$

est optimale pour Xavier (quel que soit x_1). De même toute stratégie stationnaire $\overline{Q}$ de Yves qui vérifie :

$$\text{(VI.13)} \quad \forall x \in X \quad g(x,\overline{Q}x) + A(\overline{Q}x) = \inf_{y\in Y} [g(x,y) + A(y)]$$

est optimale pour Yves.

Soit $(\overline{P},\overline{Q})$ un couple de stratégies stationnaires optimales pour Xavier et Yves. Appelons $(\overline{x}_1,\overline{y}_1,\overline{x}_2,\overline{y}_2,\ldots,\overline{x}_i,\overline{y}_i,\ldots)$ une trajectoire "compatible" avec $\overline{P}$ et $\overline{Q}$, c'est à dire telle que :

$$\text{(VI.14)} \quad \overline{y}_1 = \overline{Q}\overline{x}_1 ; \; \overline{x}_2 = \overline{P}\overline{y}_1 ; \; \ldots ; \; \overline{y}_i = \overline{Q}\overline{x}_i ; \; \overline{x}_{i+1} = \overline{P}\overline{y}_i ;$$

Alors l'optimalité de $(\overline{P},\overline{Q})$ s'exprime comme suit :

$$\text{(VI.15)} \quad \begin{cases} \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \quad \limsup\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{2N} \sum\limits_{i=1}^{N} [g(x_i,\overline{Q}x_i) + g(x_{i+1},\overline{Q}x_i)] \leq \\ \leq v = \lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{2N} \sum\limits_{i=1}^{N} [g(\overline{x}_i,\overline{y}_i)+g(\overline{x}_{i+1},\overline{y}_i)] \leq \\ \qquad \leq \liminf\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{2N} \sum\limits_{i=1}^{N} [g(\overline{P}y_{i-1},y_i)+g(\overline{P}y_i,y_i)] \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{Y}. \end{cases}$$

On constate en particulier que le "coup initial" x_1 de Xavier n'a aucune influence. Donc $(\overline{P},\overline{Q})$ est encore optimal dans le jeu itéré ergodique où Yves "joue le premier". Donc la <u>valeur ergodique</u> v, ne dépend ni du premier joueur, ni des n premiers coups joués (quel que soit n).

En ce sens le jeu itéré ergodique est "asymptotique". Remarquons enfin que la jouabilité du jeu itéré ergodique découle de [Gillette] et aussi de [Shubert] dans le cas où X et Y sont finis.

<u>Démonstration du théorème</u> (VI.1).

<u>Etape 1</u> : Il existe un triplet (A,B,v) qui vérifie le système (VI.11).
Soit C(X) l'espace de Banach des fonctions continues sur le compact X muni de sa norme

$$B \in C(X) \quad \|B\|_c = \sup_{x\in X} |B(x)|.$$

Quand il n'y a pas d'ambiguité nous notons :

$$B \in C(X) \quad \sup B = \sup_{x\in X} B(x); \ \inf B = \inf_{x\in X} B(x)$$

Soit $\theta \in C(X)$ la fonction constante et égale à 1 et soit $\{\theta\}$ la droite vectorielle qu'elle engendre dans C(X). Nous notons $\dot{C}$ et s respectivement l'espace de Banach quotient et la surjection canonique

(VI.16) $\quad C(X) \overset{s}{\to} \dot{C} = C(X)/\{\theta\}$

Définissons alors l'application i :

(VI.17) $\quad \begin{cases} \dot{C} \overset{i}{\to} C(X) \\ i(\dot{B}) = B - \{\frac{\sup B + \inf B}{2}\}\theta, \text{ si } s(B) = \dot{B} \end{cases}$

Il est clair que i est bien définie et est un relèvement de s :

(VI.18) $\quad s \circ i = id_{\dot{C}}$

Ce relèvement est 2-lipschitzien, grâce au :

<u>Lemme</u>.

Soient B_1 et B_2 dans C(X) telles que :

(VI.19) $\quad \sup B_1 + \inf B_1 = \sup B_2 + \inf B_2 = 0.$

Alors on a :

(VI.20) $\|B_1-B_2\|_C \leq \sup\limits_{x,x'} |\{B_1(x)-B_2(x)\} - \{B_1(x')-B_2(x')\}|$

Démonstration du lemme.

Soit ε le terme de droite de l'inégalité (VI.20). Soit x_0 fixé dans X, on a :

(VI.21) $\forall x \in X \qquad B_1(x)-B_2(x) = B_1(x_0)-B_2(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $|\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$.

Donc

(VI.22) $\sup B_1 \geq (\sup B_2) + B_1(x_0)-B_2(x_0) - \varepsilon$

(VI.23) $\inf B_1 \geq (\inf B_2) + B_1(x_0)-B_2(x_0) - \varepsilon$.

En ajoutant (VI.22) et (VI.23) et tenant compte de (VI.19) il vient :

(VI.24) $B_1(x_0) - B_2(x_0) \leq \varepsilon$

Symétriquement on trouve

(VI.25) $B_1(x_0) - B_2(x_0) \geq -\varepsilon$

Comme x_0 était quelconque il vient

(VI.26) $\|B_1-B_2\|_C \leq \varepsilon$

Le lemme est acquis.

Maintenant il est clair d'après (VI.17) que :

(VI.27) $\forall \dot{B} \in \dot{C} \quad \sup(i(\dot{B})) + \inf(i(\dot{B})) = 0$

Donc nous pouvons appliquer le lemme à $i(\dot{B}_1)$ et $i(\dot{B}_2)$ pour tous $\dot{B}_1$ et $\dot{B}_2$. Comme il est clair que

(VI.28) $\forall B \in C(X) \; \|s(B)\|_{\dot{C}} = \frac{1}{2} \sup\limits_{x,x'} |B(x)-B(x')|$,

il vient en appliquant le lemme à $i(\dot{B}_1)$ et $i(\dot{B}_2)$

(VI.29) $\|i(\dot{B}_1)-i(\dot{B}_2)\|_C \leq 2\|s(i(\dot{B}_1)-i(\dot{B}_2))\|_{\dot{C}}$

Or s est linéaire et i un relèvement (VI.18); donc

(VI.30) $\|i(\dot{B}_1)-i(\dot{B}_2)\| \leq 2\|\dot{B}_1-\dot{B}_2\|_{\dot{C}}$

Nous avons donc montré que i est 2-lipschitzien. Définissons alors les 2 opérateurs ϕ et ψ

(VI.31) $\phi : C(X) \to C(Y) : \phi(B)(y) = \sup_x [g(x,y)+B(x)]$

(VI.32) $\psi : C(Y) \to C(X) : \psi(A)(x) = \inf_y [g(x,y)+A(y)]$

Et posons :

(VI.33) $H : C(X) \to C(X) \quad H = \psi \circ \phi$

Comme ϕ et ψ le sont, il est clair que H est 1-lipschitzien.

Comme les fonctions $g(.,y) \in C(X)$ forment un ensemble équicontinu de fonctions dans C(X), elles y ont un module commun d'équicontinuité. Soit p ce module. Si E désigne l'ensemble des fonction de C(X) qui admettent p pour module d'équicontinuité, il est clair que :

(VI.34) $H(C(X)) \subset E.$

Comme E est convexe et saturé pour la relation d'équivalence $\{\theta\}$, son quotient $\dot{E} = s(E)$ est également convexe :

(VI.35) $\dot{B}_1,\dot{B}_2 \in \dot{E} \Rightarrow i(\dot{B}_1),i(\dot{B}_2) \in E \Rightarrow \dfrac{i(\dot{B}_1)+i(\dot{B}_2)}{2} \in E$

De plus, H respecte la relation d'équivalence

(VI.36) $H(B+\lambda\theta) = H(B) + \lambda\theta$

Donc H passe au quotient en $\dot{H}$ et d'après (VI.34)

(VI.37) $\dot{H}(\dot{C}) \subset \dot{E}$

Maintenant nous remarquons que $\dot{E}$ est compact dans $\dot{C}$: Soit en effet une suite $(\dot{B}_n)$ d'éléments de $\dot{E}$. Alors $i(\dot{B}_n)$ est une suite d'éléments de E et on a :

(VI.38) $\sup_{x,x'} |i(\dot{B}_n)(x)-i(\dot{B}_n)(x')| \leq \sup_{y,x,x'} |g(x,y)-g(x',y)| < +\infty$

Donc d'après le lemme appliqué à $i(\dot{B}_n)$ et à la fonction nulle, la suite $\{i(\dot{B}_n)\}$ est bornée. Comme elle est équicontinue, elle admet d'après le théorème d'Ascoli une sous-suite convergente dont la limite est dans E (qui est fermé). L'image de cette sous-suite par s (qui est continu) converge donc dans $\dot{E}$ et la compacité de $\dot{E}$ est acquise. Il nous reste à montrer que $\dot{H}$ est continue pour pouvoir affirmer que $\dot{H}$, qui laisse invariant le convexe compact $\dot{E}$, y admet un point fixe. Or si $\dot{B}_1$ et $\dot{B}_2$ sont dans $\dot{C}$, on a

(VI.39) $\quad \|\dot{H}(\dot{B}_1)-\dot{H}(\dot{B}_2)\|_{\dot{C}} = \|s[H(i(\dot{B}_1))-H(i(\dot{B}_2))]\|_{\dot{C}}$

Comme s est de norme 1 et H 1-lipschitzienne il vient :

(VI.40) $\quad \|\dot{H}(\dot{B}_1)-\dot{H}(\dot{B}_2)\|_{\dot{C}} \leq \|i(\dot{B}_1)-i(\dot{B}_2)\|_C$

D'après (VI.30) on a :

(VI.41) $\quad \|\dot{H}(\dot{B}_1)-\dot{H}(\dot{B}_2)\|_{\dot{C}} \leq 2\|\dot{B}_1-\dot{B}_2\|_{\dot{C}}$

Donc $\dot{H}$ est continue et possède un point fixe $\dot{B}$ dans $\dot{E}$. Si B est un représentant de $\dot{B}$ il existe donc un nombre réel v tel que :

(VI.42) $\quad H(B) = B + 2v\theta_X$

Posons alors :

(VI.43) $\quad A = \phi(B) - v\theta_Y$

On a :

(VI.44) $\quad B = H(B)-2v\theta_X = \psi[\phi(B)-v\theta_Y] - v\theta_X = \psi(A)-v\theta_X$

Donc (A,B,v) vérifient le système (VI.11).

<u>Etape 2</u> : Un couple $(\overline{P},\overline{Q})$ vérifiant (VI.12) et (VI.13) est un point selle du jeu itéré ergodique. Soit (y_j) une suite quelconque de Y, notons $(x_i)_{i \geq 2}$ la suite de X :

(VI.45) $\quad x_2 = \overline{P}y_1 : x_3 = \overline{P}y_2,\ x_i = \overline{P}y_{i-1}.$

A l'aide de (VI.12) et de (VI.11.ii) calculons :

(VI.46) $\quad A(y_1) = g(x_2,y_1) + B(x_2) - v \leq g(x_2,y_1) + g(x_2,y_2) + A(y_2) - 2v$
$\quad \ldots \leq g(x_2,y_1) + g(x_2,y_2) + g(x_3,y_2) + B(x_3) - 3v \leq \ldots$

Nous en déduisons

$$\text{(VI.47)}\qquad A(y_1) \leq \sum_{i=1}^{N} [g(x_{i+1},y_i)+g(x_{i+1},y_{i+1})] + A(y_{N+1}) - 2Nv$$

$$\text{(VI.48)}\qquad A(y_1) \leq \sum_{i=1}^{N} [g(x_{i+1},y_i)+g(x_{i+1},y_{i+1})] + g(x_{N+2},y_{N+2}) + B(x_{N+2})-(2N+1)v$$

Par conséquent,

$$\text{(VI.49)}\qquad v \leq \liminf_{N\to+\infty} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} [g(x_i,y_i) + g(x_{i+1},y_i)]$$

En utilisant la relation (VI.13) et (VI.11.i) on en déduirait la seconde partie de la relation (VI.15). Celle-ci établit que $(\overline{P},\overline{Q})$ est un point selle et que v est la valeur du jeu.

<u>Etape 3</u> : Si le nombre v est tel que le système (VI.11) associé possède une solution formée de fonctions continues $A(y)$ et $B(x)$ alors v est la valeur du jeu ergodique. Donc un tel nombre v est unique.

■

VI.3. COMPLEMENTS DANS LE CAS FINI. EXEMPLES.

Commençons par traiter l'exemple où X et Y ont 2 éléments. Alors la fonction de gain initiale g s'écrit :

$$\text{(VI.50)}\qquad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad X = \text{les lignes } Y = \text{les colonnes.}$$

Dans ce cas on calcule aisément la valeur ergodique $v_e(g)$ et on trouve :

$$\text{(VI.51)}\qquad v_e(g) = \begin{cases} \sup\{\inf(a,b), \inf(c,d)\} = \sup\inf g & \text{si } \frac{a+b+c+d}{4} \leq \sup\inf g \\ \inf\{\sup(a,c), \sup(b,d)\} = \inf\sup g & \text{si } \frac{a+b+d+c}{4} \geq \inf\sup g \\ \frac{a+b+c+d}{4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, si ω désigne l'élément de $A_1'(X \times Y)$

$$\text{(VI.52)}\qquad [\omega,g] = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

alors v_e est égale à v_θ définie en (V.163).

Nous allons dans 2 cas particuliers calculer les solutions du système (VI.11)

$$\text{(VI.53)}\qquad g_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad v_e(g_1) = \frac{1}{4}(2-3-4+1) = -1$$

On vérifie aisément que A et B constituent une solution du système ($\bar{\text{V}}$I.11) :

(VI.54) $A = [3,2] \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

et que tous les couples (A_λ, B_λ) constituent aussi une solution :

(VI.55) $A_\lambda = [3+\lambda, 2+\lambda] \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$

On vérifie enfin que les couples (A_λ, B_λ) constituent toutes les solutions du système (VI.11). Soit un autre exemple :

(VI.54)' $g_2 = \begin{bmatrix} 20 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad v_e(g_2) = \inf \sup g_2 = 1.$

Alors une solution de (VI.11) est (A,B) :

(VI.55)' $A = [19,2] \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

et toutes les solutions de (VI.11) sont obtenues en ajoutant une constante commune à A et B. Ces deux exemples nous conduisent à nous demander si en général, le système (VI.11) admet une solution unique (A,B) (à l'addition d'une constante près). Il n'en est rien, même si X et Y sont finis. Par exemple si X et Y ont 3 éléments, considérons la fonction g dont la forme matricielle est :

(VI.56) $g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Sa valeur ergodique est 0 puisque g elle même a pour valeur 0. Mais pour tout λ : $0 \leq \lambda \leq 1$ le couple (A,B) suivant est une solution du système (VI.11)

(VI.57) $A = [\lambda \ o \ \lambda] \quad B = \begin{bmatrix} \lambda-1 \\ 0 \\ \lambda-1 \end{bmatrix}$

Nous terminons l'étude de l'unicité (à une constante près) de (A,B) par la :

<u>Proposition</u> (VI.1).

<u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont finis, il existe un ouvert dense</u> Ω <u>de</u> A(X x Y) <u>tel que à toute fonction de gain initiale</u> g <u>dans</u> Ω, <u>le jeu itéré ergodique fait correspondre un système</u> (VI.11) <u>dont les solutions</u> (A,B) <u>sont uniques (à l'addition d'une constante près)</u>.

Cette proposition montre que si X et Y sont finis, il est "raisonnable" de supposer que le système (VI.11) a une solution unique.

Démonstration.

Si P est une règle de décision de Xavier (par abus de language une "stratégie stationnaire" de Xavier) et si Q est une règle de décision de Yves (sans abus de language une stratégie stationnaire) alors nous appelons "trajectoire issue de x" lorsque Xavier et Yves jouent selon P et Q la suite t :

(VI.58) $t = ((x,Qx), (PQx,Qx), (PQx,QPQx), \dots)$

et aussi "trajectoire issue de y" lorsque Xavier et Yves jouent selon P et Q la suite t' :

(VI.59) $t' = ((Py,y), (Py,QPy), (PQPy,QPy), \dots)$

Soit P, Q un couple de stratégies stationnaires. Alors la trajectoire issue d'un point quelconque lorsque les joueurs jouent selon P et Q, comporte un cycle. Soit C un tel cycle, il est de la forme :

(VI.60) $C = \{(x_1,y_1)(x_2,y_1)\dots(x_T,y_T)(x_1,y_T)\}$

Notons G(C) le gain moyen sur un tel cycle.

(VI.61) $G(C) = \frac{1}{2T}\,[g(x_1,y_1) + \dots + g(x_1,y_T)]$

Alors il existe un ouvert dense de $A(X \times Y)$ dans lequel :

(VI.62) $C \neq C' \Rightarrow G(C) \neq G(C')$

Soit g une fonction de gain sur X x Y vérifiant (VI.62). Si v est la valeur ergodique associée à g, alors il existe un unique cycle C tel que :

(VI.63) $v = G(C)$.

Soit $(\bar{x},\bar{y})$ un point de C. Soient (A_1,B_1) et (A_2,B_2) 2 couples de fonctions vérifiant le système (VI.11). Soient (P_1,Q_1) et (P_2,Q_2) 2 couples de stratégies optimales obtenues respectivement à partir de (A_1,B_1) et de (A_2,B_2).
Alors le couple (P_1,Q_2) forme un point selle du jeu itéré ergodique.
Soit t la trajectoire issue d'un point y_1 quelconque :

(VI.64) $t = (x_2,y_1)(x_2,y_2)(x_3,y_2)\dots(x_i,y_i)(x_i+1,y_i)\dots$

Puisque le gain ergodique le long de cette trajectoire est v, il existe un indice n tel que

(VI.65) $(x_n, y_n) = (\bar{x}, \bar{y})$ (ou bien $(x_{n+1}, y_n) = (\bar{x}, \bar{y})$)

Or, (A_1, B_1) vérifient le système (VI.11) et par construction de P_1 on a donc :

(VI.66) $\begin{cases} A_1(y) = g(P_1 y, y) + B_1(P_1 y) - v \\ B_1(x) \leq g(x, Q_2 x) + A_1(Q_2 x) - v \end{cases}$

En appliquant ces relations le long de la trajectoire t il vient :

(VI.67) $A_1(y_1) \leq g(x_2, y_1) + \dots + g(x_n, y_n) + A_1(y_n) - 2(n-1)v.$

Puisque (A_2, B_2) vérifient le système (VI.11) et par construction de Q_2 on a :

(VI.68) $\begin{cases} A_2(y) \geq g(P_1 y, y) + B_2(P_1 y) - v \\ B_2(y) = g(x, Q_2 x) + A_2(Q_2 x) - v \end{cases}$

L'application de ces relations donne

(VI.69) $A_2(y_1) \geq g(x_2, y_1) + \dots + g(x_n, y_n) + A_2(y_n) - 2(n-1)v.$

En soustrayant (VI.69) de (VI.67) et en tenant compte de (VI.65) il vient :

(VI.70) $\forall y \in Y \quad A_1(y) - A_2(y) \leq A_1(\bar{y}) - A_2(\bar{y}).$

Par symétrie on en tire :

(VI.71) $\forall y \in Y \quad A_1(y) - A_1(\bar{y}) = A_2(y) - A_2(\bar{y}).$

Donc A_1 et A_2 diffèrent d'une constante et B_1 et B_2 également (c'est la même constante).

■

BIBLIOGRAPHIE

AUBIN J.P. et H. MOULIN — Solution du problème dual d'un problème d'optimisation. Cahiers de Mathématiques de la Décision , 1972.

AUMANN R.J. — Subjectivity and correlation in randomized strategies, Journal of Mathematical Economics 1(1974), p. 67-96.

BOURBAKI N. — Théorie des ensembles. Hermann, Paris, 1964.

DUNFORD J. et SCHWARTZ J.T. Linear operators : Part I. Interscience Publishers Inc., New York, 1958.

FAN K. — A minimax inequality and applications. Inequalities III [Shista] Academic Press, New York, 1972,, p. 103-113.

GALE D. et STEWART F.M. — Infinite games with perfect information, in Contributions to the theory of games, Vol 2. Princeton University Press, Princeton N.J., 1953.

GILETTE D. — Stochastic games with zerostop probability, in Contributions to the theory of games, Vol 3. Princeton University Press, Princeton N.J., 1957.

VON NEUMANN et MORGENSTERN O. — Theory of games and economic behaviour. Princeton University Press, Princeton N.J., 3e ed., 1953.

OWEN G. — Game theory. Saunders, 1968.

SHUBERT B. — On the omega value of a matrix. Naval Postgraduate School, Monterey, February 1974.

TIJS S.H. — Semi-Infinite matrix games and bimatrix games, Thesis Katholieke Universiteit te Nijmegen, Juin 1975.

Autres papiers de l'auteur sur le même sujet.

Jeux itérés, Cahiers de Mathématiques de la Décision n° 7305, 1973.

Itérations d'un jeu à 2 personnes de somme nulle, Publications Mathématiques de l'Université de Bordeaux I, n° 3, Janvier 1974.

Iteraded games , A paraître dans International Journal of Game Theory.

Prolongements de jeux et jeux itérés, Proceedings du Colloque de Saint-Pierre de Chartreuse sur l'Analyse Convexe , Janvier 1974, A paraître chez Springer-Verlag.

Hervé M O U L I N
143 boulevard Lefebvre
75015 PARIS

(Reproduction photomécanique du texte définitif reçu de l'auteur le 24 juillet 1975)