MICHÈLE RAYNAUD

Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et en cohomologie étale

Mémoires de la S. M. F., tome 41 (1975)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1975__41__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ

AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SUPPLÉMENT au numéro de MARS 1975

MÉMOIRE N° 41

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 41, 1975, 176 p.

THÉORÈMES DE LEFSCHETZ EN COHOMOLOGIE COHÉRENTE ET EN COHOMOLOGIE ÉTALE

par Michèle RAYNAUD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
75231 PARIS CEDEX 05

Publication trimestrielle

SUPPLÉMENTS au Bulletin de la Société mathématique de France.

- Les "Comptes rendus des séances", qui avaient paru annuellement de 1911 à 1958, ne sont plus disponibles séparément, mais sont tous incorporés, année par année, dans la réimpression du Bulletin de la Société mathématique de France, tomes 39 (1911) à 66 (1938), y compris, pour chacune des années 1911, 1921, 1922, 1923 et 1924 (séances du "Cinquantenaire" et séances ordinaires de 1924), les tables qui n'existaient pas à l'origine.

Les autres suppléments ci-après sont disponibles séparément :

- 1939. - Conférences de la Réunion internationale des mathématiciens [1937. Paris].

- "**Mémoires**" :

1. FORT (Jacques). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires ... (Thèse).
2. GIRAUD (Jean). - Méthode de la descente.
3. GRILLET (P.-A.). - Homomorphismes principaux de tas et de groupoïdes (Thèse).
4. BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques (Thèse).
5. BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Espaces de fonctions bornées et continues ... (Thèse).
6. VO-KHAC Khoan. - Etude des fonctions quasi-stationnaires ... (Thèse).
7. BERNAT (Pierre). - Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble.
8. MALLIAVIN-BRAMERET (Marie-Paule). - Largeurs d'anneaux et de modules (Thèse).
9. RENAULT (Guy). - Etude des sous-modules compléments dans un module (Thèse).
10. ZINN-JUSTIN (Nicole). - Dérivations dans les corps et anneaux ... (Thèse).
11. BERTIN (Jean-Etienne). - Variété de Picard de type linéaire commutatif (Thèse).
12. AUBIN (Jean-Pierre). - Approximation des espaces de distributions ... (Thèse).
13. DEUTSCH (Nimet). - Interpolation dans les espaces vectoriels ... (Thèse).
14. ROBERT (Pierre). - Sur l'axiomatique des systèmes générateurs ... (Thèse).
15. FOUQUES (Alfred). - Systèmes de a-idéaux dans un demi-groupe ... (Thèse).
16. LEHMANN (Daniel). - Quelques propriétés des connexions induites ... (Thèse).
17. BRUTER (Claude P.). - Vue d'ensemble sur la théorie des matroïdes.
18. DIXMIER (Suzanne). - Sur les p-groupes ... (Thèse).
19. Contributions à la théorie des séries trigonométriques ...
20. KRÉE (Paul R.). - Distributions quasi-homogènes et intégrales singulières.
21. de MATHAN (Bernard). - Approximations diophantiennes dans un corps local (Thèse).
22. CHADEYRAS (Marcel). - Essai d'une théorie noethérienne homogène ... (Thèse).
23. KOSKAS (Maurice). - Structures algébriques multivoques. Applications (Thèse).
24. SPECTOR (René). - Sur la structure locale des groupes abéliens ... (Thèse).
25. Colloque de théorie des nombres [1969. Bordeaux].
26. MARTY (Robert). - Sous-groupes fonctoriels et relativisations (Thèse).
27. DHOMBRES (Jean G.). - Sur les opérateurs multiplicativement liés (Thèse).
28. GATESOUPE (Michel). - Sur les transformées de Fourier radiales (Thèse).

29. DELAROCHE (Claire). - Extensions des C^*-algèbres (Thèse).

30. RAÏS (Mustapha). - Distributions homogènes sur des espaces de matrices (Thèse).

31-32. Colloque d'analyse fonctionnelle [1971. Bordeaux].

33. Sur les groupes algébriques (ANANTHARAMAN et LUNA).

34. Contributions à l'analyse fonctionnelle (BONNARD, BOLLEY et CAMUS).

35. Contributions au calcul des probabilités (CONZE, REINHARD, BECKER, JACOD et DANG NGOC NGHIEM.

36. ROBERT (Gilles). - Unités elliptiques.

37. Journées arithmétiques [1973. Grenoble].

38. Journées de géométrie analytique [1972. Poitiers].

39-40. Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris].

41. RAYNAUD (Michèle). - Théorèmes de Lefschetz ... (Thèse).

42. FAKIR (Sabah). - Objets algébriquement clos ... (Thèse).

Bull. Soc. math. France
Mémoire 41, 1975, 176 p.

THEORÈMES DE LEFSCHETZ EN COHOMOLOGIE CCHÉRENTE ET EN COHOMOLOGIE ÉTALE

par Michèle RAYNAUD(*)

Table des matières

(*) Thèse Sc. math., Univers. Paris 7, 1972.

THEORÈMES DE LEFSCHETZ

EN COHOMOLOGIE COHÉRENTE ET EN COHOMOLOGIE ÉTALE

par Michèle RAYNAUD

Introduction

Soient X le complémentaire du point fermé d'un schéma local noethérien complet (cas local) ou un schéma propre sur une base S noethérienne (cas global), Y une partie fermée de X, U l'ouvert complémentaire de Y. Soit F un faisceau sur X pour la topologie étale. Lorsque F est abélien et d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles, on sait, d'après les théorèmes de Lefschetz (SGA 2 XIV 4), que, si U est affine (ou réunion d'un nombre fixé d'ouverts affines) et si F satisfait à des hypothèses de profondeur étale convenable en chaque point de U, alors l'application canonique des groupes de cohomologie étale

$$H^i(X,F) \to H^i(Y,F|Y)$$

est bijective pour certaines valeurs précisées de i.

Le but de ce travail (V 3) est d'étendre ce résultat au cas où F est un faisceau d'ensembles ou de groupes non nécessairement commutatif, sans restriction sur les caractéristiques résiduelles, i.e. de prouver les conjectures de SGA 2 XIV 6. On en déduit aussi des théorèmes de comparaison cohomologique pour un schéma quasi-projectif (non propre) sur un corps, à condition de prendre pour Y une section hyperplane "assez générale" (V 7).

Dans le cas où F est un faisceau d'ensembles ou de groupes constant, les théorèmes de Lefschetz expriment que le morphisme

$$\varphi : \pi_0(Y) \to \pi_0(X) \qquad \text{ou} \qquad \psi : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$$

est bijectif. Pour démontrer ces résultats, on reprend la méthode utilisée dans SGA 2 X, XII ; elle consiste essentiellement à déduire la bijectivité de φ et ψ respectivement d'un théorème de comparaison des groupes de cohomologie sur X et Y des faisceaux cohérents et d'un théorème d'algébrisation de faisceaux sur le complété formel de X le long de Y, ce qui nous amène à généraliser les théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente de loc. cit.

.../...

Le ch. I est consacré au théorème de comparaison en cohomologie des faisceaux cohérents. La méthode utilisée, basée sur les théorèmes de dualité locale et globale et l'usage du foncteur $Rf_!$ de Deligne, est analogue à celle qui permet de démontrer les théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale dans le cas des faisceaux abéliens. L'intérêt de cette méthode, par rapport à SGA 2 IX 1, est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse de profondeur aux points de Y ; elle permet aussi de remplacer la condition Y défini par une équation par la condition $X-Y$ affine.

En ce qui concerne les théorèmes d'algébrisation des faisceaux formels cohérents, nous éliminons de même les hypothèses de profondeur aux points de Y qui figurent dans SGA 2 X 2.1 et XII 3.1. Malheureusement la méthode utilisée ici consiste à se ramener aus cas où toutes les hypothèses de loc. cit. sont satisfaites. On utilise pour cela une technique de "Cohen-Macaulisation" par éclatement en dimension 3 (II 1). On reprend alors pas à pas la démonstration de SGA 2 ; ceci nécessite les formes techniques III 1.1, 1.2, 2.2, 2.3 des théorèmes de finitude et d'existence de SGA 2 IX.

Notons enfin que les énoncés très techniques aboutissant au théorème d'algébrisation dans le cas local (IV 2.8) ont pour seul but de remplacer l'hypothèse Y défini par une équation par l'hypothèse $X-Y$ affine.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Monsieur A. Grothendieck qui, en me faisant participer à la rédaction de son séminaire, m'a intéressée aux théorèmes de Lefschetz et m'a proposé ce sujet. Je remercie Messieurs J.P. Serre, J.L. Verdier et J. Giraud d'avoir participé au Jury. Madame J. Hatton a bien voulu se charger de la frappe du manuscrit ; je l'en remercie vivement.

-‡-‡-‡-‡-‡-

CHAPITRE I

Théorèmes de comparaison en cohomologie des faisceaux cohérents.

Ces théorèmes sont l'analogue, en cohomologie des faisceaux cohérents, des théorèmes établis dans SGA 2 XIV 4 dans le cas de la cohomologie étale. Ils généralisent SGA 2 X 2.1 (i) et XII 2. Soit S un schéma noethérien ; nous aurons besoin, pour formuler le théorème principal, de nous placer dans la catégorie pro $D^b_{coh}(S)$, introduite dans [6] (Appendice) ; rappelons qu'un objet de pro $D^b_{coh}(S)$ peut être représenté par un système projectif, ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble d'indices, de complexes de faisceaux sur S, à cohomologie cohérente, uniformément bornée. Commençons par étendre la notion de profondeur à un système projectif de complexes.

1. Profondeur d'un pro-complexe

Comme dans [6] (Appendice), nous notons $"\varprojlim_m" F_m$ le système projectif des complexes F_m, $m \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 1.1.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, $F = "\varprojlim_m" F_m$ un objet de pro $D^b_{coh}(S)$, i un entier. On pose

$$H^i_t F = \varprojlim_m H^i_t F_m \quad .$$

(Pour la définition de $H^i_t F_m$, voir SGA 2 I 2).

Les propositions 1.2 et 1.3 ci-dessous justifient le passage à la limite projective de la définition 1.1.

PROPOSITION 1.2.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, $F = "\varprojlim_m" F_m$ un objet de pro $D^b_{coh}(S)$. Alors, pour tout entier i, le système projectif $"\varprojlim_m" H^i_t F_m$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler (EGA 0_{III} 13.1).

Quitte à remplacer S par son complété, ce qui ne change pas les $H^i_t(F_m)$, on peut supposer S complet. On peut alors trouver un complexe dualisant sur S ; soit K un tel complexe, normalisé en t ([6] V 6) et soit I l'enveloppe injective du corps résiduel de S. D'après le théorème de dualité locale ([6] V 6.3), on a

$$(1.2.1) \qquad H^i_t F_m \simeq \mathrm{Hom}(H^{-i}(\mathrm{RHom}(F_m,K)),I) \ ,$$

pour tout entier i . Comme les $\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$-modules $H^{-i}(\mathrm{RHom}(F_m,K))$ sont de type fini et le foncteur $\mathrm{Hom}(.,I)$ exact, les $H^i_t F_m$ sont artiniens, d'où le fait que le système projectif des $H^i_t F_m$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler.

PROPOSITION 1.3.- Soit S un schéma local noethérien de point fermé t . Alors, pour tout triangle

$$\begin{tikzcd} & F'' \arrow[dl] & \\ F' \arrow[rr] & & F \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

dans pro $D^b_{coh}(S)$, on a une suite exacte infinie

$$\cdots \to H^i_t F' \to H^i_t F \to H^i_t F'' \to H^{i+1}_t F' \to H^{i+1}_t F \to \cdots$$

Soient $F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F_m$, $F' = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F'_m$. Quitte à remplacer F' par un système projectif isomorphe, on peut supposer que le morphisme $F' \to F$ est donné par un système projectif de morphismes

$$F'_m \to F_m \ .$$

Si F''_m est le cône du morphisme $F'_m \to F_m$, on a un isomorphisme $F'' \simeq \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F''_m$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \to H^i_t F'_m \to H^i_t F_m \to H^i_t F''_m \to H^{i+1}_t F'_m \to H^{i+1}_t F_m \to \cdots \ .$$

Compte tenu de 1.2, cette suite reste exacte par passage à la limite projective, ce qui démontre la proposition.

DEFINITION 1.4.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t , $F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F_m$ un objet de pro $D^b_{coh}(S)$, n un entier. On dit que la profondeur de F en t est $\geq n$ et on écrit

$$\mathrm{prof}_t F \geq n$$

si l'on a

$$H^i_t F = 0 \quad \text{pour } i < n \ .$$

Soient, plus généralement, S un schéma noethérien, T une partie fermée de S , $F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F_m$ un objet de pro $D^b_{coh}(S)$. Pour tout point $t \in T$, on note F_t le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}(F_m)_t$ des localisés des F_m en t . On pose la définition suivante, justifiée par la proposition 1.6 ci-dessous, lorsque le système projectif des $H^i_t(F_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler, uniformément en t .

DEFINITION 1.5.- On dit que la profondeur de F le long de T est $\geq n$, et on écrit

$$\mathrm{prof}_T F \geq n$$

si l'on a

$$\mathrm{prof}_t(F_t) \geq n ,$$

pour tout point $t \in T$.

On définit la profondeur de F le long de T comme le plus grand entier n tel que l'on ait $\mathrm{prof}_T F \geq n$.

PROPOSITION 1.6.- Soient S un schéma localement noethérien, T une partie fermée de S , $F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F_m$ un objet de pro $D^b_{coh}(S)$, n un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $k(m) \geq 0$ tel que, pour tout point $t \in T$, le morphisme canonique

$$H^i_t(F_{m+k(m)}) \to H^i_t(F_m)$$

soit nul pour $i < n$.

(ii) Pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $k'(m) \geq 0$ tel que le morphisme canonique

$$\underline{H}^i_T(F_{m+k'(m)}) \to \underline{H}^i_T(F_m)$$

soit nul pour $i < n$.

(iii) Pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $k''(m)$ tel que, pour tout ouvert V de X , le morphisme canonique

$$H^i_T(V, F_{m+k''(m)}) \to H^i_T(V, F_m)$$

soit nul pour $i < n$.

Supposons les conditions ci-dessus satisfaites. Alors, pour tout ouvert V de X , le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H^i(V, F_m) \to \varprojlim_m H^i(V-(T\cap V), F_m)$$

est bijectif pour $i < n-1$, injectif pour $i = n-1$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). On raisonne par récurrence sur n . Pour tout entier $m \geq 0$, on peut donc supposer qu'il existe un entier $k'(m)$ tel que le morphisme

$$\underline{H}^i_T(F_{m+k'(m)}) \to \underline{H}^i_T(F_m)$$

soit nul pour $i < n-1$. On peut choisir les $k'(m)$ de sorte que l'on ait $k(m) \leq k'(m)$. Soit m_o un entier fixé et posons

$$m_1 = m_o + k'(m_o) , \ m_2 = m_1 + k'(m_1), \ldots, \ m_n = m_{n-1} + k'(m_{n-1}) .$$

Nous allons montrer que le morphisme

$$u_{n-1} : \underline{H}^{n-1}_T(F_{m_n}) \to \underline{H}^{n-1}_T(F_{m_o})$$

est nul. Supposons en effet que l'on ait $u_{n-1} \neq 0$, et soit x une section de $\underline{H}_T^{n-1}(F_{m_n})$ au-dessus d'un ouvert V de S , telle que l'on ait $u_{n-1}(x) \neq 0$. Soit t un point maximal du support de $u_{n-1}(x)$. L'image de x par le morphisme canonique

$$v_{n-1} : H_t^o(\underline{H}_T^{n-1}(F_{m_n})) \to H_t^o(\underline{H}_T^{n-1}(F_{m_o}))$$

n'est pas nulle. Par ailleurs on peut appliquer le lemme 1.6.1 a) ci-dessous au système projectif de suites spectrales

$$H_t^p(\underline{H}_T^q(F_m)) \Rightarrow H_t^{p+q}(F_m) \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

et à l'entier n . Il en résulte que le morphisme v_{n-1} est nul, ce qui est contradictoire.

On démontre de même l'implication (iii) ⇒ (ii). On choisit les $k'(m)$ tels que l'on ait $k''(m) \leq k'(m)$. Si le morphisme u_{n-1} n'était pas nul, on pourrait trouver une section x de $\underline{H}_T^{n-1}(F_{m_n})$ au-dessus d'un ouvert V , dont l'image par le morphisme

$$H^o(V,\underline{H}_T^{n-1}(F_{m_n})) \to H^o(V,\underline{H}_T^{n-1}(F_{m_o}))$$

soit non nulle. Mais ce morphisme est nul, comme il résulte de 1.6.1 a), appliqué au système projectif de suites spectrales

$$H^p(V,\underline{H}_T^q(F_m)) \Rightarrow H_T^{p+q}(V,F_m) \ , \quad m \in \mathbb{N} \ .$$

(ii) ⇒ (i) (resp. (ii) ⇒ (iii)). Pour tout $m \in N$, soit $k'(m)$ un entier tel que les morphismes

$$\underline{H}_T^i(F_{m+k'(m)}) \to \underline{H}_T^i(F_m)$$

soient nuls pour $i<n$. Soit m_o un entier fixé et posons

$$m_1 = m_o+k'(m_o) \ , \ m_2 = m_1+k'(m_1), \ldots, \ m_n = m_{n-1}+k'(m_{n-1}) \ .$$

Soit t un point de T (resp. soit V un ouvert de X). Il résulte de 1.6.1 b) appliqué au système projectif de suites spectrales

$$H_t^p(\underline{H}_T^q(F_m)) \Rightarrow H_t^{p+q}(F_m) \ , \quad m \in \mathbb{N}$$

$$(\text{resp. } H^p(V,\underline{H}_T^q(F_m)) \Rightarrow H_T^{p+q}(V,F_m) \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ) \ ,$$

que le morphisme canonique

$$H_t^i(F_{m_n}) \to H_t^i(F_{m_o})$$

$$(\text{resp. } H_T^i(V,F_{m_n}) \to H_T^i(V,F_{m_o}))$$

est nul pour $i < n$.

Il suffit, pour achever la démonstration, de prouver que, lorsque les conditions (i), (ii), (iii) sont satisfaites, le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H^i(X,F_m) \to \varprojlim_m H^i(X-T,F_m)$$

est bijectif pour $i<n-1$, injectif pour $i = n-1$. (Le résultat restant vrai si l'on remplace X par V). Or cela résulte du lemme 1.6.3 ci-dessous, appliqué au système projectif de suites exactes

$$\to H^i_T(X,F_m) \to H^i(X,F_m) \to H^i(X-T,F_m) \to H^{i+1}_T(X,F_m) \to$$

(SGA 2 I 2.9).

LEMME 1.6.1.- Soient

$$(E_2^{pq})_m \Rightarrow E_m^{p+q} \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

un système projectif de suites spectrales de groupes abéliens, n un entier. On suppose qu'il existe un entier q_o tel que, pour $p<0$ ou pour $q < q_o$ et pour tout m, on ait $(E_2^{pq})_m = 0$.

a) Supposons que, pour tout $m\geq 0$, il existe un entier $k(m) \geq 0$ tel que le morphisme canonique

$$E^{n-1}_{m+k(m)} \to E^{n-1}_m$$

soit nul, et qu'il en soit de même des morphismes

$$(E_2^{pq})_{m+k(m)} \to (E_2^{pq})_m$$

si l'on a $q < n-1$. Alors, si m_o est un entier ≥ 0, et si l'on pose

$$m_1 = m_o+k(m_o) \ , \ m_2 = m_1+k(m_1) \ ,\dots, \ m_n = m_{n-1}+k(m_{n-1}) \ ,$$

le morphisme canonique

$$(E_2^{o,n-1})_{m_n} \to (E_2^{o,n-1})_{m_o}$$

est nul.

b) Supposons que, pour tout m, il existe un entier $k(m) \geq 0$ tel que le morphisme canonique

$$(E_2^{pq})_{m+k(m)} \to (E_2^{pq})_m$$

soit nul pour tout $q \leq n-1$ et tout p. Alors, si m_o est un entier ≥ 0 et si l'on définit m_n comme dans a), le morphisme canonique

$$E^{n-1}_{m_n} \to E^{n-1}_{m_o}$$

est nul.

On peut supposer, par translation, que l'on a $q_o = 0$.

a) Pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$ et pour tout $r \geq 2$, on considère le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
(E_r^{o,n-1})_{m_n} \arrow[r, "d_{rn}"] \arrow[d, "f_{rj}"'] & (E_r^{r,n-r})_{m_n} \arrow[d, "g_{rj}"] \\
(E_r^{o,n-1})_{m_j} \arrow[r, "d_{rj}"] & (E_r^{r,n-r})_{m_j}
\end{tikzcd} ,$$

où f_{rj} et g_{rj} sont définis par le morphisme de la m_n-ème suite spectrale dans la m_j-ème, et où les d_{rj} sont les différentielles. Montrons que l'on a $f_{2,o} = 0$. Supposons que l'on ait $f_{2,o} \neq 0$ et soit x un élément de $(E_2^{o,n-1})_{m_n}$ tel que $f_{2,o}(x) \neq 0$. On a par hypothèse $g_{2,n-1} = 0$ et il résulte du diagramme ci-dessus que l'on a

$$d_{2,n-1}f_{2,n-1}(x) = 0 .$$

L'élément $f_{2,n-1}(x)$ définit donc un élément x_1 de $(E_3^{o,n-1})_{m_{n-1}}$; la relation $f_{2,o}(x) \neq 0$ et le fait que l'on ait $E_r^{pq} = 0$ pour $p<0$ montrent que l'image de x_1 dans $(E_3^{o,n-1})_{m_o}$ est non nulle. Par récurrence sur j , on déduit de l'élément x un élément x_{n-1} de $(E_{n+1}^{o,n-1})_{m_1}$ dont l'image dans $(E_{n+1}^{o,n-1})_{m_o}$ est non nulle.

Comme on a supposé que $E_2^{pq} = 0$ pour $p<0$ et $q<0$, le morphisme

$$(E_{n+1}^{o,n-1})_{m_1} \to (E_{n+1}^{o,n-1})_{m_o}$$

s'identifie au morphisme

$$(E_\infty^{o,n-1})_{m_1} \to (E_\infty^{o,n-1})_{m_o} .$$

Mais ce morphisme est nul, puisqu'il est défini, par passage aux gradués, par le morphisme nul $E_{m_1}^{n-1} \to E_{m_o}^{n-1}$. Il en résulte que l'hypothèse $f_{2,o} \neq 0$ est absurde, ce qui démontre a).

b) L'hypothèse entraîne que le morphisme canonique

$$(E_\infty^{pq})_{m_{j+1}} \to (E_\infty^{pq})_{m_j}$$

est nul pour tous p , q tels que $p+q = n-1$ et tout j tel que $0 \leq j \leq n$. Compte tenu des isomorphismes

$$(E_\infty^{p,n-1-p})_{m_j} \simeq gr^p(E_{m_j}^{n-1}) ,$$

le morphisme $gr^p(E_{m_{j+1}}^{n-1}) \to gr^p(E_{m_j}^{n-1})$ est nul pour tout p . La nullité du morphisme canonique

$$F_{n-j}(E^{n-1}_{m_j}) \to F_{n-j}(E^{n-1}_{m_o}) ,$$

$0 \leq j \leq n$, se déduit alors, par récurrence sur j , du lemme trivial ci-dessous. Pour $j=n$, on obtient l'isomorphisme cherché.

LEMME 1.6.2.- Considérons un diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E'' \arrow[d, "f''"'] \\ E'_1 \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & E''_1 \arrow[d, "g''"'] \\ E'_2 \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & E''_2 \end{tikzcd} ,$$

dont les lignes sont exactes. Si f'' et g' sont nuls, il en est de même de gf .

LEMME 1.6.3.- Considérons un système projectif de suites exactes infinies de groupes abéliens

$$\to H'^{i}_{m} \to H^{i}_{m} \to H''^{i}_{m} \to H'^{i+1}_{m} \to H^{i+1}_{m} \to ,$$

$m \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$. Soit n un entier. Supposons que, pour tout entier $m \geq 0$, il existe un entier $k(m) \geq 0$ tel que les morphismes de transition

$$H'^{i}_{m+k(m)} \to H'^{i}_{m}$$

soient nuls pour $i<n$. Alors le morphisme canonique

$$f : \varprojlim_m H^{i}_{m} \to \varprojlim_m H''^{i}_{m}$$

est bijectif pour $i < n-1$, injectif pour $i = n-1$.

Soit i un entier $< n-1$. Pour que le système projectif $"\varprojlim_m" H^{i}_{m}$ satisfasse à la condition de Mittag-Leffler, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $"\varprojlim_m" H''^{i}_{m}$.

Posons

$$K^{i}_{m} = \mathrm{Ker}(H^{i}_{m} \to H''^{i}_{m}) , \quad I^{i}_{m} = \mathrm{Im}(H^{i}_{m} \to H''^{i}_{m}) , \quad Q^{i}_{m} = \mathrm{Coker}(H^{i}_{m} \to H''^{i}_{m}) .$$

Les systèmes projectifs $"\varprojlim_m" K^{i}_{m}$ et $"\varprojlim_m" Q^{i}_{m}$ satisfont à la condition de Mittag-Leffler et l'on a

$$\varprojlim_m K^{i}_{m} = 0 \qquad \varprojlim_m Q^{i}_{m} = 0$$

pour $i<n$ et $i < n-1$ respectivement. D'autre part la suite

$$0 \to \varprojlim_m I_m^i \to \varprojlim_m H''^i_m \to \varprojlim_m Q'^i_m$$

est exacte et il en est de même de la suite

$$0 \to \varprojlim_m K_m^i \to \varprojlim_m H_m^i \to \varprojlim_m I_m^i \to 0 ,$$

pour $i<n$, (EGA 0_{III} 13.2.2). Le fait que le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H_m^i \to \varprojlim_m H''^i_m$$

soit bijectif pour $i < n-1$, injectif pour $i = n-1$, en résulte.

D'après EGA 0_{III} 13.2.1, si $"\varprojlim_m" H_m^i$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler, il en est de même de $"\varprojlim_m" H''^i_m$. Inversement, supposons que $"\varprojlim_m" H''^i_m$ satisfasse à la condition de Mittag-Leffler, et montrons qu'il en est de même de $"\varprojlim_m" H_m^i$. D'après loc. cit., il suffit de montrer qu'il en ainsi de $"\varprojlim_m" I_m^i$. Soit m un entier ≥ 0 , $k'(m)$ un entier ≥ 0 tel que, pour tout $p \geq m+k'(m)$, on ait

$$\mathrm{Im}(H''^i_{m+k'(m)} \to H''^i_m) = \mathrm{Im}(H''^i_p \to H''^i_m) .$$

Montrons que cela entraîne la relation

$$\mathrm{Im}(I^i_{m+k'(m)} \to I^i_m) = \mathrm{Im}(I^i_p \to I^i_m) .$$

Soient y un élément de $\mathrm{Im}(I^i_{m+k'(m)} \to I^i_m)$, x son image dans H''^i_m . Pour tout $p \geq m+k'(m)$, on peut trouver un élément $x_1 \in H''^i_{p+k(p)}$ dont l'image dans H''^i_m est x . Notons x_2 l'image de x_1 dans H''^i_p . Par définition de $k(p)$, l'élément x_2 appartient à I_p^i , ce qui démontre notre assertion.

2. Théorèmes de comparaison

2.1.-Soit $f : U \to S$ un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens. Les théorèmes ci-dessous utilisent le foncteur

$$Rf_! : \mathrm{pro}\ D^b_{coh}(U) \to \mathrm{pro}\ D^b_{coh}(S)$$

défini dans [6] (Appendice). Leur démonstration nécessite les théorèmes de dualité locale et globale pour des pro-complexes. On supposera donc qu'il existe un complexe dualisant K sur S ([6] V 2). Supposons d'abord S local noethérien, de point fermé t , notons I l'enveloppe injective du corps résiduel de S et choisissons K normalisé en t ([6] V 6). Si $F = "\varprojlim_m" F_m$ est un objet de $\mathrm{pro}\ D^b_{coh}(S)$, on a

$$H^i_t F_m \simeq \mathrm{Hom}(H^{-i}(R\mathrm{Hom}(F_m,K),I)$$

([6] V 6.3). Par passage à la limite projective, on obtient un isomorphisme

$$H^i_t F = \varprojlim_m H^i_t F_m \simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim_m H^{-i}(\mathrm{RHom}(F_m,K)),I) \ ,$$

qui peut aussi s'écrire, par définition de $\mathrm{RHom}(F,K)$,

(2.1.0) $$H^i_t F \simeq \mathrm{Hom}(H^{-i}(\mathrm{Rhom}(F,K)),I) \ .$$

C'est le théorème de dualité locale pour le pro-complexe F .

Revenons au cas où S est quelconque. On peut énoncer le théorème de dualité globale pour le morphisme f , sous la forme suivante, conséquence immédiate de [6] (Appendice n°4 th. 2).

(2.1.1) Soit F un objet de pro $D^b_{coh}(U)$. Alors le morphisme canonique

$$Rf_* \underline{\mathrm{RHom}}_U(F,f^! K) \to \underline{\mathrm{RHom}}_S(Rf_! F,K)$$

est un isomorphisme. (Pour la définition de $f^! K$, voir [6] VII 3).

Soient T une partie fermée de S , $u \in U$, $s = f(u)$, $\{\overline{s}\}$ l'adhérence de s dans S . On pose

(2.1.2) $$\delta_T(u) = \deg\,\mathrm{tr}\; k(u)/k(s) + \mathrm{codim}(\{\overline{s}\} \cap T, \{\overline{s}\}) \ .$$

En particulier, si S est un schéma local de point fermé t , on pose

(2.1.3) $$\delta_t(u) = \deg\,\mathrm{tr}\; k(u)/k(s) + \dim \{\overline{s}\} \ .$$

THEOREME 2.2.- Soit S un schéma noethérien admettant localement un complexe dualisant (par exemple un schéma localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie). Soient $f : U \to S$ un morphisme séparé de type fini, T une partie fermée de S , F un objet de pro $D^b_{coh}(U)$, n un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout point $u \in U$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq n - \delta_T(u) \ .$$

(ii) Pour tout ouvert S_1 de S , pour tout ouvert U_1 de $U_{(S_1)}$ tel que le morphisme $f_1 : U_1 \to S_1$ déduit de f soit affine, si $F_1 = F|U_1$ et $T_1 = T \cap S_1$, on a

$$\mathrm{prof}_{T_1}(Rf_{1!}F_1) \geq n \ .$$

1) <u>Réduction au cas où</u> S <u>est local de point fermé</u> t <u>et où</u> $T = \{t\}$.

Pour tout point $t \in T$, on pose $S' = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{S,t}$, $U' = U \times_S S'$, etc. La condition (ii) est équivalente à la condition suivante :

Pour tout point t de T, pour tout ouvert affine U_1 de U', on a

$$\mathrm{prof}_t(Rf'_{1!}F'_1) \geq n .$$

Cela résulte en effet de la relation

$$\mathrm{prof}_{T_1}(Rf_{1!}F_1) = \operatorname*{Inf}_{t \in T_1} \mathrm{prof}_t(Rf_{1!}F_1)$$

et du fait que le foncteur $Rf_{1!}$ commute à la localisation.

D'autre part la condition (i) est équivalente à la condition suivante :

(i bis) Pour tout point $t \in T$ et pour tout point u' de U', on a

$$\mathrm{prof}_{u'}F' \geq n - \delta_t(u') .$$

En effet, si u est un point de U et si $s = f(u)$, on a

$$\delta_T(u) = \operatorname*{Inf}_{t \in T \cap \overline{\{s\}}} \dim \mathcal{O}_{\overline{\{s\}},t} + \deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s) = \operatorname*{Inf}_{t \in T \cap \overline{\{s\}}} \delta_t(u')$$

Supposons (i) vérifiée. Pour tout point t de T, tout point u' de U', si $s' = f'(u')$ et si u (resp. s) est l'image de u' (resp. s') dans U (resp. S), on a

$$\mathrm{prof}_{u'}F' = \mathrm{prof}_u F \geq n - \operatorname*{Inf}_{t \in T \cap \overline{\{s\}}} \delta_t(u') \geq n - \delta_t(u') .$$

Inversement, si l'on suppose (i bis) vérifiée, pour tout point u de U et tout point t de $\overline{\{s\}} \cap T$, on a, en notant u' le point de U' d'image u,

$$\mathrm{prof}_u F = \mathrm{prof}_{u'}F' \geq n - \delta_t(u') ;$$

par suite on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq n - \operatorname*{Inf}_{t \in T \cap \overline{\{s\}}} \delta_t(u') = n - \delta_T(u)$$

La réduction résulte de ces équivalences.

2) <u>Cas où</u> S <u>est local de point fermé</u> t <u>et où</u> $T = \{t\}$

Soit K un complexe dualisant sur S, normalisé en t. Le complexe $K' = f^! K$ est un complexe dualisant sur U. D'après 2.2.1 ci-dessous, la condition, $\mathrm{prof}_u F \geq n - \delta_t(u)$ pour tout point u de U, équivaut à la relation

(*) $\qquad H^q(R\underline{\mathrm{Hom}}_U(F,K')) = 0$ pour $q > -n$.

Si U_1 est un ouvert affine de U, le foncteur f_{1*} est exact et l'on a donc

$$Rf_{1*}(H^q(R\underline{\mathrm{Hom}}_U(F,K')) \simeq f_{1*}(H^q(R\underline{\mathrm{Hom}}_U(F,K')) \simeq H^q(Rf_{1*}(R\underline{\mathrm{Hom}}_U(F,K')) .$$

Par suite la relation (*) équivaut au fait que, pour tout ouvert affine U_1 de U, on a

$$H^q(Rf_{1*}(R\underline{Hom}_U(F,K'))) = 0 \quad \text{pour } q > -n .$$

D'après le théorème de dualité globale (2.1.1), appliqué au morphisme f_1, on a un isomorphisme

$$Rf_{1*}(R\underline{Hom}_U(F,K')) \simeq R\underline{Hom}_S(Rf_{1!}F_1,K) .$$

Par suite la condition (i) est équivalente à la condition

$$H^q(R\underline{Hom}_S(Rf_{1!}F_1,K)) = 0 \quad \text{pour } q > -n ,$$

et pour tout ouvert affine U_1 de U. D'après le théorème de dualité locale (2.1.0), cette dernière relation équivaut à

$$H_t^{-q}(Rf_{1!}F_1) = 0 \quad \text{pour } q > -n ,$$

c'est-à-dire à

$$\mathrm{prof}_t(Rf_{1!}F_1) \geq n ,$$

qui n'est autre que la condition (ii).

LEMME 2.2.1.- Les notations sont celles de 2.2. Si u est un point de U, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\mathrm{prof}_u F \geq n - \delta_t(u)$.

(ii) On a $H^q(R\underline{Hom}_U(F,K')_u) = 0$ pour $q > -n$.

Par définition (1.1), la condition (i) équivaut à la relation

$$H_u^i(F_u) = 0 \quad \text{pour } i < n - \delta_t(u) .$$

D'autre part il résulte de [6] (V 7 et VI 3.4) que, pour tout point u de U, le complexe $f^!K[-\delta_t u]$ est normalisé en u. D'après le théorème de dualité locale (2.1.0), la condition ci-dessus équivaut à la condition

$$H^{-i-\delta_t(u)}(R\underline{Hom}_U(F,K')_u) = 0 \quad \text{pour } -i-\delta_t(u) > -n ,$$

qui n'est autre que (ii).

Conservons les hypothèses faites dans 2.2 (i) et soit $\text{"}\varprojlim_m\text{"} R_m$ un procomplexe représentant $Rf_{1!}F_1$. Nous allons prouver, plus précisément, que, pour tout point $t \in T$, le système projectif des $H_t^i R_m$ satisfait à une condition de Mittag-Leffler uniforme en t pour $i<n$. On se ramène pour cela, au cas où le morphisme f admet une compactification du type considéré dans la proposition 2.3 ci-dessous.

PROPOSITION 2.3.- Soient S un schéma noethérien qui admet localement un complexe dualisant, T une partie fermée de S. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, "g"] \\ S & \end{tikzcd}$$

où g est un morphisme projectif et U l'ouvert complémentaire d'une section hyperplane Y de X. On note L un faisceau g-ample tel que Y soit défini par l'annulation d'une section σ de L et I l'idéal de $\mathcal{O}_X$ défini par σ. Soit $G = "\varprojlim_m" G_m$ un objet de pro $D^b_{coh}(X)$ tel que, pour tout $m \geq 0$ et tout objet $(G_m)^r$ de G_m, la section σ ne soit pas diviseur de zéro dans $(G_m)^r$. Soit F la restriction de G à U. Soit n un entier, et supposons que, pour tout point $u \in U$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq n - \delta_T(u) .$$

Alors, pour tout entier $m \geq 0$, on peut trouver des entiers $k(m)$, $k'(m) \geq 0$, tels que, pour tout $k \geq k(m)$, $k' \geq k'(m)$, le morphisme canonique

$$H^i_t(Rg_*(I^{k+k'} G_{m+k})) \longrightarrow H^i_t(Rg_*(I^{k'} G_m))$$

soit nul pour $i<n$ et pour tout $t \in T$.

La question étant locale sur S, on peut supposer que S a un complexe dualisant K ; si $K' = g^! K$, K' est un complexe dualisant sur X. Soit m un entier ≥ 0 fixé. Comme σ est non diviseur de zéro dans les $(G_m)^k$, la multiplication par σ^k, $k \geq 0$, induit un isomorphisme

$$G_m(-k) \simeq I^k G_m$$

(on a posé $G_m(-k) = G_m \otimes L^{-k}$). Soit t_o un point de T en lequel K est normalisé. Nous allons montrer que, quitte à restreindre S à un ouvert contenant t_o, on peut trouver des entiers $k(m)$, $k'(m) \geq 0$, tels que, pour tous $k \geq k(m)$, $k' \geq k'(m)$, et pour tout point t de T en lequel K est normalisé, le morphisme canonique

$$\varphi^i : H^i_t(Rg_*(I^{k+k'} G_{m+k}) \longrightarrow H^i_t(Rg_*(I^{k'} G_m))$$

soit nul pour $i<n$.

Notons $D(\circ)$ la dualité par rapport à K' et posons $U_o = U \times_S \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{S,t_o}$. Les hypothèses de profondeur sur F entraînent la relation

$$\mathrm{prof}_u F \geq n - \delta_{t_o}(u)$$

pour tout $u \in U_o$ (démonstration de 2.2). On a donc, d'après 2.2.1,

$$\varinjlim_m (H^q(D_U F_m | U_o) = 0 \qquad \text{pour } q > -n .$$

Comme les faisceaux $H^q(D_U F_m)$ sont cohérents et sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de q, on peut trouver un entier $k_1(m) \geq 0$, tel que le morphisme de transition

$$H^q(D_U F_m)|U_o \longrightarrow H^q(D_U F_{m+k_1(m)})|U_o$$

soit nul pour $q > -n$. Quitte à restreindre S à un ouvert contenant t_o , on peut donc supposer que le morphisme

$$H^q(D_U F_m) \longrightarrow H^q(D_U(F_{m+k_1}(m)))$$

est nul pour $q > -n$. Il en résulte que l'image du morphisme

$$H^q(D_X G_m) \longrightarrow H^q(D_X G_{m+k_1}(m))$$

est concentrée sur Y , donc annulée par une puissance $I^{k_2(m)}$ de I . On pose $k(m) = \sup(k_1(m), k_2(m))$. Le morphisme composé

$$H^q(D_X G_m) \xrightarrow{\theta} H^q(D_X G_{m+k}) \xrightarrow{\sigma^k} H^q(D_X G_{m+k})(k) ,$$

où θ est déduit du morphisme de transition $G_{m+k} \to G_m$, est donc nul pour $k \geq k(m)$.

D'autre part, il résulte de EGA III 2.2.1 que l'on peut trouver un entier $k'(m)$ tel que, pour tout $k' \geq k'(m)$, on ait des isomorphismes canoniques

$$H^q(Rg_*(D_X G_m(k'))) \simeq g_*(H^q(D_X G_m(k')))$$

$$H^q(Rg_*(D_X G_{m+k(m)}(k'+k(m))) \simeq g_*(H^q(D_X G_{m+k(m)}(k'+k(m)))) .$$

Il en résulte que le morphisme

$$H^q(Rg_*(D_X G_m(k'))) \longrightarrow H^q(Rg_*(D_X G_{m+k(m)}(k'+k(m)))$$

est nul pour tout $q > -n$ et tout $k' \geq k'(m)$, et il en est a fortiori de même quand on remplace $k(m)$ par un entier $k \geq k(m)$. En appliquant le théorème de dualité global, ceci équivaut à dire que le morphisme canonique

$$H^q(D_S(Rg_*(I^{k'} G_m))) \longrightarrow H^q(D_S(Rg_*(I^{k+k'} G_{m+k})))$$

est nul pour $k \geq k(m)$, $k' \geq k'(m)$ et $q \geq -n$. Le théorème de dualité locale appliqué en un point t tel que K soit normalisé en t , montre alors que le morphisme φ^i est nul pour $i<n$.

Comme S est noethérien, on a prouvé l'existence d'entiers $k(m)$, $k'(m)$ tels que, pour tout point $t \in T$ en lequel K est normalisé, le morphisme φ^i soit nul pour $i<n$. Montrons que cela entraîne la proposition. Compte tenu de EGA III 1.4.12, on peut trouver un intervalle $[a,b]$ tel que, pour tout k' , on ait

$$(*) \qquad H^q(D(Rg_*(I^{k'} G_m))) = 0 \quad \text{si } q \notin [a,b] .$$

Si t est un point de S , on note d_t l'entier tel que $K[d_t]$ soit normalisé en t . D'après le théorème de dualité locale, la relation (*) revient à dire que l'on a

$$H^q_t(Rg_*(I^{k'}G_m)) = 0 \quad \text{si } q \notin [-b+d_t, -a+d_t] \ ,$$

quel que soit k'. Etant donné un entier i, il n'existe qu'un ensemble fini E d'entiers d_t tels que $i \in [-b+d_t, -a+d_t]$. D'après ce qu'on a démontré, on peut trouver des entiers $k(m)$ et $k'(m)$ tels que φ^i soit nul en tout point t tel que d_t appartienne à E. Par définition de E, cela entraîne que φ^i est nul quel que soit t.

COROLLAIRE 2.4.- Les notations sont celles de 2.2 ; on suppose f affine et la condition (i) satisfaite. Alors $Rf_!F$ satisfait aux conditions équivalentes de 1.6 relativement à l'entier n.

La question étant locale sur S car S est quasi-compact, on peut supposer S, donc aussi U, affine. On peut trouver une compactification de U,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd} ,$$

où g est un morphisme projectif et U l'ouvert complémentaire d'une section hyperplane Y de X (2.4.0). Soient L un faisceau g-ample, σ une section de L définissant Y, I l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ défini par σ. D'après SGA 6 II 2.2.2.1, F est isomorphe à un système projectif de complexes à objets cohérents. On peut alors trouver un système projectif de complexes $G = "\varprojlim_m" G_m$, les objets des G_m étant cohérents, nuls en dehors d'un intervalle ne dépendant pas de m, dont la restriction à U est isomorphe à F. Quitte à modifier les G_m en dehors de U, on peut supposer que les objets des G_m n'ont pas de sous-faisceaux non nuls de support contenu dans Y. Pour tout $m \geq 0$ et tout r, σ ne peut alors être diviseur de zéro dans $(G_m)^r$.

On peut alors appliquer 2.3 à G. Pour tout $m \geq 0$, on en déduit l'existence d'entiers $k(m)$, $k'(m) \geq 0$, tels que, pour tous $k \geq k(m)$, $k' \geq k'(m)$, le morphisme canonique

$$(*) \qquad H^i_t(Rg_*(I^{k+k'}G_{m+k})) \longrightarrow H^i_t(Rg_*(I^{k'}G_m))$$

soit nul pour $i<n$ et pour tout $t \in T$. On peut choisir $k(m)$ et $k'(m)$ tels que, pour tout $n \geq m$, on ait

$$k(m)+k'(m) \leq k'(n) \ , \ k'(m) \geq m \ .$$

Le système projectif $"\varprojlim_m" I^{k'(m)}G_m$ est isomorphe à $Ri_!F$ et le système projectif $"\varprojlim_m" Rg_*(I^{k'(m)}G_m)$ à $Rf_!F$. D'après (*), le morphisme canonique

$$H^i_t(Rg_*(I^{k'(m+k(m))}G_{m+k(m)})) \longrightarrow H^i_t(Rg_*(I^{k'(m)}G_m))$$

est nul pour $i<n$ et tout $t \in T$; ceci prouve que $Rf_!F$ satisfait à la condition (*) de 1.6.

Nous allons généraliser 2.4 au cas où, localement sur S, U est réunion de $c+1$ ouverts, affines sur S. Nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 2.5.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, $f : U \to S$ un morphisme de type fini, $i : V \to U$ une immersion ouverte affine, T une partie fermée de S. Soient F un objet de pro $D^b_{coh}(U)$, k et n des entiers. Supposons que, pour tout point u de U, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(k, n - \delta_T u) .$$

Soit G le cône ([6] I 2) du morphisme canonique

$$Ri_!(F|V) \longrightarrow F .$$

Alors, pour tout point u de U, on a

$$\mathrm{prof}_u G \geq \mathrm{Inf}(k, n-1-\delta_T u) .$$

Le lemme est évident pour un point u de V car on a alors $\mathrm{prof}_u G = \infty$. On peut donc supposer que u appartient à $U-V$. Compte tenu de 1.3, il suffit de prouver l'inégalité

$$(*) \qquad \mathrm{prof}_u(Ri_!(F|V)) \geq \mathrm{Inf}(k, n-1-\delta_T u) + 1 .$$

Soit $i_u : V \times_U \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{U,u} \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{U,u}$ le morphisme déduit de i par localisation en u. Nous allons voir que l'on peut appliquer le théorème 2.2 à l'immersion ouverte i_u, à la partie fermée $T = \{u\}$ et à l'entier $p = \mathrm{Inf}(k, n-1-\delta_T u) + 1$; la relation (*) en résultera.

Soit $s = f(u)$; si v est une générisation de u, appartenant à V, on pose $f(v) = w$. Dire que l'hypothèse (i) de 2.2 est satisfaite revient à dire que, pour toute générisation $v \in V$ de u, si $\overline{\{v\}}$ désigne l'adhérence de v dans U, on a

$$\mathrm{prof}_v F \geq p - \dim \mathcal{O}_{\overline{\{v\}},u} .$$

On est donc ramené à montrer la relation

$$\mathrm{Inf}(k, n-\delta_T v) \geq \mathrm{Inf}(k, n-1-\delta_T u) + 1 - \dim \mathcal{O}_{\overline{\{v\}},u} .$$

On peut, pour cela, remplacer U par $\overline{\{v\}}$, S par $\overline{\{w\}}$ et T par $T \cap \overline{\{w\}}$. On est donc ramené au cas où V est intègre de point générique v et S intègre de point générique w. On a, par définition,

$$\delta_T v - \delta_T u = \deg \mathrm{tr}\, k(v)/k(w) + \mathrm{codim}(T,S) - \deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s) - \mathrm{codim}(\overline{\{s\}} \cap T, \overline{\{s\}})$$

Il résulte de EGA IV 5.6.5 que l'on a

$$\deg \mathrm{tr}\, k(v)/k(w) + \dim \mathcal{O}_{S,s} \geq \deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s) + \dim \mathcal{O}_{U,u} ,$$

et par suite on a

$$(**) \qquad \delta_T v - \delta_T u \geq \dim \mathcal{O}_{U,u} - \dim \mathcal{O}_{S,s} + \mathrm{codim}(T,S) - \mathrm{codim}(\overline{\{s\}} \cap T, \overline{\{s\}}) .$$

Soit $(T_j)_{j\in J}$ l'ensemble des composantes irréductibles de $\overline{\{s\}}\cap T$, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T_j \arrow[r] & \overline{\{s\}}\cap T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ & \overline{\{s\}} \arrow[r] & S \end{tikzcd} ,$$

où les flèches sont des inclusions de parties fermées de S . Comme S admet un complexe dualisant, S est caténaire ([6] V 10) ; on a donc les relations

$$\mathrm{codim}(\overline{\{s\}}\cap T,S) = \operatorname{Inf}_j \mathrm{codim}(T_j,S) \geq \mathrm{codim}(T,S)$$

$$\mathrm{codim}(\overline{\{s\}}\cap T,S) = \operatorname{Inf}_j (\mathrm{codim}(T_j,\overline{\{s\}})) + \mathrm{codim}(\overline{\{s\}},S)$$

$$= \mathrm{codim}\ (\overline{\{s\}}\cap T,\overline{\{s\}}) + \mathrm{codim}(\overline{\{s\}},S) .$$

Par suite le nombre

$$a = \mathrm{codim}(\overline{\{s\}}\cap T,\overline{\{s\}}) + \mathrm{codim}(\overline{\{s\}},S) - \mathrm{codim}(T,S)$$

est ≥ 0 . Posons $\delta = \delta_T v$, $\delta' = \delta_T u$. D'après (**), on a

$$a + \delta - \delta' = \dim \mathcal{O}_{U,u} \geq 1 .$$

On est donc ramené à montrer que, si a,δ,δ' sont des entiers ≥ 0, liés par la relation $a+\delta-\delta'\geq 1$, pour tout couple d'entiers k,n , on a

$$\operatorname{Inf}(k,n-\delta) \geq \operatorname{Inf}(k,n-1-\delta') + 1 + \delta' - \delta - a ;$$

cette relation se vérifie trivialement.

PROPOSITION 2.6.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, $f : U \to S$ un morphisme séparé de type fini, c et n des entiers, $c\geq 0$. On suppose que, localement sur S , U est réunion de $c+1$ ouverts, affines sur S . Soient T une partie fermée de S , F un objet de pro $D^b_{coh}(U)$; supposons que, pour tout point u de U , on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(n-c,n-\delta_T u)$$

$$(\text{resp. } \mathrm{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(n-c-1,n-\delta_T u) \quad \text{et} \quad \delta_T u > 0) .$$

Alors on a

$$\mathrm{prof}_T(Rf_! F) \geq n-c .$$

Plus précisément $Rf_! F$ satisfait aux conditions équivalentes de 1.6 relativement à l'entier $n-c$.

La question étant locale sur S , on peut supposer que U est réunion de $c+1$ ouverts, affines sur S . On raisonne par récurrence sur c . La proposition est démontrée pour $c = 0$ (2.4). Supposons-la prouvée pour $c-1$, et montrons-la pour c . Soient V l'un des $c+1$ ouverts de U , affine sur S , dont U est la réunion, $i : V \to U$ le morphisme canonique, Y un sous-schéma fermé de U d'espace sous-jacent $U-V$. Soit G le cône du morphisme canonique $Ri_!(F|V) \to F$. Par application du foncteur $Rf_!$, on obtient, dans pro $D^b_{coh}(S)$, le triangle

$$\begin{tikzcd} & Rf_!G \arrow[dl] & \\ R(fi)_!(F|V) \arrow[rr, dash] & & Rf_!F \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

Soit $"\varprojlim_m" R'_m$ (resp. $"\varprojlim_m" R''_m$) un système projectif de complexes représentant $R(fi)_!(F|V)$ (resp. $Rf_!G$) ; on peut choisir des systèmes projectifs tels que le morphisme $Rf_!G[1] \to R(fi)_!(F|V)$ soit défini par un système projectif de morphismes $R''_m[1] \to R'_m$. Si l'on définit R_m par la condition d'avoir un triangle

$$\begin{tikzcd} & R''_m \arrow[dl] & \\ R'_m \arrow[rr] & & R_m \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

le système projectif $"\varprojlim_m" R_m$ représente $Rf_!F$. Compte tenu de 1.6.2 et des suites exactes

$$H^i_t(R'_m) \longrightarrow H^i_t(R_m) \longrightarrow H^i_t(R''_m) ,$$

pour $t \in T$, $i \in N$, il suffit de prouver les conditions de 1.6 relatives à $n-c$, pour $"\varprojlim_m" R'_m$ et $"\varprojlim_m" R''_m$.

Comme V est affine sur S et comme, pour tout point $v \in V$, on a

$$\mathrm{prof}_v(F|V) \geq n-c-\delta_T v ,$$

on peut appliquer 2.4 à fi . Il en résulte que $"\varprojlim_m" R'_m$ satisfait aux conditions de 1.6 relativement à l'entier $n-c$.

On va montrer qu'il en est de même de $"\varprojlim_m" R''_m$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. Soient W la réunion des c ouverts de U , affines sur S , qui, avec V , forment un recouvrement de U , $j : W \to U$ l'immersion canonique. Comme G est nul sur V , on a un isomorphisme

$$Rj_!(G|W) \simeq G .$$

D'autre part, comme V est affine et U séparé sur S , le morphisme $V \to U$ est affine ; il résulte alors de 2.5 que, pour tout point w de W , on a

$$\mathrm{prof}_w G \geq \mathrm{Inf}(n-c, n-1-\delta_T w)$$

$$(\text{resp. } \mathrm{prof}_w G \geq \mathrm{Inf}(n-c-1, n-1-\delta_T w) \text{ et } \delta_T w > 0) .$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au morphisme fj , au faisceau $G|W$ et aux entiers $n-1$, $c-1$. On en déduit que $"\varprojlim_m" R''_m$ satisfait aux conditions de 1.6 relativement à l'entier $n-1-(c-1) = n-c$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2.7.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, $g : X \to S$ un morphisme séparé de type fini, T une partie fermée de S, n et c des entiers, $c \geq 0$. Soient U un ouvert de X qui est, localement sur S, réunion de $c+1$ ouverts affines sur S, $i : U \to X$ l'immersion canonique, Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, F un objet de $D^b_{coh}(X)$. On suppose que, pour tout point $u \in U$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c, n-\delta_T u)$$

$$(\text{resp. } \mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c-1, n-\delta_T u) \quad \text{et} \quad \delta_T u > 0) .$$

Soit G le cône du morphisme canonique $Ri_!(F|U) \to F$, "$\varprojlim_m$" R_m et "$\varprojlim_m$" R''_m des systèmes projectifs de complexes représentant respectivement $Rg_! F$ et $Rg_! G$. Alors le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H^i_T(S, R_m) \longrightarrow \varprojlim_m H^i_T(S, R''_m)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

Si l'on suppose g propre, le système projectif des $H^i_T(S, R''_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-c-2$.

Soit $f = gi$. En appliquant le foncteur $Rg_!$ au triangle

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G \arrow[dl] & \\ Ri_!(F|U) \arrow[rr] & & F \arrow[ul] \end{tikzcd} ,$$

on obtient le triangle suivant de pro $D^b_{coh}(S)$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Rg_! G \arrow[dl] & \\ Rf_!(F|U) \arrow[rr] & & Rg_! F \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

Soit "$\varprojlim_m$" R'_m un système projectif de complexes de faisceaux sur S représentant $Rf_!(F|U)$. On peut supposer que le morphisme $Rf_!(F|U) \to Rg_! F$ est défini par la donnée d'un système projectif de morphismes $R'_m \to R_m$ et que R''_m est le cône du morphisme $R'_m \to R_m$.

D'après 2.6, le système projectif "$\varprojlim_m$" R'_m satisfait aux conditions équivalentes de 1.6 relativement à l'entier $n-c$. On applique 1.6.3 aux suites exactes

$$H^i_T(S, R'_m) \longrightarrow H^i_T(S, R_m) \longrightarrow H^i_T(S, R''_m) \longrightarrow H^{i+1}_T(S, R'_m) .$$

Il en résulte que le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H^i_T(S, R_m) \longrightarrow \varprojlim_m H^i_T(S, R''_m) ,$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$.

Dans le cas où G est propre, $Rg_!F$ s'identifie à Rg_*F et, par suite, le système projectif des $H^i_T(S,R_m)$ est constant donc satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Il en est de même de $"\varprojlim_m" H^i_T(S,R''_m)$ pour $i \leq n-c-2$ d'après 1.6.3.

COROLLAIRE 2.8 (Théorème de Lefschetz global).- On reprend les notations de 2.7 et on suppose g propre. Soient I un idéal définissant Y et $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Soit F un faisceau cohérent sur X tel que, pour tout point $u \in U$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c, n-\mathrm{deg\ tr}\ k(u)/k(g(u))) .$$

Alors les morphismes canoniques du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^i(X,F) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & \varprojlim_m H^i(X,F/I^mF) \\ & H^i(\hat{X},\hat{F}) \arrow[ur, "\theta_i"'] & \end{tikzcd} \tag{2.8.0}$$

sont bijectifs pour $i < n-c-1$, injectifs pour $i = n-c-1$. De plus le système projectif des $H^i(X,F/I^mF)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-c-2$.

On applique 2.7 dans le cas g propre, en posant $T = S$. Si $i :$ $U \to X$ est l'immersion canonique, $"\varprojlim_m" I^mF$ représente $Ri_!(F|U)$. Par suite le cône du morphisme canonique $Ri_!(F|U) \to F$ n'est autre que $"\varprojlim_m" F/I^mF$. Il résulte alors de 2.7 que φ_i est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. De plus, d'après <u>loc. cit.</u>, le système projectif $"\varprojlim_m" H^i(X,F/I^mF)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-c-2$. Il résulte donc de EGA 0_{III} 13.3.1 que θ_i est bijectif pour $i \leq n-c-1$.

COROLLAIRE 2.9 (Théorème de Lefschetz local).- Soient S un schéma local noethérien ayant un complexe dualisant, T une partie fermée non vide de S, $X = S-T$, n et c des entiers, $c \geq 0$. Soient U un ouvert de X, réunion de $c+1$ ouverts affines, $i : U \to X$ l'immersion canonique, Z un sous-schéma fermé de S d'espace sous-jacent $S-U$, défini par un idéal I, $Y = Z-T$, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Soient F un objet de $D^b_{coh}(X)$ et $"\varprojlim_m" F_m$ le cône du morphisme $Ri_!(F|U) \to F$. Supposons que S soit complet pour la topologie I-adique et que l'on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c, n+1-\delta_T u)$$

en tout point $u \in U$. Alors le morphisme canonique

$$\varphi_i : H^i(X,F) \to \varprojlim_m H^i(X,F_m)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. De plus le système projectif des $H^i(X,F_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-c-2$. Si F est un faisceau de modules cohérent sur X , les morphismes du diagramme (2.8.0) sont bijectifs pour $i < n-c-1$, injectifs pour $i = n-c-1$.

Soient $\overline{F}$ un objet de $D^b_{coh}(S)$ qui prolonge F , $j : U \to S$ l'immersion canonique et $"\varprojlim_m" R_m$ le cône du morphisme canonique $Rj_!(\overline{F}|U) \to \overline{F}$. Il résulte de 2.6, appliqué en y remplaçant n par $n+1$ et de 1.6.3 que le morphisme canonique

$$\alpha_i : H^i_T(S,\overline{F}) \to \varprojlim_m H^i_T(S,R_m)$$

est bijectif pour $i < n-c$, injectif pour $i = n-c$ et que le système projectif des $H^i_T(S,R_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i < n-c$. Pour $i>1$, le morphisme α_i s'identifie au morphisme canonique

$$\varphi_{i-1} : H^{i-1}(X,F) \to \varprojlim_m H^{i-1}(X,F_m) .$$

On a d'autre part le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_T(S,\overline{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & H^0(S,\overline{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H^0(X,F) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & H^1_T(S,\overline{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_m H^0_T(S,R_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^0(S,F_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^0(X,F_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^1_T(S,R_m) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $n-c > 1$, tous les sytèmes projectifs intervenant dans la deuxième ligne de ce diagramme, sauf a priori $"\varprojlim_m" H^0(X,F_m)$ satisfont à la condition de Mittag-Leffler. Il en est donc de même de ce dernier d'après EGA 0_{III} 13.2.1. Les lignes de ce diagramme sont donc des suites exactes. Le schéma S étant complet pour la topologie I-adique, β est un isomorphisme. Si $n-c > 1$, on a vu ci-dessus que α_0 et α_1 sont bijectifs, d'où le fait qu'il en est de même de φ_0 . On a donc prouvé la bijectivité de φ_i pour $i < n-c-1$ et l'injectivité de φ_{n-c-1} . Le cas $n-c = 1$ se traite de même.

Remarque 2.9.1 - Reprenons les notations de 2.9 et supposons T réduit au point fermé t de S . Alors le système projectif des $H^i(X,F_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler quel que soit i .

On considère en effet les suites exactes

$$H^i_t(S,\overline{F}_m) \xrightarrow{\alpha_{i,m}} H^i(S,\overline{F}_m) \longrightarrow H^i(X,F_m) \longrightarrow H^{i+1}_t(S,\overline{F}_m) \xrightarrow{\alpha_{i+1,m}} H^{i+1}(S,\overline{F}_m)$$

Pour tout entier i , le système projectif des $\operatorname{Ker} \alpha_{i,m}$ est formé de modules artiniens donc satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Comme S est affine, on a $H^i(S,\overline{F}_m) = H^0(S,H^i(\overline{F}_m))$; par suite le système projectif des $H^i(S,\overline{F}_m)$ est isomorphe au système projectif des $H^0(S,H^i(\overline{F})/I^mH^i(\overline{F}))$, donc satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Le fait qu'il en soit de même du système projectif des $H^i(X,F_m)$ résulte donc des suites exactes ci-dessus et de EGA 0_{III} 13.2.1.

COROLLAIRE 2.10.- Soient S un schéma local noethérien ayant un complexe dualisant, T une partie fermée de S, $S' = S-T$, $g : X \to S'$ un morphisme propre, n, c des entiers, $c \geq 0$. Si J est un idéal définissant T, on suppose S complet pour la topologie J-adique. Soient U un ouvert de X, réunion de $c+1$ ouverts affines, $i : U \to X$ l'immersion canonique, Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, défini par un idéal I. Soient F un objet de pro $D^b_{coh}(X)$, G le cône du morphisme canonique $Ri_!(F|U) \to F$. Supposons que, pour tout point $u \in U$, on ait

$$\operatorname{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(n-c,\ n+1-\delta_T u) .$$

Alors le morphisme canonique

$$\varphi_i : H^i(X,F) \to H^i(X,G)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. (Si $F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F_m$, on pose $H^i(X,F) = \varprojlim_m H^i(X,F_m)$).

Soit $j : S' \to S$ l'immersion canonique et posons $f = jgi$. On a, d'après 2.6,

$$(*) \qquad \operatorname{prof}_T(Rf_!F) \geq n-c-1 .$$

En appliquant le foncteur $Rj_!Rg_*$ au triangle

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G \arrow[dl] & \\ Ri_!(F|U) \arrow[rr] & & F \arrow[ul] \end{tikzcd} ,$$

on obtient, dans pro $D^b_{coh}(S)$, le triangle suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Rj_!Rg_*G \arrow[dl] & \\ Rf_!F \arrow[rr] & & Rj_!Rg_*F \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

D'après 1.6.3, la relation (*) entraîne que le morphisme canonique

$$H^{i+1}_T(S,Rj_!Rg_*F) \to H^{i+1}_T(S,Rj_!Rg_*G)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. Mais, d'après 2.10.1 ci-dessous, ce morphisme s'identifie au morphisme φ_i, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.10.1. - Soient S un schéma local noethérien , T une partie fermée de S , $S' = S-T$, $j : S' \to S$ l'immersion canonique, J un idéal définissant T . On suppose S complet pour la topologie J-adique. Soit F un objet de pro $D^b_{coh}(S')$. Alors le morphisme

$$\varphi_i : H^i(S',F) \to H_T^{i+1}(S,Rj_!F) ,$$

déduit du morphisme bord $H^i(S',Rj_!F|S') \to H_T^{i+1}(S,Rj_!F)$ en identifiant F et $Rj_!F|S'$, est un isomorphisme.

1) Cas où F est un faisceau cohérent.

Soit $\bar{F}$ un prolongement cohérent de F à S tel que $H_T^0(S,\bar{F}) = 0$. Pour tout $m \geq 0$, on a une suite exacte

$$0 \to H^0(S,J^m\bar{F}) \to H^0(S',F) \to H_T^1(S,J^m\bar{F}) \to 0 ,$$

et des isomorphismes

$$(*) \qquad H^i(S',F) \simeq H_T^{i+1}(S,J^m\bar{F}) , \quad i \geq 1 .$$

Il en résulte que φ_i est bijectif pour $i \geq 1$. Comme $\bar{F}$ est séparé pour la topologie J-adique, la suite exacte entraîne l'injectivité de φ_0 .

Montrons que φ_0 est surjectif. On co nsidère le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(S,\bar{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(S',F) \arrow[r] \arrow[dd] & H_T^1(S,\bar{F}) \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & H^0(S,\bar{F}/J^m\bar{F}) \arrow[d, phantom, "\wr"] & & & \\
0 \arrow[r] & H_T^0(S,\bar{F}/J^m\bar{F}) \arrow[r] & H_T^1(S,J^m\bar{F}) \arrow[r] & H_T^1(S,\bar{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ;$$

on vérifie facilement qu'il est commutatif. Le système projectif des $H_T^0(S,\bar{F}/J^m\bar{F})$ satisfaisant à la condition de Mittag-Leffler, on obtient, par passage à la limite projective à partir du diagramme ci-dessus, le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(S,\bar{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & H^0(S',F) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & H_T^1(S,F) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_m H^0(S,\bar{F}/J^m\bar{F}) \arrow[r] & \varprojlim_m H_T^1(S,J^m\bar{F}) \arrow[r] & H_T^1(S,\bar{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme S est complet pour la topologie J-adique, le morphisme α est un isomorphisme ; il en est donc de même de φ_0 d'après le diagramme ci-dessus.

2) Cas général. Par passage à la limite projective, on se ramène au cas où F est un complexe à cohomologie cohérente bornée. Par translation, on peut supposer les faisceaux de cohomologie de F nuls en dehors d'un intervalle $[0,a]$. On raisonne par récurrence sur a . Si $F' = H^0(F)$, il existe un morphisme $F' \to F$ induisant un isomorphisme sur les H^0 . Soit F'' le cône de ce morphisme ; les faisceaux de cohomologie de F'' sont nuls en dehors de l'intervalle $[1,a]$. Soient $Rj_!F' = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, R'_m$, $Rj_!F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, R_m$, $Rj_!F'' = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, R''_m$.
On peut supposer, par récurrence, que le morphisme

$$H^i(S,F'') \to H_T^{i+1}(S,Rj_!F'')$$

est bijectif pour tout i , et que le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, H_T^i(S,R''_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccccccc} H^{i-1}(S',F'') & \longrightarrow & H^i(S',F') & \longrightarrow & H^i(S',F) & \longrightarrow & H^i(S',F'') & \longrightarrow & H^{i+1}(S',F') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_T^i(S,F'') & \longrightarrow & H_T^{i+1}(S,F') & \longrightarrow & H_T^{i+1}(S,F) & \longrightarrow & H_T^{i+1}(S,F'') & \longrightarrow & H_T^{i+2}(S,F') \end{array}$$

Comme F' est un faisceau, le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, H_T^i(S,R'_m)$ est constant pour $i>0$ (relation (*)). Il en résulte que le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, H_T^i(S,R_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour tout i . Par suite les lignes du diagramme (*) sont exactes. Toutes les flèches verticales de ce diagramme, sauf peut-être celle du milieu, sont des isomorphismes. Il en est donc de même de cette dernière, d'après le lemme des cinq.

Remarque 2.10.2.- Reprenons les hypothèses de 2.10 et soit F un faisceau cohérent sur X . Alors le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, H^i(X,F/I^mF)$ ne satisfait pas nécessairement à la condition de Mittag-Leffler, même pour $i \leq n-c-2$.

Soit par exemple S un schéma local régulier de dimension $d \geq 2$, de point fermé t , $S' = S-\{t\}$, $Z = P^1_S$, $X = P^1_{S'}$. Soit H une section hyperplane de Z , contenant la fibre fermée, définie par l'annulation d'une section σ de $\mathcal{O}_Z(1)$, et soit $Y = H \cap X$. L'ouvert $U = X - Y$ est affine et l'on a

$$\mathrm{prof}_u\, \mathcal{O}_X \geq d - \delta_t\, u + 1$$

pour tout point $u \in U$. Si $\mathcal{O}_{X_m}$ est défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-m) \xrightarrow{\sigma^m} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_m} \longrightarrow 0 ,$$

il résulte de 2.10 que le morphisme canonique

$$H^0(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X,\mathcal{O}_{X_m})$$

est bijectif. Nous allons montrer que le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, H^0(X,\mathcal{O}_{X_m})$ ne satisfait pas à la condition de Mittag-Leffler. On a la suite exacte de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^0(Z,\mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^0(Z,\mathcal{O}_{Z_m}) \longrightarrow H^1(Z,\mathcal{O}_Z(-m)) \longrightarrow 0 ,$$

et on en déduit que $H^0(Z,\mathcal{O}_{Z_m})$ est un $\Gamma(S)$-module libre de rang m (EGA III 2.1.12). On a donc

$$\mathrm{prof}_t\ H^0(Z,\mathcal{O}_{Z_m}) \geq 2 ,$$

d'où résulte que le morphisme canonique

$$H^0(Z,\mathcal{O}_{Z_m}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_{X_m})$$

est bijectif. Supposons que $"\varprojlim_m"\ H^0(X,\mathcal{O}_{X_m})$ satisfasse à la condition de Mittag-Leffler ; comme $H^0(X,\mathcal{O}_X)$ est un $\Gamma(S)$-module libre de rang 1, on pourrait trouver, pour tout $m \geq 0$, un entier $k(m) \geq 0$ tel que l'image du morphisme canonique

$$H^0(X,\mathcal{O}_{X_{m+k(m)}}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_{X_m})$$

soit de rang ≤ 1. Mais ceci est absurde car le morphsime induit par le précédent sur la fibre générique Spec K de S n'est autre que le morphisme canonique

$$H^0(X_K,\mathcal{O}_{X_{m+k(m)}}) \longrightarrow H^0(X_K,\mathcal{O}_{X_m}) ;$$

or ce morphisme est surjectif car $X_m|K$ est fini sur K .

3. Variantes des théorèmes de comparaison.

3.1.- Reprenons les hypothèses de 2.7 dans le cas où g est propre (resp. les hypothèses de 2.9) et soit F un objet de $D^b_{coh}(X)$ et $"\varprojlim_m"\ F_m$ le cône du morphisme canonique $Ri_!(F|U) \to F$. Alors, pour tout voisinage ouvert V de Y dans X , les morphismes canoniques du diagramme commutatif

(3.1.1)
$$\begin{tikzcd} & H^i_{g^{-1}(T)}(X,F) \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ H^i_{g^{-1}(T)\cap V}(V,F) \arrow[rr, "\pi_i"] & & \varprojlim_m H^i_{g^{-1}(T)}(X,F_m) \end{tikzcd}$$
(resp.
$$\begin{tikzcd} & H^i(X,F) \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ H^i(V,F) \arrow[rr, "\pi_i"] & & \varprojlim_m H^i(X,F_m) \end{tikzcd}$$
)

sont bijectifs pour $i < n-c-1$, injectifs pour $i = n-c-1$.

Le fait que φ_i soit bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$, résulte de 2.7 (resp. 2.9). Prouvons la bijectivité de π_i pour $i < n-c-1$. Soient $Z = X-V$ et $j : X-(Z\cap g^{-1}(T)) \to X$ (resp. $j : V \to X$) l'immersion canonique. On considère la suite exacte (SGA 2 I 2.8) :

$$(*)\quad \begin{gathered}\to H^i_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,F) \longrightarrow H^i_{g^{-1}(T)}(X,F) \longrightarrow H^i_{g^{-1}(T)\cap V}(V,F) \longrightarrow H^{i+1}_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,F) \longrightarrow \\ (\text{resp. } \longrightarrow H^i_Z(X,F) \longrightarrow H^i(X,F) \longrightarrow H^i(V,F) \longrightarrow H^{i+1}_Z(X,F) \longrightarrow)\ .\end{gathered}$$

Si $u \in g^{-1}(T) \cap Z$ (resp. si $u \in Z$) , on a $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, donc, d'après 3.2 ci-dessous, on a

$$\deg \operatorname{tr} k(u)/k(s) \leq c \quad (\text{resp. } \dim \overline{\{u\}} \leq c)\ .$$

Les hypothèses de profondeur sur F entraînent alors que l'on a

$$\operatorname{prof}_u F \geq n-c\ .$$

Par suite on a

$$(*)\qquad H^i_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,F) = 0 \qquad (\text{resp. } H^i_Z(X,F) = 0)$$

pour $i \leq n-c-1$. Compte tenu des suites exactes $(*)$, on en déduit la bijectivité de ρ_i , donc aussi de π_i , pour $i < n-c-1$.

Montrons que π_{n-c-1} est injectif. Soient H' le cône du morphisme $F \to Rj_*F$ et H le complexe obtenu "en tronquant H' en degré $\geq n-c$" ; d'après $(*)$, le complexe H a un seul objet de cohomologie non nul $H^{n-c-1}(H) = \underline{H}^{n-c}_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,F)$ (resp. $H^{n-c-1}(H) = \underline{H}^{n-c}_Z(F)$) . Soit h la flèche composée des morphismes canoniques $H \to H'$ et $H' \to F[1]$ et définissons G par la condition d'avoir un triangle

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "h"'] & \\ F \arrow[rr] & & G \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Le faisceau $K = H^{n-c-1}(H)$ est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux cohérents K_α ; si l'on définit G_α par la condition d'avoir des triangles

$$\begin{tikzcd} & K_\alpha[-(n-c-1)] \arrow[dl] & \\ F \arrow[rr] & & G_\alpha \arrow[ul] \end{tikzcd}\ ,$$

G_α est un complexe à cohomologie cohérente, et l'on a un isomorphisme

$$G \simeq \varinjlim G_\alpha\ .$$

Montrons que chaque G_α satisfait aux mêmes hypothèses de profondeur que F . Le morphisme $F \to G_\alpha$ induit un isomorphisme au-dessus de $X - g^{-1}(T)\cap Z$ (resp. de V) , ainsi que sur les faisceaux de cohomologie de degré $< n-c-1$. D'autre part, on déduit du triangle définissant G_α la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{H}^{n-c-1}_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,G_\alpha) \longrightarrow K_\alpha \longrightarrow \underline{H}^{n-c}_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,F) \longrightarrow$$

$$(\text{resp.} \quad 0 \longrightarrow \underline{H}^{n-c-1}_Z(X,G_\alpha) \longrightarrow K_\alpha \longrightarrow \underline{H}^{n-c}_Z(X,F) \ ) \quad ;$$

comme, par définition, K_α est un sous-faisceau de $\underline{H}^{n-c}_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,F)$ (resp. de $\underline{H}^{n-c}_Z(X,F)$) , on voit que l'on a

$$\underline{H}^{n-c-1}_{g^{-1}(T)\cap Z}(X,G_\alpha) = 0 \quad (\text{resp. } \underline{H}^{n-c-1}_Z(X,G_\alpha) = 0 \ ) \ .$$

Ces relations montrent que G_α satisfait aux mêmes hypothèses de profondeur que F . On peut donc appliquer 2.7 (resp. 2.9) à G_α . Il en résulte que les morphismes canoniques

$$H^{n-c-1}_{g^{-1}(T)}(X,G_\alpha) \longrightarrow \varprojlim_m H^{n-c-1}_{g^{-1}(T)}(X,F_m)$$

$$(\text{resp. } H^{n-c-1}(X,G_\alpha) \longrightarrow \varprojlim_m H^{n-c-1}(X,F_m) \ )$$

sont injectifs. Comme on a un morphisme $G_\alpha \to Rj_*F$ induisant un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie de degré $\leq n-c-1$, on a des isomorphismes canoniques

$$H^{n-c-1}_{g^{-1}(T)\cap V}(V,F) \longrightarrow H^{n-c-1}_{g^{-1}(T)}(X,Rj_*F) \longrightarrow H^{n-c-1}_{g^{-1}(T)}(X,G) \longrightarrow \varinjlim_\alpha H^{n-c-1}_{g^{-1}(T)}(X,G_\alpha)$$

$$(\text{resp. } H^{n-c-1}(V,F) \longrightarrow H^{n-c-1}(X,Rj_*F) \longrightarrow H^{n-c-1}(X,G) \longrightarrow \varinjlim_\alpha H^{n-c-1}(X,G_\alpha) \ ) \ .$$

Le fait que π_{n-c-1} soit injectif en résulte.

LEMME 3.2.- Soient k un corps, $f : X \to k$ un morphisme propre (resp. soit X le complémentaire du point fermé d'un schéma local noethérien caténaire). Supposons X réunion de $c+1$ ouverts affines (c entier ≥ 0). Alors on a

$$\dim X \leq c \ .$$

On raisonne par récurrence sur c . Le lemme est vrai pour $c = 0$ d'après EGA III 4.4.2 (resp. SGA 2 V 3.4). Supposons-le prouvé pour les réunions de c ouverts affines et prouvons-le pour un schéma X , réunion de $c+1$ ouverts affines $U_0,\ldots,U_c$. On peut supposer X irréductible. On a, par hypothèse de récurrence

$$\dim(X-U_0) \leq c-1$$

Si z est un point maximal de $X-U_0$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,z}$ est tel que Spec $\mathcal{O}_{X,z}-\{z\}$ soit affine et par suite on a

$$\dim \mathcal{O}_{X,z} \leq 1 \ .$$

Les deux relations ci-dessus entraînent, compte tenu de EGA IV 5.2.1, la relation $\dim X \leq c$.

Nous nous proposons de montrer que le morphisme π_i du diagramme (3.1.1) est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$, sous des hypothèses plus faibles que celles de 3.1 (3.7 et 3.9 ci-dessous), en particulier sans faire d'hypothèses aux points dont l'adhérence ne rencontre pas Y . Nous aurons besoin des lemmes suivants.

LEMME 3.3.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, $g : X \to S$ un morphisme propre, Y une partie fermée de X , c un entier ≥ 0 . On suppose que, localement sur S , l'ouvert $U = X-Y$ est réunion de $c+1$ ouverts, affines sur S . Soient u un point de U , $s = g(u)$. Supposons que l'on ait $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$ et $\deg \operatorname{tr} k(u)/k(s) \leq c+1$. Alors on a

$$\operatorname{codim}(g(Y) \cap \overline{\{s\}} , \overline{\{s\}}) + \deg \operatorname{tr} k(u)/k(s) \leq c+1$$

En remplaçant S par un sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $\overline{\{s\}}$ et X par un sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $\overline{\{u\}}$, on se ramène au cas où S est intègre de point générique s et X intègre de point générique u . Soit t un point maximal de $g(Y)$. Quitte à remplacer S par son localisé en t , S_t , et X par $X \times_S S_t$, on peut supposer S local et Y contenu dans la fibre fermée $g^{-1}(t)$. En remplaçant S par son complété $\hat{S}$, X par $X \times_S \hat{S} = \hat{X}$ et u par un point v de $\hat{X}$ au-dessus de u , tel que $\delta_t u = \delta_t v$ et que $\overline{\{v\}} \cap \hat{Y} \neq \emptyset$, on se ramène de plus au cas où S est complet. Le normalisé de X est alors fini sur X (EGA IV 7.8.3) . Quitte à remplacer X par son normalisé, on peut donc supposer X normal.

La relation à démontrer s'écrit sous la forme

$$\delta_t u = \dim S + \deg \operatorname{tr} k(u)/k(s) \leq c+1 \ .$$

Supposons que l'on ait $\delta_t u > c+1$. Pour tout point v de X , on a, d'après EGA IV 5.6.5,

$$\delta_t v = \delta_t u - \dim \mathcal{O}_{X,v} \ .$$

Comme X est normal, on en déduit la relation

$$\operatorname{prof}_v \mathcal{O}_X \geq \operatorname{Inf}(2, c+2 - \delta_t v) \ .$$

On peut donc appliquer 2.7 à g , la partie fermée $\{t\}$ de S , au faisceau $\mathcal{O}_X$ et à l'entier $n = c+2$. Soit I un Idéal définissant Y . Il résulte de loc. cit. que le morphisme canonique

$$H^0_{g^{-1}(t)}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{O}_X/I^m)$$

est bijectif. Le premier terme est nul car l'hypothèse $\delta_t u > c+1$ et la relation deg tr $k(u)/k(s) \leq c+1$ montrent que S n'est pas réduit à $\{t\}$; mais le deuxième terme n'est pas nul car il contient $H^0(X,\mathcal{O}_X)$. L'hypothèse $\delta_t u > c+1$ est donc absurde.

COROLLAIRE 3.4.- Les notations sont celles de 3.3. Soit u un point de U tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a deg tr $k(u)/k(s) \leq c+1$.

(ii) Il existe un point $y \in Y \cap \overline{\{u\}}$, fermé dans sa fibre, tel que l'on ait

$$\dim \mathcal{O}_{\overline{\{u\}},y} \leq c+1 .$$

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit y un point de $Y \cap \overline{\{u\}}$, fermé dans sa fibre ; si $t = g(y)$, on a (EGA IV 5.6.5) :

$$\text{deg tr } k(u)/k(s) + \dim \mathcal{O}_{\overline{\{s\}},t} = \dim \mathcal{O}_{\overline{\{u\}},y} ,$$

d'où le fait que (ii) $\Rightarrow$ (i). Inversement, supposons (i) vérifié et appliquons 3.3 à un sous-schéma d'espace sous-jacent $\overline{\{u\}}$. On en déduit l'existence d'un point $t \in g(Y \cap \overline{\{u\}})$ tel que l'on ait

$$\text{deg tr } k(u)/k(s) + \dim \mathcal{O}_{\overline{\{s\}},t} \leq c+1 .$$

Si y est un point fermé de $g^{-1}(t) \cap Y \cap \overline{\{u\}}$, on a alors $\dim \mathcal{O}_{\overline{\{u\}},y} \leq c+1$.

LEMME 3.5.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, T une partie fermée de S , n , k , r des entiers.

1) Soient $f : U \to S$ un morphisme de type fini , F un complexe de faisceaux de modules sur U , à cohomologie cohérente, tel que, pour tout point $x \in U$, on ait

$$\text{prof}_x F \geq \text{Inf}(k, n-\delta_T x) .$$

Soit E l'ensemble des points x de U tels que l'on ait

$$\text{prof}_x F \leq k \quad \text{et} \quad \delta_T x \leq n-k-1 .$$

Alors E est un ensemble fini.

2) Soient $f_1 : X_1 \to S$ un morphisme de type fini, Y_1 une partie fermée de X_1 , X le complété de X_1 le long de Y_1 , $Y = X \times_{X_1} Y_1$, U un ouvert de X_1 , F un complexe de faisceaux de modules sur U , à cohomologie cohérente. Supposons que, pour tout point $y \in Y$ tel que $\delta_T y = r$ et pour toute générisation x de y appartenant à U , on ait

$$\text{prof}_x F \geq \text{Inf}(k, n-\text{codim}(\overline{\{y\}} , \overline{\{x\}})) .$$

Soit E l'ensemble des points x de U tels que l'on ait

$$\operatorname{prof}_x F \leq k\ ,$$

et tels qu'il existe un point $y \in Y \cap \overline{\{x\}}$, tel que $\delta_T y = r$, tel que l'on ait

$$\operatorname{codim}(\overline{\{y\}}\ ,\ \overline{\{x\}}) \leq n-k-1\ .$$

Alors E est un ensemble fini.

Si $(S_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de S tel que chaque S_i admette un complexe dualisant, il suffit de montrer que, pour tout $i\in I$, l'ensemble des points de E au-dessus de S_i est fini. On peut donc supposer que U admet un complexe dualisant. Soit K un complexe dualisant sur U et notons DF le dual de F par rapport à K. Pour tout point x de U, on note d_x l'entier tel que $K[-d_x]$ soit normalisé en x ; si x' est une générisation immédiate de x, on a

$$d_{x'} = d_x + 1$$

([6] V 7.1). Si $x\in E$, on a

$$H_x^k F \neq 0\ .$$

D'après le théorème de dualité locale ([6] V 6.3) ceci équivaut à la relation

$$(H^{-k-d_x}(DF))_x \neq 0\ .$$

Les faisceaux cohérents $H^q(DF)$, $q \in Z$, sont nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, et l'ensemble des points où l'on a $H^q(DF) \neq 0$ est une partie fermée Σ_q. Il suffit, pour établir le lemme, de montrer que, tout point x de E est un point maximal de Σ_{-k-d_x}. Supposons qu'un point x de E ne soit pas un point maximal de Σ_{-k-d_x} et soit x' une générisation immédiate de x appartenant à Σ_{-k-d_x}. Par définition de Σ_{-k-d_x}, on a la relation

$$(H^{-k-d_x}(DF))_{x'} \neq 0\ ,$$

ce qui équivaut à

$$H_{x'}^{k-1} \neq 0\ .$$

Or ceci est absurde car, sous les hypothèses de 1), on a

$$\delta_T x' \leq \delta_T x + 1 \leq n-k\ ,$$

et par suite on a $\operatorname{prof}_{x'} F \geq k$. De même, sous les hypothèses de 2), il existe un point y de $Y \cap \overline{\{x\}}$, tel que $\delta_T y = r$, tel que l'on ait

$$\operatorname{codim}(\overline{\{y\}}\ ,\ \overline{\{x'\}}) = \operatorname{codim}(\overline{\{y\}}\ ,\ \overline{\{x\}}) + 1 \leq n-k$$

et par suite on a $\operatorname{prof}_{x'} F \geq k$.

COROLLAIRE 3.6.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, T une partie fermée de S, $g : X \to S$ un morphisme de type fini, Y une partie fermée de X, $U = X-Y$, n et k des entiers. Soit F un complexe de faisceaux de modules sur X, à cohomologie cohérente, tel que l'on ait

$$(*) \qquad \operatorname{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(k, n-\delta_T u)$$

en tout point u de U tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$. Alors on peut trouver un voisinage ouvert V de Y dans X tel que la relation (*) soit vérifiée en tout point u de $V-Y$.

On raisonne par récurrence sur k, n étant fixé. On peut donc supposer le corollaire démontré quand on remplace k par $k-1$. Soit V_1 un voisinage ouvert de Y dans X tel que l'on ait

$$\operatorname{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(k-1, n-\delta_T u)$$

en tout point u de V_1-Y. D'après 3.5, l'ensemble des points u de V_1-Y où l'on a

$$\operatorname{prof}_u F \leq k-1 \quad \text{et} \quad \delta_T u \leq n-k$$

est un ensemble fini E. Si $u \in E$, l'hypothèse entraîne que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$. Soit $V = V_1 - \bigcup_{u \in E} \overline{\{u\}}$. Pour tout point $u \in V$ tel que $\delta_T u \leq n-k$, on a $\operatorname{prof}_u F \geq k$, ce qui n'est autre que la relation (*).

THEOREME 3.7.- Soient S un schéma noethérien ayant localement un complexe dualisant, g un morphisme propre, n et c des entiers ≥ 0, U un ouvert de X qui est, localement sur S, réunion de $c+1$ ouverts affines sur S. Soit F un faisceau de modules cohérent sur X. Soient Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, défini par un idéal I, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y, $\hat{F}$ le complété formel de F. On suppose que, pour tout point u de U tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, si $s = g(u)$, on a

$$(3.7.1) \qquad \operatorname{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(n-c-1, n-\operatorname{deg\,tr} k(u)/k(s)) .$$

Si V est un voisinage ouvert de Y dans X, on considère les morphismes canoniques suivants :

$$\begin{tikzcd} H^i(V,F) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & \varprojlim_m H^i(X, F/I^m F) \\ & H^i(\hat{X},\hat{F}) \arrow[ur, "\theta_i"'] & \end{tikzcd}$$

1) On peut trouver un voisinage ouvert V_0 de Y dans X tel que, pour tout $V \subset V_0$, le morphisme φ_i soit bijectif pour $i < n-c-1$.

2) Supposons de plus que, pour tout point u de U tel que

$\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$ et $\overline{\{u\}} \cap Y \cap g^{-1}(g(u)) = \emptyset$, on ait

(3.7.2) $$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c, n-\mathrm{deg\ tr}\ k(u)/k(s)) .$$

Alors on peut trouver un voisinage ouvert V_0 de Y dans X tel que, pour tout $V \subset V_0$, les morphismes φ_i , ψ_i , θ_i soient bijectifs pour $i < n-c-1$, injectifs pour $i = n-c-1$. De plus le système projectif "$\varprojlim_m$" $H^i(X,F/I^mF)$ satisfait à la condition de Mittag-Lefler pour $i \leq n-c-2$.

Les hypothèses de 3.1 sont satisfaites quand on y remplace n par $n-1$, en prenant $T = S$. Il en résulte que φ_i , ψ_i , θ_i sont bijectifs pour $i < n-c-2$, injectifs pour $i = n-c-2$, quel que soit V , et que "$\varprojlim_m$" $H^i(X,F/I^mF)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i < n-c-2$. Soit

$$P_m = \mathrm{Coker}(H^{n-c-2}(V,F) \longrightarrow H^{n-c-2}(X,F/I^mF)) .$$

Il suffit de prouver que l'on peut trouver un voisinage ouvert V_0 de Y dans X tel que, pour tout $V \subset V_0$, le morphisme φ_{n-c-2} soit surjectif (resp. sous l'hypothèse de 2), que φ_{n-c-1} soit injectif et que le système projectif des P_m soit nul).

Ces trois assertions se démontrent par récurrence noethérienne sur S . Si on les suppose prouvées après restriction de S à un ouvert $S' \neq S$, il suffit de montrer que l'on peut trouver un ouvert S'' contenant strictement S' , tel qu'elles soient vraies sur S'' . Si S' (resp. S'') est un ouvert de S , on pose $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_S S'$, etc. (resp. $X'' = X \times_S S''$, $Y'' = Y \times_S S''$, etc.). Soient S' un ouvert de S, V_0 un voisinage ouvert de Y' dans X' , tels que, pour tout voisinage ouvert V de Y' dans X' , contenu dans V_0 , le morphisme

$$\varphi'_i : H^i(V,F) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X',F/I^mF)$$

soit bijectif pour $i = n-c-2$ (resp., sous l'hypothèse de 2), que φ'_{n-c-1} soit injectif et que le système projectif des $P'_m = \mathrm{Coker}(H^{n-c-2}(V,F) \to H^{n-c-2}(X',F/I^mF))$ soit nul). Nous allons montrer que l'on peut trouver un ouvert S'' de S , contenant strictement S' , un voisinage ouvert W_0 de Y'' dans X'' , tels que, pour tout voisinage ouvert W de Y'' dans X'' , contenu dans W_0 , le morphisme

$$\varphi''_i : H^i(W,F) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X'',F/I^mF)$$

soit bijectif pour $i = n-c-2$ (resp. tel que φ''_{n-c-1} soit injectif et que le système projectif des $P''_m = \mathrm{Coker}(H^{n-c-2}(W,F) \longrightarrow H^{n-c-2}(X'',F/I^mF))$ soit nul).

Soit $T = S-S'$. D'après 3.6, on peut trouver un voisinage ouvert O de Y dans X tel que la relation (3.7.1) soit vérifiée en tout point $u \in U \cap O$. On peut supposer V_0 contenu dans O' . Si S'' est un ouvert de S , on considère l'ensemble Σ des points $u \in U \cap O''$ tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_u F < n-c$$

et où l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$\text{ou bien}\quad \delta_{T''}u \leq c \qquad \text{ou bien}\quad \overline{\{u\}} \cap Y' = \emptyset .$$

D'après 3.2 et 3.5, Σ est un ensemble fini. Soit E_1 l'adhérence de Σ. Nous allons montrer que l'on peut trouver un ouvert S'' de S, contenant strictement S', tel que, pour tout point x de $E_1 \cap g^{-1}(T'')$, on ait

$$(*) \qquad \deg \operatorname{tr} k(x)/k(g(x)) \leq c .$$

Comme l'ensemble Σ décroit avec S'', il suffit de prouver l'existence de S'' dans le cas où Σ est réduit à un point u. Si l'on a $\delta_{T''}u \leq c$, on peut trouver un point $x \in \overline{\{u\}}$ tel que $t = g(x) \in T$ et tel que

$$\operatorname{codim}(\overline{\{t\}}, \overline{\{s\}}) = \operatorname{codim}(T \cap \overline{\{s\}}, \overline{\{s\}}) .$$

Pour tout point $z \in g^{-1}(t) \cap \overline{\{u\}}$, on a alors, d'après EGA IV 5.6.5,

$$(**) \quad \delta_T u = \deg \operatorname{tr} k(u)/k(s) + \operatorname{codim}(T \cap \overline{\{s\}}, \overline{\{s\}}) = \deg \operatorname{tr} k(z)/k(t) + \operatorname{codim}(\overline{\{z\}}, \overline{\{u\}}) .$$

Comme $\delta_T u$ est $\leq c$, on a donc

$$\deg \operatorname{tr} k(z)/k(t) \leq c .$$

L'ensemble des points de S où la dimension des fibres de $\overline{\{u\}}$ est $> c$ est une partie fermée S_1 (EGA IV 13.1.5) et on vient de voir que $t \notin S_1$. Par suite $S'' = S' - (S_1 \cap T)$ est un ouvert de S, contenant strictement S', tel que l'on ait $\delta_{T''}x \leq c$ en tout point x de $E_1 \cap g^{-1}(T'')$. Supposons que l'on ait $\delta_{T''}u > c$ et $\overline{\{u\}} \cap Y' = \emptyset$. Si l'on a $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, la condition (*) résulte de 3.2. Si $g(\overline{\{u\}} \cap Y)$ est contenu strictement dans T, il suffit de poser $S'' = S' - g(\overline{\{u\}} \cap Y)$ pour se ramener à ce cas. Enfin, si $g(\overline{\{u\}} \cap Y) = T$, on a $\delta_T u = c+1$ (3.3) et, si l'on définit x et t comme ci-dessus, la relation (*) résulte encore de (**) aorès restriction convenable de S.

On choisit dans ce qui suit un ouvert S'' qui satisfait à la condition (*) ; si E_2 désigne l'adhérence de l'ensemble des points x de E_1 tels que l'on ait

$$\deg \operatorname{tr} k(x)/k(g(x)) > c ,$$

on a $E_2 \cap g^{-1}(T'') = \emptyset$. Soit $E_3 = E_1 \cap (X'' - V_0)$. L'ensemble des points $u \in U \cap O''$ tels que l'on ait

$$\operatorname{prof}_u F < n-c \quad \text{et} \quad \overline{\{u\}} \cap Y'' = \emptyset$$

est fini. Quitte à remplacer O'' par un voisinage ouvert W_0 de Y'' dans X'', on peut supposer qu'il est vide. On peut supposer que l'on a $V_0 \subset W_0$. Posons $E = X'' - W_0$ et considérons les immersions ouvertes

$$i : X''-E \longrightarrow X'' , \; k : X''-(E \cup E_1) \longrightarrow X'' , \; l : X''-(E \cup E_3) \longrightarrow X''.$$

Si $u \in U''$ est un point de $E \cup E_3$ ou de $E_1 - E_2$, on a, par définition de

E_2 et d'après 3.2

$$\deg\operatorname{tr} k(u)/k(g(u)) \leq c \quad ;$$

si de plus $u \in W$, on a donc, par définition de O ,

$$\operatorname{prof}_u F \geq n-c-1 \ .$$

Cette relation est également vérifiée en tout point $u \in W$, générisation immédiate d'un point de E ou de $E_1 - E_2$ car on a alors $\deg\operatorname{tr} k(u)/k(g(u)) \leq c+1$. Les faisceaux

$$\underline{H}^j_E F \qquad \underline{H}^j_{E \cup E_1} F|U'' - (E_2 \cap U'') \qquad \underline{H}^j_{E \cup E_3} F|U''$$

sont donc cohérents pour $j \leq n-c-1$ (SGA 2 VIII 2.3) . En utilisant SGA 2 1 2.8, on voit de plus que les morphismes canoniques

$$\underline{H}^j_E F \ |(U'' - (E_2 \cup U'')) \longrightarrow \underline{H}^j_{E \cup E_1} F \ |(U'' - (E_2 \cup U''))$$

$$\underline{H}^j_E F \ | \ U'' \longrightarrow \underline{H}^j_{E \cup E_3} F|U''$$

sont bijectifs pour $i < n-c-1$, injectifs pour $i = n-c-1$. Soit G (resp. M_1 , resp. N_1) le complexe obtenu en tronquant $Ri_* i^* F$ (resp. $Rk_* k^* F$, resp. $Rl_* l^* F$) en degré $\geq n-c-1$ et

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, "e_1"] & G \arrow[d, "c_1"] \\ N_1 \arrow[r, "b_1"'] & M_1 \end{tikzcd}$$

les morphismes canoniques. Utilisant EGA I 9.4.3 et le fait qu'un complexe à cohomologie cohérente bornée est quasi-isomorphe à un complexe à objets cohérents (SGA 6 II 2.2.2.1), on voit que l'on peut trouver des complexes M , M , $N \in D^b_{coh}(X'')$ et des morphismes b , c , d , e , prolongeant respectivement les restrictions de M_1 , b_1 , c_1 , e_1 à $U''-(E_2 \cap U'')$ et de N_1 , d_1 à U'' , tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, "e"] & G \arrow[d, "c"] \\ N \arrow[r, "b"'] & M \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si C est le cône de c , D le cône de d , B le cône de b , on a montré que les faisceaux

$$H^j(C)|U'' - (E_2 \cap U'') \qquad H^j(D)|U'' \qquad H^j(B)|U''-(E_2 \cap U'')$$

sont nuls pour $j < n-c-2$.

Pour tout point $u \in U"$ qui appartient à E ou à $E_1 - E_2$, on a, par définition de M ,

$$\mathrm{prof}_u M \geq n-c \ .$$

Vu la définition de E_1 , on a donc

$$\mathrm{prof}_u M \geq \mathrm{Inf}(n-c, n-\delta_{T"} u)$$

en tout point $u \in U" - (E_2 \cap U")$. Comme on a $\delta_{T"} u = \infty$ en tout point $u \in E_2$, la relation ci-dessus est satisfaite en tout point $u \in U"$. On peut donc appliquer 2.6 au morphisme $U" \to S"$, à la partie fermée $T"$ de $S"$ et au complexe M . Soient $j : U" \to X"$ l'immersion canonique, $"\varprojlim_m" J^1_m$ un système projectif de complexes, à cohomologie cohérente, uniformément bornée, représentant $Rj_!(M|U")$ et, pour tout $m \geq 0$, soit K^1_m le cône du morphisme $J^1_m \to M$. Si $Z = g^{-1}(T")$, il résulte de <u>loc. cit.</u> que le système projectif

$$"\varprojlim_m" H^i_Z(X", J^1_m)$$

est nul pour $i \leq n-c-1$.

Montrons que, quitte à restreindre $S"$ à un ouvert contenant strictement S' , les mêmes conclusions sont valables pour G (resp. N) au lieu de M . On peut supposer le morphisme $Rj_!(G|U") \to Rj_!(M|U")$ (resp. $Rj_!(N|U") \to Rj_!(M|U")$) défini par la donnée d'un système projectif de morphismes $J_m \to J^1_m$; on note J^2_m le cône du morphisme $J_m \to J^1_m$, de sorte que $"\varprojlim" J^2_m$ est isomorphe à $Rj_!(C|U")$ (resp. à $Rj_!(D|U")$) . Nous allons montrer que, quitte à restreindre $S"$ à un ouvert contenant strictement S' , le système projectif des $H^j_Z(X", J^2_m)$ est nul pour $j \leq n-c-1$. Soit L le faisceau $H^0_Z(X", H^{n-c-2}(C))$ (resp. $H^0_Z(X", H^{n-c-2}(B))$) . La relation $H^j(C)|U" - (E_2 \cap U") = 0$ (resp. $H^j(B)|U" = 0$) pour $j < n-c-2$ et le fait que $E_2 \cap Z = \emptyset$ montrent que l'on a un isomorphisme

$$"\varprojlim_m" H^0(X", I"^m L) \simeq "\varprojlim_m" H^{n-c-2}_Z(X", J^2_m) \ .$$

Soit t un point maximal de $S" - S'$. Quitte à restreindre $S"$ à un ouvert contenant t , on peut supposer que tous les points associés à L se projettent en t et que, si x est un tel point, on a

$$\overline{\{x\}} \cap Y \cap g^{-1}(t) \neq \emptyset \ .$$

Par suite les $g_*(I"^m L)_t$ sont des sous-$k(t)$-espaces vectoriels de $g_*(L)_t$ dont l'intersection est nulle. On peut donc trouver un entier m tel que $(g_*(I^m L))_t = 0$. Quitte à restreindre $S"$ à un ouvert contenant S' et t , on a $H^0(X", I"^m L) = 0$. Ceci prouve que le système projectif des $H^{n-c-2}_Z(X", J^2_m)$ est nul. Le fait qu'il en soit de même de $"\varprojlim_m" H^j_Z(X", J_m)$ pour $j \leq n-c-1$ résulte alors de la propriété analogue pour $"\varprojlim_m" H^j_Z(X", J^1_m)$ et de 1.6.2, appliqué aux suites exactes

$$H_Z^{n-c-2}(X",J_m^2) \longrightarrow H_Z^{n-c-1}(X",J_m) \longrightarrow H_Z^{n-c-1}(X",J_m^1) \ .$$

Soient $"\varprojlim_m" K_m$ (resp. $"\varprojlim_m" N_m$) le cône du morphisme canonique $Rj_!(G|U") \to G$ (resp. $Rj_!(N|U") \to N$) . On déduit de ce qui précède et de 1.6.2, 1.6.3, que le morphisme canonique

$$H_Z^i(X",G) \longrightarrow \varprojlim_m H_Z^i(X",K_m) \qquad (\text{resp. } H_Z^i(X",N) \longrightarrow \varprojlim_m H_Z^i(X",N_m))$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$ et que le système projectif des $H_Z^i(X",K_m)$ (resp. $H_Z^i(X",N_m)$) satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-c-2$; on voit enfin, comme dans 3.1, que la même condition est vérifiée si l'on remplace $X"$ par un ouvert $W \subset W_o$ contenant $Y"$.

Revenons maintenant à F . Les complexes F et N sont isomorphes sur V_o . D'autre part, pour tout point $u \in X' - V_o$, on a

$$\text{prof}_u N \geq n-c \ .$$

On a en effet $\text{prof}_u F < n-c$ si et seulement si $u \in E \cup E_3$ et la relation précédente est vérifiée aux points de $E \cup E_3$ par définition de N . Par suite, pour tout voisinage ouvert W de $Y"$ dans $X"$, le morphisme canonique

$$H^i(W',N) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X',F/I^mF)$$

s'identifie, pour $i < n-c-1$, au morphisme $\varphi_i^!$. En particulier il est bijectif pour $i < n-c-1$. On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_{Z\cap W}^{n-c-2}(W,N) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & H^{n-c-2}(W,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H^{n-c-2}(W',N) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H_{Z\cap W}^{n-c-1}(W,N) \arrow[d, hook] \\
\varprojlim_m H_Z^{n-c-2}(X",N_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X",N_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X',N_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H_Z^{n-c-1}(X",N_m)
\end{tikzcd}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes car $"\varprojlim_m" H_Z^{n-c-2}(X",N_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Comme β est bijectif, il en est de même de α . Soit $"\varprojlim_m" D_m$ le cône du morphisme canonique $Rj_!(D|U") \to D$. Les faisceaux de cohomologie de D sont concentrés sur Y en degré $< n-c-2$ et $\underline{H}^{n-c-2}(D|U")$ est cohérent. Il en résulte que le système projectif des $H^i(W,D_m)$ est essentiellement constant pour $i < n-c-2$. Par suite le morphisme

$$H^{n-c-3}(W,D) \longrightarrow \varprojlim_m H^{n-c-3}(W,D_m)$$

est bijectif et l'on peut trouver un voisinage ouvert W_1 de $Y"$ dans $X"$ tel que, pour tout $W \subset W_1$, le morphisme

$$H^{n-c-2}(W,D) \longrightarrow \varprojlim_m H^{n-c-2}(X",D_m)$$

soit injectif. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{n-c-3}(W,D) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\wr"'] & H^{n-c-2}(W,F) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\varphi_{n-c-2}"] & H^{n-c-2}(W,N) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\alpha"] & H^{n-c-2}(W,D) \arrow[d, hook] \\
\varprojlim_m H^{n-c-3}(W,D_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^{n-c-2}(W,F/I^mF) \arrow[r] & \varprojlim_m H^{n-c-2}(W,N_m) \arrow[r] & \varprojlim_m H^{n-c-2}(W,D_m)
\end{tikzcd}$$

Comme le système projectif des $H^{n-c-3}(W,D_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler, les lignes de ce diagramme sont exactes. Il en résulte que, pour tout $W \subset W_1$, le morphisme φ''_{n-c-2} est bijectif.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la condition (3.7.2) est satisfaite. Si W est un voisinage ouvert de Y'' dans X'' tel que $W \subset W_0$, les complexes F et G coïncident sur W ; on a donc des isomorphismes

$$H^i(W,F) \simeq H^i(W,G) \quad ,$$

quel que soit i . D'autre part il résulte de la définition de G que le morphisme canonique

$$H^i(X'',G) \longrightarrow H^i(W,G)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. Il suffit donc de montrer que le morphisme

$$H^i(W,G) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X'',K_m)$$

est injectif pour $i = n-c-1$ et que le système projectif des $H^{n-c-2}(X'',K_m)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Pour chaque $m \geq 0$, on considère le diagramme commutatif suivant, dont les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
H_Z^{n-c-2}(X'',J_m) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H^{n-c-2}(X'',J_m) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H^{n-c-2}(X',J_m) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H_Z^{n-c-1}(X'',J_m) \arrow[d, "\xi_m"] \\
H_Z^{n-c-2}(X'',G) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\rho_m"] & H^{n-c-2}(X'',G) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\pi_m"] & H^{n-c-2}(X',G) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\varepsilon_m"] & H_Z^{n-c-1}(X'',G) \arrow[d] \\
H_Z^{n-c-2}(X'',K_m) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H^{n-c-2}(X'',K_m) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H^{n-c-2}(X',K_m) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H_Z^{n-c-1}(X'',K_m) \arrow[d] \\
H_Z^{n-c-1}(X'',J_m) \arrow[r, dash] & H^{n-c-1}(X'',J_m) \arrow[r, dash] & H^{n-c-1}(X',J_m) \arrow[r, dash] & H_Z^{n-c}(X'',J_m)
\end{tikzcd}$$

Pour tout voisinage ouvert V de Y' dans X' , le morphisme canonique

$$\beta_i \; : H^i(X',G) \longrightarrow H^i(V,G)$$

est bijectif pour $i \leq n-c-2$, injectif pour $i = n-c-1$. Soit en effet u un point de $X'-V$. Ou bien u appartient à E et, par définition de G , on a

$$\mathrm{prof}_u G \geq n-c \quad ;$$

ou bien $u \notin E$ et la relation ci-dessus est encore satisfaite d'après (3.7.2). Il en résulte que le conoyau du morphisme ε_m n'est autre que le conoyau P_m du morphisme $\varphi_i^!$. Par hypothèse de récurrence, le système projectif des P_m est nul. Soient R_m le conoyau de π_m et S_m le conoyau de ξ_m. On a vu que le système projectif des $H_Z^{n-c-1}(X'',J_m)$ est nul ; il en résulte d'une part que le système projectif des S_m est nul, d'autre part que le morphisme ξ_m est nul pourvu que m soit assez grand. Compte tenu du diagramme ci-dessus, cette assertion prouve que, pour m assez grand, la suite

$$S_m \longrightarrow R_m \longrightarrow P_m$$

est exacte. On déduit alors de 1.6.2 que le système projectif des R_m est nul et ceci entraîne que le système projectif des $H^{n-c-2}(X'',K_m)$, qui n'est autre que le système projectif des $H^{n-c-2}(X'',F/I^mF)$, satisfait à la condition de Mittag-Leffler.

Pour finir, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H^{n-c-2}_{Z\cap W}(W,G) & \longrightarrow & H^{n-c-2}(W,G) & \longrightarrow & H^{n-c-2}(W',G) \longrightarrow \\
\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\
\varprojlim_m H^{n-c-2}_Z(X'',K_m) & \longrightarrow & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X'',K_m) & \longrightarrow & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X',K_m)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^{n-c-1}_{Z\cap W}(W,G) & \longrightarrow & H^{n-c-1}(W,G) & \longrightarrow & H^{n-c-1}(W',G) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\
\varprojlim_m H^{n-c-1}_Z(X'',K_m) & \longrightarrow & \varprojlim_m H^{n-c-1}(X'',K_m) & \longrightarrow & \varprojlim_m H^{n-c-1}(X',K_m) \ .
\end{array}$$

La première ligne de ce diagramme est exacte et il en est de même de la deuxième car les trois premiers systèmes projectifs qui interviennent satisfont à la condition de Mittag-Leffler. Par hypothèse de récurrence λ est bijectif et ν injectif ; l'injectivité de μ résulte donc du diagramme précédent.

<u>Remarque</u> 3.7.1.- La condition (3.7.1) est équivalente à la suivante :

Pour tout point $y \in Y$, fermé dans sa fibre, pour toute générisation u de y, appartenant à U, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c-1, n-\mathrm{codim}(\overline{\{y\}},\overline{\{u\}})) \ .$$

Il est clair que la condition ci-dessus est une conséquence de (3.7.1) car, si y est un point de Y fermé dans sa fibre et u une générisation de y, on a

$$\deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(g(u)) \leq \mathrm{codim}(\overline{\{y\}},\overline{\{u\}})$$

(EGA IV 5.6.5).

Inversement supposons vérifiée la condition ci-dessus et soit u un point de U tel que $\overline{\{u\}}\cap Y \neq \emptyset$. Si l'on a $\deg \operatorname{tr} k(u)/k(g(u)) \leq c+1$, il résulte de 3.4 que l'on peut trouver un point y de Y fermé dans sa fibre, tel que l'on ait $\operatorname{codim}(\overline{\{y\}},\overline{\{u\}}) \leq c+1$, d'où la relation (3.7.1) en u. Enfin, si l'on a $\deg \operatorname{tr} k(u)/k(g(u)) > c+1$, on peut trouver un point y de $\overline{\{u\}}\cap g^{-1}(g(u))$ tel que $\operatorname{codim}(\overline{\{y\}},\overline{\{u\}}) = \deg \operatorname{tr} k(u)/k(g(u))$ (3.2).

COROLLAIRE 3.8.- Les notations sont celles de 2.8. Alors les conclusions de loc. cit. sont valables si l'on suppose seulement que l'on a

$$\operatorname{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(n-c-1, n-\deg \operatorname{tr} k(u)/k(g(u)) \quad (\text{resp. } \operatorname{prof}_u F \geq n-c)$$

en tout point $u\in U$ tel que $\overline{\{u\}}\cap Y\cap g^{-1}g(u) \neq \emptyset$ (resp. tel que $\overline{\{u\}}\cap Y\cap g^{-1}g(u)$ soit vide).

Si V est un voisinage ouvert de Y dans X, les hypothèses entrainent la relation $\operatorname{prof}_{X-V} F \geq n-c$ (3.2). Par suite le morphisme

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(V,F)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$. Le corollaire résulte donc de 3.7.

THEOREME 3.9.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, ayant un complexe dualisant. Soient $X = S - \{t\}$, n et c des entiers, $c\geq 0$, U un ouvert de X réunion de $c+1$ ouverts affines, Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, défini par un idéal I, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. On suppose S complet pour la topologie I-adique. Soit F un faisceau de modules cohérent sur X tel que, pour tout point $u\in U$ tel que $\overline{\{u\}}\cap Y \neq \emptyset$, on ait

$$(3.9.1) \qquad \operatorname{prof}_u F \geq \operatorname{Inf}(n-c-1, n-\dim\overline{\{u\}}),$$

$\overline{\{u\}}$ désignant l'adhérence de u dans X. Si V est un voisinage ouvert de Y dans X, on considère les morphismes canoniques suivants :

$$\begin{tikzcd} H^i(V,F) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & \varprojlim_m H^i(X,F/I^m F) \\ & H^i(\hat{X},\hat{F}) \arrow[ur, "\theta_i"'] & \end{tikzcd}$$

Alors on peut trouver un voisinage ouvert V_0 de Y dans X tel que, pour tout $V \subset V_0$, les morphismes φ_i, ψ_i, θ_i soient bijectifs pour $i < n-c-1$, injectifs pour $i = n-c-1$.

Les hypothèses de 3.1 relatives au cas local sont satisfaites quand on remplace n par $n-1$. Il en résulte que φ_i, ψ_i, θ_i sont bijectifs pour $i < n-c-2$, injectifs pour $i = n-c-2$. Comme le système projectif des

$H^i(X,F/I^mF)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour tout i (2.9.1), θ_i est un isomorphisme (EGA 0_{III} 13.3.1). Il suffit de montrer que φ_{n-c-2} est surjectif et φ_{n-c-1} injectif.

D'après 3.6, on peut trouver un voisinage ouvert O de Y dans X tel que la relation (3.9.1) soit vérifiée en tout point $u \in U \cap O$. Soit Σ l'ensemble des points u de $U \cap O$ où l'on a

$$\mathrm{prof}_u F < n-c \quad \text{et} \quad \dim \overline{\{u\}} \leq c .$$

D'après 3.5.1), Σ est un ensemble fini. Soit $E = X-O$ et E_1 l'adhérence de Σ. Pour tout point $z \in E \cup E_1$, on a

$$\dim \overline{\{z\}} \leq c .$$

Si u est une générisation immédiate d'un point z de $E \cup E_1$, on a donc

$$\dim \overline{\{u\}} \leq \dim \overline{\{z\}} + 1 \leq c+1 .$$

Si de plus $u \in U$, les hypothèses entraînent la relation

$$\mathrm{prof}_u F \geq n-c-1 .$$

Soit $i : X-(E \cup E_1) \to X$ l'immersion canonique. Les faisceaux $\underline{H}^j_{E \cup E_1} F|U$ sont concentrés sur E pour $j < n-c-1$ et sont cohérents pour $j \leq n-c-1$ (SGA 2 VIII 2.1). Soient G_1 le complexe obtenu en tronquant $Ri_* i^* F$ en degré $\geq n-c-1$ et $a_1 : F \to G_1$ le morphisme canonique. Soient $G \in D^b_{coh}(X)$ un complexe prolongeant $G_1|U$ et $a : F \to G$ un morphisme prolongeant $a_1|U$. Pour tout point $u \in U$, on a

$$\mathrm{prof}_u G \geq \mathrm{Inf}(n-c, n-\dim \overline{\{u\}}) .$$

On peut donc appliquer 2.9 au complexe G. Soient $j : U \to X$ l'immersion canonique et $K = "\varprojlim_m" K_m$ le cône du morphisme $Rj_!(G|U) \to G$. D'après <u>loc. cit.</u>, le morphisme canonique

$$H^i(X,G) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X,G_m)$$

est bijectif pour $i < n-c-1$, injectif pour $i = n-c-1$, et il en est de même quand on remplace X par un voisinage ouvert V de Y, d'après 3.1.

Soient H le cône du morphisme a et $"\varprojlim_m" H_m$ le cône du morphisme $Rj_!(H|U) \to H$. Le système projectif des $H^i(X,H_m)$ est essentiellement constant pour $i < n-c-2$ car la cohomologie de H est concentrée sur $Y \cup E$ en degré $< n-c-2$. Si V est un voisinage ouvert de Y dans X, contenu dans O, le morphisme canonique

$$H^i(V,H) \longrightarrow \varprojlim_m H^i(X,H_m)$$

est bijectif pour $i < n-c-2$, et l'on peut trouver un voisinage ouvert V_0 de Y dans X, contenu dans O, tel que, pour tout $V \subset V_0$, le morphisme

$$H^{n-c-2}(V,H) \longrightarrow \varprojlim_m H^{n-c-2}(X,H_m)$$

soit injectif. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{n-c-3}(V,H) & \longrightarrow & H^{n-c-2}(V,F) & \longrightarrow & H^{n-c-2}(V,G) & \longrightarrow & H^{n-c-2}(V,H) \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-c-2}} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\
\varprojlim_m H^{n-c-3}(V,H_m) & \to & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X,F/I^mF) & \to & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X,K_m) & \to & \varprojlim_m H^{n-c-2}(X,H_m)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^{n-c-1}(V,F) & \longrightarrow & H^{n-c-1}(V,G) & \longrightarrow \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-c-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & \\
\varprojlim_m H^{n-c-1}(X,F/I^mF) & \to & \varprojlim_m H^{n-c-1}(X,K_m) & \longrightarrow
\end{array}$$

Comme tous les systèmes projectifs qui interviennent dans la deuxième ligne satisfont à la condition de Mittag-Leffler (2.9.1), les lignes du diagramme ci-dessus sont exactrs. On a vu que α et β sont bijectifs et γ et δ injectifs. Il en résulte que φ_{n-c-2} est bijectif et φ_{n-c-1} injectif.

COROLLAIRE 2.10.- Reprenons les notations de 2.9 et supposons T réduit au point fermé t. Alors les conclusions de <u>loc. cit.</u> sont valables si l'on suppose seulement que l'on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c-1, n-\dim\overline{\{u\}}) \quad (\text{resp. } \mathrm{prof}_u F \geq n-c)$$

en tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$ (resp. tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$) .

4. Applications

4.0. Soient S un schéma noethérien, $f : X \to S$ un morphisme propre (resp. soit S un schéma local noethérien et X le complémentaire du point fermé de S, resp. soient S un schéma local noethérien, T une partie fermée de S, $f : X \to S-T$ un morphisme propre). Soient U un ouvert de X réunion de $c+1$ ouverts affines sur S, Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, défini par un Idéal I. On suppose que S admet localement un complexe dualisant (resp. et que S est complet pour la topologie I-adique, resp. et que S est complet pour la topologie T-adique). On note $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y.

Soit C la catégorie des faisceaux cohérents sur X, qui satisfont aux conditions suivantes :

a) Pour tout point $u \in U$ tel que l'on ait $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 2 \quad .$$

b) Pour tout point $y \in Y$ fermé dans sa fibre et pour toute genérisation $u \in U$ de y tel que $\mathrm{codim}(\overline{\{y\}}, \overline{\{u\}}) \leq c+1$ (resp. pour tout $y \in Y$ tel que $\delta_t y = 1$ et pour toute générisation $u \in U$ de y telle que $\mathrm{codim}(\overline{\{y\}}, \overline{\{u\}}) \leq c+1$

resp. pour tout point $u \in U$) , on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 1 \text{ , resp. } \geq \mathrm{Inf}(2, c+3-\delta_T u)) .$$

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des faisceaux de modules cohérents $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ et soit φ le foncteur de C dans $\mathcal{C}$ qui, à un faisceau cohérent F , associe son complété formel $\hat{F}$ le long de Y . On a le théorème suivant :

THEOREME 4.1.- Sous les hypothèses de 4.0, le foncteur φ est pleinement fidèle.

Soient en effet F et G deux objets de C et montrons que le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_X(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\hat{F},\hat{G})$$

est bijectif. Soit $H = \underline{\mathrm{Hom}}_X(F,G)$; on a alors un isomorphisme canonique $\hat{H} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{X}}(\hat{F},\hat{G})$ (EGA I 10.8.10). De plus le morphisme canonique

$$H^0(\hat{X},\hat{H}) \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X,F/I^m F)$$

est bijectif. Il suffit donc de montrer qu'il en est de même du morphisme

$$\varphi_0 : H^0(X,H) \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X,H/I^m H) .$$

D'après le lemme 4.1.1 ci-dessous, H satisfait aux mêmes hypothèses de profondeur que F et G . La bijectivité de φ_0 résulte alors de 3.7 (resp. de 3.10, resp. de 2.10).

LEMME 4.1.1.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t , F et G deux faisceaux de $\mathcal{O}_S$-modules cohérents. Si l'on a

$$\mathrm{prof}_t G \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2) ,$$

on a aussi

$$\mathrm{prof}_t(\underline{\mathrm{Hom}}_S(F,G)) \geq 1 \ (\text{resp. } \geq 2) .$$

Soit $i : S-\{t\} \to S$ l'immersion canonique. L'hypothèse se traduit par l'injectivité (resp. la bijectivité) du morphisme canonique $a : G \to i_* i^* G$ Il sffit de montrer que le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_S(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S-\{t\}}(i^*F, i^*G)$$

est injectif (resp. bijectif). Ce dernier s'identifie au morphisme

$$\varphi : \mathrm{Hom}_S(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(F, i_* i^* G)$$

qui, à un élément $u \in \mathrm{Hom}_S(F,G)$, associe $a u$. L'injectivité (resp. la bijectivité de φ résulte alors de celle de a .

COROLLAIRE 4.2.- Soient S un schéma noethérien (resp. un schéma local noethérien) ayant localement un complexe dualisant, $f : X \to S$ un morphisme propre (resp. soit X le complémentaire du point fermé de S). Soient U un ouvert de X réunion de $c+1$ ouverts affines sur S $(c \geq 0)$, Y un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, défini par un idéal I. Supposons que U vérifie la condition (S_2) (EGA IV 5.7.2) et que les composantes irréductibles des fibres de f soient de dimension $\geq c+2$ (resp. que les composantes irréductibles de X soient de dimension $\geq c+2$ et que S soit complet pour la topologie I-adique). Alors la condition $\mathrm{Lef}(X,Y)$ de SGA 2 X 2 est vérifiée.

<u>Remarque</u> 4.2.1.- Les conséquences de la condition $\mathrm{Lef}(X,Y)$ ont été étudiées dans SGA 2 X 2. Rappelons en particulier (loc. cit. X 2.6) que, si Y est connexe, il en est de même de tout voisinage ouvert V de Y, et que le morphisme

$$\pi_1(Y) \to \pi_1(V)$$

est surjectif.

Nous aurons besoin d'un analogue, dans le cas des faisceaux formels, du théorème 4.1. Nous nous bornerons à l'énoncé local 4.4 ci-dessous. Démontrons la proposition préliminaire suivante :

PROPOSITION 4.3.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, ayant un complexe dualisant, I un Idéal de S, Y le sous-schéma fermé de S défini par I. On suppose l'ouvert $U = X-Y$ réunion de $c+1$ ouverts affines $(c \geq 0)$. Soient n un entier, F un faisceau de modules cohérent sur S tel que l'on ait

$$\mathrm{prof}_t F \geq n-c \quad \text{et} \quad \mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(n-c, n+1-\delta_t u)$$

en tout point $u \in U$. Alors on a

$$\mathrm{prof}_t(\text{"}\varprojlim_m\text{"}\ F/I^m F) \geq n-c \quad .$$

On applique 2.7 à l'immersion ouverte $i : U \to S$, à la partie fermée $T = \{t\}$, et à l'entier n. Le cône du morphisme $Ri_!(F|U) \to F$ n'est autre que $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\ (F/I^m F)$; on voit donc que le morphisme

$$H^i_t(X,F) \longrightarrow H^i_t(X, \text{"}\varprojlim_m\text{"}\ F/I^m F)$$

est bijectif pour $i < n-c$, injectif pour $i = n-c$. L'hypothèse $\mathrm{prof}_t F \geq n-c$ se traduit par la relation

$$H^i_t(X,F) = 0 \quad \text{pour } i < n-c \ .$$

Ceci montre que l'on a aussi

$$H^i_t(X, \text{"}\varprojlim_m\text{"}\ F/I^m F) = 0 \quad \text{pour } i < n-c \ .$$

PROPOSITION 4.4.- Soient S un schéma local noethérien complet, de point fermé t , $S' = S-\{t\}$, I et J deux idéaux de S , avec $J \subset I$. Soit T une partie fermée de $V(J)$ telle que $T \cap V(I) = \{t\}$, et soit $X = S-T$, $Y = V(I) \cap X$, $Z = V(J) \cap X$. On suppose l'ouvert $U = S'-Y$ réunion de $c+1$ ouverts affines et l'ouvert $V = X-Z$ affine. On note $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y , $\hat{X}^Z$ le complété formel de X le long de Z , $p : \hat{X} \to \hat{X}^Z$ le morphisme canonique. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}^Z$ tel que, pour tout point x de $\hat{X}^Z$, pour tout point v de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X}^Z,x}$, on ait

$$(*) \qquad \operatorname{prof}_v \mathcal{F}_x \geq \operatorname{Inf}(2, c+4-\dim\overline{\{v\}}-\delta_t x) .$$

Alors le morphisme canonique

$$H^0(\hat{X}^Z, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\hat{X}, p^*\mathcal{F})$$

est bijectif.

Soient x un point de $\hat{X}^Z$ et v un point de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X}^Z,x}$. Si l'on a $\dim\overline{\{v\}} \geq 1$, on a, d'après (*),

$$\operatorname{prof}_v \mathcal{F}_x \geq \operatorname{Inf}(2, c+3-\delta_t x)+1-\dim\overline{\{v\}} .$$

On peut alors appliquer 4.3, dans le cas $c=0$, au faisceau $\mathcal{F}_x$ et à l'entier $n = \operatorname{Inf}(2, c+3-\delta_t u)$. On en déduit la relation

$$(**) \qquad \operatorname{prof}_x(\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \mathcal{F}/J^m\mathcal{F}) \geq \operatorname{Inf}(2, c+3-\delta_t x) ,$$

en tout point $x \in \hat{X}^Z$.

Nous allons appliquer 2.10 au système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \mathcal{F}/J^m\mathcal{F}$ et à la partie fermée Y . Construisons un prolongement de $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \mathcal{F}/J^m\mathcal{F}$ à S' de la façon suivante. Pour tout $m \geq 0$, soit H_m le quotient de $\mathcal{F}/J^m\mathcal{F}$ par le plus grand sous-module de support une partie fermée dont tous les points maximaux x satisfont à la relation $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap T, \overline{\{x\}}) \leq 1$. Si x est une générisation immédiate d'un point τ de T , on a $\delta_t x \leq \delta_t \tau+1$; comme $T \cap V(I) = \{t\}$, on a $\delta_t \tau \leq c+1$ (3.2). Par suite on a $\delta_t x \leq c+2$ et, d'après (**), on a

$$\operatorname{prof}_x(\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \mathcal{F}/J^m\mathcal{F}) \geq 1 .$$

Il en résulte que les systèmes projectifs $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, H_m$ et $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \mathcal{F}/J^m\mathcal{F}$ sont isomorphes. D'autre part on a

$$\operatorname{prof}_x H_m \geq 1$$

en tout point x tel que $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap T, \overline{\{x\}}) = 1$. Par suite, si j est l'immersion canonique de X dans S' , le faisceau $\overline{H}_m = j_* H_m$ est cohérent. Le système projectif $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \overline{H}_m$ est un prolongement de $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \mathcal{F}/J^m\mathcal{F}$ sur S' , tel que l'on ait

$$\operatorname{prof}_u(\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \overline{H}_m) \geq \operatorname{Inf}(2, c+3-\delta_t u)$$

en tout point u appartenant à S' et a fortiori en tout point $u \in S'-Y$.

Les hypothèses de 2.10 sont donc satisfaites pour $"\varprojlim_m" \bar{H}_m$ et pour l'entier $n = c+2$. Soient i l'immersion ouverte de $S'-Y$ dans S' et $i' : U \cap X \to X$ sa restriction. Le système projectif $Ri'_!("\varprojlim_m"(\mathfrak{F}/J^m\mathfrak{F})|(U \cap X))$ est isomorphe à $"\varprojlim_m" I^m\mathfrak{F}/J^m\mathfrak{F}$. Par suite le cône du morphisme canonique

$$Ri'_!("\varprojlim_m"(\mathfrak{F}/J^m\mathfrak{F})|(U \cap X)) \longrightarrow "\varprojlim_m" \mathfrak{F}/J^m\mathfrak{F}$$

donc aussi du morphisme canonique

$$Ri_!("\varprojlim_m" \bar{H}_m) \longrightarrow "\varprojlim_m" \bar{H}_m \quad ,$$

n'est autre que $"\varprojlim_m" \mathfrak{F}/I^m\mathfrak{F}$. D'après 2.10, le morphisme canonique

$$\varphi : H^0(S', \varprojlim_m \bar{H}_m) \longrightarrow H^0(S', \varprojlim_m \mathfrak{F}/I^m\mathfrak{F})$$

est bijectif. On a des isomorphismes

$$H^0(S', \varprojlim_m \bar{H}_m) \simeq \varprojlim_m H^0(S', \bar{H}_m) \simeq \varprojlim_m H^0(X, H_m) \simeq H^0(X, \varprojlim_m \mathfrak{F}/J^m\mathfrak{F}) \ .$$

Par suite le morphisme φ s'identifie au morphisme canonique

$$H^0(\hat{X}^Z, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(\hat{X}, p^*\mathfrak{F}) \quad ,$$

ce qui prouve que ce morphisme est bijectif.

CHAPITRE II

Prolongement des hypothèses de profondeur.

Soient X un schéma noethérien, Y une partie fermée de X, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y, $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$. Les faisceaux $\mathcal{F}$ qui interviennent dans le théorème d'algébrisation (IV 1.4 et 2.8) satisfont à des hypothèses de profondeur "aux points qui n'appartiennent pas à Y". La technique utilisée pour algébriser un faisceau formel $\mathcal{F}$ nécessite des hypothèses de profondeur 3 aux points fermés de Y. La proposition 1.5 ci-dessous permet de se ramner à ce cas, du moins si $\mathcal{F}$ vérifie la condition (S_2). La réduction au cas où cette dernière condition est satisfaite se fait par "décomposition primaire" (2).

1. Prolongement de la propriété d'être de Cohen-Macaulay

Les résultats de ce numéro sont basés sur la classification des modules localement libres dans le complémentaire du point fermé d'un anneau local régulier ([8] 7.4). Démontrons d'abord le lemme suivant qui permet de se ramener au cas d'un anneau régulier.

LEMME 1.1.- Soit A un anneau local noethérien complet de dimension n. On peut trouver un anneau local régulier complet B de dimension $n+1$, un quotient C de B et un homomorphisme local, fini, injectif,

$$\varphi : C \to A .$$

Soit k le corps résiduel de A et $p\geq 0$ sa caractéristique. D'après EGA IV 19.8.6, on peut trouver un anneau de Cohen W de corps résiduel k et un homomorphisme local

$$\theta : W \to A ,$$

induisant l'identité sur k. Soient $B' = W[[X_1,\dots,X_n]]$ un anneau de séries formelles à n variables sur W et soit $x_1,\dots,x_n$ un système de paramètres de A. Comme A est complet, on peut définir un homomorphisme local

$$\psi' : B' \to A$$

qui coïncide avec θ sur W, tel que l'on ait $\psi'(X_i) = x_i$ pour $i \in [1,n]$. Soit C l'image de ψ' et

$$\varphi : C \to A$$

le morphisme déduit de ψ' par passage au quotient. Comme C est un anneau local noethérien complet, il suffit, pour prouver que A est fini sur C, de montrer que **A** est un C-module quasi-fini (EGA 0 7.4.3). Soit m l'idéal maximal de C. Comme C et **A** ont même corps rédisuel, il suffit de montrer que m**A** est un idéal de définition de **A**. Or m**A** est l'idéal engendré par $p, x_1,\ldots,x_n$, donc contient un système de paramètres. Enfin B' est de dimension $n+1$ dans le cas où **A** est d'inégales caractéristiques ; on prend alors $B = B'$. Si $\dim B' = n$, il suffit de prendre $B = B'[[X]]$.

LEMME 1.2.- Soient B un anneau local régulier complet de dimension $n, X_1,\ldots,X_n$ un système régulier de paramètres de B, S le spectre de B. Soit $g : Z \to S$ le schéma obtenu en faisant éclater l'idéal $I=(X_1,\ldots,X_n)$. Alors le schéma Z est régulier. Soit r un entier ≥ 1. Posons

$$P = B^n/(X_1^r, X_2,\ldots,X_n)$$

et soit Q le quotient de $g^*\tilde{P}$ par son sous-module de torsion. Alors on a les conclusions suivantes :

1) Si l'on a $r = 1$, Q est localement libre.

2) Si l'on a $r>1$, il existe un unique point z de Z tel que Q soit localement libre dans $Z-\{z\}$. Le point z ne dépend pas de r. Enfin on peut trouver un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{Z,z}$, $z_1,\ldots,z_n$, tel que l'on ait un isomorphisme

$$Q_z \simeq \mathcal{O}^n_{Z,z}/(z_1^{r-1}, z_2,\ldots,z_n) .$$

Le fait que Z soit régulier résulte de EGA IV 19.4.3 et 19.4.4. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_S^n \longrightarrow P \longrightarrow 0 ,$$

où l'on a posé $\varphi(1) = (X_1^r, X_2,\ldots,X_n)$. On en déduit, par image inverse par g, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_Z^n \longrightarrow g^*\tilde{P} \longrightarrow 0 ,$$

l'exactitude à gauche de cette suite résultant du fait que $\operatorname{Ker}\psi$ est concentré sur la fibre fermée, donc est un module de torsion.

Le $\mathcal{O}_Z$-module $\mathcal{O}_Z(1)$ n'est autre que $I\mathcal{O}_Z$; on note $x_1,\ldots,x_n$ les sections globales de $\mathcal{O}_Z(1)$ images inverses respectives de $X_1,\ldots,X_n$; si $j : \mathcal{O}_Z(1) \to \mathcal{O}_Z$ est l'image inverse de l'injection $I \to \mathcal{O}_S$, on pose $z_i = j(x_i)$. Soit

$$\theta : \mathcal{O}_Z(-1) \to \mathcal{O}_Z^n$$

le morphisme déduit, par tensorisation par $\mathcal{O}_Z(-1)$, du morphisme de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_Z(1)^n$ qui envoie 1 sur $(z_1^{r-1}x_1, x_2,\ldots,x_n)$ et k le morphisme déduit de j par tensoriation par $\mathcal{O}_Z(-1)$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Z \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "k"'] & & \mathcal{O}_Z^n \\ & \mathcal{O}_Z(-1) \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

On en déduit la relation $\operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Im}\theta$. Comme $\operatorname{Im}\theta/\operatorname{im}\psi$ est concentré sur la fibre fermée, c'est un module de torsion. Considérons le faisceau de modules $Q' = \mathcal{O}_Z^n/\operatorname{Im}\theta$. On va montrer que Q' est sans torsion ; il en résultera que $Q = Q'$ et que Q' satisfait aux conditions 1) et 2) de l'énoncé. La restriction Q_i de Q à l'ouvert $D^+(x_i)$ est le quotient de $\mathcal{O}_{Z_i}^n$ par l'élément $(Z_1^{r-1}x_1/x_i, x_2/x_i, \ldots, x_n/x_i)$. Pour $i>1$, Q_i est libre et il en est de même pour $i=1$ si l'on a $r=1$, d'où 1). Considérons enfin Q_1 dans le cas $r>1$. L'idéal de l'anneau des sections globales de $D^+(x_1)$, engendré par Z_1 , $x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1$, est maximal. Par suite il y a un seul point $z \in D^+(x_1)$ où Q_1 n'est pas libre. Comme $\dim \mathcal{O}_{Z,z} = n$, les éléments $Z_1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1$ forment un système régulier de paramètres de l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,z}$, d'où 2).

PROPOSITION 1.3.- Soit **A** un anneau local régulier complet de dimension $n \geq 3$. Soit M un **A**-module de type fini, de profondeur $\geq n-1$, tel que $F = \widetilde{M}$ soit localement libre dans le complémentaire du point fermé de Spec **A** . Alors on peut trouver un éclatement $f : X \to \operatorname{Spec} \mathbf{A}$ d'un idéal primaire de **A** , tel que X soit régulier et tel que le quotient de f^*F par sons sous-module de torsion soit localement libre.

1) Cas où **A** est un anneau d'égales caractéristiques.

Si k est le corps résiduel de **A** , on a un isomorphisme

$$\mathbf{A} \simeq k[[X_1, \ldots, X_n]]$$

(EGA IV 19.6.4). Comme on a $\operatorname{prof} \mathbf{M} \geq n-1$, donc $\operatorname{dim.proj}.\mathbf{M} \leq 1$ (EGA IV 17.3.4), on peut trouver des modules libres de type fini L_o et L_1 et une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to L_1 \to L_o \to M \to 0 .$$

Comme M est localement libre dans le complémentaire du point fermé de Spec **A** , $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A})$ est un module de longueur finie ; si m est l'idéal maximal de **A** , on peut donc trouver un entier r tel que l'on ait

$$(**) \qquad m^r \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A}) = 0 .$$

Définissons un morphisme de k-algèbres

$$\psi : B = [[X_1, \ldots, X_n]] \to \mathbf{A}$$

en posant $\psi(X_i) = X_i^r$ pour $1 \leq i \leq n$. Le morphisme ψ est fini, injectif et **A** est un B-module libre. Soient $S = \mathrm{Spec}\ A$, $R = \mathrm{Spec}\ B$, et soient s le point fermé de S , t le point fermé de B et $\varphi : S \to R$ le morphisme déduit de ψ . Si $N = M_{[\psi]}$ et si $G = \widetilde{N}$, on a $G = \varphi_* F$. La restriction de G à l'ouvert $R-\{t\}$ est localement libre et l'on a

$$\mathrm{prof}_B N = \mathrm{prof}_A M \geq n-1$$

(EGA IV 6.4.2).

D'après le lemme 1.3.1 ci-dessous, on a un isomorphisme

$$i : \mathrm{Ext}^1_B(N,B) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(M,A)_{[\psi]} .$$

Si n est l'idéal maximal de B , la relation (**) entraîne alors la relation

$$n\ \mathrm{Ext}^1_B(N,B) = 0 .$$

Cela revient à dire que $\mathrm{Ext}^1_B(N,B)$ est un module sur le corps résiduel k de B ; si l est sa longueur, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_B(N,B) \simeq k^l .$$

Soit $P = B^n/(X_1,\ldots,X_n)$; d'après le lemme 1.3.2 ci-dessous, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_B(P^l,B) \simeq k^l .$$

On peut donc appliquer [8] 7.4 à N et à P^l . On note que N et P^l sont reflexifs et que l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_B(N,B) \simeq \mathrm{Ext}^1_B(P^l,B) .$$

D'après <u>loc. cit.</u>, on peut trouver des entiers m et $m' \geq 0$, tels que l'on ait un isomorphisme $N^* \oplus B^m \simeq P^{l*} \oplus B^{m'}$, d'où un isomorphisme

$$N \oplus B^m \simeq P^l \oplus B^{m'} .$$

Soit $g : Z \to R$ le schéma obtenu en faisant éclater l'idéal maximal n . D'après 1.2., Z est régulier et le quotient de $g^*\widetilde{P}$ par son sous-module de torsion est localement libre ; il en est donc de même du quotient de g^*G par son sous-module de torsion.

On considère alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta} & Z \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ S & \xrightarrow{\varphi} & R \end{array} .$$

Comme φ est fidèlement plat, X se déduit de S en faisant éclater l'idéal $\varphi^{-1}(n)$. Comme φ est fini, on a un isormorphisme canonique

$$g^*\varphi_*F \simeq \theta_* f^* F .$$

Si T (resp. T') désigne le sous-module de torsion de f^*F (resp. de $g^*\varphi_*F$), on a un isomorphisme $\theta_*T \simeq T'$ car θ est fini, surjectif. Par suite on a

$$\theta_*(f^*F/T) \simeq g^*\varphi_*F/T' .$$

Comme $g^*\varphi_*F/T'$ est localement libre, il en est de même de f^*F/T.

2) Cas où $\mathbf{A}$ est un anneau d'inégales caractéristiques.

Soient k le corps résiduel de $\mathbf{A}$, p sa caractéristique. On peut trouver un anneau de Cohen W, un homomorphisme local, fini, injectif, qui induit un isomorphisme sur les corps résiduels,

$$\psi' : \mathbf{A}' = W[[X_1,\dots,X_{n-1}]] \to \mathbf{A}$$

(EGA IV 19.8.8 (ii)). Comme $\mathbf{A}$ est régulier, $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{A}'$-module de Cohen-Macaulay donc est libre sur $\mathbf{A}'$. Si m est l'idéal maximal de $\mathbf{A}$, on voit, comme dans 1), qu'il existe un entier r tel que l'on ait

$$m^r \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M,\mathbf{A}) = 0 .$$

Considérons le morphisme de W-algèbres

$$\psi'' : B = W[[X_1,\dots,X_{n-1}]] \to \mathbf{A}'$$

défini par $\psi''(X_i) = X_i^r$ et posons $\psi = \psi'\,\psi''$. Si $N = M_{[\psi]}$, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{A}}(M,\mathbf{A})_{[\psi]} \simeq \operatorname{Ext}^1_B(N,B) ;$$

par suite, si $\mathfrak{A}$ est l'idéal engendré par $p^r, X_1,\dots,X_{n-1}$, on a

$$\mathfrak{A}\,\operatorname{Ext}^1_B(N,B) = 0 .$$

Ceci montre que $\operatorname{Ext}^1_B(N,B)$ est un module de torsion de type fini sur W. D'après le théorème de structure des modules de torsion de type fini sur les anneaux principaux ([3] Algèbre ch. VII § 4 n° 2), on peut trouver des entiers $r_1 \geq \dots \geq r_m$ tels que l'on ait un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}^1_B(N,B) \simeq W/p^{r_1} \oplus \dots \oplus W/p^{r_m} .$$

Si l'on pose $P_i = B^n/(p^{r_i}, X_1,\dots,X_{n-1})$, il résulte de 1.3.2 ci-dessous que l'on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}^1_B(P_i,B) \simeq W/p^{r_i} .$$

Par suite, si $P = \bigoplus_{1\leq i\leq m} P_i$, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}^1_B(P,B) \simeq \operatorname{Ext}^1_B(N,B) .$$

D'après [8] 7.4, on peut trouver des entiers m et $m'\geq 0$ tels que l'on ait un isomorphisme

$$N \oplus B^m \simeq P \oplus B^{m'} .$$

Soit $f : X \to R$ le schéma obtenu en faisant éclater l'idéal maximal de B. D'après 1.2, X est régulier, le quotient de $f^*\widetilde{P}$ par son sous-module de torsion est localement libre en dehors d'un point fermé x, on peut trouver des éléments $x_1,\dots,x_{n-1}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ tels que $p,x_1,\dots,x_{n-1}$ forment un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ et que l'on ait un isomorphisme

$$(f^*\widetilde{P}) \simeq \bigoplus_{1\leq i\leq m} \mathcal{O}^n_{X,x}/(p^{r_i-1},x_1,\dots,x_{n-1}) .$$

On fait de nouveau éclater l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$; au bout de r_1 opérations, on obtient un éclatement d'un idéal primaire de R (EGA III 2.3.6),

$$g : Z \to R ,$$

tel que Z soit régulier et tel que le quotient de $g^*\widetilde{P}$ par son sous-module de torsion soit localement libre ; il en est alors de même du quotient de $g^*\widetilde{N}$ par son sous-module de torsion. La démonstration s'échève comme dans 1).

LEMME 1.3.1.- Soient R et S deux schémas locaux noethériens réguliers, $\varphi : S \to R$ un morphisme fini, F un faisceau de modules cohérent sur S. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a des isomorphismes

$$\varphi_*(\mathrm{Ext}^i_S(F,\mathcal{O}_S)) \simeq \mathrm{Ext}^i_R(\varphi_*F,\mathcal{O}_R) .$$

Comme R et S sont réguliers, $\mathcal{O}_R$ et $\mathcal{O}_S$ sont des complexes dualisants sur R et S respectivement et l'on a un isomorphisme $\varphi^!\mathcal{O}_R \simeq \mathcal{O}_S$. D'après le théorème de dualité pour un morphisme fini ([6] III 6.7), on a un isomorphisme

$$R\,\varphi_*\underline{\underline{\mathrm{RHom}}}_S(F,\varphi^!\mathcal{O}_R) \simeq \underline{\underline{\mathrm{RHom}}}_S(R\,\varphi_*F,\mathcal{O}_R) .$$

Le lemme résulte de cet isomorphisme, compte tenu du fait que le foncteur φ_* est exact.

LEMME 1.3.2.- Soient B un anneau intègre, $X_1,\dots,X_n$ des éléments non nuls de B, et soit P le B-module $B^n/(X_1,\dots,X_n)$. Alors on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_B(P,B) \simeq B/(X_1,\dots,X_n) .$$

On considère la suite exacte de B-modules

$$0 \to B \xrightarrow{i} B^n \to P \to 0 ,$$

où i est l'injection définie par $i(1) = (X_1,\dots,X_n)$. On en déduit, en appliquant le foncteur Hom, la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_B(B^n,B) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_B(B,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(P,B) \longrightarrow 0 .$$

Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de la base canonique de B^n , $j(e_i)$ est l'homothétie de B de rapport X_i . Cela prouve que $\mathrm{Ext}^1_B(P,B)$ est isomorphe au quotient de B par l'idéal engendré par $X_1,\dots,X_n$.

PROPOSITION 1.4.- Soit S un schéma local immersible dans un schéma régulier. On suppose S équidimensionnel de dimension $n\geq 3$. Soient t le point fermé de S , $U = S-\{t\}$ et soit F un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules cohérent de support S , vérifiant la propriété (S_{n-1}) (EGA IV 5.7.2). Alors on peut trouver un morphisme propre $f : X \to S$ et un faisceau f-ample L , tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

a) Le morphisme f induit un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$ et $L/f^{-1}(U)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_U$.

b) Le faisceau f^*F est de Cohen-Macaulay.

c) Toutes les composantes irréductibles de X sont de dimension n .

1) <u>Cas où S est un schéma local complet</u>.

D'après 1.1, on peut trouver un schéma local régulier complet R de dimension $n+1$, un sous-schéma fermé S' de R et un morphisme local, fini, surjectif, $i : S \to S'$. Soient $j : S' \to R$ l'immersion canonique, $k = ji$. Ecrivons k_*F comme quotient d'un $\mathcal{O}_R$-Module libre L_o , d'où une suite exacte

$$(*)\qquad 0 \to K \to L_o \to k_*F \to 0 .$$

La restriction de K au complémentaire du point fermé s de R est localement libre. Soient en effet x un point de S distinct de t et $y = k(x)$. On a, par hypothèse,

$$\mathrm{prof}_x F = \dim \mathcal{O}_{S,x} = \dim \mathcal{O}_{S',i(x)} = \dim \mathcal{O}_{R,y} - 1 .$$

D'après EGA IV 16.4.8 et 17.3.4, on a

$$\mathrm{prof}_y K = \dim \mathcal{O}_{R,y} \quad ;$$

cette relation montre que K est localement libre en tout point $k(x)$, $x \neq t$; il en est de même en un point qui n'appartient pas à l'image de k car, en un tel point, $k_*F = 0$.

D'après 1.3, on peut trouver un éclatement $g : Z \to R$ d'un idéal primaire I de $\mathcal{O}_R$ tel que Z soit régulier et le quotient de g^*k_*K par son sous-module de torsion localement libre. On considère le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ S \arrow[r, "k"] & R \end{tikzcd} .$$

Si V est le complémentaire du point fermé de R, le morphisme g induit un isomorphisme $g^{-1}(V) \simeq V$; le morphisme k étant fini, on a $k^{-1}(k(t)) = t$, et par suite f induit un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$. Le faisceau $H = g^*I$ est un faisceau g-ample (EGA II 8.1.7) ; si l'on pose $L = m^*H$, le faisceau L est un faisceau f-ample tel que l'on ait

$$L|f^{-1}(U) \simeq \mathcal{O}_U ,$$

d'où la condition a).

La partie fermée $k(S)$ est définie par l'annulation d'une section globale de R ; il en est donc de même de $m(X)$ et, comme Z est de Cohen-Macaulay, les composantes irréductibles de $m(X)$ sont de dimension n. Il en est donc de même des composantes irréductibles de X, d'où la condition c).

On déduit de (*) la suite exacte

$$g^*K \xrightarrow{a} g^*L_0 \longrightarrow g^*k_*F \longrightarrow 0 .$$

Comme le noyau de a est concentré sur la fibre fermée de g, l'image L_1 de a n'est autre que le quotient de g^*K par son sous-module de torsion donc est localement libre. Comme Z est régulier de dimension $n+1$, il en résulte que g^*k_*F vérifie (S_n). On a un isomorphisme $g^*k_*F \simeq m_*f^*F$ et le support de ce faisceau est de dimension n ; par suite m_*f^*F, donc aussi f^*F est de Cohen-Macaulay.

2) <u>Cas Général</u>.

Soient $\hat{S}$ le complété de S, $\varphi : \hat{S} \to S$ le morphisme canonique, $U_{\hat{S}}$ l'image inverse de U dans S. Les hypothèses sont conservées quand on remplace S par $\hat{S}$ et F par φ^*F car S est formellement équidimensionnel (EGA IV 7.1.10) et φ de Cohen-Macaulay ([6] V 10). D'après 1), on peut trouver un morphisme propre $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{S}$, induisant un isomorphisme $\hat{f}^{-1}(U_{\hat{S}}) \simeq U_{\hat{S}}$, un faisceau $\hat{f}$-ample $\hat{L}$ tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{L}|\hat{f}^{-1}(\mathcal{O}_{U_{\hat{S}}}) \simeq \mathcal{O}_{U_{\hat{S}}}$, tels que $\hat{f}^*\varphi^*F$ soit de Cohen-Macaulay. D'après 1.6 ci-dessous, $\hat{f}$ provient par image inverse par φ d'un morphisme propre $f : X \to S$ tel que $f^{-1}(U) \simeq U$ et $\hat{L}$ est image inverse d'un faisceau f-ample L tel que $L|U \simeq \mathcal{O}_U$. Comme le morphisme φ est fidèlement plat, f^*F est de Cohen-Macaulay (EGA IV 6.4.2).

LEMME 1.6.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, $U = S-\{t\}$, $\hat{S}$ le complété de S, $\varphi : \hat{S} \to S$ le morphisme canonique, $U_{\hat{S}} = \varphi^{-1}(U)$. Soient $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{S}$ un morphisme propre, induisant un isomorphisme $\hat{f}^{-1}(U_{\hat{S}}) \simeq U_{\hat{S}}$, $\hat{L}$ un faisceau $\hat{f}$-ample tel que l'on ait $\hat{L}|f^{-1}(U_{\hat{S}}) \simeq \mathcal{O}_{U_{\hat{S}}}$. Alors on peut trouver un morphisme propre $f : X \to S$ et un S-isomorphisme $\hat{X} \simeq X \times_S \hat{S}$, un faisceau f-ample L dont l'image inverse sur $\hat{X}$ soit isomorphe à $\hat{L}$. De plus f induit un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$ et $L|U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_U$.

Si l'on pose $\hat{\mathcal{S}} = \bigoplus_{n\geq 0} \hat{f}_*\hat{L}^{\otimes n}$, on a un isomorphisme

$$r : \hat{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Proj}\ \hat{\mathcal{S}}$$

(EGA II 4.6.3 et 5.4.4). D'après [2] 2.6, on peut trouver, pour chaque $n\geq 0$, un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent M_n , un isomorphisme $i_n : M_n|U \simeq \mathcal{O}_X$ et un isomorphisme du complété $\hat{M}_n \simeq \hat{f}_*\hat{L}^{\otimes n}$. On voit de même que

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$$

est muni d'une structure de $\mathcal{O}_S$-Algèbre graduée telle que $\mathcal{S} \otimes_S \hat{S}$ soit isomorphe à $\hat{\mathcal{S}}$. Si l'on pose $X = \mathrm{Proj}\ \mathcal{S}$, on a

$$X \times_S \hat{S} \simeq \mathrm{Proj}\ \hat{\mathcal{S}}$$

(EGA II 2.8.10). Soit $\psi : \hat{X} \to X$ la projection canonique. Si $L = \mathcal{O}_X(1)$, on a des isomorphismes $\psi^* L \simeq \mathcal{O}_X(1) \simeq \hat{L}$ (EGA II 4.6.3.1). D'après EGA IV 2.7.1 et 2.7.2, le morphisme f est propre ; il induit un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$; le faisceau L est f-ample tel que l'on ait $L|U \simeq \mathcal{O}_U$.

2. "Décomposition primaire" des faisceaux formels cohérents

2.1.- Soient A un anneau noethérien, M un A-module de type fini ; il existe un unique sous-A-module N de M dont le support ne contient aucun point maximal du support de M , tel que M/N n'ait pas de composantes immergées. Il existe en effet un plus grand sous-module N de M dont le support ne contient aucun point maximal du support de M . Montrons que M/N n'a pas de composantes immergées. Si x est un point de $\mathrm{Spec}\ A$ associé à M/N , il existe un sous-module $\overline{P}$ de M/N , de support $\overline{\{x\}}$; l'image inverse P de $\overline{P}$ dans M est un sous-module contenant strictement N ; vu la définition de N , cela entraîne que x est un point maximal du support de M , d'où le fait que M/N n'a pas de composantes immergées.

On dit dans ce qui suit que N est le sous-module immergé de M .

LEMME 2.1.1.- Soient $A \to B$ un morphisme plat d'anneaux noethériens. Si M est un A-module de type fini, N le sous-module immergé de M , et si les fibres du morphisme $f : \mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$ vérifient la propriété (S_1) , $N \otimes_A B$ est le sous-module immergé de $M \otimes_A B$. Inversement, supposons f fidèlement plat et soit N un sous-module de M tel que $N \otimes_A B$ soit le sous-module immergé de $M \otimes_A B$. Alors N est le sous-module immergé de M .

Soit en effet S (resp. S') le support de M (resp. de N) . Le support de $M \otimes_A B$ (resp. de $N \otimes_A B$) est $f^{-1}(S)$ (resp. $f^{-1}(S')$) . Un point maximal de $f^{-1}(S)$ se projette en un point maximal de S (EGA IV 2.3.4). Par suite

$f^{-1}(S')$ ne contient aucun point maximal de $f^{-1}(S)$. Le sous-module immergé de $M \otimes_A B$ est alors $N \otimes_A B$ car $M \otimes_A B/N \otimes_A B$ n'a pas de composantes immergées (EGA IV 6.4.1). Inversement, si $N \otimes_A B$ est le sous-module immergé de $M \otimes_A B$, M/N n'a pas de composantes immergées d'après loc. cit. et le support de N ne contient aucun point maximal du support de M ; N est donc le sous-module immergé de M .

2.1.2.- Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\mathfrak{X}$. Si V est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, on note $\mathfrak{X}_V$ le schéma $\operatorname{Spec} \Gamma(V,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, $\mathfrak{F}_V$ le faisceau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_V}$-modules $\Gamma(V,\mathfrak{F})^{\sim}$, etc. Si W est un ouvert affine tel que $W \subset V$, le morphisme de restriction $\Gamma(V,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(W,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ permet de définir un morphisme

$$\varphi_{V,W} : \mathfrak{X}_W \to \mathfrak{X}_V .$$

On a un isomorphisme canonique $\varphi^*_{V,W}(\mathfrak{F}_V) \simeq \mathfrak{F}_W$. De même, pour tout point $x \in V$, on a un morphisme canonique

$$\varphi_{V,x} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \to \mathfrak{X}_V$$

et la fibre $\mathfrak{F}_x$ de $\mathfrak{F}$ en x est canoniquement isomorphe à $\varphi^*_{V,x}(\mathfrak{F}_V)$. Les morphismes $\varphi_{V,x}$ et $\varphi_{V,W}$ sont plats ([4] ch. III § 5 th. 1).

Supposons que V puisse se réaliser comme sous-schéma fermé d'un schéma régulier. D'après [6] ch. V § 10 , les fibres formelles d'un schéma local régulier sont de Cohen-Macaulay ; il en résulte, compte tenu de EGA IV 6.6.1, que les morphismes $\varphi_{V,W}$ et $\varphi_{V,x}$ sont de Cohen-Macaulay.

PROPOSITION 2.2.- Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, localement immersible dans un schéma formel régulier. Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\mathfrak{X}$. Alors il existe un unique sous-faisceau $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$ tel que, pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{G}_V$ soit le sous-faisceau immergé de $\mathfrak{F}_V$. On dira que $\mathfrak{G}$ est le sous-faisceau immergé de $\mathfrak{F}$.

Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines V_α tel que chaque V_α soit un sous-schéma formel d'un schéma formel affine régulier. Chaque $\mathfrak{X}_{V_\alpha}$ est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier ; donc, si V est un ouvert affine contenu dans V_α , le morphisme $\varphi_{V_\alpha,V}$ est de Cohen-Macaulay (2.1.2). Soit $\mathfrak{G}_{V_\alpha}$ le sous-faisceau immergé de $\mathfrak{F}_{V_\alpha}$; d'après 2.1.1, $\varphi^*_{V_\alpha,V}\mathfrak{G}_{V_\alpha}$ est le sous-faisceau immergé de $\mathfrak{F}_V$. Par suite les $\mathfrak{G}_{V_\alpha}$ se recollent et définissent un faisceau $\mathfrak{G}$ qui a la propriété cherchée.

PROPOSITION 2.3.- Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, localement immersible dans un schéma formel régulier. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\mathfrak{X}$. On peut trouver un ensemble fini de faisceaux cohérents $(\mathcal{F}_i)_{o\leq i\leq n}$ et un monomorphisme

$$\mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{o\leq i\leq n} \mathcal{F}_i \ ,$$

tels que la condition suivante soit satisfaite :

Pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{F}_{iV}$ n'a pas de composantes immergées et a pour seuls points associés des points associés à $\mathcal{F}_V$.

Soit $\mathcal{G}$ le sous-faisceau immergé de $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{a}$ l'annulateur de $\mathcal{G}$. On peut trouver un entier $p>0$ tel que l'on ait

$$\mathcal{G} \cap \mathfrak{a}^p \mathcal{F} = 0 \ .$$

On se ramène en effet au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine Spf A ; $\mathcal{F}$ est alors de la forme M^{Δ} , où M est un A-module de type fini (EGA I 10.10.5), et l'assertion résulte du lemme d'Artin-Riesz, appliqué à M . On a alors un morphisme injectif

$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{G} \oplus \mathcal{F}/\mathfrak{a}^p\mathcal{F} \ .$$

Soient $\mathcal{F}_o = \mathcal{F}/\mathcal{G}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/\mathfrak{a}^p\mathcal{F}$. Pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{G}_V$ est le sous-faisceau immergé de $\mathcal{F}_V$; par suite $\mathcal{F}_{oV} = \mathcal{F}_V/\mathcal{G}_V$ n'a pas de composantes immergées et a pour seuls points associés des points maximaux du support de $\mathcal{F}_V$. Un point maximal du support de $\mathcal{F}'$ est un point maximal du support de $\mathcal{G}$ donc est associé à $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{G}_1$ le sous-faisceau immergé de $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'/\mathcal{G}_1$, $\mathfrak{a}_1$ l'annulateur de $\mathcal{G}_1$ et p_1 un entier tel que le morphisme canonique

$$g : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}'/\mathfrak{a}_1^{p_1}\mathcal{F}'$$

soit injectif. Le faisceau $\mathcal{F}_1$ n'a pas de composantes immergées et les points associés à $\mathcal{F}_{1V}$ sont aussi associés à $\mathcal{F}_V$ quel que soit l'ouvert affine V de $\mathfrak{X}$. De plus il existe un plus grand sous-module $\mathcal{F}_1'$ de $\mathcal{F}'/\mathfrak{a}_1^{p_1}\mathcal{F}'$ tel que, pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{F}'_{1V}$ soit le plus grand sous-module de $(\mathcal{F}'/\mathfrak{a}_1^{p_1} \mathcal{F}')_V$ dont le support a pour seuls points maximaux des points associés à $\mathcal{F}_V$. Cette dernière condition entraîne que le morphisme

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}_o \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_1/\mathfrak{a}_1^{p_1} \mathcal{F}_1 \ ,$$

déduit de f et g , se factorise en un monomorphisme

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}_o \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_1' \ .$$

On peut alors recommencer pour $\mathcal{F}_1'$ la construction faite pour $\mathcal{F}'$. Si n est le plus grand entier tel qu'il existe un ouvert affine V de $\mathfrak{X}$ et une suite de points $x_o,x_1,\dots,x_n$, associé à $\mathcal{F}_V$, tels que $x_{i+1} \in \{\overline{x_i}\}$ pour $0\leq i\leq n-1$, on obtient, après n opérations comme ci-dessus, des faisceaux $\mathcal{F}_i$ qui satisfont aux conditions de l'énoncé et un monomorphisme

$$\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_n .$$

DÉFINITION 2.4.- Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien. On dit qu'un faisceau de modules cohérent $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{X}$ vérifie la condition (S_n) (resp. est de Cohen-Macaulay) s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes (EGA IV 6.4.1) :

(i) Pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{F}_V$ vérifie la condition (S_n) (resp. est de Cohen-Macaulay).

(ii) Pour tout point $x \in \mathfrak{X}$, le faisceau $\mathfrak{F}_x$ vérifie la condition (S_n) (resp. est de Cohen-Macaulay).

PROPOSITION 2.4.1.- Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, localement immersible dans un schéma formel régulier. Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau de modules cohérent sur $\mathfrak{X}$, l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ où $\mathfrak{F}_x$ vérifie (S_n) est un ouvert de $\mathfrak{X}$.

Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines V_α, tels que, pour tout $\alpha \in A$, $\mathfrak{X}_{V_\alpha}$ puisse se plonger dans un schéma régulier. Soit U_α l'ensemble des points de $\mathfrak{X}_{V_\alpha}$ où $\mathfrak{F}_{V_\alpha}$ vérifie (S_n). D'après EGA IV 6.11.2, l'ensemble U_α est ouvert dans $\mathfrak{X}_{V_\alpha}$. Par suite l'image Z_α de U_α dans $\mathfrak{X}$ est un ouvert. La proposition en résulte, l'ensemble des points où $\mathfrak{F}_x$ vérifie (S_n) n'étant autre que la réunion des Z_α.

Notons qu'un faisceau formel cohérent vérifie la condition (S_1) si et seulement si son sous-faisceau immergé (2.2) est trivial. La proposition ci-dessous montre que l'on peut plonger un faisceau formel cohérent, vérifiant (S_1), dans un faisceau formel cohérent vérifiant (S_2).

PROPOSITION 2.5.- Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, localement immersible dans un schéma formel régulier et soit $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\mathfrak{X}$, vérifiant (S_1). Si V est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, on note Z_V l'ensemble des points x du support de $\mathfrak{F}_V$ tels que $\dim \mathfrak{F}_{V,x} \geq 2$. Alors on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérent $\mathfrak{G}$, vérifiant (S_2), un monomorphisme

$$\mathfrak{F} \to \mathfrak{G} ,$$

tels que, pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{G}_V$ soit la Z_V-clôture de $\mathfrak{F}_V$ (EGA IV 5.9).

Si V est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, on note $\mathfrak{F}'_V$ la Z_V-clôture de $\mathfrak{F}_V$. Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines V_α, tel que chaque $\mathfrak{X}_{V_\alpha}$ se plonge dans un schéma régulier. Si V est contenu dans l'un des V_α, le faisceau $\mathcal{F}'_V$ est cohérent (EGA IV 5.11.1) et vérifie (S_2) (EGA IV 5.10.15). Comme $\mathcal{F}_V$ vérifie (S_1), le morphisme canonique

$$\mathcal{F}_V \to \mathcal{F}'_V$$

est injectif (EGA IV 5.9.8). Pour tout ouvert $V \subset V_\alpha$, on a un isomorphisme canonique

$$\varphi^*_{V_\alpha,V}(\mathcal{F}'_{V_\alpha}) \simeq \mathcal{F}'_V$$

(EGA IV 5.9.4) et on en déduit que les $\mathcal{F}'_{V_\alpha}$ se recollent en un faisceau $\mathcal{G}$. Pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{G}_V$ est de profondeur ≥ 1 en tout point de Z_V (EGA IV 6.4.1) ; par suite $\mathcal{G}_V$ est Z_V-clôs (EGA IV 5.10.2) ; comme $\mathcal{G}_V$ est isomorphe à $\mathcal{F}_V$ en dehors de Z_V, $\mathcal{G}_V$ est la Z_V-clôture de $\mathcal{F}_V$.

COROLLAIRE 2.6.- Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel noethérien, localement immersible dans un schéma formel régulier et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\mathfrak{X}$. Alors on peut trouver des faisceaux formels cohérents $\mathcal{F}_i$, $0 \leq i \leq n$, un monomorphisme

$$\mathcal{F} \to \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i \quad ,$$

tels que, pour $0 \leq i \leq n$, la condition suivante soit satisfaite :

Le faisceau $\mathcal{F}_i$ vérifie (S_2) et, pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, tout point associé à $\mathcal{F}_{iV}$ est associé à $\mathcal{F}_V$.

COROLLAIRE 2.7.- Soient X un schéma noethérien, localement immersible dans un schéma régulier, Y une partie fermée de X, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y, $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$. On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (S_1) et que son annulateur est le complété formel $\hat{\mathfrak{A}}$ d'un faisceau d'idéaux $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{O}_X$. Soient $x_1,\dots,x_n$ les points maximaux de $V(\mathfrak{A})$. On peut trouver des faisceaux de modules cohérents $\mathcal{F}_i$, $0 \leq i \leq n$, un monomorphisme

$$\mathcal{F} \to \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i \quad ,$$

tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) $\mathcal{F}_i$ vérifie (S_2).

b) L'annulateur de $\mathcal{F}_i$ est le complété formel d'un idéal $\mathfrak{A}_i$ de $\mathcal{O}_X$ tel que $V(\mathfrak{A}_i) = \{\overline{x_i}\}$.

On peut suppose que $X = V(\mathfrak{A})$. Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de X par des ouverts affines V_α, immersibles dans des schémas réguliers. Si V est un ouvert de X, contenu dans l'un des V_α, le morphisme canonique

$$f : \hat{X}_{\hat{V}} \to V$$

est plat et vérifie la condition (S_1) ; par suite, pour tout $o \leq i \leq n$, les points de $f^{-1}(x_i)$ associés à $\mathcal{F}_V$ sont les points maximaux de $f^{-1}(x_i)$ (EGA IV 3.3.1). Soient $x_{i1},\dots,x_{ip}$ les points maximaux de $f^{-1}(x_i)$ et posons

$$Z_{iV} = \coprod_{1 \leq j \leq p} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X}_{\hat{V}}, x_{ij}} .$$

Soit $g_{iV} : Z_{iV} \to \hat{X}_{\hat{V}}$ le morphisme canonique. On définit $\mathcal{F}_{iV}$ comme l'image du morphisme canonique

$$a_{iV} : \mathcal{F}_{\hat{V}} \to g_{iV*}g_{iV}^{*}(\mathcal{F}_{i\hat{V}}) .$$

Le morphisme

$$a_V : \mathcal{F}_{\hat{V}} \to \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}_{i\hat{V}} ,$$

déduit des a_{iV} est un monomorphisme ; son noyau est en effet un sous-module de $\mathcal{F}_{\hat{V}}$ dont le support ne contient aucun point maximal de $\hat{X}_{\hat{V}}$; $\mathcal{F}_{\hat{V}}$ n'ayant pas de composantes immergées, ce noyau est nul. De plus $\mathcal{F}_{i\hat{V}}$ n'a pas de composantes immergées car il en est ainsi de $g_{iV*}g_{iV}^{*}(\mathcal{F}_{i\hat{V}})$.

Soit maintenant W un ouvert affine contenu dans V , $\varphi : \hat{X}_{\hat{W}} \to \hat{X}_{\hat{V}}$ le morphisme canonique ; soient T_i l'image inverse de Z_{iV} par φ et $h_i : T_i \to \hat{X}_{\hat{W}}$ la projection canonique. Le morphisme de Z_{iW} dans $\hat{X}_{\hat{W}}$ se factorise à travers T_i et son image est l'ensemble des points maximaux de T_i . Comme φ est plat et comme $\varphi^{*}\mathcal{F}_{\hat{V}} = \mathcal{F}_{\hat{W}}$, le morphisme $\varphi^{*}(a_{iV})$ s'identifie au morphisme canonique

$$b_i : \mathcal{F}_{\hat{W}} \to h_{i*}h_i^{*}(\mathcal{F}_{\hat{W}}) .$$

Le noyau de b_i est alors égal au noyau de a_{iW} . En effet, $\mathcal{F}_{\hat{W}}$ n'ayant pas de composantes immergées, une section de $\mathcal{F}_{\hat{W}}$, nulle aux points maximaux de T_i , est nulle sur T_i . Ceci prouve que, pour tout $o \leq i \leq n$, on a un isomorphisme canonique

$$\varphi^{*}(\mathcal{F}_{i\hat{V}}) \simeq \mathcal{F}_{i\hat{W}} .$$

On en déduit que les $\mathcal{F}_{i\hat{V}}$ se recollent. Ils définissent un faisceau $\mathcal{F}_i$ qui vérifie (S_1) , dont l'annulateur est l'idéal des sections de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ nulles au-dessus de x_i . De plus on a un monomorphisme

$$\mathcal{F} \to \bigoplus_{o \leq i \leq n} \mathcal{F}_i .$$

L'existence de faisceaux $\mathcal{F}_i$ vérifiant de plus (S_2) se déduit alors de 2.5.

3. Profondeur et faisceaux formels

3.1.- Soient X un schéma localement noetherien, Y une partie fermée de X, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y, $i : \hat{X} \to X$ le morphisme canonique. Pour tout ouvert affine V de X (resp. pour tout point x de $\hat{X}$), on considère le morphisme canonique

$$j : \hat{X}_{\hat{V}} = \operatorname{Spec} \Gamma(\hat{V}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \to V \text{ (resp. } k : \hat{X}_x = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},x} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,i(x)}) .$$

Si U est un ouvert de X, on note U_V (resp. U_x) l'image inverse de l'ouvert $U \cap V$ par j (resp. l'image inverse de $U_{i(x)}$ par k).

Les faisceaux formels considérés dans IV satisfont à des hypothèses de profondeur aux points de $(X-Y)_{\hat{V}}$. Ces conditions peuvent s'exprimer sous les formes équivalentes de 3.1.1.

Soient Z un schéma local noethérien équidimentionnel caténaire, de point fermé y, R un schéma noethérien tel que $g^{-1}g(y) = y$, $g : Z \to R$ un morphisme plat, F un faisceau de modules cohérent sur R. Soient u un point maximal de R, v un point de Z tel que $g(v) = u$, $x = g(y)$. On a alors

$$\operatorname{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{u}\}) = \dim Z = \dim \mathcal{O}_{Z,v} + \operatorname{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{v}\}) .$$

On déduit alors de EGA IV 6.3.1 l'inégalité

$$(*) \qquad \operatorname{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{v}\}) + \operatorname{prof}_v(g^*F) \leq \operatorname{prof}_u F + \operatorname{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{u}\}) .$$

De plus, si les fibres de g sont de Cohen-Macaulay, l'inégalité (*) est une égalité.

PROPOSITION 3.1.1.- Soient X un schéma localement noethérien, localement immersible dans un schéma régulier, X_1 une partie de X. Soit Y une partie fermée de X et notons $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Etant donnés un faisceau de modules cohérent $\mathcal{F}$ sur $\hat{X}$, un ouvert U de X et un entier n, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout ouvert affine V de X, pour tout point x de $\hat{V}$ se projetant dans X_1 et pour toute générisation u de x dans $\hat{X}_{\hat{V}}$, appartenant à $U_{\hat{V}}$, on a

$$\operatorname{prof}_u \mathcal{F}_{\hat{V}} \geq n - \operatorname{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{u}\}) ,$$

où $\{\overline{u}\}$ et $\{\overline{x}\}$ désignent les adhérences respectives de u et x dans $\hat{X}_{\hat{V}}$.

(ii) Analogue à (i) mais en se bornant à un ensemble d'ouverts, immersibles dans des schémas réguliers, qui recouvrent X.

(iii) Pour tout point x de $\hat{X}$ se projetant dans X_1, pour tout point u de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},x}$ qui appartient à U_x, on a

$$\operatorname{prof}_u \mathcal{F}_x \geq n - \dim\{\overline{u}\} .$$

(dim$\{\overline{u}\}$ désigne l'adhérence de u dans Spec $\mathcal{O}_{\hat{X},x}$) .

Si $\mathfrak{F}$ est le complété formel d'un faisceau de modules cohérent F sur X , les conditions précédentes sont équivalentes à la suivante :

(iv) Pour tout point $x \in Y \cap X_1$, pour toute générisation u de x appartenant à U , on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq n-\mathrm{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{u}\}) .$$

Il suffit en effet d'appliquer la relation (*), R désignant, suivant les cas, l'ouvert V , l'anneau local $\hat{X}_x$ ou le schéma X et Z le complété de l'anneau local en x d'un sous-schéma fermé d'espace sous-jacent $\{\overline{u}\}$.

COROLLAIRE 3.1.2.- Soient S un schéma localement noethérien, localement immersible dans un schéma régulier, S_1 une partie de S , $f : X \to S$ un morphisme de type fini, Y une partie fermée de X , $U = X - Y$. Soit $p : Z \to X$ un morphisme propre tel que $p^{-1}(U)$ soit isomorphe à U . On note $\hat{X}$ (resp. $\hat{Z}$) le complété formel de X le long de Y (resp. le complété formel de Z le long de $p^{-1}(Y)$) , $\hat{p} : \hat{Z} \to \hat{X}$ le morphisme canonique. Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$. Alors $\mathfrak{F}$ satisfait aux conditions équivalentes 3.1.1 si et seulement si il en est de même de $\hat{p}^*\mathfrak{F}$ (relativement au morphisme fp) .

Soit V un ouvert affine de X ; posons $W = \hat{X}_{\hat{V}} \times_X Z$ et notons q la projection canonique de W sur $\hat{X}_{\hat{V}}$; le complété formel de W le long de $p^{-1}(Y) \cap W$ n'est autre que $p^{-1}(V)^\wedge$ et l'on a un isomorphisme $(q^*\mathfrak{F}_{\hat{V}})^\wedge \simeq \hat{p}^*\mathfrak{F}|p^{-1}(V)^\wedge$. Il suffit donc de montrer que, pour tout W tel que précédemment, $q^*\mathfrak{F}_{\hat{V}}$ satisfait à la condition (iv) de 3.1.1 si et seulement si il en est ainsi de $\mathfrak{F}_{\hat{V}}$. Soient z un point de $W \cap Y$ et $x = p(z)$. Pour que z soit fermé dans sa fibrz au-dessus de $s \in S$, il faut et il suffit que z soit fermé dans sa fibre au-dessus de x et que x soit fermé dans sa fibre au-dessus de s . Si $v \in W$ est une générisation d'un tel point z et u sa projection sur $\hat{X}_{\hat{V}}$, on a

$$\mathrm{codim}(\{\overline{z}\},\{\overline{v}\}) = \mathrm{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{u}\}) .$$

Si de plus $u \in U_{\hat{V}}$, on a

$$\mathrm{prof}_u \mathfrak{F}_{\hat{V}} = \mathrm{prof}_v(q^*\mathfrak{F}_{\hat{V}})$$

car la restriction de q à $U_{\hat{V}}$ est un isomorphisme. La relation

$$\mathrm{prof}_u \mathfrak{F}_{\hat{V}} \geq n-\mathrm{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{u}\})$$

est donc équivalente à la relation

$$\mathrm{prof}_v(q^*\mathfrak{F}_{\hat{V}}) \geq n-\mathrm{codim}(\{\overline{z}\},\{\overline{v}\}).$$

Donnons maintenant une proposition qui permettra de ramener l'algébrisation d'un faisceau formel à celle de sa restriction à un ouvert convenable.

PROPOSITION 3.2.- Soient X un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier, Σ et Y des parties fermées de X telles que $\Sigma \subset Y$. Notons W l'ouvert $X-\Sigma$ et $i : W \to X$ l'immersion ouverte canonique. Soit F un faisceau de modules cohérent sur W. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Y est défini localement par l'annulation d'un élément non diviseur de zéro dans F.

b) Pour tout point x de W tel que $\operatorname{codim}(\{\overline{x}\} \cap \Sigma, \{\overline{x}\}) = 1$, on a

$$\operatorname{prof}_x F \geq 2 .$$

Soit $\hat{X}$ (resp. $\hat{W}$, resp. $\hat{F}$) le complété formel de X (resp. W, resp. F) le long de Y (resp. le long de $Y \cap W$, resp. le long de Y), et soit $\hat{i} : \hat{W} \to \hat{X}$ le morphisme déduit de i. Alors $\hat{i}_* \hat{F}$ est cohérent et le morphisme canonique

$$a : (i_* F)^{\wedge} \to \hat{i}_* \hat{F}$$

est bijectif.

Les hypothèses de profondeur sur F entraînent que $i_* F$ et $R^1 i_* F$ sont cohérents (SGA 2 VIII 2.2). La question étant locale sur X, on peut supposer Y défini par l'annulation d'une section globale de $\mathcal{O}_X$ qui est non diviseur de zéro dans $i_* F$ (EGA IV 3.1.13). Le fait que a soit bijectif résulte alors de SGA 2 IX 1.2.

COROLLAIRE 3.3.- Les notations sont celles de 3.2. On se donne un faisceau de modules cohérent $\mathcal{F}$ sur $\hat{X}$ et on suppose satisfaites les conditions suivantes :

a) Y est défini localement par l'annulation d'un élément de $\mathcal{O}_X$, non diviseur de zéro dans $\mathcal{F}$.

b) $\mathcal{F}$ vérifie la condition (S_2) (II 2.4).

c) Pour tout point x de Σ, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Sup} \mathcal{F} \cap \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},x}$ sont de dimension ≥ 3.

Alors le morphisme canonique $\mathcal{F} \to \hat{i}_* \hat{i}^* \mathcal{F}$ est bijectif.

Si I est un idéal définissant Y, on peut supposer que X est un schéma affine, complet pour la topologie I-adique. On peut alors trouver un faisceau cohérent F sur X et un isomorphisme $\hat{F} \simeq \mathcal{F}$ (EGA I 10.10). Comme $\mathcal{F}$ vérifie (S_2), il en est de même de F. D'après c), on a

$$\operatorname{prof}_x F \geq 2 \quad ,$$

en tout point $x \in W$ tel que $\operatorname{codim}(\{\bar{x}\} \cap \Sigma, \{\bar{x}\}) = 1$. De plus le morphisme canonique $F \to i_* i^* F$ est bijectif car on a $\operatorname{prof}_\Sigma F \geq 2$. Le corollaire résulte donc de 3.2.

CHAPITRE III

Théorèmes de finitude et théorèmes d'existence.

La démonstration des théorèmes fondamentaux du chapitre IV est basée sur les énoncés 2.2 et 2.3 ci-dessous qui donnent des conditions sous lesquelles une image directe d'un faisceau formel cohérent est cohérente. Ce sont des formes techniques de SGA 2 IX 2. Ils se déduisent de théorèmes de finitude (n°1) qui généralisent SGA 2 VIII 2.1 et XII 1.4.

1. Théorèmes de finitude

THEOREME 1.1.- Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[r, "i"] & S' \end{tikzcd}$$

où S' est un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, f un morphisme propre, i une immersion ouverte et posons $T = S'-S$. Soient L un faisceau f-ample, F un complexe de faisceaux de modules sur X, à cohomologie cohérente bornée, k un entier. Si n est un entier, on pose $F(n) = F \otimes L^{\otimes n}$. Supposons que, pour tout point $s \in S$ tel que l'on ait $\operatorname{codim}(\{\bar{s}\} \cap T, \{\bar{s}\}) = 1$, et pour tout point fermé x de la fibre $f^{-1}(s)$, on ait

$$H_x^k(F) = 0 .$$

Alors il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, le faisceau $R^k g_*(F(-n))$ soit cohérent.

On peut supposer S' régulier. Soit K' le complexe dualisant sur S' tel que $K^0 = \mathcal{O}_{S'}$, $K^i = 0$ pour $i \neq 0$, et soit $K = K'|S$. D'après [6] VI 3.5, le complexe $M = f^! K$ est un complexe dualisant sur X. Si x est un point fermé de la fibre $f^{-1}(s)$ et si l'on pose $d(s) = \dim \mathcal{O}_{S,s}$, $M[d(s)]$ est normalisé au point x [6] V 7.1 et VI 3.4). Soit n un entier et soit G le faisceau $F(-n)$. Appliquons le théorème de dualité locale ([6] V 6.3) au localisé G_x de G en x ; si I désigne l'enveloppe injective de $k(x)$, on a un isomorphisme

$$H_x^k(G_x) \simeq \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^{-k}(G_x, M_x[d(s)]), I) .$$

Si le point $s = f(x)$ satisfait à la relation $\operatorname{codim}(\overline{\{s\}}\cap T, \overline{\{s\}}) = 1$, les hypothèses entraînent donc la relation

$$\operatorname{Ext}^{-k}(G_x, M_x[d(s)]) = 0 ,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(*) \qquad (\underline{\operatorname{Ext}}^{-k+d(s)}(G,M))_x = 0 .$$

On note $D_X G$ le dual de G relativement à M ; on a un isomorphisme canonique

$$G \simeq D_X D_X G .$$

Appliquons aux deux termes ci-dessus le foncteur $Rg_* = Ri_* Rf_*$; utilisant le théorème de dualité globale ([6] VII 3.3) , on obtient des isomorphismes

$$(**) \qquad Rg_*G \simeq Ri_*(Rf_*(D_X(D_X G))) \simeq Ri_*(R\underline{\operatorname{Hom}}_S(Rf_*D_X G, K)) .$$

Notons Φ le foncteur contravariant $i_*\underline{\operatorname{Hom}}_S(.,K)$ et $R\Phi$ le foncteur de $D^-_{coh}(S)$ dans $D^+_{qc}(S')$, dérivé de Φ . On déduit de (**) une suite spectrale

$$(***) \qquad R^p\Phi(H^{-q}(Rf_*D_X G)) \Rightarrow R^{p+q}g_*G .$$

On a d'autre part des isomorphismes

$$D_X G \simeq R\underline{\operatorname{Hom}}_X(F(-n),M) \simeq R\underline{\operatorname{Hom}}_X(F,M)(n) ;$$

comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers q tels que l'on ait $\underline{\operatorname{Ext}}^q_X(F,M) = 0$ et comme ces faisceaux sont cohérents, on déduit de EGA III 2.2.1 l'existence d'un entier n_o tel que, pour tout $n \geq n_o$, on ait

$$R^pf_*(\underline{\operatorname{Ext}}^q(F,M)(n)) = 0$$

pour tout $p>0$ et tout q . On suppose désormais $n \geq n_o$. On a alors un isomorphisme

$$\underline{H}^q(Rf_*D_X G) \simeq f_*(\underline{\operatorname{Ext}}^q(G,M)) ,$$

et la suite exacte (***) peut s'écrire sous la forme

$$(****) \qquad E_2^{pq} = R^p\,\Phi(f_*(\operatorname{Ext}^{-q}(G,M))) \Rightarrow R^{p+q}g_*G .$$

Pour montrer que R^kg_*G est cohérent, il suffit de voir qu'il en est ainsi de tous les termes E_2^{pq} tels que $p+q = k$. Soit $j : T \to S'$ l'application canonique et soit E_q un faisceau cohérent sur S' prolongeant le faisceau $f_*(\underline{\operatorname{Ext}}^{-q}(G,M))$. Si l'on pose $H_q = R\underline{\operatorname{Hom}}_{S'}(E_q,K')$, on a un isomorphisme

$$R\,\Phi(i^*E_q) \simeq Ri_*(i^*H_q) .$$

On a une suite exacte (SGA 2 I (17)) :

$$0 \to i_! i^* \mathcal{O}_{S'} \to \mathcal{O}_{S'} \to j_! j^* \mathcal{O}_{S'} \to 0 ,$$

où $i_!$ et $j_!$ sont les foncteurs considérés dans loc. cit. On en déduit le triangle

$$\begin{tikzcd} & R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(i_! i^*\mathcal{O}_{S'}, H_q) \arrow[dl] & \\ R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(j_! j^*\mathcal{O}_{S'}, H_q) \arrow[rr] & & R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(\mathcal{O}_{S'}, H_q) \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

On a d'autre part des isomorphismes d'adjonction

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(j_! j^*\mathcal{O}_{S'}, H_q) \simeq R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(\mathcal{O}_{S'}, Rj_* j^! H_q)$$

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(i_! i^*\mathcal{O}_{S'}, H_q) \simeq R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(\mathcal{O}_{S'}, Ri_* i^! H_q)$$

(SGA 2 I 1.5). Il en résulte que le triangle ci-dessus s'identifie au triangle

$$\begin{tikzcd} & Ri_* i^* H_q \arrow[dl] & \\ Rj_* j^! H_q \arrow[rr] & & H_q \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

Le foncteur $j_* j^!$ n'est autre que le foncteur "sections à support dans T " Γ_T . Soit ϕ le foncteur $\Gamma_T \underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(.,K')$, dont les foncteurs dérivés sont les $\underline{\mathrm{Ext}}^p_T(.,K')$ introduits dans SGA 2 VI. En remplaçant H_q par son expression, on obtient le triangle

$$\begin{tikzcd} & R\Phi(i^*E_q) \arrow[dl] & \\ R\phi E_q \arrow[rr] & & R\underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(E_q, K') \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Il en résulte la suite exacte de cohomologie

$$\to \underline{\mathrm{Ext}}^i_T(E_q,K') \to \underline{\mathrm{Ext}}^i(E_q,K') \to R^i\Phi(i^*E_q) \to \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}_T(E_q,K') \to$$

Soit I_q l'ensemble des nombres $\dim \mathcal{O}_{S',t}$, où t parcourt l'ensemble $T \cap \overline{\mathrm{Supp}(i^*E_q)}$. D'après SGA 2 VII 2.3, le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^i_T(E_q,K')$ est cohérent pourvu que $i \notin I_q$. Soient $s \in S$, $S_s = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,s}$ et $X_s = X \times_S S_s$; on a les égalités

$$(i^*E_q)_s = (f_* \underline{\mathrm{Ext}}^{-q}(G,M))_s = \Gamma(X_s, \underline{\mathrm{Ext}}^{-q}(G,M)|X_s) .$$

Si $-q = -k + \dim \mathcal{O}_{S,s}$, on déduit de (*) la relation

$$(i^*E_q)_s = 0 .$$

Soit alors s un point du support de i^*E_q ; on a $\dim \mathcal{O}_{S,s} \neq -q+k$. Si $t \in T \cap \overline{\mathrm{Supp}(i^*E_q)}$, t a une générisation immédiate $s \in \mathrm{Supp}(i^*E_q)$, et par suite on a

$$\dim \mathcal{O}_{S,t} \neq -q+k+1 .$$

Par suite $\underline{\mathrm{Ext}}_T^{-q+k+1}(E_q,K')$ est cohérent. Il résulte alors de la suite exacte de cohomologie ci-dessus que $R^{-q+k}\Phi(i*E_q)$ est cohérent. On a donc montré que $E^{-q+k,q}$ est cohérent quel que soit q, ce qui prouve qu'il en est de même de $R^k g_* G$.

THEOREME 1.2.- Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "g"'] & \\ V \arrow[r, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd},$$

où S est un schéma noethérien, localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, f et g des morphismes propres, i une immersion ouverte. Soient L un faisceau f-ample, L' un faisceau g-ample, k un entier, $T = X-V$. Soit F un complexe de faisceaux de modules sur Z, à cohomologie cohérent, bornée. Soit V_1 l'ensemble des points x de V qui satisfont à l'une des deux conditions suivantes :

a) x est fermé dans sa fibre $f^{-1}f(x)$.

b) on a $\operatorname{codim}(\{\overline{x}\}\cap T, \{\overline{x}\}) = 1$.

Supposons que, pour tout point z de Z tel que $x = f(z)$ appartienne à V_1, fermé dans sa fibre au-dessus de x, on ait

$$H_z^k(F) = 0 .$$

Alors on peut trouver un entier n'_0 et, pour tout $n' \geq n'_0$, un entier n_0 (dépendant de n') tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$R^k(fig)_*(F\otimes L'^{\otimes -n'}\otimes(ig)^*L^{\otimes -n}) = 0 .$$

On peut supposer S intègre régulier. Soit K_S un complexe dualisant sur S, normalisé au point générique de S ([6] V §6). Le complexe $K_X = f^!K_S$ (resp. $K_Z = (fig)^!K_S$) est un complexe dualisant sur X (resp. sur Z).

On note D_S (resp. D_X, resp. D_Z) la dualité par rapport à K_S (resp. K_X, resp. K_Z)) et on pose $F_{n'} = F \otimes L'^{\otimes n'}$, $F_{n'}(n) = F_{n'}\otimes(ig)^*L^{\otimes n}$. Pour tous entiers n, n', on a un isomorphisme canonique

$$R(fig)_*(F_{-n'}(-n)) \simeq R(fig)_*(D_Z(D_Z F_{-n'}(-n))) \quad ;$$

compte tenu du théorème de dualité globale (I (2.1.1)), on peut écrire le deuxième terme sous la forme

$$R(fig)_*(D_Z(D_Z F_{-n'}(-n))) \simeq R\underline{\mathrm{Hom}}_S(R(fig)_!(D_Z F_{-n'}(-n)),K_S)$$

Soit Φ le foncteur de pro $D^b_{coh}(Z)$ dans pro $D^b_{coh}(S)$ défini par

$$\Phi(.) = R(fig)_! \underline{RHom}_Z(.,K_Z) .$$

On a alors une suite spectrale (EGA III 11.4.3) :

$$\underline{Ext}^p_S(R^{-q}\Phi(F_{-n'}(-n)),K_S) \Rightarrow H^{p+q}(R(fig)_*(F_{-n'}(-n))) .$$

Compte tenu de cette suite spectrale, il suffit, pour prouver le théorème, de montrer que l'on a

$$\underline{Ext}^p_S(R^{-q}\Phi(F_{-n'}(-n)),K_S) = 0$$

pour $p+q = k$, n et n' ayant la signification donnée dans l'énoncé.

D'après EGA III 2.2.1, on peut trouver un entier n'_o tel que, pour tout $n' \geq n'_o$, pour tout n et tout j , on ait des isomorphismes

$$Rg_*\underline{Ext}^j_Z(F_{-n'}(-n),K_Z) \simeq g_*(\underline{Ext}^j_Z(F(-n),K_Z)_{n'} \simeq (g_*\underline{Ext}^j_Z(F_{-n'},K_Z))(n) .$$

On a alors une suite spectrale de pro-$\mathcal{O}_S$-modules cohérents

$$(*) \qquad E_2^{ij} = R^if_*(Ri_!(g_*\underline{Ext}^j_Z(F_{-n'},K_Z))(n)) \Rightarrow R^{i+j}\Phi(F_{-n'}(-n)) .$$

On peut trouver un faisceau cohérent sur X , qui prolonge $g_*\underline{Ext}^j_Z(F_{-n'},K_Z)$; soit $E^j_{-n'}$ un tel faisceau, choisi de façon à satisfaire à la relation $\Gamma_T E^j_{-n'} = 0$.

Soit s un point de S . On pose $S_s = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,s}$, $X_s = X\times_S S_s$, $d_s = \dim \mathcal{O}_{S,s}$. Nous allons montrer que l'on a

$$(**) \qquad \dim(\mathrm{Supp}\ E^j_{-n'} \cap T_s) < -k-j+d_s-1 \quad \text{pour tout } j < -k+d_s .$$

Soient x un point de V_s et z un point de $g^{-1}(x)$, fermé dans sa fibre. Si $\dim \{\overline{x}\}$ désigne la dimension de l'adhérence de x dans X_s , le complexe dualisant $K_Z[d_s-\dim\{\overline{x}\}]$ est normalisé en z ([6] V 7.1 et VI 3.4). D'après le théorème de dualité locale ([6] V 6.3), la relation $H^k_z(F) = 0$ est équivalente à la relation

$$(\underline{Ext}_Z^{-k+d_s-\dim\{\overline{x}\}}(F,K_Z))_z = 0 .$$

Les hypothèses entraînent donc que l'on a

$$(***) \qquad (E_{-n'}^{-k+d_s-\dim\{\overline{x}\}})_x = 0$$

pour tout $n' \geq n'_o$ et pour tout point x de V_1 . Si j est un entier, on a la relation

$$(E^j_{-n'})_x = 0$$

en tout point x de $X-T$, tel que $\mathrm{codim}(\{\overline{x}\}\cap T,\{\overline{x}\}) = 1$ et tel que $\dim\{\overline{x}\}=-k-j+d_s$. La relation (**) résulte alors du lemme 1.2.1 ci-dessous, appliqué à l'entier $r = -k-j+d_s$.

Soit I un idéal définissant T . On a, par définition,

$$Ri_!(g_*\underline{\mathrm{Ext}}^j_Z(F_{-n'},K_Z)) \simeq \text{"}\varprojlim_m\text{"}\ I^m E^j_{-n'} \ .$$

Pour tout entier $m \geq 0$, le support de $E^j_{-n'}/I^m E^j_{-n'}$ est contenu dans l'intersection $\mathrm{Supp}\, E^j_{-n'}\cap T$; d'après (**), la fibre en s du support de $E^j_{-n'}/I^m E^j_{-n'}$ a une dimension $< -k-j-1+d_s$; on a donc la relation

$$R^i f_*((E^j_{-n'}/I^m E^j_{-n'})(n))_s = 0 \quad \text{pour } i \geq -k-j-1+d_s \text{ et } j < -k+d_s \ ,$$

pour tous m , n et tout $n' \geq n'_o$. Cela entraîne que le morphisme

$$R^i f_*(I^m E^j_{-n'}(n))_s \to R^i f_*(E^j_{-n'}(n))_s \quad ,$$

donc aussi le morphisme

$$(E_2^{ij})_s = R^i f_*(Ri_!(E^j_{-n'}|V)(n))_s \to R^i f_*(E^j_{-n'}(n))_s$$

est bijectif pour $i+j \geq -k+d_s$ et $j < -k+d_s$. Soit n' un entier $\geq n'_o$. On peut trouver un entier n_o , dépendant de n' , tel que, pour $n \geq n_o$, on ait

$$R^i f_*(E^j_{-n'}(n)) = 0 \qquad \text{pour } i \neq 0 \ ,$$

quel que soit j (EGA III 2.2.1).

Fixons un entier $n \geq n_o$ et démontrons la relation (*). On peut supposer S local de point fermé t ; on pose $d = \dim S$. On vient de montrer que, pour $i \neq 0$, le support de E_2^{ij} ne contient aucun point s tel que l'on ait

$$k + j < \dim \mathcal{O}_{S,s} \leq i+j+k \ .$$

Si j satisfait à la relation $k+j< d$, cela revient à dire que l'on a

$$(****) \qquad \mathrm{codim}(\mathrm{Supp}\, E_2^{ij},S) > i+j+k$$

pour $i \neq 0$. Nous allons montrer que cette relation est aussi valable pour $i=0$. Si x est un point de V fermé dans sa fibre, et si $s = f(x)$, on a

$$(E^{-k+d_s}_{-n'})_x = 0$$

(relation (***)). Posons $\Sigma_j = f(\mathrm{Supp}\, E^j_{-n'}\cap V)$. L'ensemble Σ_j est constructible et ne contient aucun point s tel que $\dim \mathcal{O}_{S,s} = j+k$; si j satisfait à la relation $k+j < d$, il en résulte que Σ_j ne contient aucun point s tel que l'on ait $\dim \mathcal{O}_{S,s} \leq j+k$ (1.2.2 ci-dessous). En particulier la relation précédente entraîne

$$f_*(Ri_!(E^j_{-n'})(n))_s = 0 ,$$

ce qui n'est autre que la relation (****) dans le cas $i = 0$.

Soient p , q des entiers tels que $p+q = k$. Pour $p \notin [0,d]$, i.e. pour $q \notin [k-d,k]$, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_S(R^{-q}\Phi(F_{-n'}(-n)),K_S) = 0 .$$

Soit maintenant q tel que $k-d < q \leq k$. Pour tous entiers i , j tels que $i+j = -q$ et $i \geq 0$, on a $k+j < d$ et par suite le terme E^{ij}_2 de la suite spectrale (*) satisfait à la relation (****). Il résulte alors de cette suite spectrale que l'on a

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}\ R^{-q}\Phi(F_{-n'}(-n)),S) > k-q \quad \text{pour} \quad q \neq k-d .$$

D'après SGA 2 VII 1.4, on a donc

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_S(R^{-q}\Phi(F_{-n'}(-n)),K_S) = 0$$

pour tous p , q tels que $p+q = k$ et $p \neq d$.

Il suffit, pour achever la démonstration, de montrer que l'on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^d_S(R^{d-k}\Phi(F_{-n'}(-n)),K_S) = 0 .$$

Soient donc i , j des entiers tels que $i+j = -q = d-k$. Si l'on a $i > 0$, on a aussi $k+j < d$ et il résulte de (****) que l'on a

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}\ E^{ij}_2 , S) > d ,$$

i.e. que $E^{ij}_2 = 0$. Par suite $R^{d-k}\Phi(F_{-n'}(-n))$ est un sous-objet G de $E^{o(d-k)}_2 = f_*(Ri_!(E^{d-k}_{-n'}|V)(n))$. Soient $S' = S -\{t\}$, $X' = X\times_S S'$, $f' = f|S'$; notons $j : S' \to S$ et $h : X' \to X$ les immersions ouvertes canoniques. Le faisceau $E^{d-k}_{-n'}$ est nul en tout point de $f^{-1}(t)$ fermé dans sa fibre n'appartenant pas à T (relation (***)) ; il est donc nul en tout point de $f^{-1}(t)$ qui n'appartient pas à T . Par suite le morphisme canonique

$$Rh_!(Ri_!(E^{d-k}_{-n'}|V)|X') \to Ri_!(E^{d-k}_{-n'}|V)$$

est un isomorphisme. En appliquant le foncteur Rf_* , on obtient un isomorphisme

$$R(fh)_!(Ri_!(E^{d-k}_{-n'}|V)(n)|X') \xrightarrow{\simeq} Rf_*(Ri_!(E^{d-k}_{-n'}|V)(n))$$

qui s'identifie au morphisme canonique

$$Rj_!(E^{o(d-k)}_2|S') \to E^{o(d-k)}_2 .$$

Soit H le quotient de $E_2^{o(d-k)}$ par G , et considérons, dans la catégorie des pro-$\mathcal{O}_S$-Modules cohérents, le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rj_!(G|S') \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Rj_!(E_2^{o(-k+d)}|S') \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Rj_!(H|S') \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] & E_2^{o(-k+d)} \arrow[r] & H \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

Par définition de $Rj_!$, les morphismes a et c sont injectifs ; on vient de voir que b est bijectif ; il résulte donc du diagramme précédent que a est bijectif. Il résulte alors de 1.2.3 ci-dessous que l'on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^d_S(G,K_S) = 0$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 1.2.1.- Soit X un schéma noethérien de dimension finie, équicodimensionnel et caténaire. Soient T une partie fermée de X , F un faisceau cohérent sur X tel que $\underline{\Gamma}_T F = 0$, r un entier > 0 . On suppose que $F_x = 0$ en tout point x tel que l'on ait $\mathrm{codim}(\{\overline{x}\}\cap T,\{\overline{x}\}) = 1$ et $\dim\{\overline{x}\} = r$. Alors on a

$$\dim(\mathrm{Supp}\ F \cap T) < r-1 .$$

Supposons que l'on ait $\dim(\mathrm{Supp}\ F\cap T) \geq r-1$. On pourrait trouver un point $t \in \mathrm{Supp}\ F \cap T$, tel que l'on ait

$$\dim\{\overline{t}\} \geq r-1 .$$

Comme t appartient à $\mathrm{Supp}\ F$, il existe un point maximal x_0 de $\mathrm{Supp}\ F$, tel que $t \in \{\overline{x_0}\}$. Puisque $\underline{\Gamma}_T F = 0$, le point x_0 appartient à $X-T$. Soit X' un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $\{\overline{x_0}\}$; on a donc

$$\dim X' \geq r .$$

Cela entraîne l'existence d'un point $x \in X'-T$ tel que l'on ait $\dim\{\overline{x}\} = r$ et $\mathrm{codim}(\{\overline{x}\}\cap T,\{\overline{x}\}) = 1$. On peut en effet trouver un point t_1 de $T \cap X'$, tel que $\dim\{\overline{t_1}\} = r-1$. L'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X',t_1}-\{t_1\}$ est un ensemble très dense de ce schéma (EGA IV 10.5.8) et par suite ne peut être contenu dans T ; un point fermé de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X',t_1}-\{t_1\}$ qui n'appartient pas à T répond à la question. Comme on a, par hypothèse, $F_x = 0$, on ne peut avoir $\dim(\mathrm{Supp}\ F \cap T) \geq r-1$.

LEMME 1.2.2.- Soient S un schéma local noethérien biéquidimensionnel, de dimension d , k un entier $< d$, Σ une partie constructible de S . Supposons que Σ ne contienne aucun point s tel que $\dim \mathcal{O}_{S,s} = k$; alors Σ ne contient aucun point tel que $\dim \mathcal{O}_{S,s} \leq k$.

Soit en effet s un point de Σ et supposons que $\dim \mathcal{O}_{S,s} \leq k$. On peut trouver un point $t \in \{\overline{s}\}$ tel que $\dim \mathcal{O}_{S,t} = k+1$. En remplaçant S par son localisé en t , on se ramène au cas où S a pour point fermé t et est de dimension $k+1$. On a alors $\Sigma \cap (S-\{t\}) = \emptyset$. Comme l'ensemble des points fermés de $S-\{t\}$ est très dense (EGA IV 10.5.9), on a $\Sigma = \emptyset$, ce qui est contradictoire.

LEMME 1.2.3.- Soient S un schéma local régulier de dimension d , de point fermé t et $i : S-\{t\} \to S$ l'immersion canonique. Soit $F = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, F_m$ un système projectif de faisceaux de modules cohérents sur $S-\{t\}$. Alors, pour tout faisceau cohérent G sur S , on a

$$\mathrm{Ext}^d(Ri_! F, G) = 0 .$$

Soit $\overline{F} = \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, \overline{F}_m$ un système projectif de faisceaux de modules cohérents sur S qui prolonge F , tel que $\Gamma_t \overline{F}_m = 0$ pour tout m . Si m est l'idéal maximal de S , le pro-objet $Ri_! F$ est isomorphe à $\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, m^m \overline{F}_m$ et l'on a

$$\mathrm{Ext}^d_S(Ri_! F, G) = \varinjlim_m \mathrm{Ext}^d_S(m^m \overline{F}_m, G) .$$

Comme on a $\mathrm{prof}(m^m\overline{F}_m) > 0$, donc $\mathrm{dp}(m^m\overline{F}_m) < d$ (EGA 0_{IV} 17.3.4), les faisceaux $\mathrm{Ext}^d_S(m^m\overline{F}_m, G)$ sont nuls.

2. Théorèmes d'existence

2.1.- Nous aurons besoin, pour prouver 2.2 et 2.3, d'utiliser l'analogue de EGA 0_{III} 13.7.7 pour un système projectif de complexes.

2.1.1.- Soit C une catégorie abélienne et considérons les complexes à objet dans C . Si $\mathbf{A}$ est un complexe, on appelle préfiltration finie de $\mathbf{A}$ un système projectif de complexes $(F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbb{N}}$, tel que $F^0(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ et tel que $F^j(\mathbf{A}) = 0$ si j est assez grand. Pour simplifier, on appellera complexe préfiltré un complexe muni d'une préfiltration finie.

Etant donné un système projectif de complexes $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une préfiltration finie de $\mathbf{A}$ est la donnée de préfiltrations finies $(F^j(\mathbf{A}_k))_{j\in\mathbb{N}}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et, pour tous $k \geq k'$, de morphismes $F^j(\mathbf{A}_k) \to F^j(\mathbf{A}_{k'})$ définissant un morphisme pour la structure de complexes préfiltrés, i.e. tels que, pour tous $j \geq j'$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^j(\mathbf{A}_k) & \longrightarrow & F^{j'}(\mathbf{A}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^j(\mathbf{A}_{k'}) & \longrightarrow & F^{j'}(\mathbf{A}_{k'}) \end{array}$$

soit commutatif.

Soit $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système projectif de complexes. On le munit canoniquement d'une préfiltration finie de la façon suivante. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout p tel que $0 < p < k+1$, soit $C^p(\mathbf{A}_k)$ le cône du morphisme de transition $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_{p-1}$ et posons $F^p(\mathbf{A}_k) = C^p(\mathbf{A}_k)[-1]$; posons enfin $F^o(\mathbf{A}_k) = \mathbf{A}_k$ et $F^p(\mathbf{A}_k) = 0$ si $p \geq k+1$. Pour tous $k \geq k'$ et tous $j \geq j'$, on définit le morphisme de $F^j(\mathbf{A}_k)$ dans $F^{j'}(\mathbf{A}_{k'})$ par passage au cône, à partir des morphismes de transition $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_{k'}$ et $\mathbf{A}_{j-1} \to \mathbf{A}_{j'-1}$.

Pour tous k, $p \in N$, soit $gr^p(\mathbf{A}_k)$ le cône du morphisme $F^{p+1}(\mathbf{A}_k) \to F^p(\mathbf{A}_k)$. Plaçons-nous dans la catégorie triangulée $K(C)$ et appliquons l'axiome de l'octaèdre au morphisme composé $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_{p+i-1} \to \mathbf{A}_{p-1}$, où $i \in N$, $0 < p < k-i+1$. On a le diagramme suivant dans lequel apparaissent quatre triangles :

(*)
$$\begin{tikzcd}
F^{p+i}(\mathbf{A}_k) \arrow[dd] \arrow[dr] & & F^p(\mathbf{A}_{p+i-1}) \arrow[ll, "+1"'] \arrow[ddl] \\
& F^p(\mathbf{A}_k) \arrow[ur] \arrow[dl, "+1"] & \\
\mathbf{A}_k \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbf{A}_{p-1} \arrow[ul, "+1"'] \arrow[uu, "+1"'] \\
& \mathbf{A}_{p+i-1} \arrow[ur] \arrow[uuul] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit, en faisant $i = 1$, un isomorphisme $gr^p(\mathbf{A}_k) \simeq F^p(\mathbf{A}_p)$; en particulier $gr^p(\mathbf{A}_k)$ ne dépend pas de k. Par définition, on pose

$$gr^p(\mathbf{A}) = gr^p(\mathbf{A}_p)$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ et

$$gr^\bullet(\mathbf{A}) = \bigoplus_{p\geq 0} gr^p(\mathbf{A}) .$$

Dans le cas d'un système projectif strict (EGA 0_{III} 13.4.2) de complexes, la préfiltration définie ci-dessus sur les $\mathbf{A}_k$ se ramène à une filtration, grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.1.1.- Soient $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système projectif strict de complexes et $F^j(\mathbf{A}_k)$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ la préfiltration associée. Soit d'autre part $F'^j(\mathbf{A}_k)$ la filtration associée au système projectif $\mathbf{A}$ (EGA 0_{III} 13.5.2). On peut trouver des quasi-isomorphismes

$$a_k^j : F'^j(\mathbf{A}_k) \to F^j(\mathbf{A}_k) \quad , \quad j\in\mathbb{N} \; , \; k\in\mathbb{N} \; ,$$

tels que, pour tous $j \geq i$, $k \geq m$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F'^j(\mathbf{A}_k) & \xrightarrow{a_k^j} & F^j(\mathbf{A}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'^i(\mathbf{A}_k) & \xrightarrow{a_k^i} & F^i(\mathbf{A}_k) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F'^j(\mathbf{A}_k) & \xrightarrow{a_k^j} & F^j(\mathbf{A}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'^j(\mathbf{A}_m) & \xrightarrow{a_m^j} & F^j(\mathbf{A}_m) \end{array}$$

soient commutatifs (les flèches verticales sont les morphismes de transition).

La proposition est conséquence du lemme suivant, dont la vérification est immédiate :

LEMME 2.1.1.2.- Soient $X = (X^i)_{i\in\mathbf{Z}}$, $Y = (Y^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ deux complexes et soit $f = (f^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ un morphisme strict de X dans Y. Soient Z le cône de f et $K = (\operatorname{Ker} f^i)_{i\in\mathbf{Z}}$. Alors la famille d'applications

$$g^i : \operatorname{Ker} f^i \to Z^{i-1} = X^i \oplus Y^{i-1} ,$$

définies par $g^i(x) = (x,0)$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} f^i$, est un quasi-isomorphisme de K dans $Z[-1]$.

2.1.2.- Soit S un anneau muni d'une filtration $(F^i(S))_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $F^0(S) = S$. On se place dans la catégorie dérivée $D(C)$. Si $\mathbf{A}$ est un complexe muni d'une préfiltration $(F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}}$, on considère l'ensemble des morphismes $\operatorname{Hom}((F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}} , (F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}})$ du système projectif $(F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}}$ dans lui-même ; on note $\operatorname{Hom}^n((F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}} , (F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}})$ le sous-ensemble formé des familles de morphismes

$$a^j : F^j(\mathbf{A}) \to F^{j+n}(\mathbf{A}) ,$$

tels que, pour $j \geq j'$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F^j(\mathbf{A}) & \xrightarrow{a^j} & F^{j+n}(\mathbf{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^{j'}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{a^{j'}} & F^{j'+n}(\mathbf{A}) \end{array}$$

soient commutatifs.

Par définition, la donnée d'une S-structure sur le complexe préfiltré $\mathbf{A}$ est la donnée d'un morphisme d'anneaux filtrés

$$h : S \to \operatorname{Hom}((F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}} , (F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}}) ,$$

i.e. la donnée d'un morphisme d'anneaux tel que, pour $t \in F^i(S)$, on ait $h(t) \in \operatorname{Hom}^i((F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}} , (F^j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbf{N}})$.

Si $\mathbf{A}$ et B sont des complexes préfiltrés, munis de S-structures, on définit de façon évidente la notion de morphisme de $\mathbf{A}$ dans B , compatible avec la S-structure.

Si maintenant $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système projectif de complexes préfiltrés, la donnée d'une S-structure sur $\mathbf{A}$ est la donnée de S-structures sur chacun des $\mathbf{A}_k$, telles que les morphismes de transition soient compatibles avec les S-structures. Pour tous $0 \leq p \leq k$ et tout $t \in F^i(S)$, $h(t)$ définit, par passage aux cônes, un morphisme de $gr^p(\mathbf{A}_k)$ dans $gr^{p+i}(\mathbf{A}_k)$ et l'on voit que ceci permet de définir sur $gr^\circ(\mathbf{A})$ une structure de module sur l'anneau $gr^\bullet(S)$.

Nous nous intéressons à l'exemple suivant de système projectif de complexes préfiltrés, muni d'une S-structure. Soient S un anneau, I un idéal de S , t un élément de S , et considérons la filtration I-adique de S . Soit K un complexe de C et supposons donné un morphisme d'anneaux

$$S \to \mathrm{Hom}(K,K) \ .$$

Pour tout $s\in S$, on note encore s le morphisme de K dans lui-même image de s . Soit $\mathbf{A}_k$ le cône de t^{k+1} . Les $\mathbf{A}_k$ forment un système projectif si l'on définit le morphisme de transition $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_{k'}$, $k \geq k'$, comme déduit, par passage au cône, des morphismes $t^{k-k'}$ et id_K . On considère le système projectif des $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme préfiltré grâce à 2.1.1.

Pour tout $s\in S$, le morphisme $s : K \to K$ définit, par passage au cône, un morphisme de $\mathbf{A}_k$ dans lui-même que l'on note encore s ; pour tout entier j , on définit de même un morphisme s de $F^j(\mathbf{A}_k)$ dans lui-même. On obtient ainsi un morphisme d'anneaux

$$h : S \to \mathrm{Hom}((F^j(\mathbf{A}_k))_{j\in\mathbb{N}} , (F^j(\mathbf{A}_k))_{j\in\mathbb{N}}) \ .$$

Supposons que $I = (t)$, et montrons qu'alors, pour tout $i>0$, $h(t^i)$ appartient à $\mathrm{Hom}^i((F^j(\mathbf{A}_k))_{j\in\mathbb{N}} , (F^j(\mathbf{A}_k))_{j\in\mathbb{N}})$. Le morphisme $t^i : \mathbf{A}_{i-1} \to \mathbf{A}_{i-1}$ est homotope à zéro. Il en est donc de même du morphisme t^i de $F^j(\mathbf{A}_{j+i-1})$ dans lui-même ; ce dernier s'identifie en effet au précédent, à translation près, car, d'après l'axiome de l'octaèdre, $\mathbf{A}_{i-1}[1]$ est isomorphe au cône du morphisme de transition $\mathbf{A}_{i+j-1} \to \mathbf{A}_{j-1}$. Il en résulte que, pour tous m , j , i
i , tels que $m \geq j+i-1$, le morphisme composé

$$F^j(\mathbf{A}_m) \xrightarrow{\ t^i\ } F^j(\mathbf{A}_m) \longrightarrow F^j(\mathbf{A}_{j+i-1}) \quad ,$$

où le deuxième morphisme est le morphisme de transition, est homotope à zéro. Le triangle

$$\begin{tikzcd} & F^j(\mathbf{A}_{j+i-1}) \arrow[dl, "+1"'] & \\ F^{j+i}(\mathbf{A}_m) \arrow[rr] & & F^j(\mathbf{A}_m) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

étant exact d'après (*), le morphisme $t^i : F^j(\mathbf{A}_m) \to F^j(\mathbf{A}_m)$ se factorise en un morphisme

$$t^i : F^j(\mathbf{A}_m) \to F^{j+i}(\mathbf{A}_m) \quad .$$

Ceci prouve que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, h définit une S-structure du complexe préfiltré A_k . Il est alors évident que l'on obtient ainsi une S-structure sur le système projectif $\mathbf{A}$.

2.1.3.- Nous allons voir que la notion de complexe préfiltré se ramène à la notion de complexe filtré.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de complexes. Soient Z le cône de f et $X_f[1]$ le cône du morphisme $Y \to Z$. On a donc les triangles exacts

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "+1"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "+1"'] & \\ X_f \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

De plus on peut définir des morphismes canoniques $\eta : X \to X_f$, $\xi : X_f \to X$, tels que dans $K(C)$, (η, id_Y, id_Z) et (ξ, id_Y, id_Z) soient des isomorphismes inverses de ces deux triangles.

Soit $f' : X' \to Y'$ un autre morphisme de complexes, et soient $u : X \to X'$, $v : Y \to Y'$ des morphismes tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Y' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si Z' est le cône de f' , les morphismes u et v définissent un morphisme canonique $w : Z \to Z'$. De même v et w définissent un morphisme canonique $s : X_f \to X_{f'}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X_f \arrow[r] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d, "u"] \\ X' \arrow[r] & X_{f'} \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

est commutatif.

PROPOSITION 2.1.3.1.- Soit $\mathbf{A} = (A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ un système projectif de complexes, à degrés uniformément bornés inférieurement ; munissons $\mathbf{A}$ de la préfiltration canonique définie dans 2.1.1. On peut trouver un système projectif strict de complexes $X = (X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ (EGA 0_{III} 13.4.2) , à degrés uniformément bornés inférieurement, tel que, si l'on munit chaque X_k de la filtration associée $(F'^j(X_k))_{j \in \mathbf{N}}$ (EGA 0_{III} 13.5.2), on ait, dans $D(C)$, des isomorphismes

$$\theta_k^j : F^j(A_k) \to F'^j(X_k)$$

$j,k \in \mathbb{N}$, tels que, pour tous $j \geq j'$, $k \geq k'$, les diagrammes

$$(**) \quad \begin{tikzcd} F^j(A_k) \arrow[r, no head, "\theta_k^j"] \arrow[d, no head] & F'^j(X_k) \arrow[d, no head] \\ F^{j'}(A_k) \arrow[r, no head, "\theta_k^{j'}"] & F'^{j'}(X_k) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^j(A_k) \arrow[r, no head, "\theta_k^j"] \arrow[d, no head] & F^j(X_k) \arrow[d, no head] \\ F^j(A_{k'}) \arrow[r, no head, "\theta_{k'}^j"] & F'^j(X_{k'}) \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Supposons que tout objet de C soit sous-objet d'un injectif. Alors on peut choisir X de sorte que les $F'^j(X_k)$ aient tous leurs objets injectifs.

Soit $A' = (A'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un autre système projectif de complexes et soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un morphisme de A dans A' . Si $X' = (X'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système projectif de complexes filtrés associé à A' , on peut trouver un morphisme $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X dans X' , tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, le diagramme de $D(C)$,

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[r, "\theta_k^o"] \arrow[d, "a_k"'] & X_k \arrow[d, "x_k"] \\ A'_k \arrow[r, "\theta'^o_k"] & X'_k \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Montrons d'abord que l'on peut trouver un système projectif strict de complexes $X = (X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et des quasi-isomorphismes $\theta_k : A_k \to X_k$, tels que, pour tous $k \geq j$, le diagramme suivant de $K(C)$ soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[r, "\theta_k"] \arrow[d] & X_k \arrow[d] \\ A_j \arrow[r, "\theta_j"] & X_j \end{tikzcd} .$$

On raisonne par récurrence sur k . Soit i un entier et supposons construit X_k pour $i \geq k$. Si f est le morphisme composé

$$A_{i+1} \to A_i \xrightarrow{\theta_i} X_i \quad ,$$

on pose $Y_{i+1} = (A_{i+1})_f$. Par définition de $(A_{i+1})_f$, le morphisme $(A_{i+1})_f \to X_i$ est surjectif en chaque degré. On a d'autre part un isomorphisme canonique $\eta : A_{i+1} \to (A_{i+1})_f$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_{i+1} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & (A_{i+1})_f \arrow[d] \\ A_i \arrow[r] & X_i \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'existence du système projectif X en résulte. Notons que, par construction même, chaque X_i est un facteur direct de X_{i+1} .

On munit X de la préfiltration canonique. Les θ_k permettent de définir des morphismes $\theta_k^j : F^j(A_k) \to F^j(X_k)$, tels que les diagrammes déduits des diagrammes (**) en remplaçant $F'^j(X_k)$ par $F^j(X_k)$ soient commutatifs. Il résulte alors de 2.1.1.1 que l'on peut trouver des quasi-isomorphismes

$$b_k^j : F^j(X_k) \to F'^j(X_k) ,$$

tels que les diagrammes déduits des diagrammes (**) en remplaçant $F^j(A_k)$ par $F^j(X_k)$ soient commutatifs. La première partie de la proposition en résulte.

Supposons que tout objet de C soit sous-objet d'un injectif et montrons que l'on peut choisir X tel que tous les $F^j(X_k)$ aient leurs objets injectifs. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$, on peut trouver un complexe à objets injectifs I_k et un quasi-isomorphisme $A_k \to I_k$, injectif en chaque degré ([6] I 4.6). Cette dernière condition montre que tout morphisme de transition $A_{k+1} \to A_k$ peut se prolonger en un morphisme $I_{k+1} \to I_k$, i.e. que les $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système projectif. Il suffit alors de remplacer A par le système projectif $I = (I_k)_{k\in\mathbb{N}}$; le système projectif de complexes filtrés associé à I est formé de complexes dont tous les objets sont injectifs. Comme chaque X_i est facteur direct de X_{i+1} , les $F^j(X_k)$ ont aussi leurs objets injectifs.

Enfin la dernière assertion de la proposition résulte des propriétés fonctorielles 2.1.3.

2.1.4.- Soit S un anneau muni d'une filtration $(F^i(S))_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $F^0(S) = S$. Soit C une catégorie abélienne dont tout objet est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif, et soit T un foncteur covariant additif de C dans la catégorie C' des groupes abéliens. Soit $A = (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système projectif de complexes, muni de la préfiltration canonique (2.1.1), et supposons que A soit muni d'une S-structure (2.1.2). On note $X = (X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système projectif strict de complexes filtrés, satisfaisant aux conditions de 2.1.3.1, tel que les $F^j(X_k)$ aient leurs objets injectifs. La S-structure donnée sur A se transporte en une S-structure de X . Par application du foncteur T , on obtient un système projectif de complexes filtrés $T(X) = (T(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$; pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a un morphisme d'anneaux

$$h_k : S \to \mathrm{Hom}(T(X_k),T(X_k)) ,$$

tel que, pour tout $t \in F^i(S)$, on ait $h_k(t)(F^j(T(X_k))) \subset F^{i+j}(T(X_k))$.

D'après EGA 0_{III} 13.7.3, on peut associer à chaque $T(X_k)$ une suite spectrale $E(T(X_k))$; les systèmes projectifs $(Z_r^{pq}(T(X_k)))_{k\in\mathbb{N}}$, $(B_r^{pq}(T(X_k)))_{k\in\mathbb{N}}$, $(E_r^{pq}(T(X_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ sont essentiellement constants (EGA 0_{III} 13.5.4) ; on note $Z_r^{pq}(T(X))$, $B_r^{pq}(T(X))$, $E_r^{pq}(T(X))$ leurs limites projectives respectives. De plus les considérations de EGA 0_{III} 13.6.5 et 13.6.6 (resp.

13.7.6) s'appliquent à chaque $T(X_k)$ (resp. à $T(X)$) . En particulier les $(Z_r^{pq}(T(X)))$, $B_r^{pq}(T(X))$, $E_r^{pq}(T(X))$ sont des $gr^{\bullet}(S)$-C'-modules bigradués pour t fini.

Considérons le cas où le système projectif $(E_r^{pq}(T(X)))_{r\in \mathbb{Z}}$ est essentiellement constant et notons $E_\infty^{pq}(T(X))$ la limite projective de ce système. Si $E_\infty^{(n)}(T(X))$ désigne la somme des $E_\infty^{pq}(T(X))$ tels que $p+q = n$, les $E_\infty^{(n)}(T(X))$ sont des $gr^{\bullet}(S)$-C'-modules gradués et l'on a des isomorphismes de $gr^{\bullet}(S)$-C'-modules gradués

$$E_\infty^{(n)}(T(X)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k gr^{\bullet}(R^nT(X_k)) \xrightarrow{\sim} gr^{\bullet}(R^nT(X)) .$$

Par définition même de X , $R^nT(X_k)$ s'identifie à $R^nT(A_k)$ pour tout k et le $gr^{\bullet}(S)$-C'-module gradué $(R^mT(gr^p(X)))_{p\in \mathbb{N}}$ à $(R^mT(gr^p(A)))_{p\in \mathbb{N}}$. On peut donc recopier la démonstration de EGA 0_{III} 13.7.7, les notations $Z_r^{pq}(T(A))$, $E_r^{pq}(T(A))$, etc. étant remplacées par $Z_r^{pq}(T(X))$, $E_r^{pq}(T(X))$, etc. On obtient l'analogue suivant de EGA 0_{III} 13.7.7 :

PROPOSITION 2.1.4.1.- Soit S un anneau noethérien I-adique. Supposons que C soit une catégorie abélienne dont tout objet est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif et soit T un foncteur covariant additif de C dans la catégorie des groupes abéliens. Soit $A = (A_k)_{k\in \mathbb{N}}$ un système projectif de complexes de C , à degrés uniformément bornés inférieurement, tel que le système projectif de complexes préfiltrés associé (2.1.1) soit muni d'une S-structure (2.1.2). On suppose que, pour un entier n donné, la condition suivante est vérifiée :

(F_n) Le $gr^{\bullet}(S)$-module gradué $E_1^{(m)}(A) = (R^mT(gr^p(A)))_{p\in \mathbb{N}}$ est de type fini pour $m = n$ et $m = n+1$.

Alors on a les conclusions (i), (ii), (iii), (iv) de EGA 0_{III} 13.7.7.

THEOREME 2.2.- Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ V \arrow[r, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd} ,$$

où S est un schéma affine noethérien, localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, f et g des morphismes projectifs, i une immersion ouverte. Soient L un faisceau f-ample sur X , L' un faisceau g-ample sur Z , s une section globale de L , définissant une section hyperplane Y de X ; posons $H = h^{-1}(Y)$. Soient $\hat{X}$ (resp. $\hat{V}$, resp. $\hat{Z}$) le complété formel de X (resp. de V , resp. de Z) le long de Y (resp. de $Y \cap V$, resp. de H) , d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{Z} \arrow[d, "\hat{g}"'] \arrow[dr, "\hat{h}"] & \\ \hat{V} \arrow[r, "\hat{i}"] & \hat{X} \arrow[d, "\hat{f}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Posons $T = X-V$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{Z}$. Supposons que, pour tout point x de $\hat{V}$, qui est fermé dans sa fibre ou qui satisfait à la relation $\operatorname{codim}(\{\overline{x}\}\cap T, \{\overline{x}\}) = 1$, et pour tout point z de $\hat{Z}$, fermé dans sa fibre au-dessus d'un tel point x , on ait

$$\operatorname{prof}_z \mathcal{F}_z \geq 3 .$$

Alors, si l'on pose

$$\mathcal{F}_{n'}(n) = \mathcal{F} \otimes \hat{L}'^{n} \otimes \hat{h}^*(\hat{L}^n) \quad ,$$

on a les conclusions suivantes :

1) On peut trouver un entier n'_o tel que, pour tout $n' \geq n'_o$ et tout n , le faisceau $(\hat{f}\hat{h})_*\mathcal{F}_{-n'}(n)$ soit cohérent.

2) Soit W un ouvert de V tel que g induise un isomorphisme $g^{-1}(W) \simeq W$. Fixons un entier $n' \geq n'_o$. Alors on peut trouver un entier n_o (dépendant de n') et, pour tout $n \geq n_o$, un ensemble fini de sections globales $(s_i)_{i\in I}$ de $\hat{h}_*\mathcal{F}_{-n'}(n)$, tel que les $s_i|\hat{W}$ engendrent $\hat{h}_*\mathcal{F}_{-n'}(n)|\hat{W}$.

1) Soit $t = h^*(s)$; $(\hat{t})$ est alors un idéal de définition de $\hat{Z}$. Posons $k = fh$. Si $S = \operatorname{Spec} R$, on considère R comme un anneau I-adique , I étant l'idéal nul. Soient n et n' deux entiers ; pour tout $p \geq 0$, soit $\mathcal{F}^p_{-n'}(n)$ le cône du morphisme $\hat{t}^{p+1} : \mathcal{F}_{-n'}(n-p-1) \to \mathcal{F}_{-n'}(n)$, i.e. le complexe

$$\dots \to 0 \to \mathcal{F}_{-n'}(n-p-1) \xrightarrow{\hat{t}^{p+1}} \mathcal{F}_{-n'}(n) \to 0 \to \dots$$

dont les seuls objets non nuls sont de degré -1 ou 0 . Les $\mathcal{F}^p_{-n'}(n)$ forment de façon naturelle un système projectif de commlexes préfiltré $\mathbf{A}$ muni d'une R-structure (cf. 2.1.2). Considérons d'autre part le système projectif des

$$\mathcal{F}'^p_{-n'}(n) = \mathcal{F}_{-n'}(n)/\hat{t}^{p+1}\mathcal{F}_{-n'}(n-p-1) \ ,$$

$p\in\mathbf{N}$. On a des morphismes canoniques

$$a^p : \mathcal{F}^p_{-n'}(n) \to \mathcal{F}'^p_{-n'}(n) \ ,$$

qui induisent des isomorphismes sur les objets de cohomologie de degré zéro. D'autre part on a $\underline{H}^{-1}(\mathcal{F}^p_{-n'}(n)) = \ker \hat{t}^{p+1}$ et, pour tous $p \geq q$, le morphisme de transition

$$\underline{H}^{-1}(\mathfrak{J}^p_{-n'}(n)) \to \underline{H}^{-1}(\mathfrak{J}^q_{-n'}(n))$$

est la multiplication par $\hat{t}^{p-q}$. Par suite le système projectif des $\underline{H}^{-1}(\mathfrak{J}^p_{-n'}(n))$ est nul. On a en particulier un isomorphisme (I 1.6.3)

$$\varprojlim_m H^0(\hat{Z},\mathfrak{J}^p_{-n'}(n)) \simeq \varprojlim_m H^0(\hat{Z},\mathfrak{J}_{-n'}(n)/\hat{t}^{p+1}\mathfrak{J}_{-n'}(n-p-1)) \simeq H^0(\hat{Z},\mathfrak{J}_{-n'}(n)) .$$

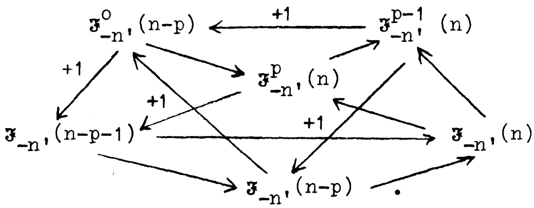
Comme cette relation reste vraie quand on remplace S par un ouvert affine, il suffit, pour prouver 1), de montrer que le faisceau $\varprojlim_p H^0(\hat{Z},\mathfrak{J}^p_{-n'}(n))$ est de type fini, du moins pour n' assez grand.

D'après 2.1.4.1, il suffit de montrer que les R-modules

$$K^0 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} H^0(\hat{Z},gr^p(A)) \qquad K^1 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} H^1(\hat{Z},gr^p(A))$$

sont de type fini. Ecrivons l'axiome de l'octaèdre pour le morphisme composé

$$\mathfrak{J}_{-n'}(n-p-1) \xrightarrow{\hat{t}} \mathfrak{J}_{-n'}(n-p) \xrightarrow{\hat{t}^p} \mathfrak{J}_{-n'}(n) :$$



On en déduit un isomorphisme

$$gr^p(A) \simeq \mathfrak{J}^0_{-n'}(n-p) .$$

Les expressions K^0 et K^1 se mettent alors sous la forme

$$K^0 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} H^0(\hat{Z},\mathfrak{J}^0_{-n'}(n-p)) \qquad K^1 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} H^1(\hat{Z},\mathfrak{J}^0_{-n'}(n-p)) .$$

On peut trouver un entier $r>0$ tel que l'on ait

$$\mathrm{Im}(\mathfrak{J}(-2r) \xrightarrow{\hat{t}^r} \mathfrak{J}(-r)) \cap \mathrm{Ker}(\mathfrak{J}(-r) \xrightarrow{\hat{t}^r} \mathfrak{J}) = 0 .$$

Par suite, quitte à remplacer t par t^r et $\mathfrak{J}$ par $\bigoplus_{0\le n\le r-1} \mathfrak{J}(n)$, on peut supposer que l'on a

$$\mathrm{Im}(\mathfrak{J}(-2) \xrightarrow{\hat{t}} \mathfrak{J}(-1)) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathfrak{J}(-1) \xrightarrow{\hat{t}} \mathfrak{J}) = 0 .$$

Le complexe $\mathfrak{J}^0$ est alors quasi-isomorphe au complexe

$$\dots \to 0 \to \mathfrak{J}(-1)/\hat{t}\,\mathfrak{J}(-2) \xrightarrow{\hat{t}} \mathfrak{J}/\hat{t}^2\,\mathfrak{J}(-2)) \to 0 \to ;$$

en particulier $\mathfrak{J}^0$ est quasi-isomorphe à un complexe $\hat{F}^0$, où F^0 est un complexe concentré sur H.

Montrons que, pour n' assez grand, tous les termes figurant dans K^0 et K^1 sont de type fini. Pour tout x de $Y \cap V$, fermé dans sa fibre ou tel que $\operatorname{codim}(\{\bar{x}\} \cap T, \{\bar{x}\}) = 1$, et pour tout point z de H, fermé dans sa fibre au-dessus d'un tel point x, les hypothèses entraînent la relation

$$(*) \qquad \operatorname{prof}_z(F^0_z) \geq 2 \quad .$$

D'après 1.1, appliqué à h, on peut donc trouver un entier n''_0 tel que, pour tout $n' \geq n''_0$, les faisceaux

$$h_*(F^0_{-n'}) \qquad\qquad R^1h_*(F^0_{-n'})$$

soient cohérents. Comme f est propre, il en est de même des faisceaux

$$f_*h_*(F^0_{-n'}(n)) \qquad\qquad f_*(R^1h_*(F^0_{-n'}(n))) \qquad\qquad R^1f_*(h_*(F^0_{-n}(n))) \quad ,$$

quel que soit n. Compte tenu de la suite exacte

$$0 \to R^1f_*(h_*(F^0_{-n'}(n))) \to R^1k_*(F^0_{-n'}(n)) \to f_*(R^1h_*(F^0_{-n'}(n))) \quad ,$$

on voit que les faisceaux $k_*(F^0_{-n'}(n))$ et $R^1k_*(F^0_{-n'}(n))$ sont cohérents pour $n' \geq n''_0$ et n quelconque.

D'autre part les termes qui figurent dans K^0 et K^1 sont nuls pour p assez grand. En effet la relation (*) permet d'appliquer le théorème 1.2 ; on en déduit l'existence d'un entier n'_0 et, pour tout $n' \geq n'_0$, d'un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$k_*(F^0_{-n'}(-n)) = 0 \qquad\qquad R^1k_*(F^0_{-n'}(-n)) = 0 \quad .$$

On choisit $n'_0 \geq n''_0$; les R-modules K^0 et K^1 sont de type fini pour $n' \geq n'_0$ et n quelconque, ce qui démontre 1).

2) On peut trouver un entier k tel que $L^{\otimes k}$ soit très ample. Quitte à remplacer L par $L^{\otimes k}$, s par $s^{\otimes k}$ et $\mathcal{F}$ par $\bigoplus_{0 \leq n \leq k-1} \mathcal{F}(n)$, on peut supposer L très ample. Soit $n' \geq n'_0$ un entier fixé. Nous allons montrer que le système projectif des

$$H_q = H^0(\hat{X}, \coprod_{n \in \mathbf{Z}} \hat{h}_*(\mathcal{F}^q_{-n'}(n))$$

satisfait à la condition de Mittag-Leffler (cf. SGA 2 XII 3.3). Soit $\mathcal{S}$ une R-algèbre graduée à degrés positifs, engendrée par un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{S}_1$, telle que l'on ait $X \simeq \operatorname{Proj} \mathcal{S}$, $L \simeq \mathcal{O}_X(1)$ et telle que la section s soit induite par un élément $s_1 \in \mathcal{S}_1$. Si $J = s_1\mathcal{S}$, on munit $\mathcal{S}$ de la filtration J-adique, on pose $\mathcal{G}^q = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}^q_{-n'}(n)$ et on considère le système projectif $A' = (\mathcal{G}^q)_{q \in \mathbf{N}}$ dans la catégorie des faisceaux abéliens sur $\hat{Z}$. On applique 2.1.4.1. Il suffit, pour prouver que le système projectif des H_q satisfait à la condition de Mittag-Leffler, de montrer que les modules

$$K'^{0} = \coprod_{p\in\mathbf{N}} H^{0}(\hat{Z},gr^{p}(\mathbf{A}')) \qquad K'^{1} = \coprod_{p\in\mathbf{N}} H^{1}(\hat{Z},gr^{p}(\mathbf{A}'))$$

sont de type fini sur $gr_J(\mathfrak{S})$. On considère $gr_J(\mathfrak{S})$ comme quotient de $\mathfrak{S}[T]$, l'image de T étant l'élément s_1 de $gr_J^1(\mathfrak{S})$. Compte tenu de l'isomorphisme $gr^{p}(\mathbf{A}')\simeq\coprod_{n\in\mathbf{Z}} F^{0}_{-n'}(n)$, on a des isomorphismes de $\mathfrak{S}[T]$-modules

$$K'^{0}\simeq\coprod_{n\in\mathbf{Z}} H^{0}(Z,F^{0}_{-n'}(n))\otimes_{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}[T] \qquad K'^{1}\simeq\coprod_{n\in\mathbf{Z}} H^{1}(Z,F^{0}_{-n'}(n))\otimes_{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}[T] \ .$$

On est donc ramené à montrer que les $\mathfrak{S}$-modules

$$M^{0} = \coprod_{n\in\mathbf{Z}} H^{0}(Z,F^{0}_{-n'}(n)) \qquad M^{1} = \coprod_{n\in\mathbf{Z}} H^{1}(Z,F^{0}_{-n'}(n))$$

sont de type fini. D'après 1.2, on peut trouver un entier n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, on ait

$$H^{0}(Z,F^{0}_{-n'}(-n)) = H^{1}(Z,F^{0}_{-n'}(-n)) = 0 \ .$$

On considère d'autre part la suite exacte

$$0 \to H^{1}(X,(h_*F^{0}_{-n'})(-n)) \to H^{1}(Z,F^{0}_{-n'}(-n)) \to H^{0}(X,(R^{1}h_*F^{0}_{-n'})(-n)) \ .$$

Comme les faisceaux $h_*F^{0}_{-n'}$ et $R^{1}h_*F^{0}_{-n'}$ sont cohérents, il résulte de EGA III 2.2.1 et 2.3.1 que les $\mathfrak{S}$-modules

$$\coprod_{n\geq -n_1} H^{i}(X,(h_*F^{0}_{-n'})(n)) \qquad \coprod_{n\geq -n_1} H^{i}(X,(R^{1}h_*F^{0}_{-n'})(n))$$

sont de type fini pour tout i . Il en est donc de même de M^0 et M^1 , ce qui démontre que le système projectif des H_q satisfait à la condition de Mittag-Leffler.

D'après I 1.6.3, il en est de même du système projectif des

$$H'^{q} = H^{0}(X,\coprod_{n\in\mathbf{Z}} h_*\ \mathfrak{F}'^{q}_{-n'}(n)) \ ,$$

où $\mathfrak{F}'^{q}$ a le même sens que dans 1). Soit alors q_0 un entier tel que, pour $q \geq q_0$, on ait

$$Im(H'^{q} \to H'^{0}) = Im(H^{q_0} \to H^{0}) \ .$$

On peut trouver un entier n_{q_0} tel que, pour $n \geq n_0$, le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $(h_*\mathfrak{F}'^{q_0}_{-n'})(n)$ soit engendré par un nombre fini de ses sections $\bar{s}_i$ (EGA II 4.6.8). Les images $\tilde{s}_i$ de ses sections dans $(h_*\mathfrak{F}'^{0}_{-n'})(n)$ se relèvent en des sections s_i de $\hat{h}_*\ \mathfrak{F}_{-n'}(n)$, par définition de q_0 . Comme les $\tilde{s}_i|W$ engendrent la restriction à W de $\mathfrak{F}_{-n'}(n)/\hat{t}\ \mathfrak{F}_{-n'}(n)$, il résulte du lemme de Nakayama que les s_i engendrent $\mathfrak{F}_{-n'}(n)|\hat{W}$.

THEOREME 2.3.- Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ V \arrow[r, "i"] & S \end{tikzcd} ,$$

où S est un schéma local noethérien complet, i une immersion ouverte, g un morphisme propre et soit L un faisceau g-ample. Soient s une section globale de S, $Y = V(s)$, $H = h^{-1}(Y)$ et notons $\hat{S}$ le complété formel de S le long de Y, $\hat{V}$ le complété formel de V le long de $Y \cap V$, $\hat{Z}$ le complété formel de Z le long de H, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{Z} \arrow[d, "\hat{g}"'] \arrow[dr, "\hat{h}"] & \\ \hat{V} \arrow[r, "\hat{i}"] & \hat{S} \end{tikzcd} .$$

Posons $T = S-V$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{Z}$. Supposons que, pour tout point $x \in \hat{V}$, tel que $\mathrm{codim}(\{\bar{x}\} \cap T, \{\bar{x}\}) = 1$, et pour tout point z de $\hat{Z}$, fermé dans sa fibre au-dessus d'un tel point x, on ait

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_z \geq 3 .$$

Alors, si l'on pose $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \otimes L^n$, on peut trouver un entier n_o tel que, pour $n \geq n_o$, le faisceau $\hat{h}_* \mathcal{F}_{-n}$ soit cohérent.

Soit $t = h^* s$; $(\hat{t})$ est alors un idéal de définition de $\hat{Z}$. Si $S = \mathrm{Spec}\, R$, on considère R comme muni de la filtration (s)-adique. Soit $n \in \mathbb{N}$; pour tout entier $p \geq 0$, soit $\mathcal{F}^p_{-n}$ le cône de la multiplication par $\hat{t}^{p+1}$ dans $\mathcal{F}_{-n}$. D'après 2.1.2, $A = (\mathcal{F}^p_{-n})_{p \in \mathbb{N}}$ est un système projectif de complexes préfiltrés, muni d'une S-structure. Considérons d'autre part le système projectif

$$A' = (\mathcal{F}_{-n}/\hat{t}^{p+1}\mathcal{F}_{-n})_{p \in \mathbb{N}} .$$

On a des morphismes canoniques

$$a^p : \mathcal{F}^p_{-n} \to \mathcal{F}_{-n}/\hat{t}^{p+1}\mathcal{F}_{-n} ,$$

qui induisent des isomorphismes sur les faisceaux de cohomologie de degré zéro. Comme on a $\underline{H}^{-1}(\mathcal{F}^p_{-n}) = \mathrm{Ker}\, \hat{t}^{p+1}$, le morphisme de transition

$$\hat{t}^k : \underline{H}^{-1}(\mathcal{F}^{p+k}_{-n}) \to \underline{H}^{-1}(\mathcal{F}^p_{-n})$$

est nul pour $k \geq p+1$. Par suite les morphismes a_p définissent, par passage à la limite projective, un isomorphisme

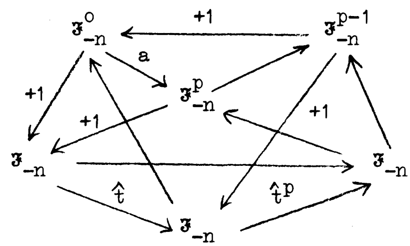
$$\varprojlim_p H^o(\hat{Z}, \mathcal{F}^p_{-n}) \simeq \varprojlim_p H^o(\hat{Z}, \mathcal{F}_{-n}/\hat{t}^{p+1}\mathcal{F}_{-n}) = H^o(\hat{Z}, \mathcal{F}_{-n}) .$$

Il suffit donc de prouver que, pour n assez grand, $\varprojlim_p H^o(\hat{Z}, \mathcal{F}^p_{-n})^{\sim}$ est cohérent. D'après 2.1.4.1 et EGA 0_{III} 13.7.8, il suffit de montrer que les $gr^{\bullet}(R)$-modules

$$K^0 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} H^0(\hat{Z}, gr^p(\mathbf{A})) \qquad K^1 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} H^1(\hat{Z}, gr^p(\mathbf{A}))$$

sont de type fini.

Appliquons l'axiome de l'octaèdre au morphisme composé de la multiplication par $\hat{t}$ et par $\hat{t}^p$ de $\mathfrak{I}_{-n}$, d'où un diagramme où apparaissent quatre triangles :



On en déduit un isomorphisme

$$\mathfrak{I}^o_{-n} \simeq gr^p(\mathbf{A}) \quad ;$$

Comme le morphisme composé $\mathfrak{I}^p_{-n} \to \mathfrak{I}^o_{-n} \xrightarrow{a} \mathfrak{I}^p_{-n}$ est la multiplication par $\hat{t}^p$, l'isomorphisme ci-dessus n'est autre que l'application $s^p : gr^o(\mathbf{A}) \to gr^p(\mathbf{A})$. Par suite, si l'on considère $gr^{\bullet}(R)$ comme quotient de l'anneau des polynômes à une variable $R[T]$, obtenu en envoyant T sur s, on a des isomorphismes de $R[T]$-modules

$$K^o \simeq H^o(\hat{Z}, \mathfrak{I}^o_{-n}) \otimes_R R[T] \qquad K^1 \simeq H^1(\hat{Z}, \mathfrak{I}^o_{-n}) \otimes_R R[T] .$$

Il suffit alors de prouver que $M_o = H^o(\hat{Z}, \mathfrak{I}^o_{-n})$ et $M_1 = H^1(\hat{Z}, \mathfrak{I}^o_{-n})$ sont des R-modules de type fini pour n assez grand. Quitte à remplacer s par une puissance convenable, on peut supposer que $\hat{t}\mathfrak{I} \cap \operatorname{Ker} \hat{t} = 0$. Le complexe $\mathfrak{I}^o$ est alors quasi-isomorphe au complexe

$$\to 0 \to \mathfrak{I}/\hat{t}\,\mathfrak{I} \xrightarrow{\hat{t}} \mathfrak{I}/\hat{t}^2\mathfrak{I} \to 0 \to \quad ,$$

i.e. à un complexe $\hat{F}_o$, où F_o est un complexe algébrique, concentré sur H. Les hypothèses de profondeur se traduisent par la relation

$$\operatorname{prof}_z(F^o_z) \geq 2$$

en tout point z de Z fermé dans sa fibre au-dessus d'un point x tel que $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}\cap T, \overline{\{x\}}) = 1$. Le fait qu'il existe un entier n_o tel que M_o et M_1 soient de type fini pour $n \geq n_o$ résulte alors de 1.1.

C H A P I T R E   IV

Algébrisation des faisceaux formels cohérents.

Dans tout ce chapitre, X désigne un schéma localement noethérien, Y une partie fermée de X, U l'ouvert $X-Y$, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Etant donné un faisceau de modules cohérent $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$, les théorèmes d'algébrisation (1.4 et 2.8 ci-dessous) donnent des conditions sous lesquelles $\mathfrak{F}$ provient, par complétion formelle, d'un faisceau cohérent sur X. On note d'abord (0) que cette propriété n'est pas changée si l'on remplace $\mathfrak{F}$ par un faisceau "isomorphe sur U". Ceci explique l'absence d'hypothèses sur $\mathfrak{F}$ aux points de Y bien que la démonstration consiste à se ramener au cas où l'on peut appliquer III 2.2 ou 2.3.

0. Préliminaires.

Rappelons la définition suivante (EGA III 5.2.1) :

DEFINITION 0.0.- On dit qu'un faisceau de modules cohérent $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ est algébrisable si l'on peut trouver un voisinage ouvert V de Y dans X et un faisceau cohérent F sur V tel que l'on ait un isomorphisme

$$\hat{F} \simeq \mathfrak{F} .$$

On reprend les notations de II 3.1. Etant donnés deux faisceaux formels cohérents $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et un morphisme $a : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$, on dit que a induit un isomorphisme (resp. est nul, resp. etc.) sur U si, pour tout ouvert affine V de X, le morphisme de faisceaux de modules sur $\hat{X}_{\hat{V}}$

$$a_{\hat{V}} : \mathfrak{F}_{\hat{V}} \to \mathfrak{G}_{\hat{V}} ,$$

déduit de a, est un isomorphisme (resp. est nul, resp. etc.) sur $U_{\hat{V}}$.

PROPOSITION 0.1.- Soient $f : Z \to X$ un morphisme propre tel que f induise un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$. Soient $H = f^{-1}(Y)$ et $\hat{Z}$ le complété formel de Z le long de H, $f : \hat{Z} \to \hat{X}$ le morphisme déduit de f. Soient $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$ et $\mathfrak{G}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{Z}$. Supposons que l'on ait un morphisme

$$a : \hat{f}^{*}\mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \qquad (\text{resp. } a : \mathfrak{G} \to \hat{f}^{*}\mathfrak{F}) ,$$

induisant un isomorphisme au-dessus de U. Alors, pour que $\mathfrak{F}$ soit algébrisable, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\mathfrak{G}$.

1) Montrons que, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont des faisceaux de modules cohérents sur $\hat{X}$ et si l'on a un morphisme $b : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ qui induit un isomorphisme sur U , alors $\mathcal{F}$ est algébrisable si et seulement si $\mathcal{H}$ l'est.

Soit $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\ b$, $\mathcal{L} = \mathrm{Coker}\ b$. Pour tout ouvert affine V de X , on a

$$\mathcal{K}_{\hat{V}}|U_{\hat{V}} = \mathcal{L}_{\hat{V}}|U_{\hat{V}} = 0 \quad .$$

L'assertion résulte alors des faits suivants :

a) Un faisceau formel cohérent $\mathfrak{M}$ nul sur U , est algébrisable de façon unique par un faisceau de support contenu dans Y . Soit en effet I un idéal définissant Y . Pour tout ouvert affine V de X , on peut trouver un entier n tel que l'on ait $I^n\mathfrak{M} = 0$. Si $Y_n \cap V$ désigne le sous-schéma fermé de V défini par I^n , $\mathfrak{M}/\hat{I}^n$ peut être considéré comme un faisceau cohérent M_n sur $Y_n \cap V$. On a alors $\hat{M}_n \simeq \eta|V$, et les M_n se recollent en un faisceau cohérent M tel que $\hat{M} \simeq \eta$.

b) Si $h : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$ est un morphisme de faisceaux formels cohérents algébrisables et si $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M}'$ est nul sur U , alors le morphisme h est algébrisable de façon unique. On se ramène en effet, comme dans a), au cas affine et le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{X}}(\mathfrak{M}',\mathfrak{M})$ est en fait un faisceau sur un schéma Y_n pour n convenable.

c) Si

$$0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$$

est une suite exacte de faisceaux formels cohérents, si $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ sont algébrisables et si l'un deux est nul sur U , alors $\mathfrak{M}$ est algébrisable. On note en effet que, si N est un faisceau de modules cohérent sur X , de support contenu dans Y , le morphisme canonique

$$H^q(X,N) \to H^q(\hat{X},\hat{N})$$

est bijectif pour tout $q \geq 0$. Soit W un voisinage ouvert de Y dans X et soit M' (resp. M'') un faisceau cohérent sur W tel que l'on ait un isomorphisme $\mathfrak{M}' \simeq \hat{M}'$ (resp. $\mathfrak{M}'' \simeq \hat{M}''$) . Les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^q_X(M',M'')$ ont leur support contenu dans Y pour tout $q \geq 0$. Par suite le morphisme canonique

$$(*) \qquad H^p(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q_X(M',M'')) \to H^p(\hat{X},\underline{\mathrm{Ext}}^q_X(M',M'')\hat{\ })$$

est bijectif pour tous p , $q \geq 0$. D'après EGA 0_{III} 12.3.5, on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Ext}}^q_X(M',M'')\hat{\ } \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^q_{\hat{X}}(\hat{M}',\hat{M}'') \quad .$$

On déduit alors de (*) que le morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} H^p(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q_X(M',M'')) & \Rightarrow & \mathrm{Ext}^{p+q}_X(M',M'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(\hat{X},\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\hat{X}}(\hat{M}',\hat{M}'')) & \Rightarrow & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\hat{X}}(\hat{M}',\hat{M}'') \end{array}$$

est un isomorphisme sur les termes E_2^{pq} , donc est un isomorphisme. En particulier le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_X(M',M'') \to \mathrm{Ext}^1_{\hat{X}}(\hat{M}',\hat{M}'')$$

est un isomorphisme, ce qui prouve que $\mathfrak{M}$ est algébrisable.

2) Démontrons maintenant la proposition. Si $\mathfrak{F}$ est algébrisable, il en est de même de $\hat{f}^*\mathfrak{F}$ donc $\mathcal{G}$ est algébrisable d'après 1). Si $\mathcal{G}$ est algébrisable, il en est de même de $\hat{f}^*\mathfrak{F}$ d'après 1). Montrons que $\hat{f}_*\hat{f}^*\mathfrak{F}$ est algébrisable. Comme le morphisme f est propre, on peut trouver un voisinage ouvert W de Y dans X et un faisceau de modules cohérent H sur $f^{-1}(W)$ tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{H} \simeq \hat{f}^*\mathfrak{F}$; on a alors un isomorphisme canonique

$$(f_*H)^\wedge \simeq \hat{f}_*\hat{f}^*\mathfrak{F}$$

(EGA III 4.1.5). D'après 0.2 ci-dessous, le morphisme $\mathfrak{F} \to \hat{f}_*\hat{f}^*\mathfrak{F}$ induit un isomorphisme sur U ; il résulte donc de 1) que $\mathfrak{F}$ est algébrisable.

LEMME 0.2.- Sous les hypothèses de 0.1, le morphisme canonique

$$c : \mathfrak{F} \to \hat{f}_*\hat{f}^*\mathfrak{F} \qquad (\text{resp. } d : \hat{f}^*\hat{f}_*\mathcal{G} \to \mathcal{G})$$

est un isomorphisme au-dessus de U (resp. au-dessus de $f^{-1}(U)$) .

Si I est un idéal définissant Y , on peut supposer X affine, complet pour la topologie I-adique. Montrons que c est un isomorphisme sur U . Le faisceau $\mathfrak{F}$ est de la forme $\hat{F}$, où F est un faisceau de modules cohérent sur X .

Compte tenu de l'isomorphisme

$$\hat{f}_*\hat{f}^*\mathfrak{F} \simeq (f_*f^*F)^\wedge$$

(EGA III 4.1.5), le morphisme c s'identifie au morphisme canonique

$$\hat{F} \to (f_*f^*F)^\wedge .$$

La restriction de ce dernier à U est un isomorphisme car il en est ainsi de f .

Montrons que d est un isomorphisme sur $f^{-1}(U)$. D'après EGA III 5.1.4, on peut trouver un faisceau cohérent G sur Z tel que $\mathcal{G}$ soit isomorphe au complété formel $\hat{G}$ de G . Compte tenu de l'isomorphisme

$$(f_*G)^\wedge \simeq \hat{f}_*\hat{G} ,$$

le morphisme d s'identifie au complété formel du morphisme canonique

$$e : f^*f_*G \to G .$$

Pour tout ouvert affine V de Z , le morphisme $d_{\hat{V}}$ est l'image inverse de e par le morphisme $\hat{Z}_{\hat{V}} \to Z$. Comme $e|f^{-1}(U)$ est un isomorphisme, il en est de même de $d_{\hat{V}}|U_{\hat{V}}$.

0.3.- Soient $p : S' \to S$ un morphisme fidèlement plat quasi-compact, $S'' = S'\times_S S'$, $S''' = S'\times_S S'\times_S S'$. On suppose S , S' , S'' , S''' noethériens. Considérons les projections canoniques

$$(*) \qquad S \xleftarrow{p} S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} S'' \xleftarrow[p_{13}]{p_{12},\ p_{23}} S''' \ .$$

Soit Y une partie fermée de S , Y' (resp. Y'' , resp. Y''') son image inverse sur S' (resp. S'' , resp. S''') et notons $\hat{S}$ le complété formel de S le long de Y , $\hat{S}'$ (resp. $\hat{S}''$, resp. $\hat{S}'''$) le complété formel de S' (resp. S'' , resp. S''') le long de Y' (resp. Y'' , resp. Y''') . Soit $\mathfrak{F}'$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{S}'$. Une donnée de descente sur $\mathfrak{F}'$ relativement au morphisme $\hat{p} : \hat{S}' \to \hat{S}$ est la donnée d'un isomorphisme

$$\alpha : \hat{p}_1{}^*\mathfrak{F}' \to \hat{p}_2{}^*\mathfrak{F}' ,$$

satisfaisant à la relation

$$(**) \qquad p_{23}^*(\alpha)p_{12}^*(\alpha) = p_{13}^*(\alpha) .$$

Une donnée de descente sur un faisceau formel est effective. Pour le voir on se ramène au cas d'un faisceau de modules cohérent sur un schéma noethérien de la façon suivante. Si I est un idéal définissant Y , on pose

$$F_n' = \mathfrak{F}'/I^{n+1}\mathfrak{F}' .$$

Pour chaque entier $n \geq 0$, la donnée de descente sur $\mathfrak{F}'$ définit, par réduction modulo I^{n+1} , une donnée de descente sur F_n' relativement au morphisme p. D'après SGA 1 VIII 1.3, cette donnée de descente est effective, d'où l'existence d'un faisceau de modules cohérent F_n sur Y_n et d'un isomorphisme

$$\beta_n : p^*F_n \sim F_n'$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p_1^*p^*F_n \arrow[r, "p_1^*\beta_n"] \arrow[d, equal] & p_1^*F_n' \arrow[d, "\alpha_n"] \\ p_2^*p^*F_n \arrow[r, "p_2^*\beta_n"] & p_2^*F_n' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour chaque $n \geq 0$, le morphisme surjectif canonique $F_{n+1}' \to F_n'$ se descend en un morphisme surjectif $F_{n+1} \to F_n$. Le système projectif des F_n , $n\in N$, définit alors un faisceau formel cohérent $\hat{\mathfrak{F}}$ sur $\hat{S}$ (EGA I 10.11.3) ; les morphismes β_n définissent un isomorphisme

$$\beta : \hat{p}^*\mathfrak{F} \simeq \mathfrak{F}'$$

tel que $\alpha\hat{p}_1^*\beta = \hat{p}_2^*\beta$, ce qui démontre que la donnée de descente est effective.

Nous allons généraliser la descente des faisceaux formels cohérents au cas où la donnée de descente n'est définie que sur "l'ouvert U' complémentaire de Y' ". De façon précise, on considère la catégorie déduite de la catégorie des faisceaux de modules cohérents sur $\hat{S}$ (resp. $\hat{S}'$, resp. $\hat{S}''$) obtenue en identifiant deux morphismes égaux sur U (resp. U' , resp. U'') et en rendant inversible les morphismes qui induisent un isomorphisme sur U (resp. U' , resp. U'') ([6] I 3). On appelle pseudo-donnée de descente une donnée de descente dans la catégorie ci-dessus, i.e. la donnée d'un pseudo-isomorphisme $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$,

$$\begin{tikzcd} \hat{p}_1^*\mathfrak{F}' \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \hat{p}_2^*\mathfrak{F}' \arrow[dl, "\alpha_2"'] \\ & \mathfrak{M} & \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{M}$ est un faisceau de modules cohérent sur $\hat{S}''$, α_1 et α_2 des morphismes induisant des isomorphismes sur U , tels que l'on ait la relation

$$\hat{p}_{23}^*(\alpha)\hat{p}_{12}^*(\alpha) = \hat{p}_{13}^*(\alpha) \quad .$$

Dire que la pseudo-donnée de descente est effective revient à dire que l'on peut trouver un faisceau de modules cohérent $\mathfrak{F}$ sur $\hat{S}$, un faisceau de modules cohérent $\mathfrak{N}$, des morphismes

$$\begin{tikzcd} \hat{p}^*\mathfrak{F} \arrow[dr, "\beta_1"] & & \mathfrak{F}' \arrow[dl, "\beta_2"'] \\ & \mathfrak{N} , & \end{tikzcd}$$

qui induisent des isomorphismes sur U , tels que, si β est le pseudo-isomorphisme (β_1 , β_2) , on ait

$$(***) \qquad \alpha(\hat{p}_1^*\beta) = \hat{p}_2^*\beta \quad .$$

PROPOSITION 0.4.- Toute pseudo-donnée de descente relative au morphisme $\hat{p} : \hat{S}' \to \hat{S}$ est effective.

Soit $\mathfrak{F}'$ un faisceau de modules cohérent sur S' muni d'une pseudo-donnée de descente α ,

$$\begin{tikzcd} \hat{p}_1^*\mathfrak{F}' \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \hat{p}_2^*\mathfrak{F}' \arrow[dl, "\alpha_2"'] \\ & \mathfrak{M} . & \end{tikzcd}$$

Pour montrer que cette pseudo-donnée de descente est effective, on se ramène au cas d'un faisceau muni d'une donnée de descente de la façon suivante. On peut supposer que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{M}$ n'ont pas de sous-faisceau non nul de support contenu dans Y'. Nous allons montrer qu'il existe un faisceau de $\mathcal{O}_{\hat{S}'}$-modules cohérent $\mathcal{G}'$, muni d'une donnée de descente

$$\delta : \hat{p}_1^*\mathcal{G}' \to \hat{p}_2^*\mathcal{G}' ,$$

et un pseudo-isomorphisme

$$\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' ,$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \hat{p}_1^*\mathcal{F}' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\hat{p}_1^*\varphi"'] & \hat{p}_2^*\mathcal{F}' \arrow[d, "\hat{p}_2^*\varphi"] \\ \hat{p}_1^*\mathcal{G}' \arrow[r, "\delta"] & \hat{p}_2^*\mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si $\mathcal{G}'$ se descend en un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur $\hat{S}$, on a alors un pseudo-isomorphisme $\beta : \hat{p}^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}'$ qui satisfait à la relation (***), d'où le fait que la pseudo-donnée de descente sur $\mathcal{F}'$ est effective.

Il suffit donc de prouver l'existence de $\mathcal{G}'$. On se ramène au cas d'une pseudo-donnée de descente effective sur $\mathcal{F}'$ en considérant le diagramme déduit de (*) par image inverse par p, p_1, p_2 :

$$\begin{tikzcd} S & S' \arrow[l, "p"'] & S'' \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] & S''' \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \\ S' \arrow[u, "p"] & S'' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[u, "p_2"] & S''' \arrow[l, shift right, "p_{12}"'] \arrow[l, shift left, "p_{13}"] \arrow[u, "p_{23}"] & S'''' \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u] \\ S'' \arrow[u, shift left, "p_1"] \arrow[u, shift right, "p_2"'] & S''' \arrow[l, "p_{12}"'] \arrow[u, shift left, "p_{13}"] \arrow[u, shift right, "p_{23}"'] & S'''' \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & S^{v} \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \end{tikzcd} .$$

Soit $\mathcal{G}'$ le faisceau de $\mathcal{O}_{\hat{S}'}$-modules cohérent, noyau du couple de morphismes

$$\begin{tikzcd} & \hat{p}_{12}^*\hat{p}_2^*\mathcal{F}' \arrow[dr, "\hat{p}_{23}^*\alpha_1"] & \\ \hat{p}_2^*\mathcal{F}' \arrow[ur] \arrow[dr] & & \hat{p}_{23}^*\mathcal{M} \\ & \hat{p}_{13}^*\hat{p}_2^*\mathcal{F}' \arrow[ur, "\hat{p}_{23}^*\alpha_2"'] & \end{tikzcd} .$$

Le faisceau $\mathcal{F}'$ est isomorphe au noyau du couple de morphismes

$$\hat{p}_1^*\mathcal{F}' \overset{\hat{p}_{12}^*}{\underset{\hat{p}_{13}^*}{\rightrightarrows}} \hat{p}_{13}^*\hat{p}_1^*\mathcal{F} = \hat{p}_{12}^*\hat{p}_1^*\mathcal{F}' \quad ;$$

cela résulte en effet, par passage à la limite projective, du fait qu'il en est ainsi après réduction mod. I^{n+1} pour tout $n \geq 0$. Le pseudo-isomorphisme α permet alors de définir un pseudo-isomorphisme de $\mathfrak{F}'$ dans $\mathcal{G}'$. D'après 0.6 ci-dessous la formation de $\mathcal{G}'$ commute à tout changement de base plat. On a un isomorphisme

$$\delta : \hat{p}_1^*\mathcal{G}' \to \hat{p}_2^*\mathcal{G}'$$

satisfaisant à la relation (**) ; cela signifie que $\mathcal{G}'$ est muni d'une donnée de descente et achève la démonstration.

LEMME 0.5.- Soient $\mathbf{A}$ un anneau, I un idéal de $\mathbf{A}$. Si M est un $\mathbf{A}$-module, on pose $M_n = M/I^{n+1}M$. Soit

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de $\mathbf{A}$-modules. Supposons qu'il existe un entier n tel que l'on ait $I^nM \cap M' = 0$ ou $I^nM'' = 0$. Alors la suite

$$0 \to \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, M'_m \to \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, M_m \to \text{"}\varprojlim_m\text{"}\, M''_m \to 0$$

est exacte.

Si $x \in M$, on note x_m son image dans M_m. Soit K_m le noyau du morphisme canonique $M'_m \to M_m$. On doit montrer que le système projectif des K_m est nul. Soit p un entier et montrons que le morphisme canonique

$$K_{p+n} \to K_p$$

est nul. Soit en effet $x \in M'$ tel que $x \in I^{n+p}M$ et montrons que $x_p = 0$. C'est évident si $I^nM \cap M' = 0$ car on a alors $x = 0$. Plaçons-nous dans le cas où $I^nM'' = 0$. On peut trouver un nombre fini d'éléments $y_i \in I^nM$, $a_i \in I^p$ tels que

$$x = \sum_i a_i\, y_i \quad .$$

Comme $I^nM'' = 0$, on a $y_i \in M'$ pour tout i, d'où $x \in I^pM'$, i.e. $x_p = 0$.

COROLLAIRE 0.6.- Soient S, S', S'', I, p, p_1, p_2 comme dans 0.3. Soient $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{S}$, $\mathfrak{F}' = \hat{p}^*\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'_1$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{S}'$ et soit

$$\alpha : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}'_1$$

un pseudo-isomorphisme. On considère le pseudo-isomorphisme composé β

$$\hat{p}_1^*\mathfrak{F}'_1 \xrightarrow{(\hat{p}_1^*\alpha)^{-1}} \hat{p}_1^*\mathfrak{F}' \xrightarrow{\hat{p}_2^*\,\alpha} \hat{p}_2^*\mathfrak{F}'_1 \quad .$$

Supposons β représenté par la donnée de deux morphismes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \hat{p}_1^*\mathcal{F}'_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & & \hat{p}_2^*\mathcal{F}'_1 \arrow[dl, "\beta_2"'] \\ & \mathcal{H} & \end{tikzcd}$$

qui induisent des isomorphismes sur U . Soit $\mathcal{G}$ le noyau du couple de morphismes

(*)
$$\begin{tikzcd} & \hat{p}_1^*\mathcal{F}'_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ \mathcal{F}'_1 \arrow[ur, "\hat{p}_1^*"] \arrow[dr, "\hat{p}^*_2"'] & & \mathcal{H} \\ & \hat{p}_2^*\mathcal{F}'_1 \arrow[ur, "\beta_2"'] & \end{tikzcd}$$

Alors, pour tout morphisme plat $f : X \to S$, où X est noethérien, la formation de $\mathcal{G}$ commute au changement de base $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{S}$.

On considère le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l] \arrow[d, "g"] & X'' \arrow[l, shift left, "q_1"'] \arrow[l, shift right, "q_2"] \arrow[d, "h"] \\ S & S' \arrow[l] & S'' \arrow[l, shift left, "p_1"'] \arrow[l, shift right, "p_2"] \end{tikzcd}$$

On a un diagramme exact

(**)
$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \rightrightarrows \mathcal{F}'' \ .$$

Pour chaque entier $n \geq o$, on note $\mathcal{F}_n$ la réduction de $\mathcal{F}$ mod . I^{n+1} ; $\mathcal{F}_n$ est aussi le noyau du couple de morphisme

$$\mathcal{F}'_n \overset{\hat{p}_1^*}{\underset{\hat{p}_2^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}''_n \ .$$

Soit $\mathcal{K}_n$ le noyau du couple de morphisme

$$(\mathcal{F}'_1)_n \rightrightarrows \mathcal{H}_n \ .$$

Nous allons montrer que l'on a un isomorphisme de système projectifs

$$\text{"}\varprojlim_m\text{"}\ \mathcal{G}_m \to \text{"}\varprojlim_m\text{"}\ \mathcal{K}_m \ .$$

On se ramène, grâce à α , à prouver l'assertion précédente lorsqu'on a de plus un morphisme du diagramme (*) dans (**) ou vice-versa. Plaçons-nous par exemple dans le cas où l'on a un morphisme de (*) dans (**). On considère alors la suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules

$$(***) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{F}'_1 & \to & \mathcal{K} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \\ 0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}'_2 & \to & \mathcal{L} & \to & 0 \end{array}$$

et on note que tous les noyaux ou conoyaux de a , b , c sont annulés par une puissance I^n de I . On en déduit, d'après 2.5, que la suite

$$0 \to \mathrm{Ker}\ a \to \mathrm{Ker}\ b \to \mathrm{Ker}\ c \to \mathrm{Coker}\ a \to \mathrm{Coker}\ b \to \mathrm{Coker}\ c \to 0$$

rest exacte quand on remplace chaque terme par le système projectif de ses réductions mod. m . Comme il en est de même des lignes du diagramme (***), sauf a priori en le terme $"\varprojlim_m" \mathcal{G}_m$, on en déduit que $"\varprojlim_m" \mathcal{G}_m$ est le noyau du morphisme $"\varprojlim_m" (\mathcal{F}'_1)_m \to "\varprojlim_m" \mathcal{K}_m$. On démontre de façon analogue que ce noyau est isomorphe à $"\varprojlim_m" \mathcal{H}_m$.

On a alors un isomorphisme

$$"\varprojlim_m" \hat{f}^*\mathcal{G}_m \to "\varprojlim_m" \hat{f}^*\mathcal{H}_m \quad .$$

Il en résulte que $"\varprojlim_m" \hat{f}^*\mathcal{H}_m$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler et que l'on a des suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim_m \hat{f}^*\mathcal{H}_m & \longrightarrow & \varprojlim_m \hat{f}^*(\mathcal{F}'_1)_m & \rightrightarrows & \varprojlim_m \hat{f}^*\mathcal{N}_m \\ \wr\| & & \wr\| & & \\ \hat{f}^*\mathcal{G} & \longrightarrow & \hat{g}^*\mathcal{F}'_1 & \rightrightarrows & \hat{h}^*\mathcal{N} \end{array} \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

1. Cas global.

Commençons par démontrer un théorème d'algébrisation dans le cas d'un faisceau formel engendré par ses sections.

PROPOSITION 1.1.- Soient S un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, $f : X \to S$ un morphisme propre, Y une partie fermée de X telle que $U = X-Y$ soit affine sur S . On note $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y . Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections.

b) Pour tout point x de $\hat{X}$, fermé dans sa fibre, pour tout point z de $\hat{X}_x$ appartenant à U_x , on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 2-\dim\{\overline{z}\} \ ,$$

où $\{\overline{z}\}$ est l'adhérence de z dans le schéma local $\hat{X}_x$. Alors on peut trouver un faisceau de modules cohérent F sur X tel que l'on ait $\mathrm{prof}_u F \geq 2$ en tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$, et un isomorphisme

$$\hat{F} \simeq \mathfrak{F} \quad .$$

Un tel faisceau F est unique à isomorphisme unique près.

Si F est un faisceau de modules cohérent sur X tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{F} \simeq \mathfrak{F}$, les hypothèses de profondeur faites sur $\mathfrak{F}$ entraînent que, pour tout point y de Y, fermé dans sa fibre, et pour toute générisation u de y, appartenant à U, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 2\text{-}\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\})$$

(II 3.1.1). L'unicité de F résulte alors de I 4.1.

D'après 1.1.1 ci-dessous, il suffit, pour prouver l'existence de F, de montrer que $\mathfrak{F}$ est algébrisable.

1. <u>Le fait que</u> $\mathfrak{F}$ <u>soit algébrisable est local sur</u> S.

Supposons que l'on ait un recouvrement de S par des ouverts S_i, $i \in I$, et, pour tout i, un voisinage cuvert V_i de $f^{-1}(S_i) \cap Y = Y_i$, un faisceau cohérent F_i sur V_i, et un isomorphisme $\hat{F}_i \simeq \mathfrak{F}|\hat{V}_i$. Comme S est noethérien, on peut supposer les S_i en nombre fini. Soient $a_1,\dots,a_n$ des sections globales de $\mathfrak{F}$ qui engendrent $\mathfrak{F}$. Compte tenu de I 3.7, on peut supposer, quitte à restreindre chaque V_i à un ouvert plus petit, que, pour tout i, les $a_1,\dots,a_n$ se relèvent en des sections $a_{i1},\dots,a_{in}$ de F_i au-dessus de V_i ; on peut supposer de plus que les $a_{i1},\dots,a_{in}$ engendrent F_i. Soient $i, j \in I$, $V_{ij} = V_i \cap V_j$, $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$. Comme $\hat{F}_i|\hat{V}_{ij}$ et $\hat{F}_j|\hat{V}_{ij}$ sont isomorphes à $\mathfrak{F}|\hat{V}_{ij}$, on peut trouver un voisinage cuvert W_{ij} de Y_{ij} dans V_{ij} et un isomorphisme

$$\varphi_{ij} : F_i|W_{ij} \to F_j|W_{ij} \quad ,$$

qui induise l'identité sur $\mathfrak{F}|\hat{V}_{ij}$ (I 3.7). Quitte à restreindre W_{ij} à un ouvert contenant Y_{ij}, on peut alors supposer que $\varphi_{ij}(a_{ik}) = a_{jk}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Soit $T_{ij} = V_{ij} - W_{ij}$ et soit θ_{ij} l'immersion canonique de W_{ij} dans V_{ij}. Tout point $u \in T_{ij}$ est fermé dans sa fibre. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait en effet trouver un point $y \in Y_i \cap f^{-1}(f(u))$; le point y appartiendrait à $Y \cap f^{-1}(S_j) = Y_j$, donc à Y_{ij} ; par suite u appartiendrait à W_{ij}. Vu les hypothèses de profondeur sur $\mathfrak{F}$, si x est un point de T_{ij} tel que l'on ait $\mathrm{prof}_x F_i = 0$, on a nécessairement $\{\overline{x}\} \cap Y_i = \emptyset$. Quitte à enlever à V_i une partie fermée ne rencontrant pas Y, on a

$$\mathrm{prof}_{T_{ij}}(F_i|V_{ij}) \geq 1 \quad ,$$

et on peut supposer qu'il en est de même pour F_j . On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_i|V_{ij} \arrow[r] & \theta_{ij*}(F_i|W_{ij}) \arrow[d, "\theta_{ij*}(\varphi_{ij})"] \\
0 \arrow[r] & F_j|V_{ij} \arrow[r] & \theta_{ij*}(F_j|W_{ij})
\end{tikzcd}$$

Les images respectives des sections $a_{i1},\dots,a_{in}$ engendrent $F_i|V_{ij}$. On a donc un morphisme injectif $\psi_{ij} : F_i|V_{ij} \to F_j|V_{ij}$ qui envoie $a_{i1},\dots,a_{in}$ sur $a_{j1},\dots,a_{jn}$, donc est un isomorphisme. Les morphismes ψ_{ij} satisfont alors à la condition de recollement et les F_i définissent donc un faisceau F sur V tel que $\hat{F}$ soit isomorphe à $\mathfrak{F}$.

2. <u>Réduction au cas où</u> X <u>est un sous-schéma fermé d'un espace projectif</u> $\mathbb{P}^r_S$, $r \geq 3$, <u>et</u> Y <u>une section hyperplane de</u> X .

On peut supposer S affine. On peut trouver un diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & P \\
& X &
\end{tikzcd}\quad ,$$

où P est un sous-schéma fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^r_S$, r étant aussi grand que l'on veut, où q est un morphisme propre, p un morphisme projectif, j et k des immersions ouvertes, tels que $j(U)$ soit le complémentaire d'une section hyperplane de P et que l'on ait des isomorphismes

$$p^{-1}(i(U)) \simeq k(U) \simeq q^{-1}(j(U)) \ .$$

On note $\hat{Z}$ (resp. $\hat{P}$) le complété formel de Z (resp. P) le long de Z-U (resp. P-U) et $\hat{p} : \hat{Z} \to \hat{X}$, $\hat{q} : \hat{Z} \to \hat{P}$ les complétés formels respectifs des morphismes p et q . Soient $\mathfrak{G} = \hat{p}^*\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H} = \hat{q}_*\mathfrak{G}$. D'après 0.1, $\mathfrak{F}$ est algébrisable si et seulement s'il en est ainsi de $\mathfrak{G}$. Comme le morphisme canonique

$$\hat{q}^*\mathfrak{H} = \hat{q}^*\hat{q}_*\mathfrak{G} \xrightarrow{\ b\ } \mathfrak{G}$$

induit un isomorphisme sur U (0.2), $\mathfrak{G}$ est algébrisable si et seulement s'il en est ainsi de $\mathfrak{H}$. Le faisceau $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition b) de l'énoncé d'après II 3.1.2. Comme b est un isomorphisme au-dessus de U , il en est de même de $\hat{q}^*\hat{q}_*\mathfrak{G}$, donc aussi de $\mathfrak{H}$. Enfin le fait que $\mathfrak{F}$ soit engendré par ses sections entraîne qu'il en est de même de $\mathfrak{G}$. On peut donc trouver un morphisme surjectif

$$\mathcal{O}^n_{\hat{Z}} \to \mathcal{Q} ,$$

d'où l'on déduit un morphisme

$$a : \mathcal{O}^n_{\hat{P}} \to \hat{q}_* \mathcal{Q} = \mathcal{H} ,$$

et a est surjectif sur U. Si $\mathcal{H}'$ désigne l'image de a, $\mathcal{H}'$ satisfait aux conditions a) et b) et est algébrisable si et seulement s'il en est ainsi de $\mathcal{F}$. Il suffit donc de démontrer la proposition pour P et $\mathcal{H}'$, ce qui achève la réduction.

3. Cas où X est un sous-schéma fermé d'un espace projectif type $\mathbb{P}^r_S$, $r \geq 3$, et Y une section hyperplane de X.

3.1. Réduction au cas où X est régulier.

La question étant locale sur S, on peut supposer que S est un sous-schéma fermé d'un espace affine régulier R. L'espace projectif $\mathbb{P}^r_S$ est l'image inverse sur S de $\mathbb{P}^r_R$ et Y est la trace sur X d'une section hyperplane H de $\mathbb{P}^r_R$. Soit j l'immersion fermée de X dans $\mathbb{P}^r_R$, $\hat{j}$ le morphisme déduit de j par passage aux complétés formels. En remplaçant S par R, X par $\mathbb{P}^r_R$, $\mathcal{F}$ par $\hat{j}_*\mathcal{F}$, on se ramène au cas où X est régulier.

Si $\mathcal{O}_X(1)$ est le faisceau fondamental sur X, Y est défini par l'annulation d'une section σ de $\mathcal{O}_X(1)$; l'idéal I définissant Y est alors $\mathcal{O}_X(-1)$ plongé dans $\mathcal{O}_X$ par la multiplication par σ.

3.2. Réduction au cas où, pour tout point y de $\hat{X}$ fermé dans sa fibre, on a $\mathrm{prof}_y \mathcal{F}_y \geq 2$.

On associe à $\mathcal{F}$ l'ensemble $A(\mathcal{F})$ des points $x \in X$ qui ont la propriété suivante :

Il existe un ouvert affine V de X et un point associé à $\mathcal{F}_{\hat{V}}$ de projection x.

Il est clair que $A(\mathcal{F})$ est fini. On se ramène par récurrence au cas où $A(\mathcal{F})$ est réduit à un point. Soit en effet x_o un point maximal de $A(\mathcal{F})$. Pour tout ouvert affine V de X, on considère le plus grand sous-faisceau $\mathcal{Q}_{\hat{V}}$ de $\mathcal{F}_{\hat{V}}$ dont le support ne contient aucun point au-dessus de x_o. Les $\mathcal{Q}_{\hat{V}}$ sont alors les restrictions aux $\hat{V}$ d'un sous-faisceau $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{F}$ et $A(\mathcal{F}/\mathcal{Q})$ est réduit au point x_o. Comme $\mathcal{F}/\mathcal{Q}$ satisfait aux condition de l'énoncé, on peut supposer $\mathcal{F}/\mathcal{Q}$ algébrisable ; on note Q un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{Q} \simeq \mathcal{F}/\mathcal{Q}$ et tel que $\mathrm{prof}_u Q \geq 2$ en tout point $u \in U$ tel que $\{u\} \cap Y = \emptyset$. Comme $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections, il est quotient d'un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-module libre $\hat{L}$. On considère le diagramme commutatif suivant dont les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{N} & = & \mathcal{N} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{K} & \longrightarrow & \hat{L} & \xrightarrow{b} & \hat{\mathcal{Q}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}/\mathcal{G} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

D'après I 4.1, le morphisme b est algébrisable ; par suite le faisceau $\mathcal{K}$ est algébrisable. On peut donc trouver un entier n tel que $\mathcal{K}(n)$ soit engendré par ses sections. Par suite $\mathcal{G}(n)$ satisfait aux conditions a) et b) de l'énoncé.

On se place maintenant dans le cas où $A(\mathcal{F})$ est réduit à un point x_o. Soit E l'ensemble des points $y \in \hat{X}$, fermés dans leur fibre, tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_y \mathcal{F}_y < 2 .$$

L'ensemble E est fini ; pour le voir, on prend un recouvrement fini de X par des ouverts affines V_i, $i \in I$, et on applique I 3.5 2) aux $\hat{X}_{\hat{V}_i}$. De plus E est contenu dans l'adhérence de x_o et l'hypothèse b) entraîne que l'on a

$$\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{x_o}\}) \geq 2 .$$

Par suite, si $\overline{E}$ est l'adhérence de E, on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_z \geq 1$$

en tout point z tel que $\mathrm{codim}(\{\overline{z}\} \cap E, \{\overline{z}\}) = 1$. D'après le lemme 1.2 ci-dessous, on peut trouver un faisceau de modules cohérent $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}$, un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induisant un isomorphisme sur U, tels que, pour tout point $x \in \overline{E}$, on ait

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{G}_x \geq 2 .$$

D'après 0.1, il suffit, pour montrer que $\mathcal{F}$ est algébrisable, de prouver qu'il en est ainsi de $\mathcal{G}$. Il suffit même de prouver l'existence d'un entier n tel que $\mathcal{G}(n)$ soit algébrisable. On a $\mathrm{prof}_y \mathcal{G}_y \geq 2$ en tout point y de Y fermé dans sa fibre. Il suffit donc, pour achever la réduction, de montrer que l'on peut trouver un entier n tel que $\mathcal{G}(n)$ soit engendré par ses sections. Comme $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections, on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libre L et un morphisme surjectif

$$c : \hat{L} \to \mathcal{F} .$$

D'autre part on peut trouver un entier $q>0$ tel que l'on ait un monomorphisme $\hat{I}^q\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, et le faisceau $\mathcal{F}/\hat{I}^q\mathcal{G}$ est algébrisable. On considère le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{K} & \to & \hat{L} & \xrightarrow{d} & \mathfrak{J}/\hat{I}^q\mathcal{G} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & \hat{I}^q\mathcal{G} & \to & \mathfrak{J} & \to & \mathfrak{J}/\hat{I}^q\mathcal{G} & \to & 0 \ . \end{array}$$

D'après I 4.1, le morphisme d est algébrisable ; il en est donc de même du faisceau $\mathcal{K}$. On peut donc trouver un entier n' tel que $\mathcal{K}(n')$ soit engendré par ses sections. Il en est alors de même du quotient $\hat{I}^q\mathcal{G}(n') = \mathcal{G}(n'-q)$, ce qui achève la réduction.

3.3. <u>Fin de la démonstration</u>.

Soit L un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent localement libre, tel que l'on ait un morphisme surjectif $c : \hat{L} \to F$; soit $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}\ c$. Pour tout point y de Y fermé dans sa fibre, on a $\dim \mathcal{O}_{\hat{X},y} \geq 3$ et, comme $\mathcal{O}_{\hat{X},y}$ est régulier, on a

$$\mathrm{prof}_y \mathcal{N}_y \geq 3$$

(EGA 0_{IV} 17.3.4). Il résulte alors de III 2.2, appliqué en y faisant $ig = id$, qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{N}(n)$ soit engendré par ses sections. Par suite on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libre L' et un morphisme surjectif $e : \hat{L}' \to \mathcal{N}(n)$. On a donc une suite exacte

$$L' \xrightarrow{e} L(n) \xrightarrow{c(n)} \mathfrak{J}(n) \longrightarrow 0 \quad ;$$

d'après I 4.1, e est algébrisable ; ceci prouve que $\mathfrak{J}(n)$, donc aussi $\mathfrak{J}$ est algébrisable.

LEMME 1.1.1.- Soient S un schéma noethérien (resp. un schéma local de point fermé t) , localement immersible dans un schéma régulier, $f : X \to S$ un morphisme propre (resp. soit X le complémentaire d'une partie fermée T de S telle que $\dim T \leq c+1$, $c \geq 0$) . Soit Y une partie fermée de X et supposons l'ouvert $U = X-Y$ affine sur S . Soient V un voisinage ouvert de Y dans X et F un faisceau de modules cohérent sur V tel que, pour tout point $y \in Y$ fermé dans sa fibre (resp. pour tout point $y \in Y$ tel que $\delta_t y = 1$) et toute générisation u de y appartenant à U , on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq 2-\mathrm{codim}(\{\bar{y}\},\{\bar{u}\})$$

$$(\text{resp. } \mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+2-\mathrm{codim}(\{\bar{y}\},\{\bar{u}\}))) \ .$$

Alors on peut trouver un ouvert W , $Y \subset W \subset V$, et un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent G qui prolonge $F|W$ et vérifie la condition suivante :

Pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u G \geq 2 \ .$$

Soit en effet E l'ensemble des points u de V tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_u F < 2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset .$$

Si $W = V - \bigcup_{u \in E} \overline{\{u\}}$, l'ensemble $Z = X - W$ est stable par spécialisation. Si $u \in W$ est une générisation immédiate d'un point de Z , on a $\deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s) \leq 1$ (resp. $\delta_t u \leq 1+\dim T \leq c+2$) . On a donc $\mathrm{prof}_u F \geq 1$ (I 3.4). Par suite, si l'on pose $G = \mathcal{H}^0_{X/Z}(F)$, le faisceau G est cohérent (EGA IV 5.11.1). Par construction G satisfait à la condition de l'énoncé. Comme F et G sont isomorphes en dehors d'une partie fermée qui n'est autre que $\bigcup_{u \in E} \overline{\{u\}}$, W est en fait un ouvert.

LEMME 1.2.- Soient X un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, Y une partie fermée de X , $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y , E une partie fermée de $\hat{X}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$ tel que, pour tout point $x \in E$, pour tout point z de $\hat{X}_x - E_x$ tel que $\dim \overline{\{z\}} = 1$, on ait

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 1 .$$

Alors on peut trouver un faisceau de modules cohérent $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}$, un morphisme

$$a : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

induisant un isomorphisme au-dessus de U , tel que $a|\hat{X}-E$ soit bijectif, tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{G}_x \geq 2$$

en tout point $x \in E$.

Soit en effet $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines immersibles dans des schémas réguliers et considérons les immersions ouvertes

$$\varphi_i : \hat{X}_{\hat{V}_i} - E_{\hat{V}_i} \to \hat{X}_{\hat{V}_i} .$$

Si z est une générisation immédiate de $E_{\hat{V}_i}$, on a $\mathrm{prof}_z(\mathcal{F}_{\hat{V}_i}) \geq 1$ (II 3.1.1). Il résulte donc de EGA IV 5.11.4 que les faisceaux $\varphi_{i*}\varphi_i^*(\mathcal{F}_{\hat{V}_i})$ sont cohérents. Les morphismes $\hat{X}_{(V_i \cap V_j)^\wedge} \to \hat{X}_{\hat{V}_i}$ étant plats pour tous i , $j \in I$, on déduit de EGA III 1.4.5 que les faisceaux $\varphi_{i*}\varphi_i^*(\mathcal{F}_{\hat{V}_i})$ se recollent ; ils définissent donc un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}$ qui satisfait à toutes les conditions de l'énoncé.

COROLLAIRE 1.3.- Les notations X , S , f , U , $\hat{X}$ ont le même sens que dans 1.2 et l'on suppose S affine. Soit $\mathbf{C}$ la catégorie des faisceaux de modules cohérent $\mathcal{F}$ sur $\hat{X}$ qui satisfont à la condition suivante :

Pour tout point x de $\hat{X}$, fermé dans sa fibre, pour tout point z de $\hat{X}_x$ appartenant à U_x , on a

$$\operatorname{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 3-\dim\{\overline{z}\} .$$

Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un monomorphisme d'objets de $\mathbf{C}$. Alors, si $\mathcal{G}$ est algébrisable, il en est de même de $\mathcal{F}$.

On considère la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to 0 .$$

Pour tout point x de $\hat{X}$, fermé dans sa fibre, et pour tout point z de $\hat{X}_x$, appartenant à U_x , tel que $\dim\{\overline{z}\} = 1$, on a

$$\operatorname{prof}_z \mathcal{K}_x \geq 1$$

(1.3.1 ci-dessous). Comme $\mathcal{F}$ est algébrisable et le schéma S affine, on peut trouver un entier n tel que $\mathcal{G}(n)$ soit engendré par ses sections ; il en est alors de même du quotient $\mathcal{K}(n)$. Par suite $\mathcal{K}(n)$ satisfait aux hypothèses de 1.2, donc est algébrisable. On peut alors trouver des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents G et K , satisfaisant à la conclusion de 1.1.1, tels que l'on ait des isomorphismes $\hat{G} \simeq \mathcal{G}$, $\hat{K} \simeq \mathcal{K}$. D'après I 4.1, le morphisme a se déduit, par passage aux complétés formels, d'un morphisme $b : G \to K$; on a donc un isomorphisme $(\operatorname{Ker} b)^{\wedge} \simeq \mathcal{F}$.

LEMME 1.3.1.- Soit $\mathbf{A}$ un anneau local noethérien.

1) Soit

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de $\mathbf{A}$-modules de type fini et soit n un entier > 0 . Supposons que l'on ait $\operatorname{prof} M' \geq n+1$ et $\operatorname{prof} M \geq n$, alors on a $\operatorname{prof} M'' \geq n$.

2) Soient M un $\mathbf{A}$-module de type fini, $\mathfrak{A}$ l'annulateur de M . Supposons que l'on ait $\operatorname{prof} \mathbf{A} \geq 1$ (resp. $\operatorname{prof} \mathbf{A} \geq 2$ et $\operatorname{prof} M \geq 1$) ; alors on a $\operatorname{prof} \mathfrak{A} \geq 1$ (resp. $\operatorname{prof} \mathfrak{A} \geq 2$) .

Soit k le corps résiduel de $\mathbf{A}$. Il suffit, pour prouver 1), de montrer que l'on a $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(k,M'') = 0$ pour $i<n$; or cela résulte de la suite exacte

$$\to \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(k,M') \to \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(k,M) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(k,M'') \to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathbf{A}}(k,M') \to$$

et des hypothèses $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(k,M') = 0$ si $i < n+1$ et $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(k,M) = 0$ si $i<n$.

L'assertion 2) se démontre de même. Le module $A/\mathfrak{A}$ est un sous-module de $\mathrm{Hom}_A(M,M)$; comme on a $\mathrm{prof}_A M \geq 1$, on a aussi $\mathrm{prof}(\mathrm{Hom}_A(M,M)) \geq 1$ (I 4.1.1), d'où $\mathrm{prof}(A/\mathfrak{A}) \geq 1$. Il suffit alors de considérer la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(k,\mathfrak{A}) \to \mathrm{Hom}_A(k,A) \to \mathrm{Hom}_A(k,A/\mathfrak{A}) \to \mathrm{Ext}^1_A(k,\mathfrak{A}) \to \mathrm{Ext}^1_A(k,A) \quad .$$

Nous aurons besoin, pour démontrer 1.4, du lemme de dévissage suivant:

LEMME 1.4.0.- Soient X un schéma noethérien régulier de dimension finie, Y une partie fermée de X , $U = X-Y$, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y , E une partie de $\hat{X}$ telle que l'on ait $\dim \mathcal{O}_{\hat{X},x} \geq 3$ en tout point $x \in E$. Soit $\mathbf{C}$ la catégorie des faisceaux de modules cohérents $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ qui satisfont à la condition suivante :

(i) Pour tout point $x \in E$, pour tout point u de $\hat{X}_x$, appartenant à U_x , on a

$$\mathrm{prof}_u \mathfrak{F}_x \geq 3-\dim\{\overline{u}\} ,$$

$\{\overline{u}\}$ désignant l'adhérence de u dans $\hat{X}_x$.

Supposons les conditions suivantes satisfaites :

a) Si $\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ est un monomorphisme d'objets de $\mathbf{C}$ et si $\mathfrak{G}$ est algébrisable, il en est de même de $\mathfrak{F}$.

b) Tout objet de $\mathbf{C}$ qui vérifie de plus la condition (S_2), dont l'annulateur est algébrisable, par un idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{O}_X$ tel que $V(\mathfrak{A})$ soit irréductible, est algébrisable.

Alors tout objet de $\mathbf{C}$ est algébrisable.

Soit $\mathfrak{F}$ un objet de $\mathbf{C}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{F}$ par un quotient isomorphe à $\mathfrak{F}$ sur U , ce qui ne change pas la propriété d'être algébrisable (.1), on peut supposer que, pour tout ouvert affine V de X , $\mathfrak{F}_{\hat{V}}$ n'a pas de sous-faisceau non nul de support contenu dans $Y_{\hat{V}}$.

Soit d'abord $\mathfrak{F}$ un faisceau vérifiant (S_1), dont l'annulateur est de la forme $\hat{\mathfrak{A}}$ avec $V(\mathfrak{A})$ irréductible. D'après II 2.5, dont on reprend les notations, on peut trouver un faisceau formel cohérent $\mathfrak{G}$, un monomorphisme

$$\mathfrak{F} \to \mathfrak{G} ,$$

tel que, pour tout ouvert affine V de X , $\mathfrak{G}_{\hat{V}}$ soit la (Z_2)-clôture de $\mathfrak{F}_{\hat{V}}$. Cette dernière condition entraîne que l'annulateur de $\mathfrak{G}$ est aussi celui de $\mathfrak{F}$. Montrons que $\mathfrak{G}$ est dans $\mathbf{C}$. Soit x un point de E ; comme le faisceau $\mathfrak{F}$ vérifie la condition (i), toutes les composantes irréductibles du support de $\mathfrak{F}_x$ sont de dimension ≥ 3 ; il en est donc de même des composantes irréductibles du support de $\mathfrak{G}_x$. Comme $\mathfrak{G}_x$ vérifie (S_2), on a

$$\operatorname{prof}_z \mathfrak{G}_x \geq 3-\dim\{\overline{z}\} ,$$

pour toute générisation stricte z de x ; par suite $\mathfrak{G}$ appartient à C . Le faisceau $\mathfrak{G}$ satisfait à b), donc est algébrisable. D'après a), $\mathfrak{F}$ est algébrisable.

Soit maintenant $\mathfrak{F}$ un faisceau vérifiant (S_1) et montrons que $\mathfrak{F}$ est algébrisable. Montrons que l'annulateur $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{F}$ est algébrisable. Cela est évident si $\mathfrak{A} = 0$. Sinon, comme X est régulier, $\mathfrak{A}$ vérifie (S_1) et son annulateur est nul. Or, si x est un point de E , et z une générisation de x , appartenant à U_x , on a

$$\operatorname{prof}_z \mathcal{O}_{\hat{X}_x} \geq 3-\dim\{\overline{z}\} \qquad \operatorname{prof}_z \mathfrak{F}_x \geq 3-\dim\{\overline{z}\}$$

d'après 1.3.1 2), on a aussi

$$\operatorname{prof}_z \mathfrak{A}_x \geq 3-\dim\{\overline{z}\} .$$

Par suite $\mathfrak{A}$ est algébrisable. Soient $x_1,\ldots,x_n$ les points maximaux de $V(\mathfrak{A})$. D'après II 2.7, on peut trouver des faisceaux formels cohérents $\mathfrak{G}_i$, $1 \leq i \leq n$, un monomorphisme

$$\mathfrak{F} \to \bigoplus_{1\leq i\leq n} \mathfrak{G}_i ,$$

tels que $\mathfrak{G}_i$ vérifie (S_2) et que l'annulateur de $\mathfrak{G}_i$ soit de la forme $\hat{\mathfrak{A}}_i$, où $\mathfrak{A}_i$ est un idéal de $\mathcal{O}_X$ tel que $V(\mathfrak{A}_i) = \{\overline{x_i}\}$. Pour tout point $x \in E \cap \{\overline{x_i}\}$, on a $\operatorname{codim}(\{\overline{x}\},\{\overline{x_i}\}\geq 3$, d'où le fait que $\mathfrak{G}_i$ est dans C . Les $\mathfrak{G}_i$ sont alors algébrisables d'après b) et il en est de même de $\mathfrak{F}$ d'après a).

On peut désormais supposer que tout objet de C qui vérifie (S_1) est algébrisable. Soit $\mathfrak{F}$ un objet quelconque de C et montrons que $\mathfrak{F}$ est algébrisable. D'après II 2.6, on peut trouver des faisceaux formels cohérents $\mathfrak{F}_i$, $0 \leq i \leq n$, vérifiant (S_2) , un monomorphisme

$$\mathfrak{F} \to \bigoplus_{0\leq i\leq n} \mathfrak{F}_i ,$$

tels que, pour tout ouvert affine V de X et tout i , tout point associé à $\mathfrak{F}_{i\hat{V}}$ soit associé à $\mathfrak{F}_{\hat{V}}$. Montrons que les $\mathfrak{F}_i$ sont dans C . Si $x \in E$ et si u est un point maximal du support de $\mathfrak{F}_{ix}$, u est un point associé à $\mathfrak{F}_x$; par suite u appartient à U_x et, comme $\mathfrak{F} \in C$, on a $\dim\{\overline{u}\} \geq 3$. Comme $\mathfrak{F}_{ix}$ vérifie (S_2), on a

$$\operatorname{prof}_z \mathfrak{F}_{ix} \geq 3-\dim\{\overline{x}\} ,$$

pour toute générisation stricte z de x ; par suite $\mathfrak{F}_i$ appartient à C quel que soit i . Les $\mathfrak{F}_i$ sont donc algébrisables, et, d'après a), il en est de même de $\mathfrak{F}$.

THEOREME 1.4.- Soient S un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, $f : X \to S$ un morphisme propre, Y une partie fermée de X telle que $U = X-Y$ soit affine sur S. On note $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Soit C la catégorie des faisceaux de modules cohérents F sur X qui satisfont aux conditions suivantes :

(i) Pour tout point y de Y, fermé dans sa fibre, et pour toute générisation u de y appartenant à U, on a

$$\text{prof}_u F \geq 3-\text{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\}) .$$

(ii) Pour tout point u de U tel que $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\text{prof}_u F \geq 2 .$$

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des faisceaux de modules cohérents $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ satisfaisant à la condition suivante :

(iii) Pour tout point x de $\hat{X}$, fermé dans sa fibre aus-dessus de S, pour tout point z de $\hat{X}_x$ appartenant à U_x, on a

$$\text{prof}_z \mathfrak{F}_x \geq 3-\dim\{\overline{z}\} .$$

Alors le foncteur φ de C dans $\mathcal{C}$ qui, à un faisceau F, associé son complété formel $\hat{F}$ le long de Y, est une équivalence de catégories.

Le foncteur φ est pleinement fidèle d'après I 4.1. Compte tenu de 1.1.1, le fait que φ soit une équivalence de catégories résulte du corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5.- Les notations étant celles de 1.4, soit $\mathfrak{F}$ un faisceau cohérent sur $\hat{X}$, appartenant à $\mathcal{C}$. Alors $\mathfrak{F}$ est algébrisable (0.0.1).

La question est locale sur S. Soient en effet $(S_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de S, $X_i = X \times_S S_i$; supposons que, pour chaque $i\in I$, on puisse trouver un faisceau cohérent F_i sur X_i, satisfaisant aux condition (i) et (ii) de 1.4 relativement à S_i et un isomorphisme $F_i \simeq \mathfrak{F}|\hat{X}_i$. Montrons que les faisceaux F_i se recollent et définissent un faisceau F sur X tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{F} \simeq \mathfrak{F}$. Pour tous i, $j \in I$, posons $X_{ij} = X_i \cap X_j$, $U_{ij} = X_{ij} \cap U$. Un point $u \in U_{ij}$ tel que $\deg\text{tr}\, k(u)/k(f(u)) = 0$ ou 1 est, soit générisation immédiate d'un point $y \in Y_i$, fermé dans sa fibre, soit tel que $\{u\} \cap Y = \emptyset$ (I 3.4). Dans les deux cas, on a

$$\text{prof}_u F_i \geq 2 .$$

Il résulte alors de I 4.1 que l'on peut trouver un unique isomorphisme

$$\varphi_{ij} : F_i|X_{ij} \to F_j|X_{ij} ,$$

qui induise l'identité sur $\mathcal{F}|\hat{X}_{ij}$, et que ces isomorphismes satisfont à la condition de recollement.

On peut donc supposer S affine. On se ramène, comme dans 1.2, au cas où S est régulier, X de la forme $\mathbb{P}^r_S$, avec $r \geq 3$ et où Y est une section hyperplane de X . En particulier X est régulier. Soient $L = \mathcal{O}_X(1)$ et σ une section de L qui définit Y , I l'idéal défini par σ . Pour tout entier n , on pose $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$. On peut alors appliquer 1.4.0 en définissant E comme l'ensemble des points de X fermés dans leurs fibre. La condition (i) de loc. cit. n'est autre que la condition (iii) de 1.4 ; la condition a) résulte de 1.3. Il suffit donc de prouver b), i.e. de prouver le corollaire si l'on suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (S_2) et que l'annulateur de $\mathcal{F}$ est algébrisable par un idéal $\mathfrak{A}$ tel que $V(\mathfrak{A})$ soit irréductible.

On suppose désormais que S est affine, X projectif sur S , que Y est une section hyperplane de X , que $\mathcal{F}$ vérifie (S_2) et a un annulateur algébrisable par un idéal $\mathfrak{A}$ tel que $V(\mathfrak{A})$ soit irréductible. Quitte à remplacer X par un sous-schéma fermé, on peut supposer que $\mathfrak{A} = 0$ et que X est irréductible. On peut supposer f surjectif. Nous allons voir que l'on peut trouver une partie fermée T de Y , un ouvert W de $V = X-T$, contenant U , un morphisme propre $g : Z \to V$, induisant un isomorphisme $g^{-1}(W) \simeq W$, un faisceau g-ample L' , tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) On a $\operatorname{codim}(T,X) \geq 4$ et $\operatorname{codim}(V-W,V) \geq 3$.

b) Si $\hat{Z}$ désigne le complété formel de Z le long de $H = g^{-1}(Y \cap V)$ et $\hat{g} : \hat{Z} \to \hat{V}$ le morphisme déduit de g , le faisceau $\hat{g}^*(\mathcal{F}|V)$ vérifie la condition (S_3).

c) Pour tout point $n \in Z$, fermé dans sa fibre au-dessus de V , on a

$$\dim \mathcal{O}_{Z,z} = \dim \mathcal{O}_{V,g(z)} .$$

Soit en effet E l'ensemble des points y de $\hat{X}$ tels que $\mathcal{F}_y$ ne vérifie pas (S_3). D'après II 2.4.1, E est une partie fermée de $\hat{X}$. Notons que, $\mathcal{F}_x$ vérifiant (S_2) en tout point $x \in \hat{X}$, on a

$$\dim \mathcal{O}_{\hat{X},y} \geq 3$$

en tout point y de E . Notons $(y_i)_{i\in I}$ l'ensemble des points de E tels que l'on ait $\dim \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} = 3$. L'ensemble I est contenu dans l'ensemble des points maximaux de E donc est fini. Pour tout $i \in I$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,y_i}$ est formellement équidimensionnel (EGA IV 7.1.10 et 7.1.8). Par suite $\mathcal{O}_{\hat{X},y_i}$ est équidimensionnel de dimension 3 . Comme $\mathcal{F}_{y_i}$ vérifie (S_2), on peut appliquer II 1.4 relativement à l'entier 3 . Soit $W_{y_i} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} - \{y_i\}$. D'après loc. cit., on peut trouver un morphisme propre

$$g_{y_i} : Z_{y_i} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} ,$$

induisant un isomorphisme $g_{y_i}^{-1}(W_{y_i}) \simeq W_{y_i}$, tel que toutes les composantes irréductibles de Z_{y_i} soient de dimension 3 , un faisceau g_{y_i}-ample L'_{y_i} , tel que $L'_{y_i}|g_{y_i}^{-1}(W_{y_i})$ soit isomorphe au faisceau structural de W_{y_i} et tels que le faisceau $g^*_{y_i}\mathcal{F}_{y_i}$ vérifie (S_3). D'après II 1.6 et EGA IV 8 (8.2, 10.5, 5.2, 10.5.2), il existe un voisinage ouvert V_i de y_i dans X , un morphisme propre

$$g_i : Z_i \to V_i ,$$

un faisceau g_i-ample L'_i , tels que l'image inverse de g_i par le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} \to V_i$ s'identifie à g_{y_i} , l'image inverse de L'_i étant alors L'_{y_i} . Soit $W_i = V_i - \{\overline{y_i}\}$. Quitte à restreindre V_i à un voisinage ouvert de y_i dans V_i , on peut supposer que g_i induit un isomorphisme $g_i^{-1}(W_i) \simeq W_i$, et que $L'_i|W_i$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{W_i}$ (EGA IV 8.5.2.4 et 8.10.5). On peut aussi supposer que les points maximaux de Z_i sont les projections de ceux de Z_{y_i} . Comme les composantes irréductibles de Z_{y_i} sont de dimension 3 , les V_i satisfont à la condition c). On note $\hat{Z}_i$ le complété formel de Z_i le long de $g_i^{-1}(Y \cap V_i)$, etc. Comme l'ensemble des points de $\hat{Z}_i$ où $\hat{g}_i^*(\mathcal{F}|\hat{V}_i)$ ne vérifie pas (S_3) est une partie fermée qui ne rencontre pas $g_i^{-1}(y_i)$, on peut supposer, quitte à restreindre V_i , que $\hat{g}_i^*(\mathcal{F}|\hat{V}_i)$ vérifie (S_3). Quitte à enlever à chaque V_i la réunion des $\{\overline{y_j}\}$ pour $j \neq i$, on peut supposer que l'on a

$$V_i \cap V_j \cap \{\overline{y_i}\} \cap \{\overline{y_j}\} = \emptyset \quad \text{pour tous } i,j \in I , i\neq j .$$

Soient T' l'ensemble des points de $X - \bigcup_{i\in I} V_i$ en lesquels $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (S_3) , $T'_i = \{\overline{y_i}\}\cap(X-\bigcup_{i\in I} V_i)$ et soit

$$T = T' \cup (\bigcup_{i\in I} T'_i) .$$

Comme la réunion des V_i contient les points y_i , i.e. les points où $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (S_3) et dont l'anneau local est de dimension 3 , on a

$$\operatorname{codim}(T,X) \geq 4 .$$

Soient $V = X-T$ et $W = V-\bigcup_{i\in I}(\{\overline{y_i}\}\cap V_i)$. Comme les y_i sont les points maximaux de $V-W$, on a bien $\operatorname{codim}(V-W,V) \geq 3$, d'où la condition a).

Définissons maintenant Z . On considère le recouvrement ouvert de V formé de W et des V_i , $i\in I$. Comme la restriction du morphisme g_i à W_i est un isomorphisme, la famille de V-schémas formée de W et des Z_i se recolle, et l'on obtient ainsi un V-schéma $g : Z \to V$. Le morphisme g est propre car il l'est localement sur V ; enfin, par construction même, la restriction de g à W est un isomorphisme. On définit de même un faisceau g-ample L' par recollement à partir de $\mathcal{O}_W$ et des L'_i, compte tenu du fait que $L'_i|W_i$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{W_i}$. Comme $\mathcal{F}|\hat{W}$, ainsi que les $\hat{g}_i^*(\mathcal{F}|\hat{V}_i)$, vérifie (S_3), le faisceau $\hat{g}^*\mathcal{F}$ vérifie (S_3). On a donc réalisé toutes les conditions annoncées.

Montrons que l'on peut appliquer III 2.2. Comme $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{C}$, les fibres de f sont de dimension ≥ 3 ; on a donc $\dim \mathcal{O}_{\hat{Z},z} \geq 3$ en tout point z de $\hat{Z}$, fermé dans sa fibre au-dessus de V, de projection un point x fermé dans sa fibre. Il en est de même en un point z de projection un point x tel que $\mathrm{codim}(\{\overline{x}\}\cap T,\{\overline{x}\}) = 1$, puisque l'on a $\mathrm{codim}(T,X) \geq 4$. Comme $\hat{g}^*\mathcal{F}$ vérifie (S_3), on a bien

$$\mathrm{prof}_z(\hat{g}^*\mathcal{F})_z \geq 3 ,$$

en tout point z tel que précedemment. Soit h le morphisme composé de g et de l'immersion ouverte de V dans X. Il résulte de III 2.2, dont on reprend les notations, que l'on peut trouver des entiers n'_o, n_o, et des sections globales σ_j, $j\in J$, de $\hat{h}_*\hat{h}^*(\mathcal{F}_{-n'_o}(n_o))$ telles que les $\sigma_j|\hat{W}$ engendrent le faisceau $\hat{h}_*\hat{h}^*(\mathcal{F}_{-n'_o}(n_o))|\hat{W}$. Ce dernier faisceau n'est autre que $\mathcal{F}(n_o)|\hat{W}$. Si k est l'immersion ouverte canonique de W dans X, on peut donc trouver un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libre de type fini L et un morphisme

$$a : \hat{L} \to \hat{k}_*(\mathcal{F}(n_o)|\hat{W}) ,$$

tel que le morphisme $a|\hat{W}$ soit surjectif.

Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Im}\, a$. Le faisceau $\mathcal{G}$ est engendré par ses sections et, comme $\hat{k}_*(\mathcal{F}(n_o)|\hat{W})$ vérifie (S_1), il en est de même du sous-faisceau $\mathcal{G}$. De plus l'annulateur de $\mathcal{G}$ est l'idéal nul. Comme les fibres de f sont de dimension ≥ 3, cela implique la condition b) de 1.2. D'après loc. cit., $\mathcal{G}$ est algébrisable. Soit G un faisceau de modules cohérent sur X, tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{G} \simeq \mathcal{G}$. Le faisceau $\hat{G}|\hat{W}$ est isomorphe à $\mathcal{F}(n_o)|\hat{W}$. On peut alors appliquer II 3.2 et 3.3. On en déduit des isomorphismes canoniques

$$(k_*G|W)^\wedge \xrightarrow{\sim} \hat{k}_*(\hat{G}|\hat{W}) \simeq \hat{k}_*(\mathcal{F}(n_o)|\hat{W}) \qquad \mathcal{F}(n_o) \xrightarrow{\sim} \hat{k}_*(\mathcal{F}(n_o)|\hat{W}) .$$

Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est algébrisable par le faisceau $(k_*G|W)(-n_o)$.

2. Cas local.

Soient S un schéma local noethérien complet de point fermé t, $X = S-\{t\}$, Y une partie fermée de X, $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Lorsque l'ouvert $U = X-Y$ est affine, nous nous proposons d'algébriser les faisceaux formels cohérents $\mathcal{F}$ sur $\hat{X}$, qui satisfont à la condition (iii) de 2.8. Nous aurons besoin, pour traiter le cas U affine, d'utiliser le résultat 2.6, relatif au cas où Y est défini par l'annulation de n sections globales de S. Traitons d'abord le cas où Y est défini par l'annulation d'une section globale de S ; comme dans le cas local, nous démontrons d'abord un théorème d'algébrisation pour un faisceau formel engendré par ses sections.

PROPOSITION 2.1.- Soient S un schéma local noethérien complet de point fermé t, T une partie fermée non vide de S, f une section globale de $\mathcal{O}_S$ telle que $T \subset V(f)$, $X = S-T$, $Y = V(f) \cap X$, $U = X-Y$. On note $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections.

b) Pour tout point x de $\hat{X}$ tel que $\delta_t x \leq \dim T + 1$, pour tout point z de $\hat{X}_x$, appartenant à U_x, on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 2-\dim\{\overline{z}\}$$

Alors $\mathcal{F}$ est algébrisable.

Utilisant le fait que tout schéma local noethérien complet peut se réaliser comme sous-schéma fermé d'un schéma local régulier complet (EGA 0_{IV} 19.8.8), on se ramène au cas où S est régulier, et l'on peut supposer que l'on a

$$(*) \qquad \dim S \geq 4 + \dim T .$$

1. Réduction au cas où, pour tout point x de $\hat{X}$ tel que $\delta_T x = 1$, on a $\mathrm{prof}_x \mathcal{F}_x \geq 2$.

Quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par un faisceau isomorphe à $\mathcal{F}$ sur U, on peut supposer que, pour tout ouvert affine V de X, le faisceau $\mathcal{F}_{\hat{V}}$ n'a pas de sous-faisceau non nul de support contenu dans $Y_{\hat{V}}$ (0.1). Pour tout ouvert affine V de X, pour tout point x de $Y_{\hat{V}}$ tel que $\delta_T x = 1$, pour toute générisation z de x, on a alors, compte tenu de b)

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_{\hat{V}} \geq 1 \quad \text{si} \quad \mathrm{codim}\,(\{\overline{x}\},\{\overline{z}\}) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 .$$

Soit E l'ensemble des points x de $\hat{X}$, tels que $\delta_T x = 1$, tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{F}_x < 2 .$$

L'ensemble E est fini ; pour le voir on prends un recouvrement fini de X par des ouverts affines V_i , $i \in I$, et on applique I 3.5 2) aux schémas $\hat{X}_{\hat{V}_i}$. Pour tout point $x \in \bar{E}$ et tout $z \in \hat{X}_x$ tel que $\dim\{\bar{z}\} = 1$, on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 1 \quad ;$$

d'après 1.2, on peut donc trouver un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent $\mathcal{G}$, un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, induisant un isomorphisme sur U , tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{G}_x \geq 2$$

en tout point $x \in \bar{E}$. De plus la relation ci-dessus reste vraie si l'on remplace $\mathcal{G}$ par $\hat{f}^q \mathcal{G}$ quel que soit l'entier $q \geq 0$ car $\mathcal{G}$ n'a pas de sous-faisceau non nul de support annulé par $\hat{f}^q$. D'après 0.1 , il suffit, pour prouver que $\mathcal{F}$ est algébrisable, de montrer que l'on peut trouver un entier $q \geq 0$ tel que $\hat{f}^q \mathcal{G}$ soit algébrisable. Il suffit donc, pour achever la réduction, de montrer que l'on peut trouver q tel que le faisceau $\hat{f}^q \mathcal{G}$ soit engendré par ses sections. Comme $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections, on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libre de type fini L et un morphisme surjectif

$$a : \hat{L} \to \mathcal{F} .$$

Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont isomorphes sur U , on peut trouver un entier q tel que le morphisme $\hat{f}^q \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ se factorise en un monomorphisme $\hat{f}^q \mathcal{G} \to \mathcal{F}$; le faisceau $\mathcal{F}/\hat{f}^q \mathcal{G}$ est alors algébrisable (0.1). On considère le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{K} & \to & \hat{L} & \xrightarrow{c} & \mathcal{F}/\hat{f}^q \mathcal{G} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \to & \hat{f}^q \mathcal{G} & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}/\hat{f}^q \mathcal{G} & \to & 0 \end{array} .$$

D'après I 4.1, le morphisme c est algébrisable ; il en est donc de même du faisceau $\mathcal{K}$. Par suite $\mathcal{K}$ est engendré par ses sections ; il en est donc de même du quotient $\hat{f}^q \mathcal{G}$.

2. <u>Cas où, pour tout point</u> $x \in \hat{X}$, <u>tel que</u> $\delta_T x = 1$, <u>on a</u> $\mathrm{prof}_x \mathcal{F}_x \geq 2$.

Soit L un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libre de type fini tel que l'on ait un morphisme surjectif

$$a : \hat{L} \to \mathcal{F} ;$$

soit $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}\, a$. Pour tout point $x \in \hat{X}$, tel que $\delta_T x = 1$, on a, d'après (*), $\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq 3$. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, on a

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{N}_x \geq 3$$

(EGA IV 17.3.4). On peut donc appliquer II 2.3 à $\mathcal{N}$, en y faisant $g = id$, i étant l'immersion ouverte de X dans S . On en déduit que $\hat{i}_* \mathcal{N}$ est cohérent. Comme S est complet, $\hat{i}_* \mathcal{N}$, donc aussi $\mathcal{N}$, est algébrisable. L' injection canonique $\mathcal{H} \to \hat{L}$ étant algébrisable, d'après I 4.1 $\mathcal{F}$ est algébrisable.

COROLLAIRE 2.2.- Les notations S, X, T, U, $\hat{X}$ ont le même sens que dans 2.1. Soit $\mathbf{C}$ la catégorie des faisceaux de modules cohérents $\mathcal{F}$ sur $\hat{X}$, qui satisfont à la condition suivante :

(i) Pour tout point x de $\hat{X}$ tel que $\delta_t x \leq \dim T + 1$, pour tout point z de $\hat{X}_x$ appartenant à U_x, on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 3-\dim\{\overline{z}\} .$$

Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un monomorphisme d'objets de $\mathbf{C}$. Alors, si $\mathcal{F}$ est algébrisable, il en est de même de $\mathcal{G}$.

On considère la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to 0 .$$

Pour tout point x de $\hat{X}$ tel que $\delta_t x \leq \dim T + 1$, pour tout point z de $\hat{X}_x$ appartenant à U_x, on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{K}_x \geq 2-\dim\{\overline{z}\}$$

(1.3.1). Comme le faisceau $\mathcal{G}$ est algébrisable, il est engendré par ses sections ; il en est donc de même du quotient $\mathcal{K}$. Par suite $\mathcal{K}$ satisfait aux hypothèses de 2.1, donc est algébrisable. Soit K un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{K} \simeq \mathcal{K}$. Quitte à remplacer K par un quotient isomorphe à K sur U, ce qui ne change pas la propriété de $\mathrm{Ker}(\mathcal{G} \to \hat{K})$ d'être algébrisable (0.1), on peut supposer que l'on a

$$\mathrm{prof}_x K \geq 1$$

en tout point $x \in Y$. Soit E l'ensemble des points $u \in U$ où l'on a

$$\mathrm{prof}_u K < 2 \quad \text{et} \quad \delta_T u = 1 .$$

Le sous-ensemble $Z = \bigcup_{u \in E} \{\overline{u}\}$ de X est stable par spécialisation et l'on a

$$\delta_t v \leq \dim T + 2$$

en toute générisation immédiate v de Z ; les hypothèses de profondeur vérifiées par K entraînent en particulier la relation

$$\mathrm{prof}_v K \geq 1 .$$

D'après EGA IV 5.11.1, le faisceau $K' = \mathcal{H}^0_{X/Z}(F)$ est donc cohérent. De plus on a un morphisme $K \to K'$, injectif en tout point de Y et, par construction de K', on a

$$\mathrm{prof}_u K' \geq 3-\delta_T u$$

en tout point $u \in U$. On peut donc appliquer I 4.1 au morphisme composé

$$\mathcal{G} \to \hat{K} \to \hat{K}' ;$$

on en déduit que ce morphisme est algébrisable, d'où le fait que le noyau $\mathcal{F}$ est algébrisable.

THEOREME 2.3.- Les notations étant celles de 2.2, tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ est algébrisable.

D'après EGA 0_{IV} 19.8.8, S peut se réaliser comme sous-schéma fermé d'un schéma local régulier complet R. En remplaçant S par R et en prolongeant $\mathcal{F}$ par zéro, on se ramène au cas où S est régulier et on peut supposer la dimension de S supérieure ou égale à $\dim T + 4$. On applique 1.4.0 à X, en désignant par E l'ensemble des points x de $\hat{X}$ tels que $\delta_t x \leq \dim T+1$. D'après 2.2, la condition a) de loc. cit. est satisfaite. Il suffit donc de prouver la condition b). On est ainsi ramené au cas où S est irréductible, où $\mathcal{F}$ est un faisceau vérifiant (S_2), dont l'annulateur est nul, ce qu'on suppose désormais.

Les hypothèses de profondeur sur $\mathcal{F}$ entraînent la relation

$$\operatorname{codim}(T,S) \geq 4 .$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver une partie fermée T' de S, $T \subset T' \subset V(f)$, un ouvert W de $V = S-T'$, contenant U, un morphisme propre $g : Z \to V$ induisant un isomorphisme $g^{-1}(W) \simeq W$, un faisceau g-ample L, tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) On a $\operatorname{codim}(T',S) \geq 4$ et $\operatorname{codim}(V-W,V) \geq 3$.

b) Si $\hat{Z}$ désigne le complété formel de Z le long de $g^{-1}(Y \cap V)$ et $\hat{g} : \hat{Z} \to \hat{V}$ le morphisme déduit de g par passage aux complétés formels, le faisceau $\hat{g}^*(\mathcal{F}|\hat{V})$ vérifie la condition (S_3).

c) Pour tout point z de Z, fermé dans sa fibre, on a

$$\dim \mathcal{O}_{Z,z} = \dim \mathcal{O}_{V,g(z)} .$$

Soit en effet E l'ensemble des points y de $\hat{X}$ tels que $\mathcal{F}_y$ ne vérifie pas (S_3). D'après II 2.4.2, E est une partie fermée de $\hat{X}$. Notons que, $\mathcal{F}_x$ vérifiant (S_2) en tout point $x \in \hat{X}$, on a

$$\dim \mathcal{O}_{\hat{X},y} \geq 3$$

en tout point y de E. Notons $(y_i)_{i\in I}$ l'ensemble des points de E tels que l'on ait $\dim \mathcal{O}_{X,y_i} = 3$. Comme les y_i, $i \in I$, sont des points maximaux de E, I est fini. Pour tout $i \in I$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,y_i}$ est formellement équidimensionnel (EGA IV 7.1.10 et 7.1.8). Par suite $\mathcal{O}_{\hat{X},y_i}$ est équidimensionnel de dimension 3. Comme $\mathcal{F}_{y_i}$ vérifie (S_2), on peut appliquer II 1.4 relativement à l'entier 3. Soit $W_{y_i} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} - \{y_i\}$. D'après loc. cit., on peut trouver un morphisme propre

$$g_{y_i} : Z_{y_i} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} ,$$

induisant un isomorphisme $g_{y_i}^{-1}(W_{y_i}) \simeq W_{y_i}$, tels que les composantes irréductibles de Z_{y_i} soient de dimension 3 , un faisceau g_{y_i}-ample L_{y_i} dont la restriction à $g_{y_i}^{-1}(W_{y_i})$ soit isomorphe au faisceau structural, tels que $g_{y_i}^{*}\mathfrak{F}_{y_i}$ vérifie la condition (S_3) . D'après II 1.6 et EGA IV 8(8.2, 10.5, 5.2, 10.5.2), il existe un voisinage ouvert V_i de y_i dans X , un morphisme propre

$$g_i : Z_i \to V_i ,$$

un faisceau g_i-ample L_i , tels que l'image inverse de g_i par le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{X},y_i} \to V_i$ s'identifie à g_{y_i} , l'image inverse de L_i étant alors L_{y_i} . Soit $W_i = V_i - \{\overline{y_i}\}$. Quitte à restreindre V_i à un voisinage ouvert de y_i dans V_i , on peut supposer que g_i induit un isomorphisme $g_i^{-1}(W_i) \simeq W_i$, et que $L_i|W_i$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{W_i}$ (EGA IV 8.5.2.4 et 8.10.5). On peut aussi supposer que les points maximaux de Z_i sont les projections des points maximaux de Z_{y_i} ; comme les composantes irréductibles de Z_{y_i} sont de dimension 3 , g_i satisfait à la condition c). On note $\hat{Z}_i$ le complété formel de Z_i le long de $g_i^{-1}(Y \cap V_i)$, etc. Comme l'ensemble des points de Z_i où $\hat{g}_i^{*}(\mathfrak{F}|\hat{V}_i)$ ne vérifie pas (S_3) est une partie fermée ne rencontrant pas $g_i^{-1}(y_i)$, on peut supposer, quitte à restreindre V_i , que $\hat{g}_i^{*}(\mathfrak{F}|\hat{V}_i)$ vérifie (S_3). Quitte à enlever à chaque V_i la réunion de $\{\overline{y_j}\}$ pour $j \neq i$, on peut supposer que l'on a

$$V_i \cap V_j \cap \{\overline{y_i}\} \cap \{\overline{y_j}\} = \emptyset \qquad \text{pour tous } i,j \in I ,\ i \neq j .$$

Soit T'' l'ensemble des points de $X - \bigcup_{i\in I} V_i$ en lesquels $\mathfrak{F}$ ne vérifie pas (S_3) . Posons

$$T_i = \{\overline{y_i}\} \cap (X - \bigcup_{i\in I} V_i) \qquad T' = T \cup T'' \cup (\bigcup_{i\in I} T_i) .$$

Comme la réunion des V_i contient les points y_i , i.e. les points où $\mathfrak{F}$ ne vérifie pas (S_3) et dont l'anneau local est de dimension 3 , on a

$$\operatorname{codim}(T',S) \geq 4 .$$

Soient $V = X - T'$ et $W = V - \bigcup_{i\in I} (\{\overline{y_i}\} \cap V_i)$. Comme les y_i sont les points maximaux de $V-W$, on a bien $\operatorname{codim}(V-W,V) \geq 3$, d'où la condition a).

Définissons maintenant Z . On considère le recouvrement ouvert de V formé de W et des V_i , $i\in I$. Comme la restriction du morphisme g_i à W_i est un isomorphisme, la famille de V-schémas formée de W et des Z_i se recolle ; on obtient ainsi un V-schéma $g : Z \to V$. Le morphisme g est propre car il l'est localement sur V ; enfin, par construction même, la restriction de g à W est un isomorphisme. On définit de même un faisceau g-ample L par recollement à partir de $\mathcal{O}_W$ et des L_i , compte tenu du fait que $L_i|W_i$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{W_i}$. Comme $\mathcal{F}|\hat{W}$, ainsi que les $\hat{g}_i^*(\mathcal{F}|\hat{V}_i)$, vérifie (S_3) , le faisceau $\hat{g}^*\mathcal{F}$ vérifie (S_3). On a donc réalisé toutes les conditions annoncées.

On peut appliquer III 2.3 au faisceau $\hat{g}^*\mathcal{F}$. En effet, pour tout point x de V tel que $\operatorname{codim}(\{\overline{x}\}\cap T',\{\overline{x}\}) = 1$, la condition $\operatorname{codim}(T',S) \geq 4$ montre que l'on a $\dim \mathcal{O}_{V,x} \geq 3$; d'après c), on a aussi $\dim \mathcal{O}_{Z,z} \geq 3$ en tout point z de Z fermé dans sa fibre au-dessus d'un tel point x ; par suite on a

$$\operatorname{prof}_z(\hat{g}^*\mathcal{F})_z \geq 3 .$$

Si h est le morphisme composé de g et de l'immersion ouverte $V \to S$, on peut trouver un entier n tel que $\hat{h}_*\mathcal{F}(-n)$ soit cohérent. Le schéma S étant complet, $\hat{h}_*\mathcal{F}(-n)$ est algébrisable. Soit F un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules cohérent tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{F} \simeq \hat{h}_*\mathcal{F}(-n)$. On en déduit, par restriction à $\hat{W}$, un isomorphisme

$$\mathcal{F}|\hat{W} \simeq \hat{F}|W .$$

Ceci montre que $\mathcal{F}|\hat{W}$ est algébrisable. On peut alors appliquer II 3.2 et 3.3. Si j est l'immersion ouverte de W dans X , on en déduit que les morphismes canoniques

$$(j_*j^*F)^\wedge \to \hat{j}_*(\hat{F}|\hat{W}) \simeq \hat{j}_*(\mathcal{F}|\hat{W}) \qquad \mathcal{F} \to \hat{j}_*(\mathcal{F}|\hat{W})$$

sont bijectifs. Ceci montre que $\mathcal{F}$ est algébrisable par le faisceau j_*j^*F .

Nous allons maintenant généraliser 2.3 au cas où l'on ne suppose plus Y défini par une équation mais seulement l'ouvert $X-Y$ affine. La condition (i) de 2.2 est équivalente à la suivante :

Pour tout point $x \in \hat{X}$, pour tout point z de $\hat{X}_x$, appartenant à U_x , on a

$$\operatorname{prof}_z\mathcal{F}_x \geq \operatorname{Inf}(2,\dim T + 4 - \delta_t x - \dim\{\overline{z}\}) .$$

Il sera commode de se ramner au cas où la condition ci-dessus est satisfaite en tout point $z \in \hat{X}_x$. Ceci est possible grâce au lemme suivant :

LEMME 2.4.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t , immersible dans un schéma régulier. Soient T une partie fermée non vide de S , $X = S-T$, Y une partie fermée de X telle que $U = X-Y$ soit affine ; notons $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y . Soient k un entier, $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$ satisfaisant à la condition suivante

(i) Pour tout point x de $\hat{X}$, pour tout point z de $\hat{X}_x$ appartenant à U_x , on a

$$\operatorname{prof}_z\mathcal{F}_x \geq \operatorname{Inf}(2,k-\delta_t x-\dim\{\overline{v}\}) .$$

Alors on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}$, un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induisant un isomorphisme sur U, tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{G}_x \geq 1$$

en tout point x de $\hat{X}$ et

$$\mathrm{prof}_z\, \mathcal{G}_x \geq \mathrm{Inf}(2, k-\delta_t x - \dim\{\overline{z}\})$$

en tout point z de $\hat{X}_x$.

Quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par un faisceau isomorphe sur U, on peut supposer que $\mathcal{F}$ n'a pas de sous-faisceau non trivial, nul sur U. On a alors

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{F}_x \geq 1$$

en tout point x de $\hat{X}$. Soit E l'ensemble des points x de $\hat{X}$ tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{F}_x < 2 \qquad \text{et} \qquad \delta_t x \leq k-2 \ .$$

L'ensemble E est fini. Pour le voir, on prend un recouvrement fini de X par des ouverts affines V_i et on applique I 3.5 aux schémas $\hat{X}_{\hat{V}_i}$ et aux entiers 2, 1, $k-2$. Pour tout point $x \in \overline{E}$ et tout point $z \in \hat{X}_x$ tel que $\dim\{\overline{z}\} = 1$, on a $\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 1$; l'existence de $\mathcal{G}$ résulte donc de 1.2.

LEMME 2.5.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, immersible dans un schéma régulier, I et J des idéaux de $\mathcal{O}_S$ tels que $I \subset J$, T une partie fermée de S telle que $T \cap V(J) = \{t\}$ et $T \subset V(I)$. Soient $X = S-T$, $Y = V(J) \cap X$, $Z = V(I) \cap X$ et soit $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Z. On suppose S complet pour la topologie I-adique, l'ouvert V affine et l'ouvert $X-Y$ réunion de $c+1$ ouverts affines. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$, satisfaisant à la condition suivante :

Pour tout point $x \in \hat{X}$, pour tout point v de $\hat{X}_v$ qui appartient à V_x, on a

$$\mathrm{prof}_v \mathcal{G}_x \geq \mathrm{Inf}(2, c+4 - \delta_t x - \dim\{\overline{v}\}) \ .$$

Soient S' le complété de S, $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_S S'$, etc. Notons $\hat{X}'$ le complété formel de X' le long de Y' et $p : \hat{X}' \to \hat{X}$ le morphisme canonique. Alors, si $p^*\mathcal{G}$ est algébrisable, il en est de même de $\mathcal{G}$.

On peut trouver un faisceau de modules cohérent G' sur S' tel que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x G' \geq 2$$

en tout point $x \in S'$ tel que $\{x\} \cap Y' = \emptyset$, et un isomorphisme

$$a : G' \simeq p^*\mathcal{G} \ .$$

Soient $\hat{X}'^Z$ le complété formel de X' le long de Z', $\hat{G}'^Z$ le complété formel de G' le long de Z', $\mathcal{G}'^Z$ l'image inverse de $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}'^Z$. Pour tout point $x\in\hat{X}'^{Z}$, pour tout point u de $\hat{X}'^{Z}_{x}$, on a

$$\mathrm{prof}_u \hat{G}'^{Z} \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_{t'}x - \dim\{\overline{u}\}) \qquad \mathrm{prof}_u(\mathcal{G}'^{Z}) \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_{t'}x-\dim\{\overline{u}\}).$$

On peut donc appliquer I 4.4 au faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{X}'^{Z}}(\hat{G}'^{Z}, \mathcal{G}'^{Z})$ car il satisfait aux mêmes hypothèses de profondeur que les faisceaux $\hat{G}'^{Z}$ et $\mathcal{G}'^{Z}$ (I 4.1.1). On en déduit que l'isomorphisme a se relève en un isomorphisme

$$b : \hat{G}'^{Z} \simeq \mathcal{G}'^{Z} ,$$

i.e. que $\mathcal{G}'^{Z}$ est algébrisable.

Pour montrer que $\mathcal{G}$ est algébrisable, on considère le système projectif de faisceaux de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\mathcal{G}_m = H^0(X, \mathcal{G}/I^{m+1}\mathcal{G})^{\sim} \quad , \quad m \geq 0 .$$

L'image inverse $\mathcal{G}'_m$ de $\mathcal{G}_m$ sur S' n'est autre que $H^0(X', \mathcal{G}'^{Z}/I'^{m+1}\mathcal{G}'^{Z})$ (EGA III 1.4.15). Comme on a $T'\cap Y' = \emptyset$, donc $\delta_{t'}x \leq c+1$ en tout point $x\in T'$, on a

$$\mathrm{prof}_u G' \geq 3-\delta_{T'}u$$

en tout point $u\in X'$. D'après I 2.7, le morphisme canonique

$$H^i_{T'}(X', G') \to \varprojlim_m H^i_{T'}(X', G'/I'^m G')$$

est bijectif pour $i \leq 1$ et le système projectif des $H^i_{T'}(X', G'/I'^m G')$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Comme on a

$$\mathrm{prof}_{T'} G' \geq 2 ,$$

le système projectif des $H^1_{T'}(X', G'/I'^m G')$ a une limite projective nulle. On en déduit, S' étant complet pour la topologie I'-adique, que toutes les flèches du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(S', G') & \longrightarrow & H^0(X', G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_m H^0(S', G'/I'^m G') & \longrightarrow & \varprojlim_m H^0(X', G'/I'^m G') \end{array}$$

sont des isomorphismes, et que le système projectif des $H^0(X', G'/I'^m G')$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler. Comme le morphisme $S' \to S$ est fidèlement plat, le système projectif des $\mathcal{G}_m$ satisfait aussi à la condition de Mittag-Leffler ; plus précisément, si G_m désigne le sous-objet des images universelles de $\mathcal{G}_m$, son image inverse sur S' est le sous-objet des images universelles de $H^0(X', G'/I'^{m+1}G')^{\sim}$; en particulier G_m est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules de type fini. Si k_0 est un entier, on peut alors trouver un sous-module de type fini H de $\varprojlim_m \mathcal{G}_m$ tel que l'application canonique $H \to G_{k_0}$ soit surjective. Soit $g : S' \to S$ le morphisme canonique ; par image inverse sur S', on obtient des morphismes injectifs

$$g^*H \xrightarrow{c} g^*(\varprojlim_m \mathcal{G}_m) \xrightarrow{d} H^0(X', G')^{\sim} = G'$$

et le morphisme de g^*H dans G'_{k_o} est surjectif. Si l'on a choisi k_o tel que le morphisme canonique

$$H^o_{T'}(S',G'/I^{k_o+1}G') \to H^o_T(S',G'/I'G')$$

soit nul, on a

$$\mathrm{Ker}(G' \to G'_{k_o}) \subset I'G' \quad .$$

Il résulte alors du lemme de Nakayama que c et d sont des isomorphismes. Le module H a donc G' pour image inverse sur S'. Par suite la restriction de H/I^mH à X est égale à $\mathcal{G}/I^m\mathcal{G}$, d'où le fait que $\hat{H}$ est isomorphe à $\mathcal{G}$.

PROPOSITION 2.6.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, immersible dans un schéma régulier, c un entier ≥ 0, f_o, $f_1,\ldots,f_c$ des sections globales de $\mathcal{O}_S$, T une partie fermée de S telle que $T \cap \bigcap_{o\leq i\leq c} V(f_i)$ soit égal à $\{t\}$. Soit I un idéal de S, tel que $V(I) \supset T \cup (\bigcap_{o\leq i\leq c} V(f_i))$; on suppose l'ouvert $V = S-V(I)$ affine et S complet pour la topologie I-adique. Soient $X = S-T$, $Y = \bigcap_{o\leq i\leq c} V(f_i) - \{t\}$, $Z = V(I)-T$ et soit $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Z. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$, satisfaisant à la condition suivante :

(i) Pour tout point x de $\hat{X}$, pour tout point v de $\hat{X}_x$ appartenant à V_x, on a

$$\mathrm{prof}_v \mathcal{F}_x \geq c+4-\delta_t x - \dim\{\overline{v}\} \ .$$

Alors le faisceau $\mathcal{F}$ est algébrisable.

D'après 2.4 et 0.1, on peut supposer, quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par un faisceau isomorphe sur V, que l'on a

(*) $$\mathrm{prof}_v \mathcal{F}_x \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_t x - \dim\{\overline{v}\}$$

our tout point $x \in \hat{X}$ et tout point v de $\hat{X}_x$. On raisonne par récurrence sur c. Le cas $c = 0$ résulte de 2.3 et 2.5. Supposons la proposition démontrée quand on remplace c par $c-1$ et montrons-la pour c.

Soit $(V_\alpha)_{\alpha\in \mathbf{A}}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines ; pour chaque $\alpha \in \mathbf{A}$, soit $(x_j)_{j\in J_\alpha}$ l'ensemble des points associés à $\mathcal{F}_{V_\alpha}$; si $J = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}} J_\alpha$, on considère l'ensemble $(y_j)_{j\in J}$ des projections dans X des points x_j. D'après 2.6.0 ci-dessous, on peut trouver des sections globales $g_1,\ldots,g_c$ de $\mathcal{O}_S$, telles que le fermé $V(f_o + \sum_{1\leq i\leq c} g_i f_i)$ ne continne aucun des y_j, $j \in J$. Quitte à remplacer f_o par $f_o + \sum_{1\leq i\leq c} g_i f_i$ sans changer les autres f_i, ce qui ne change pas Y, on peut donc supposer qu'aucun des y_j n'appartient à $V(f_o)$. Ceci entraîne que f_o n'est pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{F}$.

Pour chaque $p \geq 0$, on considère le sous-schéma fermé X_p de X défini par l'annulation de f_o^{p+1} ; on pose $Z_p = Z\times_X X_p$ et on note $\hat{X}_p$ le complété formel de X_p le long de Z_p , $\hat{a}_p : \hat{X}_p \to \hat{X}$ l'immersion fermée canonique; on pose $\mathfrak{F}_p = (\hat{a}_p)^*\mathfrak{F}$, etc. Soit x un point de X_p et montrons que l'on a

$$\mathrm{prof}_v(\mathfrak{F}_p)_x \geq c+3-\delta_t x-\dim\{\overline{v}\}$$

en tout point v de $(V_p)_x$. Le morphisme $(\hat{a}_p)_x$ induit par $\hat{a}_p$ sur les anneaux locaux en x n'est autre que le passage au quotient par l'image $(\hat{f}_o)_x^{p+1}$ de f_o^{p+1} dans $\mathcal{O}_{\hat{X}_x}$. L'élément $(\hat{f}_o)_x$ n'étant pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{F}_x$, la relation ci-dessus résulte de (i).

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à X_p , Z_p , Y et au faisceau formel $\mathfrak{F}_p$. On en déduit l'existence d'un faisceau de modules cohérent F_p sur X_p et d'un isomorphisme $\hat{F}_p \simeq \mathfrak{F}_p$; d'après 1.1.1, on peut supposer de plus que l'on a

$$(**) \qquad \mathrm{prof}_v F_p \geq 2$$

en tout point v de V_p tel que $\{\overline{v}\}\cap Z_p = \emptyset$. Pour tout $p \geq 0$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{F}_o \xrightarrow{\hat{b}_p} \mathfrak{F}_p \xrightarrow{\hat{c}_p} \mathfrak{F}_{p-1} \to 0 \ ,$$

où le morphisme $\hat{b}_p$ est la multiplication par $\hat{f}_o^p$ et $\hat{c}_p$ la surjection canonique. Nous allons montrer que les morphismes $\hat{b}_p$ et $\hat{c}_p$ sont déduits, par passage aux complétés formels, de morphismes

$$b_p : F_o \to F_p \quad , \quad c_p : F_p \to F_{p-1} \ .$$

Les faisceaux F_o , F_p , F_{p-1} peuvent être considérés comme des faisceaux sur X_p ; soient $\bar{F}_o$, $\bar{F}_p$, $\bar{F}_{p-1}$ des prolongements cohérents de F_o , F_p , F_{p-1} à S_p . Comme on a $\dim T_p \leq c$ (I 3.2), il résulte de II 3.1.1 que, pour tout point $v\in V_p$ tel que $\{\overline{v}\}\cap Z_p \neq \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_v F_p \geq 3 - \delta_{T_p} v \ .$$

L'existence de b_p et c_p résulte donc de I 4.1.

Pour tout point $x\in Z_p$, on a une suite exacte

$$0 \to (\mathfrak{F}_o)_x \to (\mathfrak{F}_p)_x \to (\mathfrak{F}_{p-1})_x \to 0 \ .$$

Comme le morphisme canonique $\hat{X}_x \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,x}$ est fidèlement plat, la suite

$$0 \to (\mathfrak{F}_o)_x \to (\mathfrak{F}_p)_x \to (\mathfrak{F}_{p-1})_x \to 0$$

est aussi exacte. Il existe donc un voisinage ouvert $W(p)$ de Z_p dans X_p tel que la suite

$$0 \to F_o|W(p) \to F_p|W(p) \to F_{p-1}|W(p) \to 0$$

soit exacte. Nous allons montrer que l'on peut trouver un voisinage ouvert W de Z_o dans X , W ne dépendant pas de p , tel que la suite ci-dessus reste exacte quand on y remplace $W(p)$ par l'image inverse W_p de W dans X_p .

Considérons l'ensemble des points $v\in V_0$ où l'on a

$$\mathrm{prof}_v F_0 \leq 2 \qquad \text{et} \qquad \delta_t v \leq c \ .$$

Comme on a

$$\mathrm{prof}_v F_0 \geq \mathrm{Inf}(2, c+3-\delta_t v) \ ,$$

il résulte de I 3.5 que l'ensemble E est fini. L'ensemble E' des points de V_0 tels que l'on ait

$$\mathrm{prof}_v F_0 < 3 \qquad \text{et} \qquad \{\overline{v}\}\cap Z_0 = \emptyset$$

est contenu dans E , d'après I 3.2 ; par suite E' est fini. Soit $W_0 = X_0 - \overline{E}'$ et soit W un voisinage ouvert de Z dans X dont la trace sur X_0 soit égale à W_0 . Nous allons voir que W répond à la question. Quitte à restreindre $W(p)$ à un voisinage ouvert de Z_p , on peut supposer que $W(p)\subset W_p$. Soit k l'immersion canonique de $W(p)$ dans W_p . On considère le diagramme commutatif suivant, dont la première ligne est exacte,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k_*(F_0|W(p)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & k_*(F_p|W(p)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & k_*(F_{p-1}|W(p)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & R^1k_*(F_0|W(p)) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & F_0|W_p \arrow[r] & F_p|W_p \arrow[r] & F_{p-1}|W_p \arrow[r] & 0 \ .
\end{tikzcd} \tag{***}$$

Pour tout $v\in W_p - W(p)$, on a $\{\overline{v}\}\cap Z_p = \emptyset$. Par définition de E , on a donc $\mathrm{prof}_v F_0 \geq 3$ en tout point $v\in W_p - W(p)$. Par suite toutes les flèches verticales du diagramme ci-dessus sont des isomorphismes. L'exactitude de la deuxième ligne de (***) en résulte. On en déduit, pour tous $p\geq k$, une suite exacte

$$0 \to F_{p-k}|W_p \to F_p|W_p \to F_{k-1}|W_p \to 0 \ .$$

Soient $T' = T_0 \cup \overline{E}'$ et $X' = S - T'$. Notons $\hat{X}'$ le complété formel de X' le long de W_0 . Par passage à la limite projective à partir des suites exactes ci-dessus, k étant fixé et p variable, on voit que

$$\mathcal{G} = \varprojlim_p (F_p|W_p)$$

est un faisceau cohérent sur $\hat{X}'$, tel que $\hat{f}_0$ ne soit pas diviseur de zéro dans $\mathcal{G}$ et que l'on ait

$$\mathcal{G}/f_0^k\mathcal{G} \simeq F_{k-1}|W_{k-1} \ .$$

Si $\hat{X}^{Z_0}$ désigne le complété formel de X le long de Z_0 , il en résulte en particulier que l'image inverse de $\mathcal{G}$ sur $\hat{X}^{Z_0}$ est isomorphe à $\mathcal{F}|\hat{X}^{Z_0}$.

Si x est un point de $\hat{X}'\cap Z_0$ et v un point de $\hat{X}'_x$, on a, d'après (*) et II 3.1,

$$\mathrm{prof}_v \mathcal{G}_x \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_t x - \dim\{\overline{v}\}) \ . \tag{****}$$

Si x est un point de $\hat{X}'$ tel que $\{\overline{x}\}\cap Z_0 = \emptyset$, la relation ci-dessus est encore vérifiée d'après II 3.1.1. Si maintenant x est un point de $\hat{X}'$ tel que $\{\overline{x}\}\cap Z_o = \emptyset$, on a, par construction, $\mathrm{prof}_x F_o \geq 2$ et, puisque f_o n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{G}$, on a

$$\mathrm{prof}_x \mathcal{G}_x \geq 3 \;;$$

si v est une générisation immédiate de x , on a donc

$$\mathrm{prof}_v \mathcal{G}_x \geq 2 \quad .$$

Si v n'est pas une générisation immédiate de x , on peut trouver un point $x'\in\hat{X}'_x$ tel que $\mathrm{codim}(\{\overline{x'}\},\{\overline{v}\}) = 1$ et l'on a alors

$$\mathrm{prof}_v \mathcal{G}_{x'} \geq 2 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{prof}_v \mathcal{G}_{x'} \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_t x - \dim\{\overline{v}\})$$

suivant que $\{x'\}\cap Z_o$ est vide ou non. Dans tous les cas, pour tout point x de $\hat{X}'$, pour tout point v de $\hat{X}'_x$, on a la relation (****). Comme on a $T'\cap Y = \{t\}$, on a, d'après I 3.2,

$$\dim T' \leq c \; .$$

Les hypothèses de 2.3 sont donc satisfaites pour f_o , T' , $\mathcal{G}$, du moins après image inverse sur le complété de S . Soient $\tilde{S}$ le complété de S , $\tilde{X} = X\times_S\tilde{S}$, $\tilde{T}' = T'\times_S\tilde{S}$, etc. Soit $\tilde{G}$ un faisceau de modules cohérent sur $\tilde{X}-\tilde{T}'$ tel que le complété formel de $\tilde{G}$ le long de $\tilde{W}_o$ soit isomorphe à $\tilde{\mathcal{G}}$. Soient $(\tilde{X})^{\wedge}$ le complété formel de $\tilde{X}$ le long de $\tilde{Y}$ et $p : (\tilde{X})^{\wedge} \to \hat{X}$ le morphisme canonique. Le complété formel de $\tilde{G}$ le long de $\tilde{Y}$ est isomorphe à $p^*\mathfrak{F}$. Il résulte donc de 2.5 que $\mathfrak{F}$ est algébrisable.

LEMME 2.6.0.- Soient $\mathbf{A}$ un anneau noethérien, n et p des entiers > 0 , f_o , $f_1,\ldots,f_n$ des éléments de $\mathbf{A}$, $x_1,\ldots,x_p$ des points de Spec $\mathbf{A}$ correspondant respectivement aux idéaux premiers $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_p$. On suppose que l'intersection des $V(f_q)$, $0\leq q\leq n$, ne contient aucun des points x_i . Alors on peut trouver des éléments $g_1,\ldots,g_n$ de $\mathbf{A}$ tels que $V(f_o+f_1g_1+\ldots+f_ng_n)$ ne contienne aucun des x_i .

On peut supposer qu'aucun des x_i n'est générisation stricte d'un point $x_j, j\in[1,p]$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ le sous-ensemble de $(x_i)_{i\in[1,p]}$ formé des x_i qui appartienne à $V(f_o)$ et soit $J = [1,p]-I$. Comme $\bigcap_{o\leq q\leq n} V(f_q)$ ne contient aucun des x_i , on peut associer à chaque $x_i, i\in I$, un élément $f_{\varphi(i)}$ de l'ensemble $(f_q)_{1\leq q\leq n}$, tel que x_i n'appartienne pas à $V(f_{\varphi(i)})$. Pour chaque $q\in[1,n]$, on peut trouver un élément g_q de $\mathbf{A}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) On a $g_q \in \mathfrak{p}_j$ pour tout $j\in J$.

b) Si $i\in I$, on a $g_q \in \mathfrak{p}_i$ si et seulement si $\varphi(i) = q$.

Soit $f'_o = f_o + \sum_{1\leq q\leq n} f_q g_q$ .Comme tous les g_q appartiennent à $\mathfrak{p}_j$ pour $j\in J$ et comme $f_o \notin \mathfrak{p}_j$, on voit que $f'_o \notin \mathfrak{p}_j$ si $j\in J$. Si maintenant $i\in I$, tous les g_q sauf $g_{\varphi(i)}$, ainsi que f_o, appartiennent à $\mathfrak{p}_i$; par suite $f'_o \notin \mathfrak{p}_i$. Par suite $V(f'_o)$ ne contient aucun des x_i pour $i \in [1,p]$.

Pour démontrer le théorème d'algébrisation dans le cas local, nous utiliserons 2.6 et la technique de descente 0.4. Cette dernière nécessite le lemme suivant qui permet de vérifier l'existence d'une donnée de descente.

LEMME 2.7.- Soient S un schéma affine noethérien localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, f_o, $f_1,\dots,f_c$ des sections globales de $\mathcal{O}_S$, T une partie fermée de S, I un idéal de $\mathcal{O}_S$. On suppose que S est complet pour la topologie I-adique, que l'ouvert $V = S-V(I)$ est affine et que $V(I) \supset \bigcap\limits_{o\leq i\leq c} V(f_i)$. Soient $X = S-T$, $Y = X \cap (\bigcap\limits_{o\leq i\leq c} V(f_i))$, $Z = X \cap V(I)$ et soit $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Z. Posons $\Sigma = T\cap Y$, $d = \dim \Sigma$. Soient F_1 et F_2 deux faisceaux de modules cohérents sur X tels que, pour tout point fermé t et toute générisation $v\in V$ de t, on ait

$$\mathrm{prof}_v F_1 \geq \mathrm{Inf}(2, c+d+3-\mathrm{codim}(\{\overline{t}\},\{\overline{v}\})) \qquad \mathrm{prof}_v F_2 \geq \mathrm{Inf}(2, c+d+3-\mathrm{codim}(\{\overline{t}\},\{\overline{v}\}))$$

On suppose donné un isomorphisme des complétés formels de F_1 et F_2,

$$\alpha : \hat{F}_1 \to \hat{F}_2 .$$

Alors on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules cohérent M, des morphismes

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[dr, "a_1"] & & F_2 \arrow[dl, "a_2"'] \\ & M , & \end{tikzcd}$$

tels que $a_1|V$ et $a_2|V$ soient des isomorphismes et tels que les morphismes $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2\alpha$ soient égaux sur V.

Notons J un idéal de $\mathcal{O}_S$ définissant $\bigcap\limits_{o\leq i\leq c} V(f_i)$, tel que $J \supset I$. Soient S' le complété de S pour la topologie J-adique, $X' = X\times_S S'$, $Y' = Y\times_S S'$, etc. et notons $\hat{X}'$ le complété formel de X' le long de Y', $p : \hat{X}' \to \hat{X}$ le morphisme canonique. On déduit de α un isomorphisme

$$p^*\alpha : \hat{F}'_1 \to \hat{F}'_2 .$$

Soit H un faisceau de modules cohérent sur S, prolongeant $\underline{\mathrm{Hom}}_S(F_1,F_2)$. On peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules cohérent G, un morphisme $b : H \to G$ tel que $b|V$ soit un isomorphisme et que, pour tout point fermé $t \in T$ et toute générisation s de t, on ait

$$(*) \qquad \mathrm{prof}_s G \geq \mathrm{Inf}(2, c+d+3-\mathrm{codim}(\{\overline{t}\},\{\overline{s}\})) .$$

On peut en effet supposer que l'on a $\mathrm{prof}_x H \geq 1$ en tout point $x\in V(I)$. Si E

est l'adhérence de l'ensemble des points de S où l'on a $\mathrm{prof}_s F_s < 2$ et tels qu'il existe un point fermé $t \in \overline{\{s\}} \cap T$ tel que $\mathrm{codim}(\overline{\{t\}},\overline{\{s\}}) \leq c+d+1$, on a

$$\mathrm{prof}_x F_x \geq 1$$

en toute générisation immédiate x de E . Il suffit donc de prendre $G = \mathcal{H}^0_{S/E}(F)$ (EGA IV 5.9.1).

On note β l'image de α dans $\hat{G}|\hat{X}$ et γ' l'image de $p^*\alpha$ dans $\hat{G}'|\hat{X}'$. Pour tout point $s'\in S'$, on déduit de (*) la relation

$$\mathrm{prof}_{s'} G' \geq \mathrm{Inf}(2, c+3-\mathrm{codim}(\Sigma'\cap\overline{\{s'\}},\overline{\{s'\}})) .$$

On peut alors appliquer I 2.6 à l'immersion ouverte de $S'-V(J')$ dans S' et à la partie fermée Σ' ; on en déduit que le morphisme canonique

$$\varphi^i : H^i_{\Sigma'}(S',G') \to \varprojlim_m H^i_{\Sigma'}(S',G'/J'^m G')$$

est bijectif pour $i\leq 1$ et que le système projectif des $H^i_{\Sigma'}(S',G'/J'^m G')$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i\leq 1$. Comme on a

$$\mathrm{prof}_{\Sigma'} G' \geq 2 ,$$

le système projectif des $H^i_{\Sigma'}(S',G'/J'^m G')$ a une limite projective nulle. Par suite le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H^0(S',G'/J'^m G') \xrightarrow{f} \varprojlim_m H^0(X',G'/J'^m G')$$

est un isomorphisme. Le schéma S' étant complet pour la topologie J'-adique, il en est de même du morphisme canonique

$$G' \xrightarrow{g} \varprojlim_m G'/J'^m G' .$$

On peut donc trouver une section δ' de G' telle que $fg(\delta') = \gamma'$.

Soient $\beta = (\beta_m)_{m\in N}$, où $\beta_m \in H^0(X,G/I^m G)$ et soit $\gamma' = (\gamma'_m)_{m\in N}$, où γ'_m est l'image de β_m par le morphisme canonique

$$H^0(X,G/I^m G) \to H^0(X',G'/J'^m G')$$

et soit δ'_m l'image de δ' dans $G'/I'^m G'$. Soit $j : X\to S$ l'immersion canonique et G_m l'image de $G/I^m G$ dans $j_* j^*(G/I^m G)$. Notons que, tout point maximal x du support de G/IG est générisation d'un point de Y . En effet, pour tout point maximal u du support de G , on a, d'après (*) ,

$$\mathrm{codim}(\Sigma\cap\overline{\{u\}},\overline{\{u\}}) \geq c+3 \quad ;$$

comme V est affine, on a aussi

$$\mathrm{codim}(\overline{\{x\}}\cap\Sigma,\overline{\{x\}}) \geq c+2 \quad ,$$

et l'assertion résulte du fait que le complémentaire de Y est réunion de $c+1$ ouverts affines (I 3.2). Comme le morphisme $S' \to S$ est plat et que son image contient Y , le fait que l'image inverse de β_m dans $H^0(X',G'/I'^m G')$ se prolonge à S' en δ'_m entraîne qu'il existe une section $\delta_m \in G_m$ prolongeant β_m, dont l'image inverse est δ'_m. Cette dernière condition montre que, pour tous $p \geq m$, δ_m est l'image inverse de δ_p par le morphisme canonique $G_p \to G_m$. Comme on a $\dim T \leq d+c+1$, d'où

$$\mathrm{prof}_v G \geq 2 - \mathrm{codim}(\overline{\{v\}} \cap T, \overline{\{v\}})$$

en tout point $v \in V$, on peut appliquer 2.5 à l'immersion ouverte $k : V \to S$. On en déduit, compte tenu de la relation $\mathrm{prof}_T G \geq 1$, que l'on a

$$\mathrm{prof}_T(\text{"}\varprojlim_m\text{"}\, G/I^m G) \geq 1 .$$

On a donc un isomorphisme

$$G = \varprojlim_m G/I^m G \simeq \varprojlim_m G_m .$$

Les δ_m, $m \in \mathbb{N}$, définissent alors une section δ de G telle que $\hat{\delta}|\hat{X} = \beta$.

La restriction de δ à V est un isomorphisme de $F_1|V$ sur $F_2|V$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[d] & F_2 \arrow[d] \\ k_*(F_1|V) \arrow[r, "k_*(\delta|V)"] & k_*(F_2|V) \end{tikzcd}$$

et soit M le sous-module de $k_*(F_2|V)$ engendré par les images de F_1 et F_2. On a alors des morphismes

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[dr, "a_1"'] & & F_2 \arrow[dl, "a_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

qui satisfont aux conditions de l'énoncé.

THEOREME 2.8.- Soient S un schéma local noethérien de point fermé t, immersible dans un schéma régulier ; soient I un idéal de $\mathcal{O}_S$, $X = S - \{t\}$, $Y = V(I) \cap X$. On suppose l'ouvert $U = X - Y$ affine et S complet pour la topologie I-adique. On note $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Soit C la catégorie des faisceaux de modules cohérents F sur X qui satisfont aux conditions suivantes :

(i) Pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 3 - \delta_t u .$$

(ii) Pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 2 .$$

Soit C la catégorie des faisceaux de modules cohérents $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$, satisfaisant à la condition suivante :

(iii) Pour tout point fermé x de $\hat{X}$, pour tout point z de $\hat{X}_x$, appartenant à U_x, on a

$$\mathrm{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 3-\dim\{\bar{z}\} .$$

Alors le foncteur φ de C dans $\mathbf{C}$ qui, à un faisceau F, associe son complété formel $\hat{F}$, est une équivalence de catégories.

Le foncteur φ est pleinement fidèle d'après I 4.1. Compte tenu de 1.1.1, le fait que φ soit une équivalence de catégories résulte du corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.9.- Les notations étant celles de 2.8, soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\hat{X}$, appartenant à $\mathbf{C}$. Alors $\mathcal{F}$ est algébrisable.

Quitte à remplacer S par l'adhérence schématique S_1 de U dans S et $\mathcal{F}$ par son image inverse sur S_1, ce qui est loisible d'après 0.1, on peut supposer que U est schématiquement dense dans S. Comme U est affine, on peut réaliser U comme sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathbf{A}^c_S$. On considère $\mathbf{A}^c_S$ comme l'ouvert de $\mathbf{P}^c_S = \mathrm{Proj}\ S[X_0,X_1,\ldots,X_c]$, lieu des points où l'on a $X_0 \neq 0$. Soit P l'adhérence schématique de U dans $\mathbf{P}^c_S$. La projection canonique de $\mathbf{P}^c_S$ sur S définit un morphisme

$$f : P \to S ,$$

tel que f induise un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$. On a ainsi réalisé U comme le complémentaire dans P de la section hyperplane définie par $X_0 = 0$. Soit $A = \Gamma(S)$ et considérons l'espace affine $\mathbf{A}^{c+1}_S = \mathrm{Spec}\ A[T_0,T_1,\ldots,T_c]$. Soit I' l'image inverse de I dans $A[T_0,T_1,\ldots,T_c]$ et soit B le complété pour la topologie I'-adique de l'anneau local à l'origine de $\mathbf{A}^{c+1}_S$. Si $R = \mathrm{Spec}\ B$, on considère le R-schéma projectif $Q = P\times_S R$ et la "section hyperplane générique" H de Q définie par

$$(*) \qquad X_0(T_0-1) + X_1T_1 + \ldots + X_cT_c = 0 .$$

Soient S' l'image fermée de H dans R, $g : H \to S'$, $h : R \to S$ et $q : S' \to S$ les morphismes canoniques. On considère la section

$$s : S \to R ,$$

définie par $T_i = 0$ pour $0\leq i\leq c$. D'après (*), l'image inverse de H par s est la section hyperplane de P définie par $X_0 = 0$, i.e. $P-U$. Par suite $s(Y \cup t)$ est la partie fermée de S' définie par $T_i = 0$ pour $0\leq i\leq c$. Soient $T = q^{-1}(t)$, $Z = q^{-1}(Y)$, $X' = S'-T$, $\hat{X}'$ le complété formel de X' le long de Z, $\hat{R}$ le complété formel de R le long de $h^{-1}(Y)$,

$$\varphi : \hat{X}' \to \hat{X}$$

le morphisme canonique, $\mathcal{F}' = \varphi^*\mathcal{F}$. Soit $V = X'-Z$; comme V est l'image inverse de U par q, V est affine. Si t' désigne le point fermé de S', on a

$$T \cap s(Y \cup t) = \{t'\} \text{ .}$$

Nous allons montrer que la condition (i) de 2.6 est vérifiée par $\mathfrak{I}'$, i.e. que, pour tout point x' de $\hat{X}'$, pour tout point v de $\hat{X}'_{x'}$, appartenant à $V_{x'}$, on a

$$\operatorname{prof}_v \mathfrak{I}'_{x'} \geq c+4-\delta_t,x'-\dim\{\overline{v}\} \text{ .}$$

Soit $x = \varphi(x')$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{X}'_{x'} \arrow[r, dash, "i"] \arrow[d, "a"] & \hat{R}_{x'} \arrow[r, dash, "d"] \arrow[d, "b"] & \hat{X}_x \arrow[d, "c"] \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X',x'} \arrow[r, "j"] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{R,x'} \arrow[r, "e"] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd} \text{ .}$$

Les morphismes a, b, c, d e sont fidèlement plats, i et j sont des immersions fermées. D'après EGA IV 6.1.1, appliqué à un sous-schéma fermé d'espace $\{\overline{x}\}$ et à son image inverse dans R, on a

$$\delta_t x + c + 1 = \dim h^{-1}(\{\overline{x}\}) \quad ,$$

d'où, $h^{-1}(\{\overline{x}\})$ étant irréductible et caténaire,

$$\delta_t x + c + 1 = \delta_t,x' + \dim \mathcal{O}_{h^{-1}(x),x'} \text{ .}$$

Si $\delta = \dim \mathcal{O}_{h^{-1}(x),x'}$, δ n'est autre que la dimension de la fibre fermée de e, donc aussi de d. Si $u = d(v)$, on a d'autre part

$$\dim\{\overline{u}\} + \delta = \dim\{\overline{v}\} + \dim \mathcal{O}_{d^{-1}(u),v} \text{ .}$$

On déduit des deux égalités ci-dessus la relation

(**) $$c+1-\delta_t,x'-\dim\{\overline{v}\} = \dim \mathcal{O}_{d^{-1}(u),v} - \delta_t x - \dim\{\overline{u}\} \text{ .}$$

Comme le morphisme d est de Cohen-Macaulay, on a (EGA IV 6.3) :

$$\operatorname{prof}_v(\hat{h}^*\mathfrak{I})_{x'} = \operatorname{prof}_u \mathfrak{I}_x + \dim \mathcal{O}_{d^{-1}(u),v} \text{ .}$$

Comme on a, par hypothèse,

$$\operatorname{prof}_u \mathfrak{I}_x \geq 4-\delta_t x - \dim\{\overline{u}\} \quad ,$$

la relation ci-dessus s'écrit, compte tenu de (**),

$$\operatorname{prof}_v(\hat{h}^*\mathfrak{I})_{x'} \geq c+4+1 - \delta_t,x' - \dim\{\overline{v}\} \text{ .}$$

On note alors que $\mathfrak{I}'_{x'}$ est la restriction au sous-schéma fermé $\hat{X}'_{x'}$ du faisceau $(\hat{h}^*\mathfrak{I})_{x'}$. Comme la restriction de f à U est un isomorphisme, il en est de même de la restriction de g à V. D'après (*), H est défini localement par l'annulation d'un élément non diviseur de zéro et ne contient aucun point maximal dans sa fibre au-dessus de P . Comme un point associé à $(\hat{h}^*\mathfrak{F})_{x'}$ est nécessairement maximal dans sa fibre, $\mathfrak{F}'_{x'}$ est quotient de $(\hat{h}^*\mathfrak{F})_{x'}$ par un élément non diviseur de zéro dans $(\hat{h}^*\mathfrak{F})_{x'}$. On a donc

$$(***) \qquad \operatorname{prof}_V \mathfrak{F}'_{x'} = \operatorname{prof}_V (\hat{h}^*\mathfrak{F})_{x'} - 1 \geq c+4-\delta_{t',x'} - \dim\{\overline{v}\} \quad .$$

On peut alors appliquer 2.6 à X' , aux parties fermées Z , $s(Y)$, et au faisceau $\mathfrak{F}'$. Il en résulte que $\mathfrak{F}'$ est algébrisable.

Montrons que $\mathfrak{F}$ est algébrisable. Comme $\mathfrak{F}'$ est algébrisable, on peut trouver un faisceau de modules cohérent F' sur X' et un isomorphisme $\hat{F}' \simeq \mathfrak{F}'$. La relation (***) entraîne que, pour pour tout point $v \in V$ tel que $\{\overline{v}\} \cap Z \neq \emptyset$, on a

$$(****) \qquad \operatorname{prof}_v F' \geq c+4-\delta_{t',v}$$

(II 3.1.1). D'après 1.1.1, on peut choisir F' tel que l'on ait

$$\operatorname{prof}_v F' \geq 2$$

en tout point $v \in V$ tel que $\{\overline{v}\} \cap Z = \emptyset$. Soit $\overline{F}'$ un prolongement cohérent de F' à S' . On va appliquer le théorème de descente 0.4 au faisceau $(g^*\overline{F}')^\wedge$; le morphisme $H \to P$ est en effet fidèlement plat ; si l'on montre que $(g^*\overline{F}')^\wedge$ est muni d'une pseudo-donnée de descente, alors, d'après loc. cit., on peut trouver un faisceau de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-modules cohérent $\mathfrak{G}$ dont l'image inverse sur H est isomorphe à $(g^*\overline{F}')^\wedge$. D'après EGA III 5.1.4, $\mathfrak{G}$ est algébrisable. Comme $\hat{f}^*\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont isomorphes sur U , on en déduit que $\mathfrak{F}$ est algébrisable (0.1). On est donc ramené à montrer que $(g^*\overline{F}')^\wedge$, ou ce qui revient au même, F' est muni d'une pseudo-donnée de descente.

Soient S'' le complété de $S'\times_S S'$ pour la topologie I''-adique (I'' image inverse de l'idéal I dans $S'\times_S S'$) , S''' le complété de $S'\times_S S'\times_S S'$ pour la topologie I'''-adique et soit $\hat{S}''$ le complété formel de S'' le long de $V(I'')$, $\hat{S}'''$ le complété formel de S''' le long de $V(I''')$. On considère les projections canoniques

$$S \xleftarrow{\;q\;} S' \underset{q_2}{\overset{q_1}{\leftleftarrows}} S'' \;\overset{q_{12}}{\underset{q_{13}}{\overset{\xleftarrow{q_{23}}}{\leftleftarrows}}}\; S''' \quad .$$

Soient $T'' = (q_1 q)^{-1}(t)$, $X'' = S''-T''$, $F''_1 = q_1^*F'$, $F''_2 = q_2^*F'$. Les complétés formels $\hat{F}''_1$ et $\hat{F}''_2$ le long de $V(I'')$ sont alors isomorphes à l'image inverse $\mathfrak{F}''$ de $\mathfrak{F}$ sur X'' . Montrons qu'il existe un pseudo-isomorphisme

$$\alpha : F''_1 \to F''_2$$

tel que

$$q_{23}^*(\alpha) q_{12}^*(\alpha) = q_{13}^*(\alpha) \quad .$$

On applique 2.7. Vérifions-en les hypothèses. Soit $W = q_1^{-1}(V)$. Le morphisme $q_1|V$ est de Cohen-Macaulay. Par suite, pour tout point $w \in W$, si $v = q_1(w)$, on a

$$\mathrm{prof}_w F''_1 = \mathrm{prof}_v F' + \dim \mathcal{O}_{q_1^{-1}(v),w} \quad .$$

Pour tout point fermé $t''\in T''$, pour toute générisation w de t'' , on a la relation suivante, analogue à (**),

$$\dim \mathcal{O}_{q_1^{-1}(v),w} = c - \mathrm{codim}(\{\overline{t''}\},\{\overline{w}\}) + \delta_{t'}v \quad ;$$

on en déduit, compte tenu de (****), que, pour tout point fermé $t''\in T''$, pour toute générisation $w\in W$ de t'' , on a

$$\mathrm{prof}_w F''_1 \geq 2c+4 - \mathrm{codim}(\{\overline{t''}\},\{\overline{w}\}) \quad \text{ou} \quad \mathrm{prof}_w F''_1 \geq 2$$

suivant que $\{\overline{v}\}\cap Z \neq \emptyset$ ou $\{\overline{v}\}\cap Z = \emptyset$; de plus les mêmes relations sont satisfaites si l'on remplace F''_1 par F''_2 . On applique alors 2.7 aux sections globales $q_1^{-1}(T_o)$, $q_1^{-1}(T_1),\ldots, q_1^{-1}(T_c)$, en y remplaçant T par le fermé T'' et Z par Z'' . Comme $T \cap(\cap V(T_i)) = \{t\}$, on a

$$d = \dim(T''\cap \bigcap_{o\leq i\leq c} V(q_1^{-1}(T_i))) \leq c+1 \text{ .}$$

Par suite toutes les hypothèses de 2.7 sont satisfaites, d'où l'existence de α . Enfin la relation de cocycle résulte du fait qu'en tout point $s\in S''$ tel que $\{\overline{s}\}\cap Z''' = \emptyset$, la profondeur des images inverses sur S''' de F''_1 et F''_2 est ≥ 1 .

3. Applications.

Appliqués à des faisceaux localement libres, les théorèmes d'algébrisation donnent des cas où la condition Leff de SGA 2 X 2 est vérifiée. On a en effet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1.- Soient S un schéma noethérien, localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, $f : X \to S$ un morphisme propre (resp. soit S un schéma local noethérien complet et soit X le complémentaire du point fermé de S) . Soit Y une partie fermée de X , telle que l'ouvert $U = X-Y$ soit affine. Supposons que U vérifie la condition (S_2) et que les composantes irréductibles des fibres de f soient de dimension ≥ 3 (resp. que les composantes irréductibles de S soient de dimension ≥ 4). Alors on a $\mathrm{Leff}(X,Y)$.

La condition $\mathrm{Leff}(X,Y)$ est vérifiée d'après I 4.2. Soit $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y ; il suffit de montrer que tout faisceau localement libre $\mathfrak{F}$ sur $\hat{X}$ est algébrisable. Soit E l'ensemble des points de $\hat{X}$ fermés dans leur fibre (resp. l'ensemble des points fermés de $\hat{X}$) . Si $s\in E$, on a par hypothèse $\dim \hat{X}_x \geq 3$, et, comme U_x vérifie (S_2) , on a

$$\mathrm{prof}_u \mathfrak{F}_x \geq 3\text{-}\dim\{\overline{u}\} ,$$

pour tout point $u \in U_x$. Le fait que $\mathfrak{F}$ soit algébrisable résulte donc de 1.5 (resp. 2.9).

Remarque 3.2.- Les conséquences de la condition Leff(X,Y) ont été étudiées dans SGA 2 X. Rappelons en particulier (loc. cit. X 2.5) que, pour tout revêtement étale R de Y , il existe un voisinage ouvert V de Y dans X et un unique prolongement de R en un revêtement étale de V .

CHAPITRE V

Théorèmes de comparaison en cohomologie étale des faisceaux d'ensembles ou de groupes non nécessairement commutatifs.

Nous nous proposons de démontrer l'analogue, pour les faisceaux d'ensembles ou de groupes non nécessairement commutatifs, des énoncés 4.5 et 4.6 de SGA 2 XIV. Les notions de cohomologie étale à valeurs dans un faisceau d'ensembles ou de groupes sont celles introduites dans SGA 4 XII 3 et [5].

Dans le cas d'un faisceau constant sur un schéma normal, les théorèmes de comparaison sont des corollaires faciles de IV 3. Commençons par traiter ce cas.

1. Théorèmes de comparaison cohomologique pour les faisceaux constants.

PROPOSITION 1.1.- Soient S un schéma noethérien, localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, $f : X \to S$ un morphisme propre, U un ouvert de X, affine sur S, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, F un faisceau d'ensembles (resp. un faisceau en groupes) sur X, localement constant constructible. On suppose que U vérifie (S_2) et que les composantes irréductibles des fibres de f sont de dimension ≥ 2 (resp. ≥ 3). Alors le morphisme canonique

$$H^0(X,F) \to H^0(Y,j^*F)$$

est bijectif (resp. la condition précédente est satisfaite et le morphisme canonique

$$\varinjlim_V H^1(V,F) \to H^1(Y,j^*F) \quad ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, est bijectif.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où F est un faisceau d'ensembles. D'après SGA 4 IX 2.2, on peut trouver un revêtement étale X' de X tel que l'image inverse F' de F sur X' soit un faisceau constant. Si $Y' = Y\times_X X'$, etc., il suffit de prouver que le morphisme canonique

$$H^0(X',F') \to H^0(Y',j'^*F')$$

est bijectif car la même assertion est vraie quand on remplace X' par $X'\times_X X'$. Il suffit donc de montrer que le morphisme canonique

$$\pi_0(X') \to \pi_0(Y')$$

est bijectif ; or ceci résulte de I 4.2.

Dans le cas d'un faisceau en groupes, la proposition résulte de IV 3.2.

COROLLAIRE 1.2.- Soient S un schéma noethérien, localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, X un schéma intègre de point générique x, $f : X \to S$ un morphisme propre, U un ouvert de X, affine sur S, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé d'espace sous-jacent $X-U$. Soit L une extension finie de $k(x)$, $\tilde{X}$ le normalisé de X dans L ; on note $\tilde{Y}$ l'image inverse de Y dans X, etc. On suppose que les composantes irréductibles des fibres de f sont de dimension ≥ 2 (resp. ≥ 3). Alors $\tilde{Y}$ est connexe (resp., pour tout faisceau en groupes constant fini $\tilde{F}$ sur $\tilde{X}$, le morphisme canonique

$$\varphi : \varinjlim_V H^1(V,\tilde{F}) \to H^1(\tilde{Y},\tilde{j}^*\tilde{F}) \quad ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{X}$, est bijectif.

Dans le cas où $\tilde{X}$ est fini sur X, le corollaire est un cas particulier de 1.1. Nous allons nous ramener à ce cas. Quitte à remplacer X par un schéma fini au-dessus de X, on peut supposer que $\tilde{X}$ est la clôture intégrale de X dans son corps des fractions. Soit $g : \tilde{X} \to S$ le morphisme canonique. Si $\tilde{F}$ est un faisceau en groupes constant non trivial sur $\tilde{X}$, il suffit, pour prouver que $\tilde{Y}$ est connexe, de montrer que le morphisme canonique

$$g_*\tilde{F} \to g_*\tilde{j}_*(\tilde{j}^*\tilde{F})$$

est bijectif. Or cette condition est locale sur S ; de même le fait que le morphisme φ soit bijectif se vérifie localement sur S. On peut donc supposer S affine. Le schéma S est alors limite projective de schémas S_i, $i\in I$, affines, de type fini sur Z. D'après EGA IV 8.8.2 et 8.10.5, on peut trouver un entier $i\in I$, un morphisme propre

$$f_i : X_i \to S_i \; ,$$

un ouvert U_i de X_i, affine sur S_i, tels que f soit l'image inverse de f_i par le morphisme $S \to S_i$, et U l'image inverse de U_i. Pour $k\geq i$, on pose $X_k = X_i \times_{S_i} S_k$, etc. Pour chaque $k\geq i$, soit X'_k l'image fermée de X dans X_k, $\tilde{X}_k$ la clôture intégrale de X'_k, $\tilde{Y}_k$ l'image inverse de Y_k dans $\tilde{X}_k$. Les X'_k, $k\geq i$, donc aussi les $\tilde{X}_k$, forment un système projectif dont les morphismes de transition sont affines, et l'on a

$$\tilde{X} = \varprojlim_{k\geq i} \tilde{X}_k \quad .$$

De plus, pour $\ell\geq k$, $\tilde{Y}_\ell$ est l'image inverse de $\tilde{Y}_k$ par le morphisme $\tilde{X}_\ell \to \tilde{X}_k$. Comme les X'_k sont des algèbres de type fini sur $\mathbb{Z}$, les morphismes $\tilde{X}_k \to X'_k$ sont finis ([9] I p. 267 th. 3). On peut donc appliquer 1.1 aux $\tilde{X}_k$; on en déduit que le morphisme canonique

$$H^0(\tilde{X}_k,\tilde{F}_k) \to H^0(\tilde{Y}_k,\tilde{j}_k^*\tilde{F}_k) \qquad (\text{resp. } \varinjlim_V H^1(V,\tilde{F}_k) \to H^1(\tilde{Y}_k,\tilde{j}_k^*\tilde{F}_k) \ ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de $\tilde{Y}_k$ dans $\tilde{X}_k$) est bijectif, et ceci est vrai localement pour la topologie étale de S . Le fait qu'il en soit de même du morphisme

$$H^0(\tilde{X},\tilde{F}) \to H^0(\tilde{Y},\tilde{j}^*\tilde{F}) \qquad (\text{resp. } \varinjlim_V H^1(V,\tilde{F}) \to H^1(\tilde{Y},\tilde{j}^*\tilde{F}))$$

en résulte, compte tenu de SGA 4 VII 5.14.

PROPOSITION 1.3.- Soient S un schéma local noethérien, hensélien, de point fermé t , $X = X-\{t\}$, U un ouvert affine de X vérifiant (S_2) , $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, S' le complété de S , $a : S' \to S$ le morphisme canonique.

1) On suppose que toutes les composantes irréductibles de S sont de dimension ≥ 3 et que a et S vérifient la condition (S_2) (resp. que a vérifie (S_2), est universellement localement 0-acyclique et que U vérifie (S_2)). Alors, si F est un faisceau d'ensembles constant constructible (resp. localement constant constructible) sur X , le morphisme canonique

$$\varphi : H^0(X,F) \to H^0(Y,j^*F)$$

est bijectif (resp. φ est bijectif et, si F est un faisceau en groupes, le morphisme canonique

$$\psi : \varinjlim_V H^1(V,F) \to H^1(Y,j^*F) \ ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , est injectif.

2) Soit $\mathbf{L}$ un ensemble de nombres premiers. On suppose que toutes les composantes irréductibles de S sont de dimension ≥ 4 et que S est un hensélisé d'une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent (resp. que S est excellent, que le morphisme a est universellement localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$ (SGA 4 1.11) et que U vérifie (S_2)). Soit F un faisceau en groupes (resp. un faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes constructible sur X . Alors le morphisme ψ est bijectif.

1) Lorsque S est complet, l'assertion 1) résulte de I 4.2. Dans le cas général, soit X' (resp. F' , resp. etc.) l'image inverse de X (resp. F , resp. etc.) sur S' . On considère le diagramme commutatif suivant, dont tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "c"] \arrow[d, "j'"'] & Y \arrow[d, "j"] \\
X' \arrow[r, "b"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d, "i"] \\
S' \arrow[r, "a"] & S
\end{tikzcd} .$$

On sait que le morphisme

$$\varphi' : H^0(X',F') \to H^0(Y',j'^*F')$$

est bijectif. Comme S et S' sont de profondeur étale ≥ 2 en t (SGA 2 XIV 1.12) donc les faisceaux i_*F et i'_*F' constants (resp. comme a est localement 0-acyclique), le morphisme canonique

$$\theta : a^*i_*F \to i'_*F'$$

est bijectif. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^0(S,i_*F) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho \wr"'] & H^0(S,(ji)_*j^*F) = H^0(Y,j^*F) \arrow[dd, "\pi"] \\
H^0(S',a^*i_*F) \arrow[d, "\theta \wr"'] & \\
H^0(S',i'_*F') \arrow[r, "\varphi'"] & H^0(S',(j'i')_*j'^*F') = H^0(Y',j'^*F')
\end{tikzcd} .$$

On a vu que θ et φ' sont bijectifs et il en est de même de ρ car S est hensélein ; par suite π est surjectif. Comme le morphisme c est surjectif, π est injectif, donc est un isomorphisme ; d'après le diagramme ci-dessus, il en est de même de φ .

Soit maintenant F un faisceau en groupes localement constant constructible. Soit V un voisinage ouvert de Y dans X et h l'immersion ouverte de V dans S . On considère le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes (SGA 4 XII 3.2),

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(S,h_*(F|V)) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, "\lambda"] & H^1(V,F) \arrow[r] \arrow[dd, "\mu"] & H^0(S,R^1h_*(F|V)) \arrow[dl] \arrow[dd, "\nu"] \\
H^1(S',a^*h_*(F|V)) \arrow[dr] & & H^0(S',a^*R^1h_*(F|V)) \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & H^1(S',h'_*(F'|V')) \arrow[r] & H^1(V',F') \arrow[r] & H^0(S',R^1h'_*(F'|V'))
\end{tikzcd} .$$

Comme a est universellement localement 0-acyclique et S hensélien, λ est bijectif et ν injectif. Il résulte alors de $(*)$ et des diagrammes qu'on en déduit en remplaçant F par les groupes tordus de F ([5]III 2.3) que μ est injectif. On considère le diagramme commutatif

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} H^1(V,F) & \xrightarrow{\theta} & H^1(Y,j*F) \\ \mu\downarrow & & \downarrow\zeta \\ H^1(V',F') & \xrightarrow{\theta'} & H^1(Y',j*F') \end{array} \quad .$$

Comme S' est complet, on sait que θ' est injectif ; il en est donc de même de θ .

2) Comme S est excellent, l'ouvert U' de S' vérifie la condition (S_2). L'assertion à prouver est alors vraie quand on remplace S par S' (IV 3.2). Soit y un élément de $H^1(Y,j*F)$ et montrons qu'il est l'image d'un élément de $H^1(V,F)$ pour un voisinage convenable V de Y dans X . Plaçons-nous d'abord dans le cas où S est un hensélisé d'une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent. Si S_1 est un S-schéma, on pose $X_1=X\times_S S_1$, $F_1 = F_{(S_1)}$, etc. Considérons l'ensemble des couples (V,x) formés d'un voisinage ouvert V de Y_1 dans X_1 et d'un élément de $H^1(V,F_1)$ dont l'image dans $H^1(Y_1,j_1^*F_1)$ soit égale à y_1 . On dit que deux tels couples (V,x) , (W,z) sont équivalents s'il existe un voisinage ouvert de Y_1 , contenu dans $V\cap W$, tel que les restrictions de x et z à ce voisinage soient égales. Soit $\mathfrak{J}$ le foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas à valeurs dans la catégorie des S-schémas à valeurs dans la catégorie des ensembles, défini, pour tout S-schéma S_1 , par

$\mathfrak{J}(S_1)$ = {classes mod. équivalence de couples (V,x) , V étant un voisinage ouvert de Y_1 dans X_1 et x un élément de $H^1(V,F_1)$ tel que $x|Y_1 = y_1$} ,

la définition de $\mathfrak{J}$ sur les morphismes étant évidente. Le foncteur $\mathfrak{J}$ commute aux limites projectives filtrantes de schémas affines. On peut donc lui appliquer [1] 2.2. Soient y' l'image de y dans $H^1(Y',j'*F')$, W un voisinage ouvert de Y' dans X' et x' un élément de $H^1(W,F')$ dont l'image dans $H^1(Y',j'*F')$ soit égale à y' . Il résulte de loc.cit. que l'on peut trouver un élément de $\mathfrak{J}(S)$, i.e. un voisinage ouvert V de Y dans X et un élément x de $H^1(V,F)$ relevant y .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où F est un faisceau de ind-L-groupes et le morphisme $S' \to S$ universellement localement 1-asphérique pour L . Soit y un élément de $H^1(Y,j*F)$, y' son image dans $H^1(Y',j*F')$. Comme l'assertion à prouver est vraie quand on remplace S par S' , on peut trouver un voisinage ouvert W de Y' dans X' , un élément z de $H^1(W,F')$ dont la restriction à Y' soit égale à y' . Nous allons montrer que l'on peut choisir pour W l'image inverse V' d'un voisinage ouvert V de Y dans X . Soit en effet E l'ensemble des points fermés de U tels que l'on ait

$$\text{prof hop}_u X < 3 \ .$$

D'après 1.3 ci-dessous, l'ensemble E est fini ; c'est donc une partie fermée de X . Posons $V = X-E$. Quitte à restreindre W à un voisinage ouvert de Y'

dans X' , on peut supposer que $W \subset V'$. Nous allons montrer que l'élément z de $H^1(W,F')$ se prolonge à V' . Il suffit, pour cela, de montrer que, pour tout point $v \in V'-W$, on a

$$\mathrm{prof\ hop}_v^{\mathbf{L}} X' \geq 3 .$$

Soit u la projection de v dans S . Si l'on a $\dim\{\overline{u}\} = 1$, on a la relation $\mathrm{prof\ hop}_u X \geq 3$. Si l'on a $\dim\{\overline{u}\} = 2$, on a $\mathrm{prof\ hop}_u X \geq 2$ et $\dim \mathcal{O}_{S'_u,v} = 1$ donc $\mathrm{prof}_v S'_u \geq 1$. Enfin, si $\dim\{\overline{u}\} \geq 3$, on a $\dim \mathcal{O}_{S'_u,v} \geq 2$ et, d'après le théorème de pureté, on a $\mathrm{prof\ hop}\ S'_u \geq 3$. Comme le morphisme a est localement 1-asphérique pour L , on a (SGA 2 XIV 1.18) :

$$\mathrm{prof\ hop}_v^{\mathbf{L}} X' \geq \mathrm{prof\ hop}_u^{\mathbf{L}} X + \mathrm{prof\ hop}_v^{\mathbf{L}} S'_u \quad .$$

On a donc, dans tous les cas,

$$\mathrm{prof\ hop}_v^{\mathbf{L}} X' \geq 3 \quad ,$$

ce qui prouve que g se prolonge en un élément $x' \in H'(V',F')$.

Considérons le diagramme (*) et montrons qu'il existe un élément x de $H^1(V,F)$ tel que $\mu(x) = x'$. Comme S est hensélien et a localement 1-asphérique pour L , λ et ν sont bijectifs. Compte tenu du fait que S est hensélien, il résulte de (*) que l'on peut trouver un schéma local S_1 , un morphisme étale fini $S_1 \to S$, un torseur P_1 sur $V_{(S_1)}$, de groupes $F_{(S_1)}$, dont l'image inverse P'_1 sur $V'_{(S_1)}$ représente $x'|V'_{(S_1)}$. Comme S est hensélein et le morphisme a localement 0-acyclique, la donnée de descente naturelle que l'on a sur P'_1 provient, par image inverse, d'une donnée de descente sur P_1 . Par suite P_1 est l'image inverse sur V_1 d'un torseur P sur V dont l'image inverse P' sur V' a pour classe x' .

LEMME 1.3.1.- Soit X un schéma affine noethérien excellent (EGA IV 7.8), tel que toute composante irréductible de X soit équicodimensionnelle de dimension ≥ 2 . Alors l'ensemble E des points fermés x de X **tels** que l'on ait

$$\mathrm{prof\ hop}_x X < 3 ,$$

est fini. (Pour la notion de profondeur homotopique, voir SGA 2 XIV 1.2).

On raisonne par récurrence sur la borne supérieure des dimensions des composantes irréductibles de X . On peut supposer X réduit (SGA 4 VIII 1.1). Supposons d'abord que toutes les composantes irréductibles de X soient de dimension 2 . Soient X' le normalisé de X , $X'' = (X' \times_X X')_{red}$, $X''' = (X' \times_X X' \times_X X')_{red}$, $p : X' \to X$, $q : X'' \to X$, $r : X''' \to X$ les morphismes canoniques. L'ensemble des points où X' est régulier est un ouvert contenant tous les points x' tels que $\dim \mathcal{O}_{X',x'} < 2$; le complémentaire de cet ouvert est donc un ensemble fini F' . De même l'ensemble des points où X'' est régulier est un ouvert U'' dont le complémentaire F'' est fini ; il suffit en effet de prouver que tout point x'' de X'' , tel que $\dim \mathcal{O}_{X,q(x'')} < 2$, appartient à U'' . Or, si U est l'ouvert des points où X est normal, $q^{-1}(U)$ est un ouvert de X'' , dense dans la diagonale Δ . Un point x'' tel que $\dim \mathcal{O}_{X,q(x'')} < 2$, qui n'appartient pas à Δ , est donc un point maximal de X'' et X'' est régulier en un tel point. Comme X'' est régulier en tout point de Δ , à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, ceci prouve que F'' est fini.

Soient G l'ensemble des points isolés de X'' , H l'ensemble des points isolés de X''' . Nous allons montrer que l'on a

$$E \subset p(F') \cup q(F'') \cup q(G) \cup r(H) = E_1 \quad ,$$

ce qui prouvera la finitude de E . Soit x un point n'appartenant pas à E' , fermé dans X ; notons $\overline{X}$ le localisé strict de X en un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x (SGA 4 VIII 4.3), $\overline{X}' = X'\times_X\overline{X}$, etc. Montrons que, pour tout faisceau en groupes constant fini $C_{\overline{X}}$, tout torseur P sur $\overline{X} - \{\overline{x}\}$, de groupe $C_{\overline{X}}$, se prolonge à $\overline{X}$. Les anneaux locaux de $\overline{X}'$ aux différents points de $\overline{p}^{-1}(\overline{x})$ sont des anneaux réguliers de dimension 2 ; d'après le théorème de pureté (SGA 2 X 3.4), $\overline{p}^*P$ se prolonge en un torseur Q' sur $\overline{X}'$. Comme les anneaux locaux de $\overline{X}''$ aux différents points de $\overline{q}^{-1}(\overline{x})$ sont normaux de dimension ≥ 1 , et les anneaux locaux de $\overline{X}'''$ aux points de $\overline{r}^{-1}(\overline{x})$ de dimension ≥ 1 , on a (SGA 2 XIV 1.6 b)) :

$$\mathrm{prof}_{\overline{q}^{-1}(x)}\overline{X}'' \geq 2 \qquad\qquad \mathrm{prof}_{\overline{r}^{-1}(x)}\overline{X} \geq 1 \quad .$$

Il en résulte que la donnée de descente naturelle que l'on a sur $\overline{p}^*(P)$ se prolonge en une donnée de descente sur Q' . D'après SGA 1 IX 4.7, Q' est l'image inverse sur $\overline{X}'$ d'un torseur Q sur $\overline{X}$, qui prolonge P . Cela prouve que l'on a

$$\mathrm{prof\ hop}_x X \geq 3 \quad ,$$

d'où la finitude de E dans le cas où toutes les composantes irréductibles de X sont de dimension 2 .

Dans le cas général, soit X_1 une composante irréductible de X de dimension maximum, et soit U un ouvert affine non vide de X , contenu dans X_1 et dans l'ensemble des points où X est régulier. Il suffit, par récurrence, de prouver que, si la proposition est vraie pour un sous-schéma fermé Y de X , d'espace sous-jacent $X-U$, elle est aussi vraie pour X . Supposons donc que l'ensemble F des points fermés y de Y où l'on a

$$\mathrm{prof\ hop}_y F < 3$$

soit fini ; montrons que l'on a $E \subset F$. Si x est un point fermé de X , appartenant à U , on a, par hypothèse,

$$\dim \mathcal{O}_{U,x} \geq 2 \ ,$$

et, d'après le théorème de pureté, on a

(*) $$\text{prof hop}_x X \geq 3 \quad .$$

Soit maintenant x un point fermé de Y, n'appartenant pas à F, et montrons que la relation (*) est vérifiée en x. Soit $\bar{X}$ l'hensélisé de X en x, $\bar{x}$ le point fermé de $\bar{X}$. Il suffit, pour prouver (*), de montrer que, pour tout schéma local X', de point fermé x', pour tout morphisme local étale $X' \to X$, pour tout revêtement étale P de $X'-\{x'\}$, on peut trouver un schéma local X'' et un morphisme local étale $X'' \to X'$ tel que la restriction de P au complémentaire du point fermé x'' de X'' soit triviale. Comme on a

$$\text{prof hop}_y Y \geq 3 \quad ,$$

$P|Y'-\{x'\}$ se prolonge à Y' ; on peut donc trouver un morphisme $X'' \to X'$ comme ci-dessus tel que $P|Y''-\{x''\}$ soit trivial. Le fait qu'il en est de même de $P|X''-\{x''\}$ résulte alors de 1.3 1), dont les hypothèses sont satisfaites car X'' est excellent (SGA 4 XV 4.1).

COROLLAIRE 1.4.- Soient S un schéma local hensélien intègre, de point fermé t, $X = S-\{t\}$, U un ouvert affine de X, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$. On suppose que la dimension de S est supérieure ou égale à 3 et que les fibres formelles de S vérifient la condition (S_2). Soient L une extension finie du corps des fractions de S, $\tilde{S}$ le normalisé de S dans L, $\tilde{Y}$ l'image inverse de Y dans $\tilde{S}$. Alors $\tilde{Y}$ est connexe.

Dans le cas où $\tilde{S}$ est fini sur S, le corollaire est un cas particulier de 1.3.1. Dans le cas général, on peut trouver un S-schéma fini intègre S_1 et un homéomorphisme universel

$$\tilde{S} \to S_1 \quad .$$

(EGA 0_{IV} 23.2.5). Si l'on pose $Y_1 = Y \times_S S_1$, il revient au même de dire que Y_1 ou $\tilde{Y}$ est connexe. Montrons que Y_1 est connexe. Soit $Z^{(2)}(S_1)$ l'ensemble des points s_1 de S_1 tels que $\dim \mathcal{O}_{S_1,s_1} \geq 2$ et soit S_2 la $Z^{(2)}(S_1)$-clôture de S_1 (EGA IV 5.10.11). Montrons que S_2 est fini sur S_1. Soient S_1' le complété de S_1, Z l'image inverse de $Z^{(2)}(S_1)$ sur S_1'. Le schéma $S_2 \times_{S_1} S_1'$ n'est autre que la Z-clôture de S_1' (EGA IV 5.9.4). Comme les fibres formelles de S_1 vérifient (S_2), S_1' vérifie (S_2) en tout point s_1' tel que $\dim \mathcal{O}_{S_1',s_1'} < 2$; par suite $S_2 \times_{S_1} S_1'$ s'identifie à la $Z^{(2)}(S_1')$-clôture de S_1'. Comme cette $Z^{(2)}(S_1')$-clôture est finie sur S_1' (EGA IV 5.11.1), S_2 est fini sur S_1. On peut alors appliquer 1.3 1) à S_2. Il en résulte que $Y_1 \times_{S_1} S_2$, donc aussi Y_1, est connexe.

2. Profondeur étale d'un champ.

Il sera commode d'énoncer les théorèmes de 3 en termes de champs (voir [5] pour cette notion). Nous utiliserons la notion de profondeur étale d'un champ, généralisation triviale des notions de profondeur d'un faisceau d'ensembles ou de groupes (SGA 2 XIV 1.2).

PROPOSITION 2.1.- Soient X un schéma, Y une partie fermée de X, $U = X-Y$, $i : U \to X$ l'immersion canonique. Soit F un champ sur le site étale de X ([5] II 1.3). Si $X' \to X$ est un morphisme, on note U' (resp. F') l'image inverse de U (resp. F) sur X'. Si $\bar{y}$ est un point géométrique de X, on note $\bar{X}$ le localisé strict de X en $\bar{y}$, $\bar{U}$ et $\bar{F}$ les images inverses respectives de U et F sur $\bar{X}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le morphisme canonique

$$F \to i_*i^*F$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories).

(ii) Pour tout schéma X' étale au-dessus de X, le morphisme canonique

$$F(X') \to F(U')$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence).

Supposons U rétrocompact dans X. Alors les conditions précédentes sont équivalentes à la suivante :

(iii) Pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, le morphisme canonique

$$\bar{F}(\bar{X}) \to \bar{F}(\bar{U})$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Pour qu'un morphisme de champs soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des morphismes obtenus en prenant les sections cartésiennes au-dessus de tout schéma X' étale sur X. L'équivalence de (i) et (ii) en résulte, compte tenu des équivalences canoniques ([5] I 5.1) :

$$i_*(i^*F)(X') \approx i^*F(U') \approx F(U') \quad .$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Pour qu'un morphisme de champs soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des morphismes induits sur les fibres géométriques aux différents points de X ([5] III 2.1.5.8). Comme le morphisme $F \to i_*i^*F$ induit évidemment une équivalence en tout point géométrique $\bar{x}$ appartenant à U, ce morphisme est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence) si et seulement s'il en est ainsi aux différents points géométriques de Y. L'équivalence de (i) et (iii) résulte donc du calcul des fibres géométriques d'un champ en un point géométrique $\overline{y}$ ([5] VII 2.1.5).

DEFINITION 2.2.- Les notations sont celles de 2.1. Lorsque les conditions équivalentes de loc.cit. sont satisfaites, on dit que F est de profondeur étale ≥ 1 (resp. ≥ 2, resp. ≥ 3) le long de Y, et on écrit

$$\mathrm{prof}_Y F \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2 \text{ , resp. } \geq 3) \text{ .}$$

Si X est un schéma, y un point de X, F un champ sur X, on dit que F est de Y-profondeur ≥ 1 (resp. ≥ 2, resp. ≥ 3) en y, et on écrit

$$\mathrm{prof}_y F \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2 \text{ , resp. } \geq 3) \text{ ,}$$

si l'on a

$$\mathrm{prof}_{\overline{y}} \overline{F} \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2 \text{ , resp. } \geq 3) \text{ .}$$

($\overline{y}$ désigne un point géométrique au-dessus de y).

<u>Remarques</u> 2.3.

a) Dire qu'un champ F est de Y-profondeur ≥ 1 (resp. ≥ 2, resp. ≥ 3) équivaut à dire que, pour tout X-schéma étale X', pour tout couple d'objets x, $y \in F_{X'}$, on a $\mathrm{prof}_{Y'}(\underline{\mathrm{Hom}}_{X'}(x,y)) \geq 1$ (resp. pour tout X', tous x, $y \in F_{X'}$, on a $\mathrm{prof}_{Y'}(\underline{\mathrm{Hom}}_{X'}(x,y)) \geq 2$, resp. la condition précédente est satisfaite, et le morphisme canonique induit sur les faisceaux de sous-gerbes maximales

$$SF \to S(i_* i^* F)$$

est bijectif). (Pour la notion de sous-gerbe maximale, voir [5] III 2.1).

b) Soit F un faisceau d'ensembles et Φ le champ en catégories discrètes associé à F. Dire que l'on a

$$\mathrm{prof}_Y \Phi \geq 2 \quad (\text{resp. } \geq 3)$$

équivaut à dire que l'on a

$$\mathrm{prof}_Y F \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2) \text{ .}$$

Soient F un faisceau en groupes et Φ le champ des torseurs sous F ([5] III 1.4.5). Dire que l'on a

$$\mathrm{prof}_Y \Phi \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2 \text{ , resp. } \geq 3)$$

équivaut à dire que l'on a

$$\mathrm{prof}_Y F \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2 \text{ , resp. } \geq 3) \text{ .}$$

PROPOSITION 2.4.- Soient X un schéma, Y une partie fermée de X telle l'ouvert $U = X-Y$ soit rétrocompact dans X. Soit F un champ sur X. Alors on a $\mathrm{prof}_Y F \geq 1$ (resp. ≥ 2, resp. ≥ 3) si et seulement si on a

$$\operatorname*{Inf}_{y\in Y} \operatorname{prof}_y F \geq 1 \quad (\text{resp.} \geq 2 \text{ , resp.} \geq 3) \text{ .}$$

Si y est un point de Y , on a, d'après 2.1 (iii), dont on reprend les notations :

$$\operatorname{prof}_y F = \operatorname{prof}_{\bar{y}} \bar{F} \geq \operatorname{prof}_{\bar{Y}} \bar{F} \geq \operatorname{prof}_Y F \text{ .}$$

Inversement, si l'on a

$$\operatorname*{Inf}_{y\in Y} \operatorname{prof}_y F \geq 1 \quad (\text{resp.} \geq 2) \text{ ,}$$

on a aussi $\operatorname{prof}_Y F \geq 1$ (resp. ≥ 2) d'après SGA 2 XIV 1.8 et 2.3 a). Supposons enfin que, pour tout point $y\in Y$, on ait $\operatorname{prof}_y F \geq 3$ et montrons que le morphisme canonique

$$\varphi : F(X) \to i_* i^* F(X)$$

est une équivalence de catégories. On vient de voir que φ est pleinement fidèle. Soit s un objet de $i_* i^* F(X)$. Il existe un plus grand ouvert V tel que l'on puisse trouver une section t de $F(V)$ et un isomorphisme $\varphi(t) \simeq s|V$; en effet, si l'on a une famille d'ouverts V_i , $i\in I$, des sections $s_i \in F(V_i)$, des isomorphismes $\varphi(s_i) \simeq s|V_i$, le fait que φ soit pleinement fidèle entraîne que les s_i se recollent et définissent une section t de F au-dessus de la réunion des V_i . Supposons que l'on ait $V \neq X$, et soit y un point maximal de $X-V$. Notons $\bar{X}$ le localisé strict de X en un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus de y , $\bar{F}$ l'image inverse de F sur X , etc. L'hypothèse de profondeur en y entraîne que le morphisme canonique

$$\bar{F}(\bar{X}) \to \bar{F}(\bar{X}-\{\bar{y}\}) = \bar{F}(\bar{V})$$

est une équivalence de catégories. Par suite on peut trouver un voisinage ouvert V_1 de y , une section s_1 de $F(V_1)$ et un isomorphisme $\varphi(s_1) \simeq s|V_1$; mais ceci contredit la maximalité de V , d'où le fait que $V = X$.

3. <u>Théorèmes de comparaison cohomologique</u>.

Dans ce numéro, nous donnons les énoncés des théorèmes de comparaison cohomologique en terme général de champs ([5]), ainsi que le cas particulier d'un faisceau d'ensembles ou de groupes. Le cas d'un faisceau d'ensembles s'obtient en considérant le champ en catégories discrètes associé ; dans le cas d'un faisceau en groupes, on considère le champ des torseurs sous ce faisceau en groupes.

THEOREME 3.1.- Soient S un schéma noethérien, localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie, $f : X \to S$ un morphisme propre, c un entier ≥ 0 , U un ouvert de X , $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X , d'espace sous-jacent $X-U$. On suppose que, localement sur S , U est réunion de $c+1$ ouverts, affines sur S . Soit F un champ sur X . Alors, quand V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, le foncteur canonique

$$\varphi : \varinjlim_V F(V) \to j^*F(Y)$$

est fidèle. Supposons que F satisfasse à la condition suivante :

(i) Pour tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, on a, si $s = f(u)$,

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+2-\mathrm{deg\ tr}\ k(u)/k(s))$$

(resp. $\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(2, c+3-\mathrm{deg\ tr}\ k(u)/k(s))$ et F est un champ ind-fini)

Alors le foncteur φ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence de catégories).

COROLLAIRE 3.2.- Les notations sont celles de 3.1. Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$, on ait $\mathrm{prof}_u F \geq 1$; alors le foncteur canonique

$$\psi : F(X) \to j^*F(Y)$$

est fidèle. On suppose satisfaite la condition (i) de 3.1 ainsi que la condition suivante :

(ii) Pour tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 2 \quad (\text{resp.} \geq 3) \quad .$$

Alors le foncteur ψ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence de catégories).

THEOREME 3.3.- Soient S un schéma local hensélien de point fermé t, S' le complété de X, $X = S-\{t\}$, U un ouvert de X, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$, L un ensemble de nombres premiers, c un entier ≥ 0. On suppose U réunion de $c+1$ ouverts affines. Soit F un champ sur X. Alors, quand V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, le foncteur canonique

$$\varphi : \varinjlim_V F(V) \to j^*F(Y)$$

est fidèle. Supposons satisfaites les conditions suivantes :

(i) Le morphisme canonique $S' \to S$ vérifie (S_2) (resp. l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) Le schéma S est excellent, le morphisme $S' \to S$ est universellement localement 1-asphérique pour L et F est un champ ind-L-fini.

b) Le schéma S est hensélisé d'une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent et F est un champ ind-fini.

(ii) Pour tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+3-\delta_t u) \quad (\text{resp.} \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_t u))$$

Alors le foncteur φ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence de catégories).

COROLLAIRE 3.4.- Les notations sont celles de 3.3. Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq 1 \quad .$$

Alors le foncteur

$$\psi : F(X) \to j^*F(Y)$$

est fidèle. Supposons satisfaites les conditions (i) et (ii) de 3.3, ainsi que la condition suivante :

(iii) Pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 2 \quad (\text{resp. } \geq 3) \ .$$

Alors le foncteur ψ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence de catégories).

COROLLAIRE 3.5. - Les notations sont celle de 3.1.

1) Soit F un faisceau d'ensembles sur X .

a) Quand V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , le morphisme canonique

$$\varphi : \varinjlim_V H^0(V,F) \to H^0(Y,j^*F)$$

est injectif.

b) Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq 1 \ .$$

Alors le morphisme canonique

$$\psi : H^0(X,F) \to H^0(Y,j^*F)$$

est injectif.

c) Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+2-\deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s)) \quad ,$$

où $s = f(u)$. Alors le morphisme φ est bijectif.

d) Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$ (resp. tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$) , on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+2-\deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s)) \quad (\text{resp. } \geq 2) \ .$$

Alors le morphisme ψ est bijectif.

2) Soit F un faisceau en groupes ind-fini sur X .

a) Si les hypothèses de 1) c) sont satisfaites, le morphisme

$$\theta : \varinjlim_V H^1(V,F) \to H^1(Y,j^*F) ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, est injectif. Si les hypothèses de 1) d) sont satisfaites, le morphisme canonique

$$\rho : H^1(X,F) \to H^1(Y,j^*F)$$

est injectif.

b) Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\bar{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(2, c+3-\deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s)) .$$

Alors le morphisme θ est bijectif.

c) Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{u\} \cap Y \neq \emptyset$ (resp. tel que $\{u\} \cap Y = \emptyset$), on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(2, c+3-\deg \mathrm{tr}\, k(u)/k(s)) \quad (\text{resp. } \mathrm{prof}_u F \geq 3) .$$

Alors le morphisme ρ est bijectif.

COROLLAIRE 3.6.- Les notations sont celles de 3.3.

1) Soit F un faisceau d'ensembles sur X.

a) Quand V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, le morphisme canonique

$$\varphi : \varinjlim_V H^0(V,F) \to H^0(Y,j^*F)$$

est injectif.

b) Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\bar{u}\} \cap Y = \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq 1 .$$

Alors le morphisme canonique

$$\psi : H^0(X,F) \to H^0(Y,j^*F)$$

est injectif.

c) On suppose que le morphisme $S' \to S$ vérifie (S_2). Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\bar{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+3-\delta_t u) .$$

Alors le morphisme φ est bijectif.

d) On suppose que le morphisme $S' \to S$ vérifie (S_2). Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\bar{u}\} \cap Y \neq \emptyset$ (resp. tel que $\{\bar{u}\} \cap Y = \emptyset$), on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1, c+3-\delta_t u) \quad (\text{resp. } \geq 2) .$$

Alors le morphisme ψ est bijectif.

2) Soit F un faisceau en groupes ind-fini sur X.

a) Si les hypothèses de 1) c) sont satisfaites, le morphisme canonique

$$\theta : \varinjlim_V H^1(V,F) \to H^1(Y,j^*F) \quad ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, est injectif. Si les hypothèses de 1) d) sont satisfaites, le morphisme canonique

$$\rho : H^1(X,F) \to H^1(Y,j^*F)$$

est injectif.

b) On suppose satisfaite l'une des conditions a) ou b) de 3.3 (i) et, dans le cas a), on suppose que F est un ind-$\mathbb{L}$-groupe. Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_t u) \quad .$$

Alors le morphisme θ est bijectif.

c) On suppose satisfaite l'une des conditions a) ou b) de 3.3 (i). Supposons que, pour tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$ (resp. tel que $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$), on ait

$$\mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(2, c+4-\delta_t u) \quad (\text{resp. } \geq 3) \ .$$

Alors le morphisme ρ est bijectif.

<u>Remarque</u> 3.7.- Reprenons les notations de 3.1 et soit k un entier, $1 \leq k \leq 3$. Alors l'hypothèse

$$(*) \qquad \mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(k, c+k+1-\mathrm{deg\,tr}\ k(u)/k(s))$$

en tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$ est équivalente à la suivante :

Pour tout point y de Y, fermé dans sa fibre, pour toute générisation u de y, appartenant à U, on a

$$(**) \qquad \mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(k, c+k+1-\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\})) \quad .$$

Il est évident que (*) entraîne (**) car on a (EGA IV 5.6.5)

$$\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\}) = \mathrm{deg\,tr}\ k(u)/k(s) + \mathrm{codim}(\overline{f(y)},\{\overline{s}\}) \quad .$$

Inversement supposons la relation (**) satisfaite. Soit u un point de U tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$. Si l'on a $\mathrm{deg\,tr}\ k(u)/k(s) \leq c+1$, on peut trouver un point $y \in Y \cap \{\overline{u}\}$, fermé dans sa fibre, tel que l'on ait

$$\mathrm{deg\,tr}\ k(u)/k(s) + \mathrm{codim}(f(y),\{\overline{s}\}) \leq c+1$$

(I 3.3), d'où la relation (*) en u. Si l'on a $\mathrm{deg\,tr}\ k(u)/k(s) > c+1$, on peut trouver un point $y \in Y \cap \{\overline{u}\}$ tel que y appartienne à la fibre de u (I 3.2) ; on a alors

$$\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\}) = \mathrm{deg\,tr}\ k(u)/k(s) \quad .$$

4. <u>Démonstration des énoncés du numéro</u> 3 <u>dans le cas où</u> $c = 0$.

4.0.- On note d'abord que 3.2 résulte de 3.1 et 3.4 de 3.3 ; plaçons-nous par exemple sous les hypothèses de 3.2. La condition (ii) entraîne que, pour tout ouvert V contenant Y, le foncteur canonique

$$F(X) \to F(V)$$

est fifèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories) (2.4). Le fait que le foncteur ψ soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories) résulte donc du fait qu'il en est ainsi du foncteur φ .

4.1.- Démonstration de 3.5 1) et 3.6 1).

Comme on l'a vu dans 4.0, b) et d) résultent respectivement de a) et c). Prouvons a). Il faut montrer que, si V est un voisinage ouvert de Y dans X, φ_1, φ_2 deux sections de F au-dessus de V, dont les restrictions à Y sont égales, alors on peut trouver un voisinage ouvert V' de Y dans X, $V' \subset V$, de sorte que $\varphi_1|V' = \varphi_2|V'$. Cela résulte du fait que l'ensemble des points où deux sections d'un faisceau sont égales est un ouvert.

Pour prouver c), nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4.1.1.- Soient X un schéma noethérien de dimension finie, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X, $U = X-Y$, F un faisceau d'ensembles sur X. Si x est un point de X et L une extension finie de $k(x)$, on note $\tilde{X}$ le normalisé dans L du sous-schéma fermé réduit de X d'espace sous-jacent $\{\overline{x}\}$ et $\tilde{Y}$ (resp. $\tilde{F}$, etc.) l'image inverse de Y (resp. F, etc.) par le morphisme $\tilde{X} \to X$. On suppose que, pour tout point x de U tel que $\{x\} \cap Y \neq \emptyset$, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) On a $\mathrm{prof}_x F \geq 1$.

(ii) Pour toute extension finie L de $k(x)$, $\tilde{Y}$ est connexe.

Alors, pour toute section $\varphi \in j^*F(Y)$, il existe un voisinage ouvert V de Y dans X tel que φ se prolonge en une section de F au-dessus de V .

Soit $f : X' \to X$ un morphisme étale séparé de type fini, tel que l'on ait $f(X') \supset Y$, et tel qu'il existe une section ψ de $F(X')$ dont la restriction à $Y' = Y \times_X X'$ soit égale à l'image inverse de φ . On considère le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \times_X X' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "p"] & X' \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd},$$

et on pose $\psi_1 = p_1^{-1}\psi$, $\psi_2 = p_2^{-1}\psi$. Soit Z l'ensemble des points de $X' \times_X X'$

où l'on a $\psi_1 \neq \psi_2$. Si z est un point maximal de Z , on peut supposer, quitte à enlever à X' une partie fermée ne rencontrant pas Y' , que l'on a

$$(*) \qquad \overline{p_1(z)} \cap Y' \neq \emptyset \quad , \qquad \overline{p_2(z)} \cap Y' \neq \emptyset \quad .$$

Supposons $Z \neq \emptyset$; soient $T = p(Z)$, x un point maximal de T , z un point de Z tel que $p(z) = x$. Le fait que x soit un point maximal de T entraîne que l'on a

$$\mathrm{prof}_x F = 0 \quad ;$$

en effet, si l'on avait $\mathrm{prof}_x F \geq 1$, on pourrait trouver une générisation stricte z' de z telle que l'on ait $\psi_1 \neq \psi_2$ en z' , et $p(z')$ serait une générisation stricte de x appartenant à T . Il en résulte que la condition (ii) de l'énoncé est satisfaite en x . D'après EGA IV 18.10.8, on peut trouver une extension finie séparable L de $k(x)$, telle que, avec les notations de l'énoncé , $\tilde{X}'$ soit somme de schémas intègres X_c , $c \in C$, et telle que les morphismes structuraux $X_c \to \tilde{X}$ soient des immersions ouvertes. On identifie X_c à son image dans $\tilde{X}$. A la section ψ , correspond, par image inverse, une famille de sections ψ_c , $c \in C$, où $\psi_c \in F(X_c)$. L'hypothèse faite sur x entraîne l'existence de deux éléments c_o , $d_o \in C$, tels que l'on ait

$$\psi_{c_o} \neq \psi_{d_o}$$

au point générique $\tilde{x}$ de $\tilde{X}$. On a une partition de C en sous-ensembles $C_1,\dots,C_r$, tels que

$$\psi_c = \psi_d \quad \text{en } \tilde{x} \text{ s'il existe } k \in [1,r] \text{ tel que } c,d \in C_k$$

$$\psi_c \neq \psi_d \quad \text{en } \tilde{x} \text{ si } c \in C_k \text{ , } d \in C_l \text{ avec } k \neq l \quad ;$$

d'après ce qui précède, on a $r \geq 2$. Comme les sections ψ_c sont égales en tout point de $\tilde{Y}$ et comme l'ensemble des points où deux sections sont différentes est une partie fermée, on a

$$X_c \cap X_d \cap \tilde{Y} = \emptyset \qquad \text{si } c \in C_k \text{ , } d \in C_l \text{ avec } k \neq l \quad .$$

Par suite les r ouverts

$$Y_k = \bigcup_{c \in C_k} X_c \cap \tilde{Y}$$

de $\tilde{Y}$ n'ont aucun point commun. Soient x'_1 et x'_2 les images respectives de $\tilde{x}$ par les morphismes $X_{c_o} \to X'$ et $X_{d_o} \to X'$. D'après (*), on a

$$\overline{\{x'_1\}} \cap Y' \neq \emptyset \quad , \quad \overline{\{x'_2\}} \cap Y' \neq \emptyset \quad .$$

Comme les morphismes $X_{c_o} \to X'$ et $X_{d_o} \to X'$ sont fermés, ces relations montrent que l'on a

$$X_{c_o} \cap \tilde{Y} \neq \emptyset \quad , \quad X_{d_o} \cap \tilde{Y} \neq \emptyset \quad .$$

Par suite il y a au moins deux ouverts Y_k de $\tilde{Y}$ disticnts non vides ; $\tilde{Y}$ est donc disconnexe contrairement à (ii). On a donc $Z = \emptyset$, ce qui prouve que la section ψ se descend en une section de F au-dessus de $p(X')$ et cette section prolonge φ .

Revenons à la démonstration de 3.5 1) c) et 3.6. 1) c). Soit x un point de U tel que $\{\overline{x}\} \cap Y \neq \emptyset$ et tel que l'on ait $\mathrm{prof}_x F = 0$. Montrons que la condition (ii) de 4.1.1 est satisfaite en x . On note X_1 le sous-schéma fermé réduit de X d'espace sous-jacent $\{\overline{x}\}$; dans le cas 3.5, on pose $s = f(x)$ et on note S_1 le sous-schéma fermé réduit de S d'espace sous-jacent $\{\overline{s}\}$, $f_1 : X_1 \to S_1$ le morphisme canonique. Dans le cas 3.5, les hypothèses de profondeur sur F entraînent que l'on a

$$\dim f_1^{-1}(s) \geq 2 \quad ;$$

par suite toutes les composantes irréductibles des fibres de f_1 sont de dimension ≥ 2 (EGA IV 13.1.1). Dans le cas 3.6, les hypothèses de profondeur entraînent que l'on a

$$\dim X_1 \geq 2 \quad .$$

La condition (ii) de 4.1.1 résulte donc de 1.2 et 1.4 respectivement. Les énoncés 3.5 1) c) et 3.6 1) c) résultent alors de 4.1.1.

4.2.- Démonstration de 3.1 et 3.3.

Si V_0 est un voisinage ouvert de Y dans X , σ_1 , σ_2 deux sections de F au-dessus de V_0 , on note G un faisceau sur X qui prolonge le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{V_0}(\sigma_1,\sigma_2)$. Dire que le foncteur φ est fidèle (resp. pleinement fidèle) équivaut à dire que, pour tout couple φ_1,φ_2 comme ci-dessus, le foncteur canonique

$$\varinjlim_V G(V) \to j^*G(Y) \quad ,$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , est fidèle (resp. pleinement fidèle). Si l'on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 1$$

en un point u tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, on a aussi, d'après 2.3 a),

$$\mathrm{prof}_u G \geq 1 \quad .$$

Le fait que φ soit fidèle (resp. pleinement fidèle) résulte donc de 3.5 1) et 3.6 1).

Nous allons achever la démonstration de 3.1 et 3.3. Dans le cas 3.3, on se place sous l'une des conditions (i) a) ou (i) b). Il reste à prouver que, si l'on a

$$\mathrm{prof}_u F \geq 3 - \mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\})$$

pour tout point y de Y , fermé dans sa fibre dans le cas 3.1, tel que $\delta_t y = 1$ dans le cas 3.3, et pour toute générisation u de y , alors le foncteur φ est essentiellement surjectif. Soit x un point de U tel que $\{\overline{x}\}\cap Y \neq \emptyset$. On note X_1 le sous-schéma fermé réduit de X d'espace sous-jacent $\{\overline{x}\}$; dans le cas 3.1, on note S_1 le sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $f(x)$ et $f_1 : X_1 \to S_1$ le morphisme canonique. L'une des trois conditions suivantes est alors satisfaite :

(i) On a $\mathrm{prof}_x F \geq 2$.

(ii) On a $\mathrm{prof}_x F = 1$. Dans ce cas, la dimension de la fibre générique de X_1 , donc aussi des composantes irréductibles de toutes les fibres de f_1 est ≥ 2 dans le cas 3.1. Dans le cas 3.3, on a $\dim X_1 \geq 2$. Il résulte donc de 1.2 et 1.4 que la condition (ii) de 4.1.1 est satisfaite, i.e., reprenant les notations de loc. cit., que, pour toute extension finie de $k(x)$, $\tilde{Y}$ est connexe.

(iii) On a $\mathrm{prof}_x F = 0$. La dimension des composantes irréductibles des fibres de f_1 est ≥ 3 dans le cas 3.1 et l'on a $\dim X_1 \geq 3$ dans le cas 3.3. Il résulte donc de 1.2 et 1.4 que, pour toute extension finie L de $k(x)$, $\tilde{Y}$ est connexe. Soit L l'ensemble des nombres premiers intervenant dans la condition (i) a) de 3.3 et, dans le cas 3.1 ou 3.3 b), soit $\mathbb{L}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. On voit de plus, en utilisant 1.2 et 1.4, que, pour toute extension finie L de $k(x)$, pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-groupe constant fini G , tout torseur P sur $\tilde{Y}$ de groupe G se prolonge à un voisinage de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{X}$.

On est ainsi ramené à montrer que, lorsque F satisfait, en chaque point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\}\cap Y \neq \emptyset$, aux propriétés énoncées dans (i), (ii) ou (iii) , alors le foncteur φ est essentiellement surjectif. C'est ce que dit la proposition 4.2.6 ci-dessous que nous allons maintenant démontrer. Nous commençons par quelques lemmes préliminaires.

4.2.1.- Soient X un schéma noethérien de dimension finie, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X , $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers, F un champ ind-$\mathbb{L}$-fini sur X ([5] VII 2.2.1). On cherche à prolonger une section de j^*F au-dessus de Y à un voisinage ouvert de Y dans X .

Soit $(X_i)_{i\in I}$ un ensemble de schémas au-dessus de X et soient $i_1,\dots,i_n$ des éléments de I ; on pose alors

$$X_{i_1\dots i_n} = X_{i_1}\times_X X_{i_2}\times_X\dots\times_X X_{i_n} \quad , \quad Y_{i_1\dots i_n} = Y\times_X X_{i_1\dots i_n}$$

Si P_{i_α} est une section de F au-dessus de X_{i_α} , $1\leq\alpha\leq n$, on note $P_{i_\alpha}^{i_1\dots i_n}$ l'image inverse de P_{i_α} par la i_α-ème projection de $X_{i_1\dots i_n}$.

DEFINITION 4.2.1.1.- Un 1-recouvrement $\mathfrak{R}$ de Y est la donnée

a) d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de schémas étales séparés de type fini sur X dont la réunion des images recouvre Y,

b) pour tous $i,j \in I$, d'un ensemble $(V_a)_{a\in \mathbf{A}_{ij}}$ de schémas étales séparés de type fini sur X_{ij}, dont la réunion des images recouvre Y_{ij}.

On pose $\mathbf{A} = \coprod_{i,j\in I} \mathbf{A}_{ij}$ et on note

$$\mathfrak{R} = ((X_i)_{i\in I},(V_a)_{a\in \mathbf{A}})$$

un tel 1-recouvrement. On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est le recouvrement d'un voisinage de Y associé à $\mathfrak{R}$.

Un 1-recouvrement $\mathfrak{R}' = ((X_{i'})_{i'\in I'},(V_{a'})_{a'\in \mathbf{A}'})$ est dit plus fin que $\mathfrak{R}$ si l'on s'est donné une application $\varphi : I' \to I$, pour tous $i',j' \in I'$, une application $\psi_{i'j'} : \mathbf{A}_{i'j'} \to \mathbf{A}_{\varphi(i')\varphi(j')}$ et, pour tout $i'\in I'$ et tout $a'\in \mathbf{A}'_{i'j'}$, des morphismes

$$\theta_{i'} : X_{i'} \to X_{\varphi(i')} \qquad \rho_{a'} : V_{a'} \to V_{\psi_{i'j'}(a')} .$$

Si $\tilde{X} \to X$ est un morphisme de schémas et S un X-schéma, on pose $\tilde{S} = \tilde{X}\times_X S$. Si $\mathfrak{R}$ est un 1-recouvrement de Y, l'image inverse de $\mathfrak{R}$ sur $\tilde{X}$ est le 1-recouvrement de $\tilde{Y}$ défini par

$$\tilde{\mathfrak{R}} = ((\tilde{X}_i)_{i\in I},(\tilde{V}_a)_{a\in \mathbf{A}}) .$$

DEFINITION 4.2.1.2.- Etant donné un champ F sur X et un 1-recouvrement $\mathfrak{R} = ((X_i)_{i\in I},(V_a)_{a\in \mathbf{A}})$ de Y, une $\mathfrak{R}$-section $\mathfrak{s}$ de F est la donnée

a) pour tout $i\in I$, d'une section $P_i \in F(X_i)$,

b) pour tous $i,j \in I$ et tout $a \in \mathbf{A}_{ij}$, d'une section $p_a \in \mathrm{Isom}_{V_a}(P_i|V_a, P_j|V_a)$.

On pose alors

$$\mathfrak{s} = ((P_i)_{i\in I},(p_a)_{a\in \mathbf{A}}) .$$

Un isomorphisme d'une $\mathfrak{R}$-section $\mathfrak{s}$ dans une $\mathfrak{R}$-section

$$\mathfrak{s}' = ((P'_i)_{i\in I},(p'_a)_{a\in \mathbf{A}})$$

est la donnée d'isomorphismes $q_i : P_i \to P'_i$, $i\in I$, tels que, pour tous $i,j\in I$ et tout $a\in \mathbf{A}_{ij}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_i|V_a & \xrightarrow{q_i} & P'_i|V_a \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'_a} \\ P_j|V_a & \xrightarrow{q_j} & P'_j|V_a \end{array}$$

soit commutatif.

Si $a,b \in A_{ij}$, on note p_a^b l'image inverse de p_a sur V_{ab} ; de même, si $p_{ij} \in \mathrm{Isom}_{X_{ij}}(P_i,P_j)$ et si $k \in I$, on note p_{ij}^k l'image inverse de p_{ij} sur X_{ijk}. Etant donné un 1-recouvrement $\mathfrak{R}$ de Y et une section P de F sur X, on associe à P une $\mathfrak{R}$-section de la façon suivante. On note P_i l'image inverse de P sur X_i et, pour tous $i,j \in I$ et tout $a \in A_{ij}$, on définit p_a comme étant l'isomorphisme identique. Une $\mathfrak{R}$-section $\mathfrak{s}$ est dite triviale s'il existe $P \in F(X)$ tel que $\mathfrak{s}$ soit isomorphe à la $\mathfrak{R}$-section associée à P. Supposons que, pour tous i, $j \in I$, on ait

$$\bigcup_{a \in A_{ij}} V_a = X_{ij} \quad .$$

Alors la condition pour qu'une $\mathfrak{R}$-section $\mathfrak{s}$ soit triviale se traduit par les deux conditions suivantes :

(i) pour tous $i,j \in I$ et tous $a,b \in A_{ij}$, on a $p_a^b = p_b^a$,

(ii) si p_{ij} désigne l'élément de $\mathrm{Isom}_{X_{ij}}(p_i^j,p_j^i)$ obtenu en recollant les p_a, on a

$$(*) \qquad p_{ij}^k p_{jk}^i = p_{ik}^j ,$$

pour tous $i,j,k \in I$.

Si $\mathfrak{R}'$ est un 1-recouvrement plus fin que $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{s}$ une $\mathfrak{R}$-section, on définit la $\mathfrak{R}'$-section $\mathfrak{s}'$ restriction de $\mathfrak{s}$ à $\mathfrak{R}'$ par

$$\mathfrak{s}' = ((\theta_{i'}^*, P_{\varphi(i')})_{i' \in I'}, (\rho_{a'}^*, p_{\psi_{i'j'}(a')})_{a' \in A'}) \quad .$$

Enfin, si $\tilde{X} \to X$ est un morphisme de schémas et $\mathfrak{s}$ une $\mathfrak{R}$-section, on définit la $\tilde{\mathfrak{R}}$-section $\tilde{\mathfrak{s}}$ image inverse de $\mathfrak{s}$ sur $\tilde{X}$ par

$$\tilde{\mathfrak{s}} = ((\tilde{P}_i)_{i \in I}, (\tilde{p}_a)_{a \in A}) \quad .$$

4.2.2.- Soient x un point de X, $\bar{x}$ un point géométrique au-dessus de x, $F_{\bar{x}}$ la fibre de F en x. Soit $\mathfrak{R} = ((X_i)_{i \in I}, (V_a)_{a \in A})$ un 1-recouvrement de Y tel que les X_i et les V_a soient des ouverts de X. On note I_x l'ensemble des $i \in I$ tels que $x \in X_i$ et $\mathfrak{R}_x$ le 1-recouvrement d'un sous-schéma fermé d'espace sous-jacent l'adhérence $\{\bar{x}\}$ de x, déduit de $\mathfrak{R}$ par image inverse sur $\{\bar{x}\}$. Pour tous $i,j \in I_x$, tels que $Y_{ij} \neq \emptyset$, il existe $a \in A_{ij}$, d'où un isomorphisme $(p_a)_{\bar{x}} : (P_i)_{\bar{x}} \simeq (P_j)_{\bar{x}}$. Par suite, si l'on suppose $Y \cap \{\bar{x}\}$ connexe, les $(P_i)_{\bar{x}}$ sont des objets isomorphes de $F_{\bar{x}}$. On note G le groupe des automorphismes d'un tel $(P_i)_{\bar{x}}$, $i \in I_x$, et Φ_G le champ des torseurs de groupe G. On associe à une $\mathfrak{R}$-section $\mathfrak{s}$ une $\mathfrak{R}_x$-section de Φ_G de la façon suivante. Si Q désigne le torseur trivial de groupe G au-dessus du point $\bar{x}$, on choisit, pour chaque $i \in I_x$, un isomorphisme $r_i : Q \simeq (P_i)_{\bar{x}}$; pour tous $i,j \in I_x$ et tout $a \in A_{ij}$, il existe alors un unique élément $q_a \in G$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "q_a"] & Q \\ (P_i)_{\bar{x}} \arrow[u, "r_i", "\wr"'] \arrow[r, "(p_a)_{\bar{x}}"'] & (P_j)_{\bar{x}} \arrow[u, "r_j"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On identifie $(p_a)_{\bar{x}}$ avec q_a. La $\mathfrak{R}_x$-section associé à $\mathfrak{s}$ est, par définition,

$$\mathfrak{s}_x = ((Q_i)_{i \in I}, (q_a)_{a \in A}) \quad ,$$

où $Q_i = Q$ pour tout $i \in I$ (si $V_a \cap \{\bar{x}\} = \emptyset$, q_a est l'unique automorphisme du torseur trivial au-dessus de $V_a \cap \{\bar{x}\}$).

Notons que, si $i,j \in I_x$, si $a,a' \in A_{ij}$ et si $y \in V_a \cap V_{a'} \cap Y \cap \{\bar{x}\}$ est tel que l'on ait

$$(p_a)_y = (p_{a'})_y \quad ,$$

on a aussi $(p_a)_{\bar{x}} = (p_{a'})_{\bar{x}}$ et, par suite, on a

$$q_a = q_{a'} \quad .$$

En particulier, si $\mathfrak{s}|Y$ est trivial, il en est de même de $\mathfrak{s}_x|Y \cap \{\bar{x}\}$. La donnée de $\mathfrak{s}_{\bar{x}}|Y \cap \{\bar{x}\}$ est alors celle d'un 1-cocycle q du recouvrement associé à $\mathfrak{R}_x|Y \cap \{\bar{x}\}$, à valeurs dans G.

Le lemme ci-dessous permet de déduire les conditions 4.2.1 (i) et (ii) au point x de l'hypothèse que q se prolonge à un voisinage de $Y \cap \{\bar{x}\}$.

LEMME 4.2.3.- Soient X un schéma intègre noethérien, de dimension finie, de point générique x et Y une partie fermée connexe de X. Soit

$$\mathfrak{R} = ((X_i)_{i \in I}, (V_a)_{a \in A})$$

un 1-recouvrement de Y tel que les X_i et les V_a soient des ouverts de X. Soient F un champ sur X, $\mathfrak{s} = ((P_i)_{i \in I}, (p_a)_{a \in A})$ une $\mathfrak{R}$-section de F telle que $\mathfrak{s}|Y$ soit triviale et notons q le 1-cocycle du recouvrement associé à $\mathfrak{R}|Y$, à valeurs dans le groupe G, introduit dans 4.2.2.

1) On suppose donné un 1-recouvrement $\mathfrak{R}'$ de Y

$$\mathfrak{R}' = ((X_{i'})_{i' \in I'}, (V_{a'})_{a' \in A'}) \quad ,$$

plus fin que $\mathfrak{R}$, tel que, pour tous $i',j' \in I'$ et $a' \in A'_{i'j'}$ et tout point x' de $V_{a'}$ au-dessus de x, on ait $\{\bar{x'}\} \cap Y_{a'} \neq \emptyset$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $i' \in I'$, $Y_{i'} = Y \times_X X_{i'}$ est connexe.

(ii) Il existe un 1-cocyle r de $(X_{i'})_{i'\in I'}$, à valeurs dans G, dont la restriction à $(Y_{i'})_{i'\in I'}$ est équivalente à la restriction q' de q. Alors, si $\mathfrak{S}' = ((P_{i'})_{i'\in I'},(p_{a'})_{a'\in A'})$ est la restriction de $\mathfrak{S}$ à $\mathfrak{R}'$, on a les conclusions suivantes :

a) Pour tous $i',j'\in I'$, pour tous $a',b'\in A_{i'j'}$, pour tout point $x''\in V_{a'b'}$ au-dessus de x, on a

$$(p_{a'}^{b'})_{x''} = (p_{b'}^{a'})_{x''} .$$

Si $x'\in X_{i'j'}$, on note $(p_{i'j'})_{x'}$ l'élément de $\mathrm{Isom}(P_i^j,P_j^i)$ obtenu par recollement des $p_{a'}$ correspondant aux a' tels que x' appartienne à l'image de $V_{a'}$.

b) Pour tous $i',j',k'\in I'$, pour tout point x' de $X_{i'j'k'}$ au-dessus de x, on a

$$(p_{i'j'}^{k'})_{x'}(p_{j'k'}^{i'})_{x'} = (p_{i'k'}^{j'})_{x'} .$$

2) Soient $\mathfrak{R}'$ un 1-recouvrement et $\mathfrak{S}'$ une $\mathfrak{R}'$-section de F construite comme il est indiqué ci-dessous. On part d'un 1-recouvrement

$$\mathfrak{R} = ((X_i)_{i\in I},(V_{ij})_{i,j\in I\times I}) ,$$

où V_{ij} est un ouvert de X_{ij} contenant Y_{ij} et d'une $\mathfrak{R}$-section

$$\mathfrak{S} = ((P_i)_{i\in I},(p_{ij})_{i,j\in I\times I})$$

telle que, pour tous $i,j,k\in I$, on ait la relation

$$p_{ij}^k p_{jk}^i = p_{ik}^j .$$

On se donne un recouvrement $(X_{i'})_{i'\in I'}$ de Y par des schémas étales sur X, plus fin que $(X_i)_{i\in I}$ et on note $\gamma : I' \to I$ l'application canonique. Pour tous $i',j'\in I'$, on se donne un ouvert $V_{i'j'}$ de $X_{i'j'}$, contenant $Y_{i'j'}$, contenu dans $V_{\gamma(i')\gamma(j')}\times_{X_{ij}}X_{i'j'}$, tel que, pour tout point x' de $V_{i'j'}$ au-dessus de x, on ait

$$\{\overline{x'}\}\cap Y_{i'j'} \neq \emptyset .$$

Soient $P_{i'} = P_{\gamma(i)}|X_{i'}$ et $p_{i'j'} = p_{\gamma(i')\gamma(j')}|V_{i'j'}$. Pour $i',j',k'\in I'$, on note $\pi_{i'}$, $\pi_{j'}$ les projections respectives de $X_{i'j'k'}$ sur $X_{k'j'}$ et $X_{i'k'}$. On considère l'ouvert de $X_{i'j'k'}$ défini par

$$V_{i'j',k'} = \pi_{j'}^{-1}(V_{i'k'}) \cap \pi_{i'}^{-1}(V_{k'j'}) ;$$

c'est un schéma étale au-dessus de $X_{i'j'}$. On pose $A_{i'j'} = \{1\}\amalg I'$ et on définit le 1-recouvrement $\mathfrak{R}'$ par

$$\mathfrak{R}' = ((X_{i'})_{i'\in I'},(V_{a'})_{a'\in A'}) ,$$

où $V_1 = V_{i'j'}$ et $V_{a'} = V_{i'j',k'}$ si $a' = k'\in I'$. Pour tous $i',j',k'\in I'$, soit

$$p_{i'j',k'} = (p^{j'}_{i'k'}|V_{i'j',k'})(p^{i'}_{k'j'}|V_{i'j',k'}) \quad .$$

La $\mathfrak{R}'$-section $\mathfrak{s}'$ est alors

$$\mathfrak{s}' = ((p_{i'})_{i'\in I'},(p_{a'})_{a'\in A'}) \quad ,$$

où $p_1 = p_{i'j'}$ et $p_{a'} = p_{i'j',k'}$ si $a' = k'\in I'$.

Supposons que les conditions (i) et (ii) soient satisfaites. Alors on a les conclusions a) et b).

Démonstration.

1) La donnée du 1-cocycle r est la donnée, pour tous $i',j'\in I'$, d'éléments $r_{i'j'}\in G(X_{i'j'})$ satisfaisant aux relations

$$(*) \qquad r^{k'}_{i'j'}r^{i'}_{j'k'} = r^{j'}_{i'k'} \quad ,$$

pour $i',j',k' \in I'$. De même la donnée de q' est celle d'éléments $q_{i'j'}$, de $G(Y_{i'j'})$, satisfaisant aux relations

$$q^{k'}_{i'j'}q^{i'}_{j'k'} = q^{j'}_{i'k'} \quad .$$

Il résulte de la définition de q que, pour tous $i',j'\in I'$, tout $a'\in A_{i'j'}$ et tout point x' de $V_{a'}$ au-dessus de x , on a

$$q_{i'j'}|Y_{a'} = q_{a'}|Y_{a'} \quad ,$$

où $q_{a'}$ est l'élément de G défini dans 4.2.2. Compte tenu de la connexité des $Y_{i'}$, dire que q' est équivalent à la restriction de r à Y revient à dire qu'il existe des éléments $g_{i'}$ de G , $i'\in I'$, tels que, pour tous i',j',k' , on ait

$$g^{-1}_{i'}(r_{i'j'}|Y_{i'j'})g_{j'} = q_{i'j'} \quad .$$

En particulier, pour tout $a'\in A_{i'j'}$ et tout point x' de $V_{a'}$ au-dessus de x , on a

$$g^{-1}_{i'}(r_{i'j'}|Y_{a'})g_{j'} = q_{a'}|Y_{a'} \quad .$$

Comme on a, par hypothèse, $\{\bar{x}'\}\cap Y_{a'} \neq \emptyset$, les deux éléments $q_{a'}$ et $g^{-1}_{i'}(r_{i'j'}|V_{a'})g_{j'}$ de $G(V_{a'})$ prennent la même valeur en x' ; si $\bar{x}'$ est un point géométrique au-dessus de x' , on a donc

$$(p_{a'})_{\bar{x}'} = g^{-1}_{i'}(r_{i'j'})_{\bar{x}'}g_{j'} \quad ,$$

ce qui démontre a). On a, d'après ce qui précède,

$$(p_{i'j'})_{\bar{x}'} = g^{-1}_{i'}(r_{i'j'})_{\bar{x}'}g_{j'}$$

et l'assertion b) résulte de (*).

2) Par définition du 1-cocycle q' , pour tous $i',j'\in I'$ et pour tout point géométrique $\bar{x}'$ de $V_{i'j'}$ au-dessus de x , $q_{i'j'}$ est l'élément de $G(Y_{i'j'})$ défini par $(p_{i'j'})_{\bar{x}'}$. Comme dans 1), on peut trouver des éléments

$g_{i'} \in G$, tels que l'on ait

$$g_{i'}^{-1}(r_{i',j'}|Y_{i',j'})g_{j'} = q_{i',j'} \quad .$$

Pour tout point $x' \in V_{i',j'}$ au-dessus de x , la relation $\{\overline{x}'\} \cap Y_{i',j'} \neq \emptyset$ entraîne que les deux sections $(p_{i',j'})_{\overline{x}'}$ et $g_{i'}^{-1} r_{i',j'} g_{j'}$ de G au-dessus de $V_{i',j'}$ prennent la même valeur en x' ; on a donc

$$(p_{i',j'})_{\overline{x}'} = g_{i'}^{-1}(r_{i',j'})_{\overline{x}'} g_{j'} \quad .$$

Soient $i',j' \in I'$ et $a' \in A^{!}_{i',j'} = \{1\} \coprod I'$. On a, par définition, $p_{a'} = p_{i',j'}$ si $a' = 1$, $p_{a'} = (p^{j'}_{i',k'}|V_{i',j',k'})(p^{i'}_{k',j'}|V_{i',j',k'})$ si $a' = k'$. Dans les deux cas, on a donc

$$(p_{a'})_{\overline{x}''} = g_{i'}^{-1}(r_{i',j'})_{\overline{x}''} g_{j'}$$

pour tout point géométrique $\overline{x}''$ de $V_{a'}$ au-dessus de x . Ceci démontre a) et b).

<u>LEMME</u> 4.2.4.- Soient X un schéma noethérien, Y une partie fermée de X , x un point de X , $\tilde{X}$ le normalisé du sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $\{\overline{x}\}$ dans une extension finie de $k(x)$, $\alpha : \tilde{X} \to X$ le morphisme canonique. Soient y un point de $Y \cap \{\overline{x}\}$, X_1 un schéma étale de type fini sur X dont l'image dans X contient y , U un schéma étale de type fini sur $\tilde{X}$ dont l'image contient la fibre $(\tilde{X})_y$. On note $\tilde{X}_1$ (resp. $\tilde{Y}$, etc.) l'image inverse de X_1 (resp. Y , etc.) par α . Alors on peut trouver un schéma X_2 étale de type fini sur X_1 , dont l'image dans X contient y , tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

1) On a une factorisation du morphisme $\tilde{X}_2 \to \tilde{X}$ à travers U

$$\tilde{X}_2 \to U \to \tilde{X} \quad .$$

2) Si $(X_c)_{c \in C}$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $\tilde{X}_2$, $X_c \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ est connexe pour tout $c \in C$.

Quitte à remplacer X_1 par un ouvert convenable, on peut supposer que X_1 ne contient qu'un seul point y_1 au-dessus de y . Soit $\overline{X}$ le localisé strict de X en un point géométrique $\overline{y}$ au-dessus de y . A un morphisme entier surjectif radiciel près, $\tilde{X} \times_X \overline{X}$ est fini sur $\overline{X}$ (EGA 0_{IV} 23.2.5) ; par suite $\tilde{\overline{X}}$ est somme des localisés stricts de $\tilde{X}$ aux points de $(\tilde{X})_y \times_{k(y)} k(\overline{y})$; soit n le nombre de ces points. On a un isomorphisme

$$X \simeq \varprojlim_i \tilde{X}_i \ ,$$

où X_i parcourt les schémas étales de type fini au-dessus de X_1 , munis d'un seul point marqué $\overline{y} \to X_i$ au-dessus de $\overline{y} \to X_1$. Il en résulte que l'on peut trouver un schéma X' étale de type fini sur X_1 , ayant un seul point y' au-dessus de y_1 , tel que l'on ait une factorisation

$$\tilde{X}' \to U \to \tilde{X} \ ,$$

et tel que X' ait exactement n points distincts au-dessus de y'. Soient $z_1,\dots,z_n$ ces points et soient $U_1,\dots,U_n$ des ouverts de $\tilde{X}'$ tels que l'on ait

$$z_p \in U_p \text{ pour tout } p\in[1,n] \ , \ z_{p'}\notin U_p \text{ pour } p'\neq p \ .$$

Soit V la somme des U_p pour $1\leq p\leq n$. On voit, comme précédemment, que l'on peut trouver un schéma X'' étale de type fini sur X', ayant un seul point y'' au-dessus de y', tel que le morphisme $\tilde{X}'' \to \tilde{X}'$ se factorise à travers V. Par suite X'' satisfait à la condition 1) de l'énoncé. De plus $\tilde{X}''$ est somme de sous-schémas X''_p, $1\leq p\leq n$, et chacun d'entre eux contient un point et un seul t_p au-dessus de y''. Pour chaque p, on considère l'ensemble des points maximaux de $X''_p\times_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ qui ne sont pas des générisations de t_p ; la réunion de leurs adhérences est une partie fermée T_p de X''_p dont l'image Z_p dans X'' ne contient pas y''. L'ouvert de X'', complémentaire de la réunion des Z_p satisfait alors aux conditions 1) et 2) de l'énoncé.

COROLLAIRE 4.2.5.- Soient X un schéma noethérien, Y une partie fermée de X, x un point de X, $\tilde{X}$ le normalisé du sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $\{\overline{x}\}$ dans une extension finie de $k(x)$, $\gamma : \tilde{X} \to X$ le morphisme canonique ; posons $\tilde{Y} = Y\times_X\tilde{X}$, etc. Soient $(X_i)_{i\in I}$ un ensemble fini de schémas X_i étales de type fini sur X, dont la réunion des images dans X contient Y, $(X_j)_{j\in J}$ un ensemble fini de schémas étales de type fini sur X, dont la réunion des images contient Y. Alors on peut trouver un recouvrement fini $(X_{i'})_{i'\in I'}$ de Y par des schémas $X_{i'}$ étales de type fini sur X, plus fin que $(X_i)_{i\in I}$, tel que, si $(X_c)_{c\in C_{i'}}$ est l'ensemble des composantes connexes $X_{i'}$, et si $C = \coprod_{i'\in I'} C_{i'}$, le recouvrement $(X_c)_{c\in C}$ de $\tilde{Y}$ soit plus fin que $(X_j)_{j\in J}$ et tel que $X_c\times_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ soit connexe pour tout $c\in C$.

PROPOSITION 4.2.6.- Soient X un schéma noethérien de dimension finie, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X, $U = X-Y$, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers, F un champ ind-$\mathbb{L}$-fini sur X. Si x est un point de X et L une extension finie de $k(x)$ on note $\tilde{X}$ le normalisé dans L du sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $\{\overline{x}\}$ et $\tilde{Y}$ (resp. $\tilde{F}$, etc.) l'image inverse de Y (resp. F, etc.) par le morphisme $\tilde{X}\to X$. On suppose que, pour tout point x de U tel que $\{\overline{x}\}\cap Y \neq \emptyset$, l'une des conditions suivantes est satisfaisante :

(i) On a $\mathrm{prof}_x F \geq 2$.

(ii) On a $\mathrm{prof}_x F \geq 1$ et, pour toute extension finie L de $k(x)$, $\tilde{Y}$ est connexe.

(iii) Pour toute extension finie L de $k(x)$, $\tilde{Y}$ est connexe et tout torseur sur $\tilde{Y}$, de groupe un ind-L-groupe constant constructible, se prolonge à un voisinage ouvert de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{X}$.

Alors, pour toute section P de j^*F au-dessus de Y , il existe un voisinage ouvert V de Y dans X tel que P se prolonge en une section de F au-dessus de V .

On peut trouver un ensemble fini $(X_i)_{i\in I}$ de schémas étales séparés de type fini sur X , dont la réunion des images dans X contient Y , et des sections $P_i \in F(X_i)$ dont les restrictions à Y_i soient égales à celles de P . Pour tous $i,j\in I$, les images inverses de P_i^j et P_j^i sur Y_{ij} sont isomorphes. On peut donc trouver une famille finie $(V_a)_{a\in A_{ij}}$ de schémas étales séparés de type fini sur X_{ij} , dont la réunion des images contienne Y_{ij} et des éléments

$$p_a \in \mathrm{Isom}(P_i|V_a, P_j|V_a) \quad ,$$

tels que $p_a|Y_a$ soit l'isomorphisme identique de $j^*P|Y_a$. On a ainsi défini un 1-recouvrement

$$\mathfrak{R} = ((X_i)_{i\in I}, (V_a)_{a\in A_{ij}})$$

et une $\mathfrak{R}$-section

$$\mathfrak{S} = ((P_i)_{i\in I}, (p_a)_{a\in A_{ij}}) \quad .$$

Il résulte de EGA IV 18.10.8 que, si x est un point de X , on peut trouver une extension finie séparable L de $k(x)$ telle que la condition suivante soit satisfaite :

(4.2.6.0).- Pour tout $i\in I$ (resp. tout $a\in A$) $\tilde{X}_i$ (resp. $\tilde{V}_a$) est somme de schémas X_c , $c\in C_i$ (resp. V_b , $b\in B_a$) , tels que les morphismes canoniques $X_c \to \tilde{X}$ (resp. $V_b \to \tilde{X}$) soient des immersions ouvertes.

On choisit une extension L telle que la condition ci-dessus soit satisfaite. Soient

$$C = \coprod_{i\in I} C_i \qquad , \qquad B = \coprod_{a\in A} B_a \quad .$$

Par image inverse sur $\tilde{X}$, on obtient un 1-recouvrement $\tilde{\mathfrak{R}}_o = ((\tilde{X}_i)_{i\in I}, (\tilde{V}_a)_{a\in A})$ de $\tilde{Y}$ et une $\tilde{\mathfrak{R}}_o$-section $((\tilde{P}_i)_{i\in I}, (\tilde{p}_a)_{a\in A})$ de F . En remplaçant chaque $\tilde{X}_i$ par la famille $(X_c)_{c\in C_i}$ et chaque $\tilde{V}_a$ par la famille $(V_b)_{b\in B_a}$, on obtient un 1-recouvrement de $\tilde{Y}$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = ((X_c)_{c\in C}, (V_b)_{b\in B})$$

et une $\tilde{\mathfrak{R}}$-section

$$\tilde{\mathfrak{S}} = ((P_c)_{c\in C}, (p_b)_{b\in B}) \quad ,$$

tels que les morphismes $X_c \to \widetilde{X}$ et $V_b \to \widetilde{X}$ soient des immersions ouvertes. D'après 4.2.2, on peut associer à $\mathfrak{S}$ un ind-$\mathbf{L}$-groupe constant G et un 1-cocycle q du recouvrement $(Y_c)_{c\in C}$ de $\widetilde{Y}$, à valeurs dans G. (On a posé $Y_c = \widetilde{Y}\times_{\widetilde{X}}X_c$).)

1) Nous allons montrer que, quitte à remplacer $\mathfrak{R}$ par un 1-recouvrement plus fin, on a

$$p_a^b = p_b^a \tag{4.2.6.1}$$

pour tous $i,j\in I$ et tous $a,b\in A_{ij}$ (p_a^b désigne la restriction de p_a à $V_{ab} = V_a\times_X V_b$, conformément à 4.2.1).

Les relations (4.2.6.1) étant supposées vérifiées, soit V_{ij} l'ouvert de X_{ij} réunion des images des V_a pour $a\in A_{ij}$ et p_{ij} l'élément de $\mathrm{Isom}_{V_{ij}}(P_i|V_{ij},P_j|V_{ij})$ obtenu par recollement des p_a, $a\in A_{ij}$. Nous allons aussi montrer que, quitte à remplacer $\mathfrak{R}$ par un 1-recouvrement plus fin, on a

$$p_{ij}^k p_{jk}^i = p_{ik}^j \ , \tag{4.2.6.2}$$

pour tous $i,j,k\in I$.

Soient i,j des éléments de I, a,b des éléments de A_{ij} ; notons Z_{ab} l'ensemble des points de V_{ab} où l'on a

$$p_a^b \neq p_b^a$$

(resp. les relations (4.2.6.1) étant vérifiées, soient $i,j,k\in I$ et soit Z_{ijk} l'ensemble des points de X_{ijk} où l'on a

$$p_{ij}^k p_{jk}^i \neq p_{ik}^j\ ).$$

Soient T_{ab} (resp. T_{ijk}) la projection de Z_{ab} (resp. Z_{ijk}) sur X et T la réunion des T_{ab} pour $i,j\in I$, $a,b\in A_{ij}$ (resp. la réunion des T_{ijk} pour $i,j,k\in I$). Nous allons montrer que l'on peut trouver un 1-recouvrement $\mathfrak{R}'$ de Y, plus fin que $\mathfrak{R}$, tel que si $\mathfrak{S}'$ est la restriction de $\mathfrak{S}$ à $\mathfrak{R}'$, l'ensemble T' relatif à $\mathfrak{S}'$ soit vide. Il suffit de montrer que, si x est un point maximal de T, on peut trouver un 1-recouvrement $\mathfrak{R}'$ tel que x n'appartienne pas à T'.

Soit x un point maximal de T ; ceci entraîne que l'on ne peut avoir $\mathrm{prof}_x F \geq 1$. Par suite la condition (iii) de l'énoncé est satisfaite en x. Soit L une extension finie de $k(x)$ satisfaisant à (4.2.6.0) et considérons le 1-cocycle q défini précédemment. D'après (iii), on peut trouver un recouvrement étale $(X_j)_{j\in J}$ d'un voisinage de $\widetilde{Y}$ dans $\widetilde{X}$, plus fin que $(X_c)_{c\in C}$ et un 1-cocycle r de $(X_j)_{j\in J}$ à valeurs dans G, dont la restriction à $(Y_j)_{j\in J}$ soit équivalente au 1-cocycle induit par q. Il résulte alors de 4.2.5 que l'on peut trouver un recouvrement étale $(X_{i'})_{i'\in I'}$ d'un voisinage ouvert de Y dans X, plus fin que $(X_i)_{i\in I}$, tel que, $(X_{c'})_{c'\in C'}$ désignant le recouvrement de $\tilde{Y}$ obtenu en remplaçant chaque $\tilde{X}_{i'}$ par l'ensemble de ses composantes connexes, le recouvrement $(X_{c'})_{c'\in C'}$ soit plus fin que $(X_j)_{j\in J}$ et tel que les $X_{c'}\times_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ soient connexes. Par restrictiction au recouvrement $(X_{i'})_{i'\in I'}$, on déduit des V_a (resp. des V_{ij}), des recouvrements étales $(V_{a'})_{a'\in A_{i'j'}}$ (resp. des voisinages ouverts $V_{i'j'}$) des $Y_{i'j'}$. Quitte à enlever à chaque $V_{a'}$ (resp. à chaque $V_{i'j'}$) une partie fermée ne rencontrant pas $Y_{a'}$ (resp. $Y_{i'j'}$), on peut supposer que, pour tout point z de $V_{a'}$ (resp. de $V_{i'j'}$) au-dessus de x, on a

$$(4.2.6.3) \qquad \{\overline{z}\}\cap Y_{a'} \neq \emptyset \quad (\text{resp. } \{\overline{z}\}\cap Y_{i'j'} \neq \emptyset) .$$

Soit $\tilde{x}$ le point générique de $\tilde{X}$ et soient $V_{b'}$, $b'\in B'$, l'ensemble des composantes connexes des $\tilde{V}_{a'}$ et $\tilde{\mathfrak{R}}'$ le 1-recouvrement de $\tilde{Y}$ défini par

$$\tilde{\mathfrak{R}}' = ((X_{c'})_{c'\in C'},(V_{b'})_{b'\in B'}) .$$

Compte tenu des relations (4.2.6.3.), on peut appliquer 4.2.3. 1) à $\tilde{X}$, $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{S}}$ et au recouvrement $\tilde{\mathfrak{R}}'$. Il en résulte que, pour tous $a',b'\in B'$ (resp. pour tous $c',d',e'\in C'$), on a

$$(p^{b'}_{a'})_{x'} = (p^{a'}_{b'})_{x'}$$

$$(\text{resp. } (p^{e'}_{c'd'})_{x'}(p^{c'}_{d'e'})_{x'} = (p^{d'}_{c'e'})_{x'})$$

en tout point x' de $V_{a'b'}$ (resp. de $V_{c'd'e'}$) au-dessus de $\tilde{x}$. Mais ces relations prouvent que x ne peut appartenir à T', ce qui démontre 1).

2) D'après 1), on peut trouver un 1-recouvrement de Y

$$\mathfrak{R} = ((X_i)_{i\in I},(V_{ij})_{ij\in I\times I}) ,$$

où, pour chaque $i,j\in I$, V_{ij} est un ouvert de X_{ij} qui contient Y_{ij}, et une $\mathfrak{R}$-section

$$\mathfrak{S} = ((P_i)_{i\in I},(p_{ij})_{ij\in I\times I}) ,$$

tels que, pour tous $i,j,k\in I$, les relations (4.2.6.2) soient satisfaites. Pour tous $i,j,k\in I$, on note

$$\pi_i : X_{ijk} \to X_{kj} \ , \ \pi_j : X_{ijk} \to X_{ik} \ , \ \pi_k : X_{ijk} \to X_{ij}$$

les projections canoniques. Considérons l'ouvert $V_{ij,k}$ de X_{ijk} défini par

$$V_{ij,k} = \pi_j^{-1}(V_{ik})\cap\pi_i^{-1}(V_{kj}) .$$

Nous allons montrer que, quitte à remplacer $(X_i)_{i\in I}$ par un recouvrement plus fin et, quitte à modifier les ouverts V_{ij}, on peut supposer que l'on a

$$(4.2.6.4) \qquad \pi_k(V_{ij,k})\subset V_{ij} .$$

pour tous $i,j,k\in I$. Posons en effet

$$p_{ij,k} = (p_{ik}|V_{ij,k})(p_{kj}|V_{ij,k}) \quad .$$

Pour tous $i,j\in I$, on pose $A_{ij} = \{1\}\amalg I$ et, pour $a\in A_{ij}$, on pose

$$V_a = V_{ij} \quad , \quad p_a = p_{ij} \quad \text{si} \quad a=1 \quad , \quad V_a = V_{ij,k} \ , \ p_a = p_{ij,k} \quad \text{si} \quad a=k\in I \ .$$

L'ensemble des V_a , $a\in A_{ij}$, est un recouvrement étale d'un voisinage ouvert W_{ij} de Y_{ij} dans X_{ij} tel que l'on ait $W_{ij}\supset\pi_k(V_{ij,k})$. Il suffit donc de prouver que, quitte à remplacer $(X_i)_{i\in I}$ par un recouvrement plus fin, les sections $p_a, a\in A_{ij}$, se recollent et définissent des sections $\overline{p}_{ij}\in \mathrm{Isom}(P_i|W_{ij},P_j|W_{ij})$, vérifiant les relations analogues à (4.2.6.2).

Pour tous $i,j\in I$, et tous $a,b\in A_{ij}$, soit Z_{ab} l'ensemble des points de V_{ab} où l'on a

$$p_a^b \neq p_b^a$$

(resp. lorsque les p_a , $a\in A_{ij}$ se recollent, soit Z_{ijk} l'ensemble des points de X_{ijk} où l'on a

$$\overline{p}_{ij}^k\overline{p}_{jk}^i \neq \overline{p}_{ik}^j \ ) \ .$$

Soit T_{ab} (resp. T_{ijk}) la projection de Z_{ab} (resp. de Z_{ijk}) sur X et T la réunion des T_{ab} pour $i,j\in I$, $a,b\in A_{ij}$ (resp. la réunion des T_{ijk} pour $i,j,k\in I$) . Nous allons montrer que l'on peut trouver un 1-recouvrement $\mathfrak{R}'$ plus fin que $\mathfrak{R}$, tel que, si $\mathfrak{S}'$ désigne la restriction de $\mathfrak{S}$ à $\mathfrak{R}'$, l'ensemble T' relatif à $\mathfrak{S}'$ soit vide. Il suffit de montrer que, si x est un point maximal de T , on peut trouver $\mathfrak{R}'$ tel que x n'appartienne pas à T' . Comme on ne peut avoir $\mathrm{prof}_x F \geq 1$, la condition (iii) de l'énoncé est satisfaite en x . Soit L une extension finie de $k(x)$ satisfaisant à (4.2.6.0) et q le 1-cocycle introduit ci-dessus. D'après (iii), on peut trouver un recouvrement étale $(X_j)_{j\in J}$ d'un voisinage de Y , plus fin que $(X_c)_{c\in C}$ et un 1-cocycle r de $(X_j)_{j\in J}$ à valeurs dans G , dont la restriction à $(Y_j)_{j\in J}$ soit équivalente au 1-cocycle induit par q . Il résulte alors de 4.2.5 que l'on peut trouver un recouvrement étale $(X_{i'})_{i'\in I'}$ d'un voisinage de Y , plus fin que $(X_i)_{i\in I}$, tel que, si $(X_{c'})_{c'\in C'}$ désigne le recouvrement de Y obtenu en remplaçant chaque $X_{i'}$ par la famille de ses composantes connexes, le recouvrement $(X_{c'})_{c'\in C'}$ soit plus fin que $(X_j)_{j\in J}$ et tel que les $X_{c'}\times_X\widetilde{Y}$ soient connexes.

Soit $\varphi : I' \to I$ l'application canonique et considérons l'ouvert

$$V'_{i'j'} = V_{\varphi(i)\varphi(j)}\times_{X_{ij}} X_{i'j'} \quad .$$

En enlevant à chaque $V'_{i'j'}$ une partie fermée ne rencontrant pas $Y_{i'j'}$, on obtient un ouvert $V_{i'j'}$ tel que, pour tout point z de $V_{i'j'}$ au-dessus de

x , on ait

$$\{\overline{z}\} \cap Y_{i'j'} \neq \emptyset \quad .$$

Soit $\tilde{x}$ le point générique de $\tilde{X}$. On peut appliquer 4.2.3 2) à $\tilde{X}$, $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{s}}$, au recouvrement $(X_{c'})_{c'\in C'}$ de $\tilde{Y}$ formé des composantes connexes des $\tilde{X}_{i'}$ et à $(V_{c'd'})_{c',d'\in C'\times C'}$, où les $V_{c'd'}$ désignent les composantes connexes des $\tilde{V}_{i'j'}$. Il en résulte que x' n'appartient pas à T' , ce qui démontre 2).

3) D'après 2), on peut trouver un 1-recouvrement de Y

$$\mathfrak{R} = ((X_i)_{i\in I},(V_{ij})_{ij\in I\times I}) \ ,$$

où, pour chaque $i,j\in I$, V_{ij} est un ouvert contenant Y_{ij} et une $\mathfrak{R}$-section

$$\mathfrak{s} = ((P_i)_{i\in I},(p_{ij})_{ij\in I\times I}) \quad ,$$

tels que les relations (4.2.6.2) et (4.2.6.4) soient satisfaites. Soient $\rho_i : X_{ij} \to X_i$ et $\rho_j : X_{ij} \to X_j$ les projections canoniques. Montrons qu'alors chaque V_{ij} contient tous les points z de X_{ij} tels que, si x désigne la projection de z sur X , on ait

$$\mathrm{prof}_x F < 2 \qquad \text{et} \qquad \{\overline{x}\} \cap Y \neq \emptyset \quad .$$

Supposons qu'il existe un point x de X tel que l'on ait $\{x\}\cap Y \neq \emptyset$, $\mathrm{prof}_x F < 2$, des indices $i_o,j_o\in I$, un point z de $X_{i_oj_o}-V_{i_oj_o}$ au-dessus de x , et choisissons un point x maximal parmi ceux qui ont cette propriété. Soit L une extension finie de $k(x)$ satisfaisant à (4.2.6.0), d'où un 1-recouvrement de Y

$$\tilde{\mathfrak{R}} = ((X_c)_{c\in C} ,(V_{cd})_{cd\in C\times C}$$

et une $\tilde{\mathfrak{R}}$-section

$$\tilde{\mathfrak{s}} = ((P_c)_{c\in C},(p_{cd})_{cd\in C\times C}) \ .$$

Soit $\gamma : C \to I$ le morphisme canonique. D'après le choix de x , il existe des indices c,d tels que l'on ait $\gamma(c) = i_o$, $\gamma(d) = j_o$ et un point $\tilde{z}\in X_{cd}$, au-dessus de z . On a alors

$$X_c \cap \tilde{Y} \neq \emptyset \qquad , \qquad X_d \cap \tilde{Y} \neq \emptyset \quad .$$

D'après (ii), $\tilde{Y}$ est connexe. On peut donc trouver une suite d'indices $c_o=c$, $c_1,\ldots,c_n= d$, tels que l'on ait

$$X_{c_k} \cap X_{c_{k+1}} \cap \tilde{Y} \neq \emptyset$$

pour tous $0\leq k\leq n-1$. Soit $i_k = \gamma(c_k)$. Il existe un point $z_{i_o\ldots i_{n-1}j_o}$ de

$X_{i_o \ldots i_{n-1} j_o}$ dont la projection sur $X_{i_o j_o}$ est z et dont la projection z_{kk+1} sur $X_{i_k i_{k+1}}$ est telle que l'on ait

$$\overline{\{z_{kk+1}\}} \cap Y_{i_k i_{k+1}} \neq \emptyset \ .$$

Mais ceci prouve que z_{kk+1} appartient à $V_{i_k i_{k+1}}$, et, d'après (4.2.6.4), z appartient à $V_{i_o j_o}$, ce qui est contradictoire.

Notons alors que, si $z \in X_{ij} - V_{ij}$, si x désigne la projection de z sur X et si l'on a $\{\overline{x}\} \cap Y \neq \emptyset$, alors la relation $\mathrm{prof}_x F \geq 2$ entraîne l'existence d'un voisinage ouvert de X_{ij}, contenant z et V_{ij}, tel que la section p_{ij} se prolonge à ce voisinage. Par suite, quitte à augmenter les V_{ij}, on peut supposer que, pour tous $i,j \in I$ et tout point z de $X_{ij} - V_{ij}$, on a

$$\{\overline{x}\} \cap Y = \emptyset \ .$$

En enlevant à chaque X_i une partie fermée ne rencontrant pas Y, on voit que les sections p_{ij} se prolongent à X_{ij} tout entier en des sections satisfaisant aux relations (4.2.6.2). Mais ceci prouve que les $p_i, i \in I$, se recollent ; elles définissent donc une section de F sur l'ouvert $\coprod_{i \in I} X_i$ qui prolonge P.

5. Démonstration des énoncés du n° 3 pour c quelconque.

On raisonne par récurrence sur c. Les hypothèses de profondeur se conservent par restriction à une partie fermée de complémentaire affine, grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1.- Soient S un schéma local noethérien formellement caténaire ou hensélien, t le point fermé de S, U un ouvert affine de S, $j : Y \to X$ un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U$. Soient F un champ sur X, L un ensemble de nombres premiers. Supposons que l'on ait

$$\mathrm{prof}_t F \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{prof}_u F \geq 2 - \delta_t u$$

en tout point $u \in U$ (resp. que l'on ait

$$\mathrm{prof}_t F \geq 2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{prof}_u F \geq 3 - \delta_t u$$

en tout point $u \in U$ et que les fibres formelles de S vérifient (S_2), resp. que l'on ait

$$\mathrm{prof}_t F \geq 3 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{prof}_u F \geq 4 - \delta_t u$$

en tout point $u \in U$ et que, quand on remplace S par son hensélisé, l'une des conditions a) ou b) de 3.3 (i) soit vérifiée). Alors on a

$$\mathrm{prof}_t(j_* F) \geq 1 \quad (\text{resp. } \geq 2 \text{ , resp. } \geq 3) \ .$$

Soit ${}^hS$ le hensélisé de S. Si les fibres formelles de S vérifient (S_2), il en est de même de celles de ${}^hS$ (EGA IV 18.7.2). De plus, si v est un point de ${}^hS$ et u son image dans S, il résulte du fait que S est caténaire et de EGA IV 18.6.6 que l'on a

$$\dim\{\overline{v}\} = \dim\{\overline{u}\} .$$

Les hypothèses se conservent donc lorsque l'on remplace S par ${}^hS$, ce qui permet de supposer S hensélien. Il suffit alors de montrer que, pour tout schéma local S_1 de point fermé t_1, pour tout morphisme étale fini $S_1 \to S$, si $Y_1 = Y\times_S S_1$, etc., le foncteur canonique

$$\alpha : j_1^*F_1(Y_1) \to j_1^*F_1(Y_1 - \{t_1\})$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories). On déduit de 3.4 (appliqué dans le cas $c=0$) que le foncteur canonique

$$\beta : F_1(S_1-\{t_1\}) \to j_1^*F_1(Y_1-\{t_1\})$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories). On considère alors le diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} F_1(S_1) & \xrightarrow{\ \gamma\ } & F_1(S_1-\{t_1\}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ j_1^*F_1(Y_1) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & j_1^*F_1(Y_1-\{t\}) \end{array} .$$

Comme S_1 est hensélien, le foncteur δ est une équivalence de catégories. L'hypothèse de profondeur en t se traduit par le fait que, pour tout S_1, le foncteur γ est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories) résulte donc du diagramme (*) .

5.2.- Nous allons d'abord prouver 3.5 et 3.6, 1) c) (resp. 2) b)) si l'on fait de plus l'hypothèse que F est un faisceau d'ensembles (resp. de groupes) constant constructible et que X vérifie (S_2). On doit montrer que, quand V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, le morphisme canonique

$$\varphi : \varinjlim_V H^0(V,F) \to H^0(Y,j^*F) \qquad (\text{resp. } \theta : \varinjlim_V H^1(V,F) \to H^1(Y,j^*F))$$

est bijectif.

Les hypothèses entraînent, compte tenu de 3.7, que, pour tout point y de Y, fermé dans sa fibre dans le cas global, tel que $\delta_t y = 1$ dans le cas local, et, pour toute générisation u de y appartenant à U, on a

$$(*) \quad \mathrm{prof}_u F \geq \mathrm{Inf}(1,c+2-\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\})) \quad (\text{resp. } \geq \mathrm{Inf}(2,c+3-\mathrm{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\}))).$$

Par hypothèse de récurrence, on peut supposer 3.5 et 3.6 démontrés pour $c-1$. On peut supposer U réunion de $c+1$ ouverts affines U_i, $0\leq i\leq c$. Soit Z un sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent $X-U_0$, tel que j se factorise en une immersion fermée $k : Y \to Z$ et notons $r : Z \to X$ l'immersion canonique.

L'ouvert $W = Z-Y$ est réunion des c ouverts affines $Z \cap U_i$, $1 \le i \le c$. Nous allons appliquer l'hypothèse de récurrence à Z, à l'ouvert W et au faisceau r^*F. Soit y un point de Y, fermé dans sa fibre dans le cas 3.5, tel que $\delta_t y = 1$ dans le cas 3.6, et soit u une générisation de y, appartenant à U, telle que l'on ait $\operatorname{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\}) \le c$. On a alors

$$\operatorname{prof}_u F \ge 1 \quad (\text{resp. } \ge 2) \quad \text{et} \quad \operatorname{prof}_v F \ge 2-\operatorname{codim}(\{\overline{v}\},\{\overline{u}\}) \quad (\text{resp.} \ge 3-\operatorname{codim}(\{\overline{v}\},\{\overline{u}\}))$$

en toute générisation stricte v de u. On peut alors appliquer 5.1 à $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,u}$. On en déduit que, pour tout point y tel que précédemment, pour toute générisation u de y appartenant à W, on a

$$\operatorname{prof}_u r^*F \ge \operatorname{Inf}(1,c+1-\operatorname{codim}(\{y\},\{u\})) \quad (\text{resp. } \ge \operatorname{Inf}(2,c+2-\operatorname{codim}(\{\overline{y}\},\{\overline{u}\}))) .$$

On en déduit, par hypothèse de récurrence, que, lorsque V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X, le morphisme canonique

$$\varphi' : \varinjlim_V H^0(V \cap Z, r^*F) \to H^0(Y, j^*F)$$

$$(\text{resp. } \theta' : \varinjlim_V H^1(V \cap Z, r^*F) \to H^1(Y, j^*F))$$

est bijectif.

Prouvons la surjectivité de φ' (resp. de θ'), le fait que θ' soit injectif se démontrant de façon analogue. Soit a un élément de $H^0(Y,j^*F)$ (resp. de $H^1(Y,j^*F)$) et soit V_0 un voisinage ouvert de Y dans X tel qu'il existe un élément b de $H^0(V_0 \cap Z, r^*F)$ (resp. de $H^1(V_0 \cap Z, r^*F)$) d'image a. On peut supposer, quitte à restreindre V_0 à un voisinage ouvert de Y dans X, que toutes les composantes irréductibles de $V_0 \cap U_0$ rencontrant Y. Les hypothèses de profondeur sur F entraînent alors que la dimension des composantes irréductibles des fibres de f aux points de $U_0 \cap V_0$ est $\ge c+2$ (resp. $\ge c+3$) dans le cas global et que la dimension des composantes irréductibles de X est $\ge c+2$ (resp. $\ge c+3$) dans le cas local. L'hypothèse X vérifie (S_2) entraîne que, pour tout point u de $U_0 \cap V_0$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Z \ne \emptyset$, on a

$$\operatorname{prof}_u F \ge \operatorname{Inf}(1,2-\deg \operatorname{tr} k(u)/k(s)) \quad (\text{resp. } \ge \operatorname{Inf}(2,3-\deg \operatorname{tr} k(u)/k(s)))$$

dans le cas global et

$$\operatorname{prof}_u F \ge \operatorname{Inf}(1,3-\delta_t u) \quad (\text{resp. } \ge \operatorname{Inf}(2,4-\delta_t u))$$

dans le cas local. Soit alors h l'immersion canonique de V_0 dans X, et, dans le cas d'un faisceau en groupes, soit Φ le champ des torseurs sous F. Pour tout point $u \in U_0$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Z \ne \emptyset$, on a

$$\operatorname{prof}_u(h_*h^*F) \ge \operatorname{Inf}(1,2-\deg \operatorname{tr} k(u)/k(f(u)))$$

$$(\text{resp. } \operatorname{prof}_u(h_*h^*\Phi) \ge \operatorname{Inf}(2,3-\deg \operatorname{tr} k(u)/k(f(u))))$$

dans le cas global, et

$$\operatorname{prof}_u(h_*h^*F) \ge \operatorname{Inf}(1,3-\delta_t u) \quad (\text{resp. } \operatorname{prof}_u(h_*h^*\Phi) \ge \operatorname{Inf}(2,4-\delta_t u))$$

dans le cas local. On peut donc appliquer 3.5 ou 3.6 1) c), (resp. 3.1 ou 3.3) avec $c=0$, à X , U_0 et h_*h^*F (resp. $h_*h^*\Phi$) . on en déduit l'existence d'un voisinage ouvert V_1 de Z dans X tel que l'élément a de $H^0(Y,j^*F)$ soit l'image d'un élément c de $H^0(V_1,h_*h^*F)$ (resp. tel qu'un torseur P sur Y de groupe j^*F , représentant a , se prolonge en un torseur Q sur V_1 de groupe h_*h^*F) . Si l'on pose $V=V_1\cap V_0$, la restriction de c à $H^0(V,F) = H^0(V,h_*h^*F)$ a pour image a dans $H^0(Y,j^*F)$ (resp. la restriction $Q|V$ a pour image inverse sur Y un torseur isomorphe à P) . Ceci achève la démonstration.

5.3.- Démonstration des énoncés du n° 3 pour c quelconque.

Les énoncés 3.2 et 3.4 sont des conséquences immédiates de 3.1 et 3.3 respectivement ; quant aux corollaires 3.5 et 3.6, ce sont des cas particuliers des énoncés 3.1 à 3.4. Il reste donc à démontrer 3.1 et 3.3. Le fait que le foncteur φ soit fidèle est évident. Montrons que φ est pleinement fidèle; on voit, comme dans 4.2, qu'il suffit de prouver les énoncés 3.5 et 3.6 1) c). Montrons que l'on peut appliquer le lemme 4.1.1. On reprend les notations de loc. cit. ; il suffit de montrer que, pour tout point $x\in X$ et toute extension finie L de $k(x)$, $\tilde{Y}$ est connexe. Dans le cas global, on se ramène, comme dans 1.2, au cas où $\tilde{X}$ est fini sur X ; les énoncés 3.5 et 3.6 1) c), prouvés si X est (S_2) et F constant, montrent bien que $\tilde{Y}$ est connexe. Dans le cas local, on se ramène, comme dans 1.4, à prouver la connexité d'un schéma $Y_1 = X_1\times_X Y$, où X_1 est un schéma fini sur X , vérifiant (S_2) ; la connexité de Y_1 résulte alors de 5.2.

Pour prouver que φ est essentiellement surjectif, on applique 4.2.6. Dans le cas local $\tilde{X}$ est fini sur X et l'on peut appliquer les résultats de 5.2. Dans le cas global, on se ramène au cas $\tilde{X}$ fini sur X par la méthode utilisée dans 1.2.

6. Profondeur géométrique et profondeur homotopique.

Donnons des exemples d'anneaux locaux de profondeur homotopique ≥ 3 , en utilisant la notion de profondeur géométrique introduite dans SGA 2 XIV 5.

THEOREME 6.1.- Soient S un schéma local noethérien, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

a) S est excellent et, si S' désigne le complété de S , le morphisme $S' \to S$ est universellement localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$.

b) S est une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent.

Alors, si l'on a
$$\text{prof géom } S \geq 3 ,$$

on a aussi

$$\text{prof hop}^{\mathbb{L}}(S) \geq 3 .$$

1) Réduction au cas où S est complet.

D'après SGA 2 XIV 5.5, la profondeur géométrique ne change pas quand on remplace S par son hensélisé ou son complété. Par définition même, la profondeur homotopique ne change pas quand on remplace S par son hensélisé. On peut donc supposer S hensélien, la condition b) étant remplacée par la condition : S est un hensélisé d'une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent. Supposons que l'on ait

(*) $$\text{prof hop}^{\mathbb{L}} S' \geq 3 .$$

Le fait qu'il en soit de même pour S résulte de [1] (3.11) quand b) est satisfaite. Dans le cas où a) est satisfaite, on a

$$\text{prof ét } S \geq 2$$

d'après SGA 2 XIV 1.15. Soient t le point fermé de S , $X = S-\{t\}$, et montrons que, pour tout faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes constant constructible, le morphisme canonique

$$\alpha : H^1(S,F) \to H^1(X,F)$$

est bijectif. On pose $X' = X\times_S S'$, etc., et on considère le diagramme commutatif

(**) $$\begin{tikzcd} H^1(S,F) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^1(S',F') \arrow[d, "\beta"] \\ H^1(X,F) \arrow[r, "\mu"] & H^1(X',F') \end{tikzcd}$$

L'hypothèse (*) entraîne que β est bijectif. Comme S est hensélien, γ est bijectif. Montrons qu'il en est de même de α . Soit i l'immersion canonique de X dans S et considérons le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(S,i_*i^*F) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & H^1(X,F) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & H^0(S,R^1i_*(i^*F)) \arrow[d, "\nu"'] \\ 0 \arrow[r] & H^1(S',i'_*i'^*F') \arrow[r] & H^1(X',F') \arrow[r] & H^0(S',R^1i'_*(i'^*F')) \end{tikzcd} .$$

Le fait que le morphisme $S' \to S$ soit localement 1-asphérique pour L et que S soit hensélien entraîne que λ et ν sont bijectifs. Il résulte alors du diagramme ci-dessus et de ceux qu'on en déduit en remplaçant F par les groupes tordus de F que μ est bijectif. D'après (**), il en est de même de α ; comme ceci reste vrai quand on remplace S par un schéma local étale fini sur S , on a

$$\text{prof hop}^{\mathbb{L}}(S) \geq 3 .$$

2) Cas où S est complet.

On considère S comme sous-schéma fermé d'un schéma local régulier R de dimension n ; soient $f_1,\dots,f_q$ des sections globales de $\mathcal{O}_R$, en nombre minimum, engendrant un idéal définissant S. Par définition même, on a

$$\text{prof géom } S = n-q$$

et, par hypothèse, on a donc

$$n-q \geq 3 .$$

Comme R est régulier, on a (SGA 2 XIV 1.11)

$$\text{prof hop } (R) \geq 3 .$$

Soient t le point fermé de R, $X = R-\{t\}$, $Y = S-\{t\}$ et $j : Y \to X$ l'immersion canonique. La relation précédente montre que, pour tout faisceau en groupes constant constructible F, les morphismes canoniques

$$H^0(R,F) \to H^0(X,F) \quad , \quad H^1(R,F) \to H^1(X,F)$$

sont bijectifs. Il suffit alors de montrer que les relations précédentes sont vérifiées quand on y remplace R par S car le même résultat s'appliquera à tout schéma local étale fini sur S. Il suffit, pour cela, de montrer que les morphismes canoniques

$$H^0(X,F) \to H^0(Y,j^*F) \quad , \quad H^1(X,F) \to H^1(Y,j^*F)$$

sont bijectifs. On applique 3.6 1) d) et 2 c). L'ouvert $U=X-Y$ est réunion des q ouverts affines $D(f_i)$, $1 \leq i \leq q$. Il suffit alors, pour pouvoir appliquer loc. cit., de montrer que l'on a

$$(***) \qquad \text{prof}_u(X) \geq \text{Inf}(2, q+3-\delta_t u)$$

en tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$, et

$$(****) \qquad \text{prof}_u(X) \geq 3$$

en tout point $u \in U$ tel que $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$. Or, si $\{\overline{u}\} \cap Y = \emptyset$, on a $\delta_t u \leq q$ (I 3.2), et par suite on a

$$\dim \mathcal{O}_{X,u} \geq n-q \geq 3 .$$

L'assertion (****) résulte donc du théorème de pureté (SGA 2 XIV 1.11). Si $\{\overline{u}\} \cap Y \neq \emptyset$ et si l'on a $\delta_t u \leq q+1$, on a

$$\dim \mathcal{O}_{X,u} \geq n-q-1 \geq 2 \quad ,$$

et l'on a donc

$$\text{prof}_u(X) \geq 2 \quad ;$$

enfin, si $\delta_t u = q+2$, on a

$$\dim \mathcal{O}_{X,u} \geq 1 \quad ,$$

d'où la relation

$$\text{prof}_u(X) \geq 1 \quad .$$

Ceci montre que les relations (***) et (****) sont vérifiées et achève la démonstration.

7. Application au cas d'un schéma quasi-projectif sur un corps.

7.0.- Soit k un corps. Dans tout ce numéro, on se donne un sous-schéma d'un espace projectif type sur $k, P = \mathbf{P}_k^r$. Les sections hyperplanes de P sont les sections du faisceau fondamental $\mathcal{O}_P(1)$. S'il n'y a pas de confusion possible, on appelle section hyperplane de X le sous-schéma fermé de X défini par l'annulation d'une section de $\mathcal{O}_P(1)$.

Soit S l'espace projectif dual de P. Le foncteur qui, à tout k-schéma T, associe l'ensemble des sections hyperplanes de $P\times_k T$ est représentable par S et par une section hyperplane H de $P_{(S)}$. On dit que H est la section hyperplane générale de P. En particulier l'ensemble des sections hyperplanes de P s'identifie à l'ensemble des points rationnels de S. On emploiera l'expression "Y est une section hyperplane assez générale" dans le sens suivant : il existe un ouvert non vide V de S tel que, Y correspond à un point rationnel de V.

Nous allons voir que les énoncés du n° 3 sont valables pour un schéma quasi-projectif X sur un corps k de caractéristique zéro, si l'on se borne à prendre pour sous-schéma fermé Y une section hyperplane de X assez générale.

THEOREME 7.1.- Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, X un sous-schéma d'un espace projectif type P ; on note p' l'ensemble des nombres premiers distincts de p.

1) Soit F un faisceau d'ensembles constructible sur X, tel que, pour tout point x de X, on ait

$$\mathrm{prof}_x F \geq 2-\dim\{\overline{x}\} ,$$

$\{\overline{x}\}$ désignant l'adhérence de x dans X. Alors, si Y est une section hyperplane de X assez générale, et $j : Y \to X$ l'immersion canonique, le morphisme

$$F(X) \to (j^*F)(Y)$$

est bijectif.

2) Supposons que les schémas de type fini sur k soient fortement désingularisables (SGA 5 I 3.1.5). (Condition réalisée si k est de caractéristique nulle d'après [7]). Alors on a les conclusions suivantes :

a) Soit F un ind-p'-champ 1-constructible (SGA 1 XIII 0) tel que, pour tout X-schéma étale X' et tout couple d'objets a,b de $F_{X'}$, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{X'}(a,b)$ soit constructible. On suppose que, pour tout point x de X, on a

$$\mathrm{prof}_x F \geq 3\text{-}\dim\{\overline{x}\} \ .$$

Alors, si Y est une section hyperplane de X assez générale, et $j:Y \to X$ l'immersion fermée canonique, le foncteur canonique

$$F(X) \to j^*F(Y)$$

est une équivalence de catégories.

b) Supposons que, pour tout point x de X, on ait

$$\mathrm{prof}\ \mathrm{hop}_x(X) \geq 3\text{-}\dim\{\overline{x}\} \ .$$

Alors, si Y est une section hyperplane de X assez générale, pour tout faisceau de ind-p'-groupes constant constructible F sur X, les morphismes canoniques

$$\alpha : H^0(X,F) \to H^0(Y,j^*F) \qquad , \qquad \beta : H^1(X,F) \to H^1(Y,j^*F)$$

sont bijectifs.

Soient Q l'adhérence schématique de X dans P, Z une section hyperplane de Q, Y sa trace sur X, de sorte qu'on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & Q \end{tikzcd} ,$$

où f est une immersion ouverte dominante, i une immersion fermée. Les hypothèses étant celles de 1), on note Φ le champ en catégories discrètes associé à F ; sous les hypothèses de 2) a) (resp. 2) b)), on note Φ le champ F (resp. on note Φ_C le champ des torseurs sous le faisceau en groupes constant associé au groupe abstrait C). On doit montrer que, si Y est une section hyperplane de X assez générale, le foncteur canonique

$$\Phi(X) \to j^*\Phi(Y)$$

est une équivalence de catégories (resp. que, pour tout groupe fini C, le foncteur

$$\Phi_C(X) \to j^*\Phi_C(Y)$$

est une équivalence de catégories). On va appliquer 3.1 à Q, à la partie fermée Z et au champ $f_*\Phi$ (resp. $f_*\Phi_C$) . Pour tout point p de Q, on a

$$\mathrm{prof}_p(f_*\Phi) \geq 3\text{-}\dim\{\overline{p}\} \quad (\text{resp. } \mathrm{prof}_p(f_*\Phi_C) \geq 3\text{-}\dim\{\overline{p}\}) \ .$$

Ces relations sont en effet vraies par hypothèse si p appartient à X ; si $p \notin X$, la profondeur de $f_*\Phi$ en p est ≥ 3 quel que soit le champ Φ. D'après loc. cit., le foncteur canonique

$$f_*\Phi(Q) \to i^*f_*\Phi(Z)$$

est une équivalence de catégories (resp. pour tout groupe fini C , il en est ainsi du foncteur canonique

$$f_*\Phi_C(Q) \to i^*f_*\Phi_C(Z)) .$$

Pour tout champ Φ sur X , on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Phi(X) \arrow[r] & j^*\Phi(Y) \arrow[r, "\theta"] & g_*j^*\Phi(Z) \\ f_*\Phi(Q) \arrow[u, "\psi"] \arrow[rr] & & i^*f_*\Phi(Z) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} ,$$

où φ est le morphisme de changement de base et où ψ et θ sont des équivalences. Le théorème sera donc prouvé si l'on montre que, pour une section hyperplane de X assez générale, le morphisme canonique

$$\varphi : i^*f_*\Phi \to g_*j^*\Phi$$

est une équivalence (resp. que, pour tout groupe fini C , il en est ainsi du morphisme canonique

$$\varphi_C : i^*f_*\Phi_C \to g_*j^*\Phi_C) .$$

Soient S l'espace projectif dual de P , H le sous-schéma fermé de $P_{(S)}$ défini par la section hyperplane générale de $P_{(S)}$ (7.0) ; posons $H_Q = H\times_{P_{(S)}} Q$, $H_X = H\times_{P_{(S)}} X$. Pour tout point rationnel s de S , on considère le diagramme de k-schémas suivant, dont tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} Y_s \arrow[r, "n_s"] \arrow[d, "g_s"'] & H_X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z_s \arrow[r, "l_s"] \arrow[d] & H_Q \arrow[r, "k"] \arrow[d] & Q \\ s \arrow[r, dash] & S & \end{tikzcd} .$$

Par définition de H , Z_s est la section hyperplane de Q définie par s . On veut montrer que l'on peut trouver un ouvert non vide U de S tel que, pour tout point rationnel s de U , le morphisme canonique

$$\varphi : (kl_s)^*f_*\Phi \to g_{s*}(mn_s)^*\Phi$$

soit une équivalence de catégories (resp. que, pour tout groupe fini C , il en soit ainsi du foncteur

$$\varphi_C : (kl_s)^*f_*\Phi_C \to g_{s*}(mn_s)^*\Phi_C) .$$

Le morphisme k est lisse et il résulte donc de [5] que, pour tout ind-p'-champ Φ , le morphisme canonique

$$k^*f_*\Phi \to h_*m^*\Phi$$

est une équivalence de catégories. D'autre part, d'après SGA 1 XIII 3.1, on peut trouver un ouvert U de S tel que $(m^*\Phi_{(U)},h_{(U)})$ (resp. $(m^*\Phi_{C(U)},h_{(U)})$ pour tout C) soit cohomologiquement propre relativement à U en dimension ≤ 1. Cela entraîne que, pour tout point s de U, le morphisme canonique

$$l_s^* h_*(m^*\Phi) \to g_{s*}n_s^*(m^*\Phi)$$

est une équivalence de catégories (resp. que, pour tout C, il en est ainsi du morphisme canonique

$$l_s^* h_*(m^*\Phi_C) \to g_{s*}n_s^*(m^*\Phi_C)) .$$

On en déduit que φ (resp. φ_C) est une équivalence de catégories, ce qui achève la démonstration.

Remarque 7.2.- Reprenons les hypothèses de 7.1 2) b), mais supposons seulement que l'on ait

$$\mathrm{prof}_x X \geq 2-\dim\{\overline{x}\}$$

en tout point x de X. La démonstration de 7.1 montre alors que, si Y est une section hyperplane de X assez générale, pour tout faisceau de ind-p'-groupes constant constructible, le morphisme α est bijectif et le morphisme β injectif. Notons que, pour prouver l'injectivité de β, nous utilisons l'hypothèse de résolution des singularités.

Traduisons le théorème 7.1 2) b) en termes de groupe fondamental ; si ξ est un point géométrique de X et p un nombre premier, on note $\pi_1^{p'}(X,\xi)$ le plus grand quotient de $\pi_1(X,\xi)$ d'ordre premier à p.

COROLLAIRE 7.3.- Les notations sont celles de 7.1. Supposons que, pour tout point $x\in X$, on ait

$$\mathrm{prof}_x X \geq 2-\dim\{\overline{x}\} ,$$

où $\{\overline{x}\}$ est l'adhérence de x dans X (condition réalisée si les composantes irréductibles de Q sont de dimension ≥ 2 et si X vérifie (S_2)). Alors, si Y est une section hyperplane de X assez générale, le morphisme canonique

$$\pi_0(Y) \to \pi_0(X)$$

est bijectif. Supposons de plus que les schémas de type fini sur k soient fortement désingularisables. Alors, si X est connexe, si Y est une section hyperplane assez générale de X et ξ un point géométrique de Y, le morphisme canonique

$$\pi_1^{p'}(Y,\xi) \to \pi_1^{p'}(X,\xi)$$

est surjectif.

COROLLAIRE 7.4.- On reprend les notations de 7.1 et on suppose que les schémas de type fini sur k sont fortement désingularisables. Supposons que, pour tout point x de X, on ait

$$\text{prof hop}_x X \geq 3-\dim\{\overline{x}\} \quad ,$$

où $\{\overline{x}\}$ désigne l'adhérence de x dans X (condition réalisée si les composantes irréductibles de Q sont de dimension ≥ 3 et si X est régulier). Alors, si Y est une section hyperplane de X assez générale et ξ un point géométrique de Y, le morphisme canonique

$$\pi_1^{p'}(Y,\xi) \to \pi_1^{p'}(X,\xi)$$

est bijectif.

Lorsque X est le complémentaire d'un diviseur à croissements normaux relativement à k, on peut préciser pour quelles sections hyperplanes les conclusions de 7.3 et 7.4 sont valables. On obtient plus précisément une bijection entre groupes fondamentaux modérément ramifiés (SGA 1 XIII 2.1.3).

PROPOSITION 7.5.- Soient k un corps, Q un k-schéma projectif, D un diviseur ≥ 0 de Q, à croissements normaux relativement à k (SGA 5 II 4.2), X le complémentaire du support de D. Soit H une section hyperplane de Q telle que l'image inverse de D sur H soit un diviseur à croissement normaux relativement à k. Posons $Y = X \times_Q H$.

1) Supposons que, pour tout point x de X, on ait

$$\text{prof}_x X \geq 2-\dim\{\overline{x}\} \quad .$$

Alors le morphisme canonique

$$\pi_o(Y) \to \pi_o(X)$$

est bijectif.

2) Supposons que X soit connexe et que, pour tout point $x \in X$; on ait

$$\text{prof hop}_x X \geq 3-\dim\{\overline{x}\} \quad .$$

Alors, si ξ est un point géométrique de Y, le morphisme canonique

$$\pi_1^t(Y,\xi) \to \pi_1^t(X,\xi)$$

est bijectif.

On considère le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H & \xrightarrow{i} & Q \end{array} \quad .$$

Soit C un ensemble ayant au moins deux éléments et C_X le faisceau constant sur X associé à C. Comme dans 7.1, il suffit, pour prouver 1), de montrer que le morphisme canonique

$$i^*f_*C_X \to g_*j^*C_X$$

est bijectif. Cela résulte du fait que les deux faisceaux considérés s'identifient à C_H (SGA 4 XVI 3.2) .

Prouvons 2). Si C est un groupe fini sur X , on note Φ_C le champ des torseurs sur X de groupe C et $f_*^t\Phi_C$ l'image directe modérément ramifiée de Φ_C (SGA 1 XIII 2.2.1). Il suffit de montrer que, pour tout faisceau constant C , le morphisme canonique

$$i^*f_*^t\Phi_C \to g_*j^*\Phi_C$$

définit une équivalence de $i^*f_*^t\Phi_C$ et de la sous-catégorie $g_*^tj^*\Phi_C$ de $g_*j^*\Phi_C$ car on peut appliquer 3.1 à Q , H et au champ $f_*^t\Phi_C$. Il suffit de vérifier que l'on a une équivalence en chaque point géométrique $\bar{x}$ de H ; on désigne par $\bar{Q}$ et $\bar{H}$ les localisés stricts respectifs de Q et H en $\bar{x}$ et on pose $\bar{X} = X \times_Q \bar{Q}$, $\bar{Y} = Y \times_H \bar{H}$. On doit montrer que l'image inverse sur Y d'un revêtement étale modérément ramifié E de $\bar{X}$ est un revêtement étale modérément ramifié E_Y de $\bar{Y}$ et que le foncteur φ qui, à E , associe E_Y , est une équivalence de catégories. Soient $f_1,\dots,f_n$ des sections globales de $\bar{Q}$ telles que $\bar{X} = D(f_1,\dots,f_n)$. D'après SGA 1 XIII 5.6, les revêtements universels modérément ramifiés de $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ s'identifie respectivement à

$$\varprojlim_{(n_i)} \bar{X}[T_i]_{1\le i\le n}/(T_i^{n_i}-f_i) \qquad \varprojlim_{(n_i)} \bar{Y}[T_i]_{1\le i\le n}/(T_i^{n_i}-f_i) \quad ,$$

où les limites projectives sont prises suivant l'ensemble filtrant des familles d'entiers $n_i > 0$, premiers à la caractéristique de k . Le fait que E_Y soit modérément ramifié et que φ soit une équivalence en résulte.

Bibliographie

[1] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publications I.H.E.S. nº 36, Paris, 1969.

[2] M. Artin, Algebraization of formal moduli II. Existence of modifications Annals of Maths, vol. 91 nº 1, 1970, p. 88-135.

SGA 4 M. Artin et A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique, nº 4, I.H.E.S., Paris, 1963-64.

[3] N. Bourbaki, Algèbre, Hermann, Paris.

[4] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Hermann, Paris, 1961-65.

[5] J. Giraud, Cohomologie non abélienne de degré 2, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

EGA A. Grothendieck et Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math., I.H.E.S., nº 4, 8, 11, 20, 24, 28, 32, Paris, 1960-67.

SGA 1 A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique, nº 1, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

SGA 2 A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique nº 2, North-Holland Publ. Co, Amsterdam, 1968.

SGA 6 A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique nº 6, I.H.E.S., Paris, 1966-67.

[6] R. Hartshorne, Residues and duality, Lecture Notes in Math., nº 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[7] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., t. 79, 1964, p. 109-326.

[8] G. Horrocks, Vector Bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. of the London Math. Soc., nº 56, Oxford, 1964, p. 689-713.

[9] P. Samuel et O. Zariski, Commutative Algebra, Van Nostrand, New-York, 1958-60.

Mme RAYNAUD Michèle
"Les Bruyères"
91, Rue du Colonel Fabien
92160 ANTONY

-+-+-+++-+-+-+++-+-+-