

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER

**« Vanishing theorem » pour un fibré vectoriel  
holomorphe positif de rang quelconque**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 38 (1974), p. 107-119

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_38\\_\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__107_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

"VANISHING THEOREM"  
POUR UN FIBRE VECTORIEL HOLOMORPHE POSITIF  
DE RANG QUELCONQUE.

par Joseph LE POTIER

0. INTRODUCTION.

0. 1 Le principal résultat

Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension  $n$  et  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur  $M$ . On connaît le "precise vanishing theorem" dû à KODAIRA et NAKANO [7] : si  $E$  est un fibré positif, on a alors pour la cohomologie de type  $(p, q)$  à valeurs dans  $E$  :

$$H^{p,q}(M, E) = 0 \quad \text{dès que} \quad p+q \geq n+1.$$

Le but de ce travail est de généraliser ce théorème au cas des fibrés de rang  $r$  quelconque ; de façon précise, le résultat que nous obtenons est le suivant :

THEOREME 1. Soit  $E$  un fibré vectoriel holomorphe positif de rang  $r$  au-dessus d'une variété  $M$  complexe compacte de dimension  $n$ . Alors

$$H^{p,q}(M, E) = 0 \quad \text{dès que} \quad p+q \geq n+r.$$

Dans le cas où  $p = n$ , ce résultat était conjecturé par P.A. GRIFFITHS dans [4]. La notion de fibré positif, que nous allons maintenant rappeler, est exactement la même que celle qui est définie dans cet article.

La notion de fibré positif

Soit  $E$  un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété complexe  $M$ , et soit une structure hermitienne sur  $E$ . Désignons par  $T$  le fibré tangent à  $M$ ,  $\text{End}(E)$  le fibré des endomorphismes de  $E$ , et par  $\underline{A}(E)$  le  $\mathbb{R}$ -sous-fibré de  $\text{End}(E)$  formé des endomorphismes auto-adjoints relativement à la structure hermitienne. Le fibré  $\underline{A}(E)$  s'identifie au complexifié de  $\underline{A}(E)$ , la conjugaison devenant le morphisme "adjoint" :

$$a \mapsto a^*.$$

La forme de courbure [2] de la structure hermitienne est un élément

$$\Omega \in A^{1,1}(M, \underline{A}(E)).$$

Il existe alors une et une seule forme hermitienne

$$B : T \times T \rightarrow \underline{\text{End}}(E)$$

dont la partie imaginaire soit  $-\Omega$ . Soit  $\hat{\Omega}$  la forme quadratique associée :

$$T \rightarrow \underline{A}(E)$$

dite forme quadratique de courbure.

En coordonnées, la forme de courbure associée à une structure hermitienne peut s'écrire, si  $(z^1, \dots, z^n)$  sont des coordonnées au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$  :

$$\Omega|_U = i \sum_{\alpha, \beta} \Omega_{\alpha, \beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

où les  $\Omega_{\alpha, \beta} \in C^\infty(U, \underline{\text{End}}(E))$  vérifient

$$\Omega_{\alpha, \beta}^* = \Omega_{\beta, \alpha}$$

La forme quadratique de courbure est donnée par :

$$\hat{\Omega}(\sum_\alpha u^\alpha \partial/\partial z^\alpha) = 2 \sum_{\alpha, \beta} \Omega_{\alpha, \beta} u^\alpha \bar{u}^\beta$$

DEFINITION. Un fibré vectoriel holomorphe  $E$  au-dessus d'une variété  $M$  est dit positif s'il existe sur  $E$  une structure hermitienne dont la forme quadratique de courbure vérifie :

Pour tout vecteur  $u \in T$  non nul d'origine  $m \in M$ , l'opérateur

$$\hat{\Omega}(u) \in \underline{A}_m(E)$$

est positif non dégénéré.

Lorsque le fibré  $E$  est de rang 1, cette notion de fibré positif coïncide avec celle qui a été donnée par KODAIRA.

Exemples. a) Soit  $M = P_n(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^{n+1})$  l'espace projectif des hyperplans de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , et soit  $Q$  le fibré de rang 1 canonique sur  $P_n(\mathbb{C})$ , quotient du fibré trivial  $P_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1}$  : pour  $h \in P_n(\mathbb{C})$  on a :

$$Q_h = \mathbb{C}^{n+1}/h$$

La structure hermitienne triviale sur le fibré  $P_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1}$  induit une décomposition en somme directe ( $C^\infty$ ) de fibrés vectoriels :

$$P_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1} = S \oplus Q$$

On peut alors vérifier que la structure hermitienne induite sur  $Q$  a sa forme quadratique de courbure positive.

La cohomologie  $H^{p,q}(P_n, Q)$  est bien connue :

$$H^{p,q}(P_n, Q) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1} & \text{si } p = q = 0 \\ 0 & \text{si } (p,q) \neq (0,0) \end{cases}$$

C'est un résultat dû à KODAIRA, SERRE et FRENKEL dans le cas où  $p = 0$  ; à BOTT dans le cas où  $p > 0$  [1].

b) Le fibré tangent  $T = T(P_n(\mathbb{C}))$  à  $P_n(\mathbb{C})$  est positif. Le théorème 1 montre que l'on a :

$$H^{n,n}(P_n, T) = 0$$

Le théorème de dualité de SERRE permet d'obtenir dans cet exemple un résultat plus précis : en effet

$$\begin{aligned} (H^{n,q}(P_n, T))^* &\simeq H^{0, n-q}(P_n, T^*) \\ &\simeq H^{1, n-q}(P_n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

et donc :

$$H^{n,q}(P_n, T) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq n-1 \\ \mathbb{C} & \text{si } q = n-1 \end{cases}$$

On voit que  $H^{n, n-1}(P_n, T) \neq 0$  : ainsi on ne peut espérer améliorer le théorème 1 en abaissant le nombre  $n+r$  au-delà duquel la cohomologie s'annule. Cet exemple est dû à GRIFFITHS.

c) Le fibré normal de toute variété complexe plongée dans l'espace projectif est positif : ainsi nous disposons de beaucoup d'exemples de fibrés positifs de rang  $> 1$ .

## 0. 2 Le théorème d'isomorphisme : réduction au cas d'un fibré de rang 1.

Soit  $E$  un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété complexe  $M$ , et soit  $P(E)$  le fibré en espaces projectifs associé à  $E$  de la manière suivante : le fibré de  $P(E)$  au-dessus du point  $m \in M$  est l'espace projectif  $P(E_m)$  des hyperplans de  $E_m$ . Soit  $\Pi : P(E) \rightarrow M$  la projection canonique et  $\Pi^* E$  l'image réciproque de  $E$  par  $\Pi$ .

Sur chaque fibré  $P(E_m)$ , nous avons un fibré vectoriel de rang 1 canonique,  $Q_m$ , quotient du fibré trivial  $P(E_m) \times E_m$ , décrit dans l'exemple a).  $Q = \bigcup_{m \in M} Q_m$  peut alors être muni d'une structure naturelle d'espace fibré vectoriel holomorphe

de rang 1 sur  $P(E)$ , quotient du fibré  $\Pi^* E$ .

En cohomologie, nous aurons un morphisme "image réciproque" :

$$H^{p,q}(M,E) \rightarrow H^{p,q}(P(E), \Pi^* E)$$

et un morphisme induit par la projection :

$$\Pi^* E \rightarrow Q$$

d'où par composition, un morphisme :

$$H^{p,q}(M,E) \rightarrow H^{p,q}(P(E), Q)$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

**THEOREME 2.** Pour tout  $(p,q)$ , le morphisme canonique :

$$H^{p,q}(M,E) \rightarrow H^{p,q}(P(E), Q)$$

est un isomorphisme.

Le théorème 2 implique le théorème 1. En effet si  $M$  est compacte de dimension  $n$ , et si  $E$  est de rang  $r$ ,  $P(E)$  est une variété compacte de dimension  $n+r-1$ . Il suffit alors d'appliquer au fibré-quotient  $Q$  le théorème d'annulation de KO-DAIRA - NAKANO et d'utiliser la proposition suivante due à GRIFFITHS :

**PROPOSITION 1.** Si  $E$  est un fibré positif, il en est de même de  $Q$ .

Pour démontrer le théorème 2, la suite spectrale de Leray est insuffisante : elle donne ce résultat seulement dans le cas où  $p = 0$  [1]. Il apparaît ainsi nécessaire d'introduire une généralisation d'une suite spectrale due à A. BOREL.

1. ACTION DU GROUPE DE LIE  $\mathcal{G}(E)$  SUR  
LA COHOMOLOGIE DE TYPE  $(p, q)$  A VALEURS DANS  $E$  .

1.1 Dérivées de Lie sur  $E$

Soit  $E$  un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété complexe  $M$  , et soit  $L$  un opérateur différentiel holomorphe d'ordre 1 de  $E$  dans  $E$  .

Son symbole  $\sigma(L)$  est un élément de  $\text{Hom}(T^*, \text{End}(E))$  . Remarquons que ce dernier espace contient l'espace  $\text{Hom}(T^*, \mathbb{C}) = \mathcal{E}(M)$  , espace des champs de vecteurs holomorphes sur  $M$  .

DEFINITION. On appelle dérivée de Lie sur  $E$  un opérateur différentiel holomorphe d'ordre 1 de  $E$  dans  $E$  dont le symbole est un champ de vecteurs sur  $M$  .

Si  $X$  est un champ de vecteurs holomorphe les dérivées de Lie de symbole  $X$  sont exactement les morphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires de faisceaux :

$$L : \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(E)$$

vérifiant au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$  :

$$L(fs) = (\theta(X)f) \cdot s + f L(s)$$

pour  $f \in \mathcal{O}(U)$  , fonction holomorphe au-dessus de  $U$  ,  $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}(E))$  , section de  $E$  au-dessus de  $U$ .  $\theta(X)$  désigne la dérivée de Lie habituelle :

$$\theta(X) = i(X) \cdot d$$

Exemples : a) si  $E = M \times \mathbb{C}$  , toute dérivée de Lie de symbole  $X$  est de la forme

$$f \rightarrow \theta(X)f + \lambda f$$

où  $\lambda \in \mathcal{O}(M)$  est une fonction holomorphe sur  $M$  .

b) Plus généralement, si  $D$  est une connexion holomorphe sur  $E$  ,  $i(X)D$  est une dérivée de Lie sur  $E$  de symbole  $X$  .

c) L'espace des dérivées de Lie sur  $E$  forme une algèbre de Lie  $\mathcal{L}(E)$  et le morphisme

$$\sigma : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{E}(M)$$

est un morphisme d'algèbre de Lie. Ce morphisme n'est en général ni injectif, ni surjectif. Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow L(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(M) \xrightarrow{\delta} H^{0,1}(M, \text{End}(E))$$

où  $L(E)$  désigne l'espace vectoriel  $H^{0,0}(M, \text{End}(E))$  des endomorphismes de  $E$ , et  $\delta$  l'application

$$X \rightarrow 2i\pi i'(X)K$$

où  $i'(X)$  désigne l'application induite en cohomologie par la partie de type  $(-1,0)$  de  $i(X)$ , et  $K$  la classe de cohomologie  $\in H^{1,1}(M, \text{End}(E))$  de la forme de courbure d'une structure hermitienne arbitraire sur  $E$ .

Remarquons que sur n'importe quel fibré vectoriel holomorphe  $i'(X)$  induit bien un morphisme en  $d''$ -cohomologie, car on peut vérifier que

$$[i'(X), d''] = 0$$

On peut construire des exemples explicites pour lesquels  $\delta \neq 0$ .

### 1.2 Le groupe de Lie $\mathcal{G}l(E)$ .

Reprenons les notations du § 1.1 et supposons de plus  $M$  compacte. Dans ce cas le groupe  $\text{Diff}(M)$  des difféomorphismes de  $M$  possède une structure naturelle de groupe de Lie dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'algèbre de Lie  $\mathcal{C}(M)$  des champs de vecteurs holomorphes sur  $M$  ;

Soit  $\mathcal{G}l(E)$  l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta)$  où  $\beta \in \text{Diff}(M)$ , et  $\alpha$  est un automorphisme de  $E$  au-dessus de  $\beta$ .  $\mathcal{G}l(E)$  est un groupe.

PROPOSITION 3. Le groupe  $\mathcal{G}l(E)$  peut être muni d'une structure naturelle de groupe de Lie opérant sur  $E$ , dont l'algèbre de Lie s'identifie à  $\mathcal{L}(E)$ .

DEMONSTRATION. La construction de la structure de groupe de Lie sur  $\mathcal{G}l(E)$  se fait suivant les étapes ci-dessous :

1°) l'image  $\Sigma$  du morphisme de groupes

$$\mathcal{G}l(E) \rightarrow \text{Diff } M$$

est un sous-groupe de Lie de  $\text{Diff } M$

2°)  $\mathcal{G}l(E) \rightarrow \Sigma$  est un fibré principal de groupe structural  $GL(E)$ , groupe de Lie des automorphismes de  $E$  au-dessus de  $1_M$ .

3°) la structure de variété ainsi obtenue sur  $\mathcal{G}l(E)$  est compatible avec la structure de groupe.

Reste à identifier l'algèbre de Lie  $L(\mathcal{G}\ell(E))$  du groupe  $\mathcal{G}\ell(E)$  avec  $\mathcal{L}(E)$ .  
Soit  $u \in L(\mathcal{G}\ell(E))$  et  $g_t \in \mathcal{G}\ell(E)$  défini par :

$$g_t = \exp(tu)$$

Posons pour  $s$  section holomorphe de  $E$  au-dessus d'un ouvert  $U$  :

$$L_u(s) = d/dt (g_t^* s) |_{t=0}$$

On peut vérifier que cette formule a bien un sens et définit un élément  $L_u \in \mathcal{L}(E)$ .

De plus  $u \mapsto L_u$  est un morphisme d'algèbres de Lie rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{E}(M) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \int \\ 0 & \longrightarrow & L(E) & \longrightarrow & L(\mathcal{G}\ell(E)) & \longrightarrow & L(\text{Diff}(M)) \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme étant exactes, ce morphisme est injectif ; pour montrer qu'il est surjectif, on doit utiliser la suite exacte de la proposition 2.

Remarque. En général, le morphisme canonique :  $\mathcal{G}\ell(E) \rightarrow \text{Diff } M$  n'est pas surjectif ; ceci résulte de la proposition 2.

### 1.3 Action de $\mathcal{G}\ell(E)$ sur la cohomologie $H^{p,q}(E)$

Dans ce paragraphe,  $M$  sera toujours supposée compacte. Soit  $g = (\alpha, \beta) \in \mathcal{G}\ell(E)$  :  $\alpha$  définit donc un isomorphisme :  $E \rightarrow \beta^*E$ . Soit  $\omega \in A^{p,q}(E)$  une forme différentielle de type  $(p,q)$  à valeurs dans  $E$ .

Posons  $g^*\omega = \alpha^{-1} \beta^*\omega$ .  $g^*$  définit un isomorphisme de complexes :

$$A^{p,\cdot}(E) \rightarrow A^{p,\cdot}(E)$$

d'où en passant à la cohomologie un automorphisme  $H^{p,q}(g^*)$  de  $H^{p,q}(E)$

PROPOSITION 4. L'homomorphisme naturel :

$$\mathcal{G}\ell(E) \rightarrow GL(H^{p,q}(E))$$

est holomorphe.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si  $L \in \mathcal{L}(E)$  est une dérivée de Lie sur  $E$ ,  $L$  se prolonge de façon unique aux formes différentielles de types  $(p,q)$  à valeurs dans  $E$  :

$$\underline{L} : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q}(E)$$

de façon à vérifier la propriété évidente de dérivation. Ce prolongement vérifiant  $[\underline{L}, d''] = 0$  est un endomorphisme pour le complexe  $A^{p, \cdot}(E)$  ; il induit donc en cohomologie un endomorphisme

$$H^{p, q}(\underline{L}) : H^{p, q}(E) \rightarrow H^{p, q}(E).$$

Pour vérifier que l'homomorphisme

$$g \rightarrow H^{p, q}(g^*)$$

est  $\mathbb{C}$ -dérivable, il suffit de vérifier qu'il est  $\mathbb{C}$ -dérivable au point  $g = 1_E$ . On peut démontrer facilement qu'il est  $\mathbb{R}$ -dérivable en ce point et de dérivée l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\rightarrow \text{End}(H^{p, q}(E)) \\ L &\rightarrow H^{p, q}(\underline{L}) \end{aligned}$$

Reste à démontrer que cette application est  $\mathbb{C}$ -linéaire. Soit  $i''(X)$  la partie de bidegré  $(0, -1)$  de l'opérateur  $i(X)$ . Alors l'application

$$\mathcal{L}(E) \rightarrow \text{End}(A^{p, \cdot}(E))$$

définie par

$$L \rightarrow \underline{L} - [i''(X), d'']$$

est  $\mathbb{C}$ -linéaire et l'on a

$$H^{p, q}(\underline{L}) = H^{p, q}(\underline{L} - [i''(X), d''])$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 4.

Exemple. Supposons  $M$  compacte Kählérienne et  $E = M \times \mathbb{C}$ .

Alors  $\mathcal{G}(E) = \mathbb{C}^* \times \text{Diff } M$  et  $\mathcal{L}(E) = \mathbb{C} \times \mathcal{C}(M)$ . La dérivée en  $1_E$  du morphisme  $\mathcal{G}(E) \rightarrow \text{GL}(H^{p, q}(M, \mathbb{C}))$  est donnée par

$$(\lambda, X) \rightarrow \theta(X) + \lambda$$

Chaque classe  $[\omega] \in H^{p, q}(M, \mathbb{C})$  admet un représentant  $\omega$  harmonique.  $\theta(X)\omega = di(X)\omega$  est alors de partie harmonique nulle. La dérivée précédente est donc :

$$(\lambda, X) \rightarrow ([\omega] \rightarrow \lambda[\omega])$$

Il en résulte que le morphisme :  $\text{Diff } M \rightarrow \text{GL}(H^{p, q}(M, \mathbb{C}))$

$$\beta \rightarrow H^{p, q}((1, \beta)^*)$$

est de dérivée nulle et donc localement constant. Ceci peut se voir aussi [5] en

utilisant l'isomorphisme :  $\bigoplus_{p+q=r} H^{p, q}(M, \mathbb{C}) = H^r(M, \mathbb{C})$  et l'homotopie.

## 2. LA SUITE SPECTRALE

2.1 Notations

Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \Pi \\ & & S \end{array}$$

où  $\Pi$  désigne un fibré en variétés complexes compactes et  $E$  un fibré vectoriel holomorphe sur  $X$ . Posons pour  $s \in S$ ,  $X_s = \Pi^{-1}(s)$ ,  $E_s = E|_{X_s}$ . Nous ferons l'hypothèse que la famille  $(E_s)_{s \in S}$  est localement triviale c'est-à-dire :

Pour tout  $s \in S$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $s$  et un isomorphisme de fibrés :

$$E|_{\Pi^{-1}(U)} \longrightarrow U \times E_s$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E|_{\Pi^{-1}(U)} & \longrightarrow & U \times E_s \\ & \searrow & \swarrow \\ & & U \end{array}$$

Exemple. Avec les notations du § 0, 2, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & P(E) \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

vérifie la condition de locale trivialité.

2.2 Cohomologie relative

Considérons la famille d'espaces vectoriels :

$$H^{p,q}(E) = \bigcup_{s \in S} H^{p,q}(E_s)$$

Il résulte de l'hypothèse de locale trivialité et des considérations du § 1 que  $H^{p,q}(E)$  peut être muni d'une structure naturelle de fibré vectoriel holomorphe au-dessus de  $S$ .

Considérons d'autre part la cohomologie relative de type  $(p,q)$  à valeurs dans  $E$ . Celle-ci peut être définie de la manière suivante : soit  $\mathcal{A}^{p,q}(E)$  l'espace des formes de type  $(p,q)$  sur  $X$  verticales et à valeurs dans  $E$  : c'est l'espace

des sections  $\tilde{C}$  du fibré :

$$\Lambda^p \mathcal{C}^* \otimes \Lambda^q \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes E$$

où  $\mathcal{C}$  est le fibré tangent vertical sur  $X$ .

On définit de manière évidente une différentielle verticale :

$$d'' : \mathcal{H}^{p,q}(E) \rightarrow \mathcal{H}^{p,q+1}(E)$$

vérifiant  $d''^2 = 0$ , ce qui nous donne un complexe  $\mathcal{H}^{p,\bullet}(E)$  dont les groupes de cohomologie sont appelés groupes de cohomologie relative à valeurs dans  $E$ , et notés  $\mathcal{H}^{p,q}(E)$ .

Ce sont des  $C^\infty(S)$ -modules. La proposition suivante donne la relation qui existe entre  $\mathcal{H}^{p,q}(E)$  et  $H^{p,q}(E)$ .

PROPOSITION 5. On a des isomorphismes canoniques :

$$A^{r,s}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p,q}(E) \simeq A^{r,s}(S, H^{p,q}(E))$$

### 2.3. Relations entre $H^{p,q}(E)$ et la cohomologie de $S$ à valeurs dans $H^{p,q}(E)$

Le but de ce paragraphe est de donner une généralisation de la suite spectrale de [5].

PROPOSITION 6. Dans les notations du § 2.1 il existe pour chaque entier  $p$  une suite spectrale dont le terme  $E_2^{r,t}$  est donné par

$$E_2^{r,t} = \bigoplus_i H^{i,r-i}(S, H^{p-i,t+i}(E))$$

et qui a pour aboutissement, en degré  $q$ ,  $H^{p,q}(E)$ .

Démonstration. Considérons la filtration de  $A^{p,q}(E)$  obtenue de la manière suivante

$F^r(A^{p,q}(E))$  est le sous-espace de  $A^{p,q}(E)$  engendré par les formes différentielles s'écrivant

$$\sum_i \Pi^*(u_i) v_i$$

où  $u_i \in A^{i,r-i}(S)$ ,  $v_i \in A^{p-i,q-r+i}(E)$ .

Cette filtration est décroissante, et le gradué associé s'écrit :

$$gr^r(A^{p,q}(E)) = \bigoplus_i A^{i,r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p-i,q-r+i}(E)$$

Cette filtration est compatible avec la différentielle  $d''$  : on peut donc écrire en tant que complexes :

$$\text{gr}^r(A^{p, \cdot}(E)) = \bigoplus_i A^{i, r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p-i, \cdot -r+i}(E)$$

Le théorème de la suite spectrale d'un complexe filtré [5] nous dit qu'il existe une suite spectrale d'aboutissement en degré  $q$ ,  $H^{p, q}(E)$ , et dont le terme  $E_1$  est donné par :

$$E_1^{r, t} = H^{r+t}(\text{gr}^r(A^{p, \cdot}(E)))$$

On a donc

$$E_1^{r, t} = \bigoplus_i H^{r+t} \left( A^{i, r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p-i, \cdot -r+i}(E) \right)$$

Or, le  $C^\infty(S)$ -module  $A^{i, r-i}(S)$  étant projectif [6], le foncteur

$$A^{i, r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \cdot$$

est exact. On a donc :

$$E_1^{r, t} \simeq \bigoplus_i A^{i, r-i}(S) \otimes_{C^\infty(S)} \mathcal{H}^{p-i, t+i}(E)$$

et d'après la proposition 5 :

$$E_1^{r, t} \simeq \bigoplus_i A^{i, r-i}(S, H^{p-i, t+i}(E))$$

Pour calculer  $E_2^{r, t}$ , il faut expliciter le morphisme  $d_1^{r, t}$ . On peut montrer qu'il est donné, sur chaque facteur de la somme directe précédente, par la différentielle  $d''$  associée au fibré vectoriel holomorphe  $H^{p-i, t+i}(E)$ . Il en résulte :

$$E_2^{r, t} = \bigoplus_i H^{i, r-i}(S, H^{p-i, t+i}(E))$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 6.

### 3. Démonstration du théorème 2

Reprenons la situation décrite au § 0.2 :

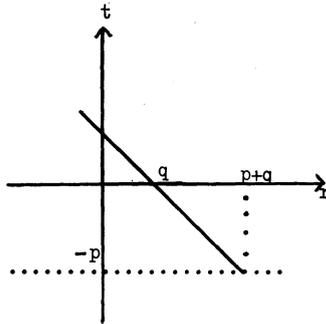
$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & P(E) \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

et appliquons-lui la suite spectrale de la proposition 6. Il résulte de ce qui a été dit au § 0.1, (Exemple a)), que l'on a

$$\begin{cases} H^{0, 0}(Q) \simeq E \\ H^{p, q}(Q) = 0 \quad \text{si } (p, q) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Ainsi, pour le terme  $E_2^{r,t}$  de la suite spectrale relative à l'entier  $p$  :

$$E_2^{r,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq -p \\ H^{p,r-p}(M,E) & \text{si } t = -p \end{cases}$$



On voit donc que sur la diagonale  $r+t = q$ , le seul terme non nul correspond à  $r = p+q$ ,  $t = -p$ , et on a alors :

$$E_2^{r,t} = H^{p,q}(M,E)$$

Il en résulte que morphisme canonique

$$E_2^{p+q,-p} = H^{p,q}(M,E) \rightarrow H^{p,q}(P(E),Q)$$

est un isomorphisme, ce qui démontre le théorème 2.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOTT (R.) . - Homogeneous vector bundles, Ann. Math., 66 (1957), 203-248.
- [2] BOTT (R.) and CHERN (S.S) . - Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Math. 114 (1966), 71-112.
- [3] GODEMENT (R.) . - Topologie Algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris (1964).
- [4] GRIFFITHS (P.A.) . - Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global Analysis (Paper in honor of K. Kodaira), Princeton U. Press (1970).
- [5] HIRZEBRUCH (F.) . - Topological methods in algebraic geometry, Springer (1966) (Appendice by A. Borel : A spectral sequence for complex analytic bundles).
- [6] HUSEMOLLER (D.) . - Fibre bundles, Mc Graw-Hill Book Company (1966).
- [7] MORROW (J.) and KODAIRA (K.) . - Complex Manifolds, Holt, Rinehart and Winston Inc., New-York (1971).

(Texte reçu le 24/XI/1972

Dépt. de Mathématiques  
Université de Poitiers  
40, Avenue du Recteur Pineau  
86022 POITIERS

---