JEAN-PAUL BRASSELET

Une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 99-106
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__99_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 99-106.

UNE GENERALISATION DE LA FORMULE DE RIEMANN-HURWITZ.

par Jean-Paul BRASSELET

Soient X et Y deux variétés analytiques complexes et f une application holomorphe de X dans Y . L'étude des relations existant entre les invariants des variétés X et Y et ceux de l'application f a fait l'objet d'un article de Chern [3] : certaines de ces relations sont obtenues comme généralisation de la formule de Plücker (par exemple, Pohl [5]), d'autres par application du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (entre autres, Porteous [6]), une troisième méthode, développée par M.H. Schwartz [7], consiste à utiliser le cadre de la théorie de l'obstruction. Cette dernière méthode permet d'obtenir une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz dans les hypothèses suivantes :

Les variétés X et Y sont de dimensions complexes respectives n et $n+\nu$ $(\nu > 0)$, X' est une sous-variété analytique complexe de X de codimension 1 et $f : X \to Y$ une application holomorphe telle que les restrictions de f à X' et à $X-X'$ soient des immersions.

On note TX et TY les fibrés tangents à X et Y , f^*TY le fibré image réciproque de TY et $g : TX \to f^*TY$ le morphisme induit par l'application linéaire tangente de f .

Il existe alors un unique sous-fibré E de f^*TY , de rang n et tel que $g(TX) \subset E$ [5]. On donne au paragraphe 4 (formule IV), une relation entre les classes de Chern des fibrés E , TX et TX' et l'ordre de multiplicité de f le long de X' , (voir définition au § 4). Ceci permet d'énoncer un théorème de non existence d'applications satisfaisant aux hypothèses précédentes.

On trouvera dans [2] les démonstrations détaillées des principaux résultats des paragraphes 4 et 5.

I - Formule de Riemann-Hurwitz.

1.1. Soient X et Y deux surfaces de Riemann (variétés analytiques complexes de dimension un). Si X est compacte, et si $f : X \to Y$ est une application holomorphe non constante, f admet un nombre fini de points singuliers $\{a_i\}$ avec degré topologique local $m(a_i)$ [voir ci-dessous].

La formule de Riemann-Hurwitz peut s'énoncer comme suit :

Les classes de Chern des fibrés TX , TY et f*TY satisfont à la relation :

(I) $$c_1(f^*TY) = f^*c_1(TY) = c_1(TX) + \sum_i (m(a_i)-1)[X]$$

où $[X]$ désigne la classe fondamentale de cohomologie de X .

1.2. <u>Définition du degré topologique local</u> : Pour des coordonnées locales z et ζ définies au voisinage des points a_i et $f(a_i)$ respectivement et nulles en ces points, le degré topologique local de f au point a_i est l'entier $m(a_i)$ tel que :

$$\zeta = f(z) = z^{m(a_i)}\, h(z) \qquad \text{avec} \qquad h(0) \neq 0 \ .$$

II - <u>Première généralisation</u> [1].

2.1. X est une surface de Riemann compacte et Y une variété analytique complexe de dimension $\nu+1$. Soit f une application holomorphe non constante de X dans Y , elle admet donc un nombre fini de points singuliers $\{a_i\}$.

On note $g : TX \to f^*TY$ l'application induite par l'application linéaire tangente $Tf : TX \to TY$. Il existe un sous-fibré holomorphe E , de rang un, de f^*TY et tel que $g(TX) \subset E$, il est unique à isomorphisme près.

2.2. <u>Le degré topologique local</u> est classiquement défini comme suit :

Soient z (resp. $\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu+1}$) des coordonnées locales définies au voisinage du point x (resp. $f(x)$) et nulles en x (resp. $f(x)$). On a :

$$\zeta_j = f_j(z) = z^{m_j}\, h_j(z) \quad \text{avec} \quad h_j(0) \neq 0 \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,\nu+1$$

On appelle degré topologique local de f en x , l'entier

$$m(x) = \inf_j m_j \ .$$

2.3. Dans ces conditions, on peut énoncer :

THEOREME. <u>Les classes de Chern des fibrés</u> E <u>et</u> TX <u>sont liées par la relation</u> :

(II) $$c_1(E) = c_1(TX) + \sum_i (m(a_i)-1)\,[X] \ .$$

La méthode de démonstration est voisine de celle de la formule de Riemann-Hurwitz (cf. [1]).

COROLLAIRE. <u>Si</u> N <u>désigne un supplémentaire holomorphe de</u> E <u>dans</u> f^*TY , <u>on a</u> :

$$c_1(f^*TY) = f^*c_1(TY) = c_1(TX) + c_1(N) + \sum_i (m(a_i)-1)\,[X] \ .$$

III - Deuxième généralisation [7].

3.1. On étudie maintenant le cas où X et Y ont même dimension complexe n et on suppose qu'il existe une sous-variété analytique complexe connexe X' de X telle que les restrictions de f à X' et à $X-X'$ soient des immersions.

Ces hypothèses impliquent entre autres que f est discrète.

3.2. Le degré topologique local de f en un point x est défini de la manière suivante :

Soient U et U' des ouverts, domaines de définition de cartes locales d'origines x et $f(x)$ dans X et Y respectivement.

On note B une boule ouverte de U, centrée en x, et assez petite pour que : $f(B) \subset B'$ (où B' est une boule de U' centrée en $f(x)$) et que : $B \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Le $(2n-1)$-ème groupe d'homologie entière de $B-\{x\}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$. L'indice de tout cycle de $B-\{x\}$ de dimension réelle $2n-1$ est donc bien défini. Soit s un tel cycle d'indice $+1$. (Par exemple, le bord orienté d'une 2n-boule). On appelle degré topologique local de f en x et on note $m(x)$ l'indice du cycle $f(s)$ dans $H_{2n-1}(B'-f(x))$. Celui-ci est indépendant du choix de B, B' et s, de plus :

PROPOSITION. Le degré $m(x)$ est constant le long de X', on le note m. [8].

3.3. Pour la cohomologie des formes différentielles, on a alors :

THEOREME. (M.H. Schwartz [7]) : Les classes de Chern des fibrés TX, TX' et TY sont liées par la relation :

$$\text{(III)} \qquad c_p(f^*TY) = f^*c_p(TY) = c_p(TX) + (m-1)\,\mu^*c_{p-1}(TX') \quad p = 1,\dots,n$$

où μ^* est le morphisme composé de l'isomorphisme de Thom-Gysin

$$H^{2(p-1)}(X') \to H^{2p}(X, X-X')$$

et de l'homomorphisme canonique $H^{2p}(X,X-X') \to H^{2p}(X)$. Dans le cas compact, μ^* coïncide avec le morphisme déduit de l'injection $i : X' \hookrightarrow X$ par commutativité du diagramme suivant (où les flèches verticales sont des isomorphismes de dualité de Poincaré) :

$$\begin{tikzcd}
H_{2(n-p)}(X') \arrow[r, "i_*"] & H_{2(n-p)}(X) \\
H^{2(p-1)}(X) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\mu^*"'] & H^{2p}(X) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

3.4. Méthode de démonstration [7].

1°) On désigne par $T_r(X)$ le fibré associé à TX et de fibre type l'espace F_r des r-repères de $\mathbb{C}^n$, (espace fibré des r-repères tangents à X). La dimension réelle d'obstruction à la construction d'une section de $T_r(X)$ est $2p$, avec $p = n-r+1$ ($H_k(F_r) = 0$ si $k < 2p-1$ et $H_{2p-1}(F_r) \cong \mathbb{Z}$).

Pour toute triangulation (D) de X on peut donc faire la construction suivante : on se donne une section Z_{r-1} de $T_{r-1}(X)$ au-dessus du 2p-squelette de (D) noté $(D)^{2p}$, puis une section $Z_r = (Z_{r-1}, X_r)$ de $T_r(X)$ au-dessus de $(D)^{2p-1}$. Le champ de r-repères Z_r peut être étendu au-dessus de $(D)^{2p}$ avec des points singuliers isolés $\{a_i\}$. En ces points, le dernier vecteur X_r de Z_r n'est pas défini, mais on peut demander que le comportement du champ au voisinage de a_i soit le suivant : il existe une 2p-boule b_i, de bord $\dot{b}_i$ et ne contenant que le point a_i comme singularité de Z_r, le relèvement de $b_i - \{a_i\}$ dans $T_r(X)$ défini par Z_r est une 2p-sous-variété à bord formé de $Z_r(\dot{b}_i)$ et d'une sous-variété située dans la fibre au-dessus de a_i. Cette sous-variété est un $(2p-1)$-cycle γ_i. L'indice du champ Z_r en son point singulier a_i (noté $I(Z_r, a_i)$), est par définition l'entier correspondant à la classe de γ_i dans $H_{2p-1}\left(T_r(X)\big|_{a_i}\right)$.

2°) La classe de Chern $c_p(TX)$ mesure l'obstruction à la construction d'un tel champ de r-repères Z_r, section de $T_r(X)$. Par hypothèse, les restrictions de f à X' et à X-X' sont des immersions, pour que l'image de Z_r par Tf permette de calculer $c_p(f^*TY)$, c'est-à-dire n'ait pas d'autres singularités que les images des points singuliers de Z_r, il faut donc que Z_r soit tangent à X' le long de X'. Comme la dimension réelle d'obstruction à la construction d'une section de $T_r(X')$ est $2(p-1)$, nous sommes amenés à la construction suivante :

On considère une triangulation simpliciale (K) de X compatible avec la stratification (X',X-X') de X et (D) une triangulation cellulaire duale construite à l'aide d'une subdivision barycentrique (Δ) de (K). L'intersection de X' avec une 2p-cellule de (D) est un $2(p-1)$-complexe de (Δ).

On construit d'abord Z_r le long de $(D)^{2p} \cap X'$ avec des points singuliers $\{a_i\}_{i \in I}$ (voir ci-dessus) puis on l'étend par une méthode de prolongement radial dans tout $(D)^{2p}$ avec de nouveaux points singuliers $\{a_i\}_{i\in J}$ [7, § 2].

$g : TX \to f^*TY$ étant l'application définie en introduction, on a alors [8, § 15] :

$$I(g(Z_r), a_i) = I(Tf(Z_r), f(a_i)) = I(Z_r, a_i) \qquad \text{si } a_i \in X-X'$$

$$I(g(Z_r),a_i) = I(Tf(Z_r),f(a_i)) = m.I(Z_r,a_i) \qquad \text{si } a_i \in X' \ .$$

3°) Considérons les formes différentielles suivantes (définies par Chern) :

Ω_r^o est la 2p-forme différentielle définie sur Y et telle que

a) Ω_r^o appartient à la classe obstructrice de $T_r(Y)$ pour la cohomologie des formes différentielles complexes.

b) Soit π la projection de T_rY sur sa base, la 2p-forme différentielle $\Omega_r = \pi^*\Omega_r^o$ définie sur $T_r(Y)$ est exacte, on a $\Omega_r = -d\Pi_r$ et la restriction de Π_r à toute fibre appartient à la classe fondamentale.

Les formes transposées $f^*\Pi_r$ et $f^*\Omega_r$ sont définies sur l'espace pseudo-fibré $T_r'(X)$ des r-repères tangents à X' (resp. $X-X'$) le long de X' (resp. $X-X'$). Soit D_α une 2p-cellule de (D) , pour tout point a_i , point singulier de Z_r dans D_α , on note encore b_i une 2p-boule de D_α et ne contenant que le point a_i comme singularité de Z_r . La formule (III) s'obtient en écrivant la formule de Stokes pour les formes $f^*\Pi_r$ et $f^*\Omega_r$ et pour le relèvement par Z_r de $D_\alpha - \bigcup_i b_i$ [7, p. 418].

IV - Cas général [2].

4.1. On se place maintenant dans le cas où la dimension complexe de Y, $(n+\nu)$ est supérieure à celle de X , (n) . Soit X' une sous-variété analytique complexe connexe de X de dimension $n-1$ et $f : X \to Y$ une application holomorphe telle que les restrictions de f à X' et à $X-X'$ soient des immersions.

PROPOSITION [5]. Il existe un sous-fibré holomorphe E de rang n de f^*TY tel que $g(TX) \subset E$. E est déterminé de façon unique, on le munit du morphisme holomorphe $\Phi : TX \to E$ induit par g .

THEOREME. Les classes de Chern de TX , TX' et E sont liées par la relation :

$$\text{(IV)} \qquad c_p(E) = c_p(TX) + (m-1)\,\mu^*c_{p-1}(TX') \qquad p = 1,\ldots,n$$

où m est défini ci-dessous (4.3) et μ^* est le morphisme défini en 3.2.

4.2. Avant de définir l'ordre de multiplicité locale, on démontre une propriété du cône tangent :

L'application f est discrète, donc localement propre : pour tout point x de X il existe un couple (U,U') de voisinages de x et $f(x)$ respectivement tels que la restriction de f à U soit une application propre dans U' . (Par la suite, on supposera U et U' inclus dans des domaines de définition de cartes locales de X et Y respectivement et on les identifiera à des ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n+\nu}$).

D'après le théorème de Remmert, $f(U)$ est un sous-ensemble analytique de U' . En tout point $\xi = f(x)$ de $f(U)$ le <u>cône tangent</u> $C(f(U),f(x))$, noté $C(\xi)$, est défini comme l'ensemble des vecteurs limites de $\lambda_i(\xi_i-\xi)$ où $\{\xi_i\}$ est une suite de points de $f(U)$ tendant vers $\xi = f(x)$ et $\{\lambda_i\}$ une suite de nombres complexes [9].

Le cône tangent $C(\xi)$ est un ensemble analytique complexe de dimension n [9]. De plus :

PROPRIETE. <u>L'ensemble des ν-plans complexes de $\mathbb{C}^{n+\nu}$ tels que</u> $C(\xi) \cap Q = \{\xi\}$ <u>est non vide et son image canonique dans la grassmannienne des ν-plans complexes de $\mathbb{C}^{n+\nu}$ est connexe par arcs</u>. (*).

<u>Principe de démonstration</u> :

La première assertion a été démontrée par Whitney [9]. On donne ici le principe d'une démonstration de la seconde : l'espace vectoriel tangent à Y en ξ étant identifié à $\mathbb{C}^{n+\nu}$, on note $C^*(\xi)$ l'image canonique de $C(\xi)$ dans l'espace projectif complexe $P(\mathbb{C}^{n+\nu})$.

Le résultat est évident si $\nu = 1$. En effet $C^*(\xi)$ est un sous-ensemble analytique complexe de codimension 1 de $P(\mathbb{C}^{n+\nu})$ [9].

Sinon, pour toute droite Δ du cône, l'ensemble des ν-plans complexes qui contiennent Δ est isomorphe à $G^n_{\nu-1}$ (grassmannienne des $(\nu-1)$-plans complexes de $\mathbb{C}^{n+\nu-1}$) . Si $V^*_j (j=1,\dots,n+\nu)$ désigne l'image dans $P(\mathbb{C}^{n+\nu})$ des droites du cône non orthogonales au j-ème axe de coordonnées de $\mathbb{C}^{n+\nu}$, on construit une application holomorphe $k_j : V^*_j \times G^n_{\nu-1} \to G^n_\nu$ dont l'image est l'ensemble des ν-plans complexes contenant une droite de V^*_j . Comme $C^*(\xi) \times G^n_{\nu-1}$ (recouvert par les $V^*_j \times G^n_{\nu-1}$) est un ensemble analytique complexe de dimension $n\nu-1$, que G^n_ν est un espace de Baire et que les k_j sont holomorphes, on démontre que la réunion des $k_j \ (V^*_j \times G^n_{\nu-1})$ est de complémentaire connexe dans G^n_ν .

4.3. <u>Ordre de multiplicité locale</u> m .

Soit comme précédemment (3.2.), B une 2n-boule de U centrée en x et telle que :

(i) $f(B) \subset B'$ (où B' est une $2(n+\nu)$-boule ouverte de U').

(*) Mme M.H. Schwartz m'a fait remarquer qu'elle est également dense et connexe dans la grassmannienne. Nous ne nous en servirons pas ici.

(ii) $B \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.

Si s est un $(2n-1)$-cycle de $B-\{x\}$ d'indice $+1$, $f(s)$ est un $(2n-1)$-cycle de $B'-\{f(x)\}$. On peut construire s dans une boule assez petite pour que $f(s)$ soit dans $\mathbb{C}^{n+\nu}-Q$. Cet espace admet pour rétract $\mathbb{C}^{n}-\{0\}$ et son $(2n-1)$-ème groupe d'homologie entière est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$. L'indice de $f(s)$ dans $H_{2n-1}(\mathbb{C}^{n+\nu}-Q)$ est alors bien défini, on le note $m_Q(x)$. Il ne dépend pas du choix de B,B' et s . A l'aide de la propriété précédente du cône tangent (4.2.), on démontre la :

PROPOSITION. $m_Q(x)$ <u>ne dépend pas de</u> Q <u>tel que</u> $C(\xi) \cap Q = \{\xi\}$.

DEFINITION. <u>On appelle ordre de multiplicité locale de</u> f <u>au point</u> x <u>, et on note</u> $m(x)$ <u>l'entier</u> $m_Q(x)$ <u>correspondant à un ν-plan complexe</u> Q <u>tel que</u> $C(\xi) \cap Q = \{\xi\}$.

PROPOSITION. <u>Il existe un sous-ensemble analytique complexe strict</u> A <u>de</u> V' <u>tel que l'ordre de multiplicité locale de</u> f <u>soit constant le long de</u> $X'-A$. <u>On le note alors</u> m .

Ce résultat se démontre à l'aide d'un théorème de K. Kending [4] affirmant que tout ensemble analytique complexe de dimension n admet une stratification telle que tout point d'une $(n-1)$-strate possède un voisinage fibré semi-analytiquement. Ceci assure en quelque sorte une continuité du cône tangent le long de $X'-A$.

4.4. La formule (IV) s'obtient alors par une démonstration semblable à celle de M.H. Schwartz et à l'aide de lemmes destinés à prouver que celle-ci, faite pour le triplet (TX, f^*TY, g) , reste vraie pour le triplet (TX, E, ϕ).

V - <u>Remarques finales</u>.

5.1. Un résultat identique pour X' non connexe s'écrit sans difficulté.

5.2. Le fait que X' soit de codimension 1 est important pour deux raisons :

(i) Le fibré E n'existe que si X' est de dimension $n-1$ [5].

(ii) Le résultat de Kending [4] n'est, à l'heure actuelle, démontré que pour les strates de codimension 1.

5.3. <u>Théorème de non-existence</u>.

Supposons donnés une variété analytique complexe X de dimension n , une sous-variété analytique complexe X' de X connexe et de codimension 1 et un entier positif m . On peut calculer

$$c(TX) + (m-1)\, \mu^* c(TX') .$$

Le terme de degré 0 de cette expression est 1 et son degré maximum est 2n , l'application λ qui à toute classe de Chern fait correspondre le caractère de Chern correspondant s'étend à cet élément et on peut calculer :

$$k(X,X',m) = ch^{-1}\, \lambda(c(TX) + (m-1)\, \mu^* c(TX'))$$

où ch est l'isomorphisme "caractère de Chern".

THEOREME. Si $k(X,X',m)$ n'est pas élément positif de $K(X)\otimes R$, c'est-à-dire ne correspond à aucun fibré, il n'existe pas de triple (Y,f,A) satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Y est une variété analytique complexe de dimension supérieure ou égale à n .

(ii) f est une application holomorphe de X dans Y dont les restrictions à X' et à X-X' sont des immersions.

(iii) A est un sous-ensemble analytique strict de X' tel que l'ordre de multiplicité de f soit égal à m le long de X'-A .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRASSELET (J.P.) . - Compte-rendu, 269, Série A, 900-903, (1969).

[2] BRASSELET (J.P.) . - Bull. Soc. Math. Belgique, XXV, 1, 25-52 (1973).

[3] CHERN (S.S.) . - L'enseignement mathématique 7, (1961).

[4] KENDINÇ (K.) . - Pacific Journal of Math., 34, n°2 (1970).

[5] POHL (W.F.) . - Proc. of the conference on complex analysis, Minneapolis (1964).

[6] PORTEOUS (I.R.) . - Proc. Cambridge Phil. Soc. 56, part. 2 (1960).

[7] SCHWARTZ (M.H.) . - Bull. Soc. Math. Belgique, 19, fasc. 4 (1967).

[8] SCHWARTZ (M.H.) . - Acta Mathematica, 91 (1954).

[9] WHITNEY (H.) . - Ann. of Math, 81, (1965).

Texte reçu le 30/VI/1972, révisé le 14/XI/1972

Département de Mathématiques
Université de Lille I

59 VILLENEUVE D'ASCQ