BOHUMIL CENKL
GIULIANO SORANI

Sur l'opérateur $\partial\bar{\partial}$

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 79-88
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__79_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers].
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 79-88.

SUR L'OPERATEUR $\partial\bar{\partial}$ (1), (2)

par Bohumil ČENKL et Giuliano SORANI

I - Ce que je dirai dans cet exposé a été l'objet d'un travail en collaboration avec B. Čenkl. La partie 2 a déjà été publiée en [7] tandis que la partie 3 parait ici pour la première fois.

Soit M une variété complexe, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. On considère sur M l'opérateur différentiel complexe $\partial\bar{\partial}$ et l'opérateur différentiel réel dd^c où $d^c = \sqrt{-1}(\bar{\partial}-\partial)$. Des groupes de cohomologie de M, liés à ces opérateurs, ont déjà été considérés par J. Frenkel et F. Norguet [8], A. Aeppli [1], A. Andreotti et F. Norguet [2], B. Bigolin [3] et il y a plusieurs relations entre ces groupes et les groupes de cohomologie de M à coefficients complexes.

Soit $\underline{A}^{p,q}$ le faisceau des germes des formes différentielles C^{∞}, à valeurs complexes, de type (p,q) sur M et soit $\underline{A}_{\mathbb{R}}^{p,q} = \{\alpha=\alpha_1 + \alpha_2 \in \underline{A}^{p,q} \oplus \underline{A}^{q,p} | \alpha_2=\bar{\alpha}_1\}$ le faisceau des formes différentielles réelles. Les opérateurs $\partial\bar{\partial}$ et dd^c sont des applications

$$\partial\bar{\partial} : \underline{A}^{p,q} \to \underline{A}^{p+1,q+1}$$
$$dd^c : \underline{A}_{\mathbb{R}}^{p,q} \to \underline{A}_{\mathbb{R}}^{p+1,q+1}$$

et, pour tout $p,q \geqslant 0$, on a deux suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{P}^{p,q} \longrightarrow \underline{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \underline{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \underline{A}^{p+2,q+1} \oplus \underline{A}^{p+1,q+2}$$

$$0 \longrightarrow \underline{P}_{\mathbb{R}}^{p,q} \longrightarrow \underline{A}_{\mathbb{R}}^{p,q} \xrightarrow{dd^c} \underline{A}_{\mathbb{R}}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \underline{A}_{\mathbb{R}}^{p+2,q+1} \oplus \underline{A}_{\mathbb{R}}^{p+1,q+2}$$

qui définissent les faisceaux $\underline{P}^{p,q}$ et $\underline{P}_{\mathbb{R}}^{p,q}$. De façon naturelle on a les groupes

$$\Lambda_{C}^{p,q} = \text{Ker } d \text{ en } \Gamma(M,\underline{A}^{p,q})/\partial\bar{\partial}\Gamma(M,\underline{A}^{p-1,q-1})$$

et

$$\Lambda_{R}^{p,q} = \text{Ker } d \text{ en } \Gamma(M,\underline{A}_{\mathbb{R}}^{p,q})/dd^c\Gamma(M,\underline{A}_{\mathbb{R}}^{p-1,q-1}) \quad .$$

(1) Exposé par G. Sorani

(2) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni.

Les groupes $\Lambda_R^{p,q}$ sont très importants car, pour $p = q$, ils contiennent les classes de Chern raffinées des fibrés vectoriels holomorphes sur M [4].

Les groupes $\Lambda_C^{p,q}$ sont liés aux groupes de cohomologie de Aeppli qui sont définis comme

$$V_C^{p,q} = \operatorname{Ker} \partial\bar\partial \text{ en } \Gamma(M,\underline{A}^{p,q})/\partial\Gamma(M,\underline{A}^{p-1,q}) + \bar\partial\Gamma(M,\underline{A}^{p,q-1})$$

et, sous certaines hypothèses, aux groupes de la cohomologie ordinaire $H^*(M,C)$.

En effet, au moyen de la théorie des faisceaux et de certaines propriétés de la cohomologie on a les résultats suivants :

THEOREME 1. [3] <u>Si M est une variété de Stein on a</u>

$$V_C^{p,q} \simeq H^{p+q+1}(M,C) \quad ,$$

$$\Lambda_C^{p,q} \simeq H^{p+q}(M,C) \quad .$$

THEOREME 2. [3] <u>Si M est une variété kählérienne compacte on a</u>

$$V_C^{p,q} \simeq H^q(M,\Omega^p) \simeq H^{p,q}(M,\mathcal{O}) \quad ,$$

$$\Lambda_C^{p,q} \simeq H^q(M,\Omega^p) \simeq H^{p,q}(M,\mathcal{O}) \quad .$$

Il y a d'autres résultats sur la finitude des groupes $\Lambda_C^{p,q}$ et $V_C^{p,q}$ pour les variétés compactes et pour les variétés fortement k-pseudoconvexes qu'on peut trouver aussi dans [3].

Pour obtenir des résultats plus généraux, c'est-à-dire valables si M est une variété ouverte mais non Stein ou si M est une variété compacte mais non kählérienne, nous avons construit la résolution de Spencer des faisceaux $\underline{P}^{p,q}$ et $\underline{P}_R^{p,q}$ et cherché à calculer directement la cohomologie de M à valeurs dans ces faisceaux. Il faut remarquer que, dans les deux cas, il suffit de calculer le premier groupe de cohomologie $H^1(M,-)$ et que l'on a $H^1(M,\underline{P}^{p,q}) \simeq \Lambda_C^{p+1,q+1}$.

Nous utilisons la théorie des espaces d'Hilbert et la technique de Hörmander appliquée aux résolutions de Spencer des faisceaux $\underline{P}^{p,q}$ et $\underline{P}_R^{p,q}$. Dans cet exposé je considère seulement la résolution du faisceau $\underline{P}_R^{p,q}$; on peut obtenir l'autre en laissant tomber des conditions purement algébriques.

Tout d'abord quelques rappels de la théorie générale des opérateurs différentiels linéaires. Pour tout fibré vectoriel E sur M on note par $J_k(E)$ le fibré vectoriel des jets d'ordre k des sections différentiables (C^∞) de E . C'est-à-dire en tout point $x \in M$ on identifie deux sections différentiables de E si leurs séries de Taylor coïncident jusqu'à l'ordre k. Une classe d'équivalence est appelée un jet d'ordre k et on note par $J_k(E)_x$ l'espace vectoriel de ces classes d'équivalence. Alors $J_k(E) = \bigcup_{x\in M} J_k(E)_x$.

Au niveau des faisceaux des germes des sections il y a une application canonique

$$j_k : \underline{E} \to \underline{J_k(E)} \quad ,$$

qui à toute section s de E et point $x \in M$ fait correspondre le jet d'ordre k de s en x. Il y a une projection naturelle

$$p_k : J_k(E) \to J_{k-1}(E)$$

et

$$\operatorname{Ker} p_k \simeq E \otimes S^k(T^*)$$

où S^k dénote le k-ième produit symétrique du fibré cotangent $T^* = T^*(M)$. D'où une suite exacte

$$0 \to E \otimes S^k(T^*) \to J_k(E) \to J_{k-1}(E) \to 0 \quad .$$

Il s'ensuit l'existence d'un opérateur différentiel d'ordre un

$$D : J_k(E) \otimes \Lambda^r T^* \to J_{k-1}(E) \otimes \Lambda^{r+1} T^*$$

avec la propriété que la suite

$$\underline{E} \to \underline{J_k(E)} \to \underline{J_{k-1}(E) \otimes T^*}$$

est toujours exacte. Si σ est une section de $J_k(E) \otimes \Lambda^r T^*$ on a

$$D\sigma = dp_k\sigma - \delta\sigma$$

où δ est le différentiel formel défini de la manière suivante : sur un ouvert U de M, où $x^1,\dots,x^n$ sont des coordonnées locales, soit $\sigma = \{\sigma_\alpha \mid |\alpha| \leq k\}$, où $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\sigma_\alpha = \{\sigma_\alpha^j \mid 1 \leqslant j \leqslant m = \dim E\}$ et

$$\sigma_\alpha^j = (1/r!)\Sigma\sigma^j_{\alpha i_1\dots i_r}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad ;$$

alors

$$(\delta\sigma)_\alpha = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge \sigma_{\alpha+1_j}$$

où $\alpha+1_j = (\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\alpha_j + 1,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n)$. On a $D^2 = 0$.

Maintenant soient E, F deux fibrés vectoriels sur M. Un opérateur différentiel linéaire d'ordre k, P, est une application de faisceaux $P : \underline{E} \to \underline{F}$ qui se factorise à travers $\underline{J_k(E)}$ dans le sens qu'il existe un unique morphisme de fibrés vectoriels $f : \overline{J_k(E) \to F}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{J_k(E)} \arrow[dr, "f"] & \\ \underline{E} \arrow[u, "j_k"] \arrow[r, "P"] & \underline{F} \end{tikzcd}$$

commute.

Pour tout opérateur différentiel $P : \underline{E} \to \underline{F}$ On appelle <u>prolongement</u> d'ordre 1 de P la composition

$$\underline{E} \xrightarrow{P} \underline{F} \xrightarrow{j_1} \underline{J_1(F)}$$

Un système d'équations à dérivées partielles d'ordre k induit par P sur M est le noyau R_k du morphisme f

(I,I)
$$0 \to R_k \to J_k(E) \to F$$

(R_k doit être un sous-fibré de $J_k(E)$). Une solution de R_k sur un ouvert $U \subset M$ est une section u de E telle que $j_k(u)$ est une section de R_k sur U .

La projection p_k induit une projection

$$R_k \to R_{k-1} \to 0$$

qu'on appelle aussi p_k ; soit g_k son noyau. On a donc une suite exacte

(I,2)
$$0 \to g_k \to R_k \to R_{k-1} \to 0 \quad .$$

On pose

(I,3)
$$C_k^r = R_k \otimes \Lambda^r T^* / \delta(g_{k+1} \otimes \Lambda^{r-1} T^*) \quad ;$$

évidemment on a $C_k^o = R_k$.

Maintenant, si $\underline{P}$ est le faisceau des germes des solutions de l'équation $Pu = 0$, on a une suite

(I,4)
$$0 \to \underline{P} \to \underline{C}_k^o \xrightarrow{D} \underline{C}_k^1 \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \underline{C}_k^{2n} \to 0 \quad .$$

Cette suite n'est pas toujours exacte et le problème de son exactitude est, en général, difficile et je ne veux pas le considérer ici. Si la suite (I,4) est exacte elle est la résolution de Spencer du faisceau $\underline{P}$.

Dans notre cas l'opérateur différentiel d'ordre deux dd^c se factorise à travers $J_2(\underline{A}_R^{p,q})$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{R_2^{p,q}} \arrow[r] & \underline{J_2(\underline{A}_R^{p,q})} \arrow[r] & \underline{A}_R^{p+1,q+1} \\
& & \underline{A}_R^{p,q} \arrow[u, "j_2"] \arrow[ur, "dd^c"'] &
\end{tikzcd}$$

et, pour $l \geqslant 0$, les suites exactes

(I,6) $$0 \to g^{p,q}_{2+l} \to R^{p,q}_{2+l} \to R^{p,q}_{1+l} \to 0 \quad .$$

Comme en (I,3) on pose

$$P^r_{p,q} = R_2^{p,q} \otimes \Lambda^r T^* / \delta(g_3^{p,q} \otimes \Lambda^{r-1} T^*)$$

et on peut montrer [5] que si $\lambda : R_1^{p,q} \to R_2^{p,q}$ est un scindage de la suite (I,6) alors on a

(I,7) $$\underline{P}^r_{p,q} \simeq (R_1^{p,q} \otimes \Lambda^r T^*) \otimes \delta(g_2^{p,q} \otimes \Lambda^r T^*) \quad .$$

Il s'ensuit

PROPOSITION 1. <u>Pour tout</u> $p,q \geqslant 0$, <u>la suite</u>

(I,8) $$0 \to \underline{P}_R^{p,q} \to \underline{P}^0_{p,q} \xrightarrow{D} \underline{P}^1_{p,q} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \underline{P}^{2n}_{p,q} \to 0$$

<u>est une résolution exacte du faisceau</u> $\underline{P}_R^{p,q}$ <u>en faisceaux fins</u>. <u>En outre</u>, <u>à cause de l'isomorphisme</u> (I,7), <u>si</u> $u = (\rho,\eta) \in \underline{P}^r_{p,q}$ <u>on a</u>

(I,9) $$Du = D(\rho,\eta) = (D_0\rho - \eta, D_0(D_0\rho - \eta))$$

<u>où</u> $D_0 = d - \delta\lambda$.

A ce moment je veux faire une remarque qui servira à montrer la nature du faisceau $\underline{P}_R^{0,0}$. Pour tout opérateur différentiel linéaire, d'ordre k , involutif, à coefficients constants $P : \underline{E} \to \underline{F}$ il y a une unique résolution exacte de Spencer du faisceau $\underline{S}$ des solutions de l'équation homogène $Pu = 0$. La résolution du faisceau $\underline{S}_l$ des solutions de l'équation $j_l Pu = 0$, correspondant au l-ième prolongement de P est aussi exacte et a la même cohomologie pour tout $l \geqslant 0$. On a alors

PROPOSITION 2. <u>La résolution</u> (I,4) <u>de</u> $\underline{P}_R^{0,0}$ <u>est un quotient de la résolution de De Rham du faisceau</u> R <u>et du prolongement d'ordre un de la résolution de Dolbeault du faisceau</u> $\mathcal{O}$.

2 - Nous supposons maintenant que M est une sous-variété complexe d'une variété

complexe M' telle que $\dim_C M = \dim_C M' = n$, et le bord $b\bar{M}$ est C^∞ . Dans ce cas tous les fibrés vectoriels et les faisceaux considérés sont définis sur M' et de la proposition 1 on tire que

$$(2,1) \qquad H^1(M', \underline{P}_R^{p,q}) = \text{Ker } D \text{ en } \Gamma(M', \underline{P}^1_{p,q})/D\Gamma(M', \underline{P}^o_{p,q}) \simeq \Lambda_R^{p+1,q+1} .$$

On peut montrer que, sous certaines conditions, ce groupe est isomorphe à un espace harmonique construit à partir de la résolution (I,8). Le point crucial est alors de déterminer dans quelles conditions on peut résoudre le problème de Neumann pour l'opérateur dd^c . Comme les calculs sont très longs, ici je peux donner seulement des indications et énoncer les résultats.

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire par rapport à une métrique Hermitienne et soit $(\ ,\ )_\varphi = \int_M \langle\ ,\ \rangle\, e^{-\varphi} *(1)$ le produit global sur M . Par rapport à ce produit soit D^* l'adjoint formel de l'opérateur D . On note par $\dot{P}^1_{p,q}$ l'espace des sections de $\underline{P}^1_{p,q}$ sur M qui se prolongent différentiablement à travers le bord $b\bar{M}$ et soit N^1 le sous-espace de $\dot{P}^1_{p,q}$ des éléments $u \in \dot{P}^1_{p,q}$ qui satisfont les conditions au bord

$$(2,2) \qquad \begin{cases} (Dv,u)_\varphi = (v,D^*u)_\varphi & \text{pour tout } v \in \dot{P}^o_{p,q} , \\ (Dv,D^*u)_\varphi = (v,D^*Du)_\varphi & \text{pour tout } v \in \dot{P}^1_{p,q} . \end{cases}$$

Soit $L^2(\underline{P}^1_{p,q},\varphi)$ l'espace des sections $u \in \underline{P}^1_{p,q}$ telles que $(u,u) < +\infty$.

Si r est une fonction sur M' qui définit le bord $b\bar{M}$, c'est-à-dire $r < 0$ sur M , $r > 0$ sur $M' - \bar{M}$, $r = 0$ et $dr \neq 0$ sur $b\bar{M}$, et si ξ est un vecteur tangent à $b\bar{M}$ la forme quadratique

$$(2,3) \qquad \langle \bar{\partial}\partial r, \bar{\xi}\wedge\xi \rangle$$

s'appelle la forme de Levi. On a alors

PROPOSITION 3. <u>Si la forme de Levi</u> (2,3) <u>a au moins</u> $n-2$ <u>autovaleurs positives ou au moins 3 autovaleurs négatives sur</u> $b\bar{M}$ <u>on peut résoudre le problème de Neumann pour l'opérateur</u> D <u>en</u> $\underline{P}^1_{p,q}$.

C'est-à-dire que l'espace $\underline{H}^1 = \{u \in N^1 \mid Du = D^*u = 0\}$ est fermé dans $L^2(\underline{P}^1_{p,q},\varphi)$ et qu'il existe un opérateur borné $N : L^2(\underline{P}^1_{p,q},\varphi) \to L^2(\underline{P}^1_{p,q},\varphi)$ tel que son domaine est dans N^1 et

i) $NH = HN$ où $H : L^2(\underline{P}^1_{p,q},\varphi) \to \underline{H}^1$ est la projection orthogonale,

ii) tout élément $u \in L^2(\underline{P}^1_{p,q},\varphi)$ s'écrit comme

$$u = DD^* Nu + D^* DNu + Hu$$

où tous les termes sont mutuellement orthogonaux,

iii) $DN = ND$.

De la proposition 3 on a

COROLLAIRE. <u>Si la variété ouverte</u> $M \subset M'$ <u>est fortement pseudoconvexe on peut résoudre le problème de Neumann pour l'opérateur</u> dd^c .

3 - Supposons maintenant que M soit une variété complexe compacte. On considère la résolution (I,8) et le groupe $H^1(M,\underline{P}^{p,q}_R)$. Pour étudier ce groupe on a besoin d'une description précise du faisceau $\underline{P}^1_{p,q}$.

Par rapport à la métrique de M soit $\omega^1,\dots,\omega^n$ un repère orthonormal sur un ouvert $U \subset M$. Une section $u = (\rho,\eta)$ de $\underline{P}^1_{p,q}$ s'écrit comme (on supprime les signes de somme)

$$\rho = \rho_\ell \omega^\ell + \rho_{\bar\ell}\bar\omega^\ell , \tag{3,1}$$

$$\eta = \eta_{\ell j}\omega^\ell \wedge \omega^j + \eta_{\bar\ell j}\bar\omega^\ell \wedge \omega^j + \eta_{\ell\bar j}\omega^\ell \wedge \bar\omega^j + \eta_{\bar\ell\bar j}\bar\omega^\ell \wedge \bar\omega^j$$

où, si l'on pose

$$\omega^I = \omega^{i_1} \wedge\dots\wedge \omega^{i_p} \quad , \qquad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n \quad ,$$

$$\omega^J = \omega^{j_1} \wedge\dots\wedge \omega^{j_q} \quad , \qquad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_q \leqslant n \quad ,$$

on a

$$\rho_\ell = \rho_{I\bar J,\ell}\, \omega^I \wedge \bar\omega^J + \rho_{\bar I J,\ell}\, \bar\omega^I \wedge \omega^J + \rho_{I\bar J,k,\ell}\, \omega^k \otimes \omega^I \wedge \bar\omega^J +$$

$$+ \rho_{\bar I J,k,\ell}\, \omega^k \otimes \bar\omega^I \wedge \omega^J + \rho_{I\bar J,k,\ell}\, \bar\omega^k \otimes \omega^I \wedge \bar\omega^J + \rho_{\bar I,J,\bar k,\ell}\, \bar\omega^k \otimes \bar\omega^I \wedge \omega^J$$

avec $\rho_{\bar\ell} = \bar\rho_\ell$, et

$$\eta_{\ell j} = \eta_{I\bar J,k,\ell,j}\, \omega^k \otimes \omega^I \wedge \bar\omega^J + \eta_{\bar I J,k,\ell,j}\, \omega^k \otimes \bar\omega^I \wedge \omega^J \quad ,$$

et des expressions analogues avec

$$\eta_{\bar\ell\bar j} = \overline{\eta_{\ell j}} \ , \ \eta_{\bar\ell j} = \overline{\eta_{\ell j}} \quad .$$

Comme la variété M est compacte on a un isomorphisme

$$H^1(M,\underline{P}^{p,q}_R) \simeq \underline{H}^1 = \{u \in \underline{P}^1_{p,q} \mid Du = D^*u = 0\} \quad . \tag{3,2}$$

Ici D a l'expression (1,9) et, si $\Lambda = (\Lambda^i_{jk})$ est l'expression locale du scindage

λ , on a $D_o = d - \Lambda$; un calcul facile montre que l'on a $D^*_o = - *d* - *\Lambda*$ et que

$$(3,3) \qquad D^*u = \left(D^*_o(\rho + D^*_o\eta)\ ,\ - \rho - D^*_o\eta\right) \ .$$

Maintenant si $u = (\rho,\eta) \in \underline{H}^1$ les conditions $Du = 0$ et $D^*u = 0$ entraînent

$$D_o\rho = \eta\ ,\ D^*_o\rho = - D^{*2}_o\eta \ ;$$

il s'ensuit que pour tout élément $u = (\rho,\eta)$ harmonique on a

$$(3,4) \qquad (D_oD^*_o + D^*_o D_o)\rho - D^*_o\eta + D_oD^{*2}_o\eta = 0$$

et qu'il suffit de calculer le "laplacien" $\square_o = D_oD^*_o + D^*_oD_o$ sur ρ donné par (3,1).

Si $\pi = \pi_k\, \omega^k$ est la 1-forme d'une connection associée à la métrique le différentiel covariant a l'expression

$$\nabla\omega^i = d\omega^i + \pi^i_{jk}\, \omega^k \wedge \omega^j + \pi^i_{j\bar{k}}\, \bar{\omega}^k \wedge \omega^j \ ;$$

si l'on pose

$$\nabla\omega^i = T^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k + T^i_{j\bar{k}}\, \omega^j \wedge \bar{\omega}^k$$

il est facile de voir que l'on a

$$\partial\omega^i = (\pi^i_{jk} - T^i_{jk})\omega^k \wedge \omega^j$$

$$\bar{\partial}\omega^i = \pi^i_{j\bar{k}}\, \bar{\omega}^k \wedge \omega^j \ ,$$

et des expressions semblebles pour $\partial\bar{\omega}^i$ et $\bar{\partial}\bar{\omega}^i$.

Je pose maintenant

$$\rho_{\ell|r} = \left(\partial\rho_\ell \big/ \partial\omega^r\right) + \pi^u_{\ell r}\, \rho_u \quad , \quad \rho_{\ell|\bar{r}} = \left(\partial\rho_\ell \big/ \partial\bar{\omega}^r\right) + \pi^u_{\ell\bar{r}}\, \rho_u \quad ,$$

$$\rho_{\ell|r|\bar{r}} = \left(\partial^2\rho_\ell \big/ \partial\bar{\omega}^r\, \partial\omega^r\right) + \left(\partial\pi^u_{\ell r} \big/ \partial\bar{\omega}^r\right)\rho_u + \pi^u_{\ell r}\left(\partial\rho_u \big/ \partial\bar{\omega}^r\right) +$$

$$+ \pi^u_{\ell\bar{r}}\left(\partial\rho_u \big/ \partial\omega^r\right) + \pi^u_{r\bar{r}}\left(\partial\rho_\ell \big/ \partial\omega^u\right) + \pi^s_{\ell\bar{r}}\, \pi^u_{sr}\, \rho_u + \pi^s_{\bar{r}r}\, \pi^u_{\ell s}\, \rho_u \quad ,$$

et une expression analogue pour $\rho_{\ell|\bar{r}|r}$. Le calcul, que je vous montre seulement pour le terme $\rho_\ell\, \omega^\ell$, donne

$$(3,5) \qquad \square_o\, \rho_\ell\omega^\ell = (\rho_{\ell|r|\bar{r}} - \rho_{\ell|\bar{r}|r} - \rho_{r|\bar{r}|\ell} + \left(\partial\Lambda^u_{r\bar{r}} \big/ \partial\omega^\ell\right)\rho_u - \left(\partial\Lambda^u_{\ell r} \big/ \partial\bar{\omega}^r\right)\rho_u +$$

$$+ \left(\partial\Lambda^u_{\ell\bar{r}} \big/ \partial\omega^r\right)\rho_u + \Lambda^u_{r\bar{r}}\, \rho_{u|\ell} + \Lambda^{\bar{u}}_{r\ell}\, \rho_{u|\bar{r}} + \Lambda^{\bar{u}}_{\ell\bar{r}}\, \rho_{r|\bar{u}} - \Lambda^u_{\bar{r}r}\, \rho_{\ell|u} + \Lambda^{\bar{u}}_{r\bar{r}}\, \rho_{\ell|\bar{u}} - \Lambda^{\bar{s}}_{\ell\bar{r}}\, \Lambda^u_{r\bar{s}}\, \rho_u -$$

$$- \Lambda^s_{r\ell}\, \Lambda^u_{s\bar{r}}\, \rho_u + \Lambda^s_{\ell\bar{r}}\, \Lambda^u_{sr}\, \rho_u + \Lambda^s_{\bar{r}r}\, \Lambda^u_{\ell s}\, \rho_u - \Lambda^s_{\ell r}\, \Lambda^u_{s\bar{r}}\, \rho_u - \Lambda^{\bar{s}}_{r\bar{r}}\, \Lambda^u_{\ell\bar{s}}\, \rho_u + \rho_r\left(\partial T^s_{\bar{s}r} \big/ \partial\omega^\ell\right) -$$

$$- \rho_u\left(\partial T^{u}_{\ell r} / \partial\bar{\omega}^{r}\right) + \rho_u T^{u}_{\ell r} T^{\bar{s}}_{\overline{sr}} + \rho_{r|\ell}\, T^{\bar{s}}_{\overline{sr}} - \rho_{u|\bar{r}}\, T^{u}_{\ell r} - \rho_{\ell|r}\, T^{\bar{s}}_{\overline{sr}} + \rho_{\ell|\bar{r}}\, T^{s}_{sr} - \Lambda^{u}_{r\ell}\, \rho_u\, T^{\bar{s}}_{\overline{sr}} -$$
$$- \Lambda^{\bar{u}}_{\ell\bar{r}}\, \rho_r\, T^{\bar{s}}_{\overline{su}} + \Lambda^{u}_{\ell r}\, \rho_u\, T^{\bar{s}}_{\overline{sr}} + \Lambda^{s}_{\ell\bar{r}}\, \rho_u\, T^{u}_{sr} + \Lambda^{s}_{r\bar{r}}\, \rho_u\, T^{u}_{\ell s} - \Lambda^{u}_{\ell\bar{r}}\, \rho_u\, T^{s}_{sr})\omega^{\ell} \quad .$$

A ce point on considère les opérateurs

$$\nabla_r = \partial/\partial\omega^r + \pi_r \quad , \qquad \nabla_{\bar{r}} = \partial/\partial\bar{\omega}^r + \pi_{\bar{r}} \quad ,$$
$$\underline{D}_r = \partial/\partial\omega^r - \Lambda_r \quad , \qquad \underline{D}_{\bar{r}} = \partial/\partial\bar{\omega}^r - \Lambda_{\bar{r}} \quad ,$$
$$D_r = \partial/\partial\omega^r + \pi_r - \Lambda_r \quad , \qquad D_{\bar{r}} = \partial/\partial\bar{\omega}^r + \pi_{\bar{r}} - \Lambda_{\bar{r}}$$

et les courbures

$$R_{\bar{r}r} = \nabla_{\bar{r}}\, \nabla_r - \nabla_r\, \nabla_{\bar{r}}$$

et

$$\theta_{\bar{r}r} = \underline{D}_{\bar{r}}\, \underline{D}_r - \underline{D}_r\, \underline{D}_{\bar{r}}$$

où θ s'appelle la courbure de l'opérateur dd^c . Alors on peut regrouper les termes de (3,5) et écrire

$$(3,6) \qquad \Box_o\, \rho_\ell\, \omega^\ell = (-D_\ell D_{\bar{r}}\, \rho_r + \theta^{s}_{\ell\bar{r}r}\, \rho_s - R^{s}_{\ell\bar{r}r}\, \rho_s + \ldots)\, \omega^\ell$$

où les points dénotent des termes qu'on peut contrôler.

Maintenant on définit les formes quadratiques

$$\theta(\rho,\rho) = (\theta\rho,\rho) \quad \text{et} \quad R(\rho,\rho) = (R\rho,\rho)$$

et on pose

$$K(u,u) = \theta(\rho,\rho) - R(\rho,\rho) + \tilde{\theta}(\eta,\eta) - \tilde{R}(\eta,\eta)$$

où $\tilde{\theta}$ et $\tilde{R}$ sont les formes quadratiques θ et R appliquées au produit intérieur de η et $\partial/\partial\omega^j$. Alors de (3,4) et (3,6) on peut conclure, comme en [5],

PROPOSITION 4. <u>Si la forme quadratique</u> $K(u,u)$ <u>est suffisamment positive, c'est-à-dire si la courbure de l'opérateur</u> dd^c <u>est suffisamment positive par rapport à la courbure de la métrique de</u> M , <u>alors</u>

$$H^1(M, \underline{P}^{p,q}_R) = 0 \quad .$$

Il faut remarquer qu'avec la même technique on peut démontrer que, sous les mêmes hypothèses, toute la cohomologie s'annule en degrés positifs. Il serait intéressant d'avoir des exemples de variétés complexes compactes dans lesquelles ceci se produit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AEPPLI (A.) . - On the cohomology structure of Stein manifolds, Proceedings of the conference on complex analysis, Minneapolis (1964).

[2] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.) . - Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$-cohomology, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa serie III Vol XXV (1971).

[3] BIGOLIN (B.) . - Gruppi di Aeppli, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol XXVIII fasc. II (1969).

[4] BOTT (R.) and CHERN (S.S.) . - Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Mathematica 114 (1965).

[5] ČENKL (B.) . - Vanishing theorem for an elliptic differential operator, J. Diff. Geom. I (1967).

[6] ČENKL (B.) and SORANI (G.) . - Cohomology groups associated with the $\partial\bar{\partial}$-operator, Proceedings of the conference on minimal surfaces and several complex variables, Chapel Hill (1970).

[7] ČENKL (B.) and SORANI (G.) . - Cohomology groups associated with the $\partial\bar{\partial}$-operator, Pacific J. of Math. Vol 39 n°2 (1971).

[8] FRENKEL (J.) et NORGUET (F.) . - Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein, C.R. Acad. Sci. Paris 256 (1963).

[9] HÖRMANDER (L.) . - L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math. 113 (1965).

[10] KODAIRA (K.) . - On a differential-geometric method in the theory of analytic stalks, Proceedings of the Nat. Acad. Sc. U.S.A. 39 (1953).

[11] KOHN (J.J.) . - Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds I, II, Ann. of Math. 78 (1963), 79 (1964).

[12] KOHN (J.J.) and NIRENBERG (L.) . - Non-coercive boundary values problems, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965).

[13] MACKICHAN (B.) . - A generalization to overdetermined systems of the notion of diagonal operators, Thesis, Stanford (1968).

[14] SORANI (G.) . - Operatori differenziali sulle varietà, Seminario Univ. dell'Aquila (1969).

[15] SPENCER (D.C.) . - Overdetermined systems of linear partial differential equations, Bull. Am. Math. Soc. 75 (1969).

(Texte reçu en septembre 1972)

Via Cassia 551
ROMA (Italie)