

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A. THOMAS

Dimension de Hausdorff

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 161-167

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__161_0

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIMENSION DE HAUSDORFF

par

A. THOMAS

(Travail fait en commun avec J.M. DUMONT)

--:--:--

Rappel de la définition.

E étant une partie d'un espace métrique, à $s \geq 0$ et $\epsilon > 0$ on associe $m_s^\epsilon(E)$, borne inférieure des $\sum d(\Omega_i)^s$ ($d(\Omega_i)$ = diamètre de Ω_i), étendue à tous les recouvrements ouverts $(\Omega_i)_i$ de E vérifiant $d(\Omega_i) \leq \epsilon$ pour tout i , et on définit la s -mesure de Hausdorff m_s par

$$m_s(E) = \sup_{\epsilon > 0} m_s^\epsilon(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_s^\epsilon(E) ;$$

la dimension de Hausdorff de E est

$$H - \dim E = \inf \{s / m_s(E) = 0\} = \sup \{s / m_s(E) = +\infty\} .$$

Si l'espace topologique est un intervalle de \mathbb{R} , m_1 est la mesure extérieure de Lebesgue, donc $H - \dim E \leq 1$ pour tout E .

I. - Calcul de la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble de \mathbb{R} .

Soit $E \subset \mathbb{R}$, soit $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de recouvrements de E par des intervalles quelconques. On suppose :

- 1°) que chaque recouvrement est disjoint ;
- 2°) que chaque intervalle de \mathcal{J}_n est inclus dans un intervalle de \mathcal{J}_{n-1} ;
- 3°) que si d_n est le diamètre du plus grand intervalle de \mathcal{J}_n ,
 $d_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On en déduit que, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, x appartient à un intervalle unique de \mathcal{J}_n , qu'on note $I_n(x)$. On note $E(\mathcal{J})$ l'intersection des \mathcal{J}_n , qui contient E .

THEOREME I. -

(1) Soit m une mesure extérieure sur $E(\mathcal{G})$, si $m(E) \neq 0$ la dimension de E est supérieure ou égale à tout s tel que

$$\forall x \in E, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(I_n(x))^s}{m(I_n(x))} \left(\frac{d(I_n(x))}{d(I_{n-1}(x))} \right)^{1-s} > 0 .$$

(2) Soit \tilde{m} une mesure intérieure finie sur $E(\mathcal{G})$, la dimension de E est inférieure ou égale à tout s tel que

$$\forall x \in E, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(I_n(x))^s}{m(I_n(x))} < +\infty .$$

Application. - Etant donné $p \in]0,1[$, soit E_p l'ensemble des $x \in [0,1[$ tels que dans leur développement binaire $(\epsilon_n)_n$, la densité de $\epsilon_n = 0$ soit égale à p . On prend pour \mathcal{G}_n l'ensemble des $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ pour $k \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$ d'où $E(\mathcal{G}) = [0,1[$; on munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (donc $[0,1[$) de la probabilité P produit des probabilités sur $\{0,1\}$ définies par $\pi(0) = p$ et $\pi(1) = 1-p$ (P se prolonge évidemment en mesure intérieure et en mesure extérieure); on sait alors que $P((\epsilon_n)_n \text{ équiréparti pour } \pi) = 1$, c'est-à-dire $P(E_p) = 1$, on peut donc appliquer le théorème qui donne

$$H - \dim E_p = \frac{p \log p + (1-p) \log(1-p)}{\log 2} .$$

II. - 1er cas particulier.

Etant donné une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers, avec $g_n \geq 1$, et $g_n \neq 1$ pour une infinité de n , soit ϵ l'application de $[0,1[$ dans

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \{0,1,\dots,g_n-1\} = \prod_{n=0}^{+\infty} G_n$$

qui à x associe son développement en base $(g_n)_n$, c'est-à-dire l'unique suite $(\epsilon_n)_n \in \prod_n G_n$ telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{g_0 g_1 \dots g_n}$.

On va considérer des ensembles E caractérisés par le développement en base $(g_n)_n$ de leurs éléments.

Le théorème I donne le résultat suivant :

THEOREME I'. - Soit $A_n \subset G_n$ de cardinal a_n , soit $E \subset [0,1[$ tel que $e(E)$ soit inclus dans $\prod_{n=0}^{+\infty} A_n$ et n'y soit pas négligeable pour la probabilité produit des probabilités uniformes sur A_n ; alors, si $\frac{g_n}{a_n}$ est borné, la dimension de E est égale à $\inf\{s/\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 \dots a_n}{(g_0 \dots g_n)^s} < +\infty\}$.

Application aux nombres non simplement normaux.

DEFINITIONS. - $(\epsilon_n)_n \in \prod_{n=0}^{+\infty} G_n$ est dit équiréparti si pour tout I intervalle de $[0,1[$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n d(I \cap [\frac{\epsilon_n}{g_n}, \frac{\epsilon_n+1}{g_n}]) \rightarrow d(I) \text{ quand } n \rightarrow +\infty ;$$

$x \in [0,1[$ est dit simplement normal si son développement en base $(g_n)_n$ est équiréparti.

On sait que l'ensemble des non simplement normaux est de mesure nulle, on va montrer qu'il est de dimension 1, sauf si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/g_n \neq 1\}$ est de densité nulle : dans ce cas tout nombre est simplement normal.

On indexe $\{n \in \mathbb{N}/g_n \neq 1\}$ par une suite strictement croissante $(n_k)_k$; on se fixe $N \geq 1$ entier et $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$; soit J l'ensemble des n_{kN} pour $k \in \mathbb{N}$ et K son complémentaire dans \mathbb{N} , on applique le théorème à :

$A_n = G_n$ pour $n \in K$ et $A_n = \{0,1, \dots, [\alpha g_n]-1\}$ pour $n \in J$; et à $E_N = \{x \in [0,1[/ (\epsilon_n)_n \in \prod_n A_n \text{ et } (\epsilon_n)_{n \in K} \text{ équiréparti}\}$, ce qui donne :

$$H - \dim E_N \geq 1 + \frac{1}{N} \frac{\log(\alpha - \frac{1}{2})}{\log 2} ;$$

or on voit facilement que l'ensemble E des non simplement normaux contient E_N pour tout N , d'où $H - \dim E = 1$.

III. - Extension du 1er cas particulier.

Soit $(g_n)_n$ une suite de réels au moins égaux à 2, on appelle développement en base $(g_n)_n$ la suite d'entiers : $\epsilon_n = [\alpha_n]$, où α_n est une suite de réels définie par récurrence :

$$\frac{\alpha_0}{g_0} = \text{plus grand multiple de } \frac{1}{g_0} \text{ qui soit } \leq x ,$$

$$\frac{\alpha_0}{g_0} + \frac{\alpha_1}{g_0 g_1} = \text{plus grand multiple de } \frac{1}{g_0 g_1} \text{ qui soit } \leq x ,$$

.....

$$\frac{\alpha_0}{g_0} + \dots + \frac{\alpha_n}{g_0 \dots g_n} = \text{plus grand multiple de } \frac{1}{g_0 \dots g_n} \text{ qui soit } \leq x ,$$

..... ;

on a alors un théorème semblable au théorème I' :

THEOREME I". - Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{Z} , avec $A_n \subset [0, g_n - 2]$ pour $n \geq 1$, alors si $\frac{g_n}{a_n}$ est borné la dimension de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ à développement dans $\prod_{n=0}^{+\infty} A_n$ est égale à

$$\inf \left\{ s / \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 \dots a_n}{(g_1 \dots g_n)^s} \leq +\infty \right\} .$$

Application aux nombres non normaux.

LEMME. - Soit (v_n) une suite de réels strictement positifs et $\lambda = \inf \frac{v_n}{v_{n-1}}$, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la suite xv_n soit contenue dans un intervalle $[0, \alpha[$ modulo 1 ($\alpha < 1$) est de dimension au moins $\frac{\log(\alpha\lambda - \alpha - 1)}{\log \lambda}$ (si $\alpha\lambda - \alpha - 1 > 0$).

On pose $g_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}$, $A_0 = \mathbb{Z}$ et $A_n = \mathbb{Z} \cap [0, \alpha g_n^{-\alpha - 1}]$ pour $n \neq 0$; les x à développement dans $\prod_{n=0}^{+\infty} A_n$ vérifient alors $xv_n \in [0, \alpha[$ modulo 1 pour tout n , et sont de dimension au moins $\frac{\log(\alpha\lambda - \alpha - 1)}{\log \lambda}$ d'après le théorème I" .

THEOREME II. - Soit (u_n) une suite de réels vérifiant $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} > 1$ (ou telle qu'il existe une sous-suite qui ne soit pas de densité nulle et vérifie cette condition); alors l'ensemble des nombres non normaux pour la suite (u_n) est de dimension 1.

On suppose pour simplifier que $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} \geq \rho > 1$ pour tout n ; on fixe $N \geq 1$ entier et on applique le lemme à $v_k = |u_{kN}|$ et $\alpha = \frac{1}{N^2}$; or les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k, xv_k \in [0, \frac{1}{N^2}[\text{ mod } 1$ ne sont pas normaux pour (u_n) , puisque l'ensemble des n tels que $xu_n \in]-\frac{1}{N^2}, \frac{1}{N^2}[\text{ mod } 1$ contient alors un ensemble

ble de densité $\frac{1}{N}$; l'ensemble des non normaux est donc de dimension au moins

$$\frac{\log(\frac{1}{N^2} \rho^N - \frac{1}{N^2} - 1)}{\log \rho^{\frac{1}{N}}}$$

pour tout N , ce qui tend vers 1 quand $N \rightarrow +\infty$.

IV. - 2e cas particulier.

Soit $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_n)$ une suite d'ensembles d'intervalles vérifiant les conditions 1°, 2°, 3° de la 1ère partie.

Etant donné I intervalle d'un des \mathcal{J}_n , soit n minimal tel que $I \in \mathcal{J}_n$, si $n \neq 1$, on note $p(I)$ l'unique intervalle de \mathcal{J}_{n-1} contenant I .

THEOREME I'''. - Si $\frac{d(p(I))}{d(I)}$ est borné pour $n \in \mathbb{N}$ et $I \in \mathcal{J}_n$, la dimension

de $E(\mathcal{J}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{I \in \mathcal{J}_n} I$ est comprise entre

et

$$\sup \{s/\forall n, \forall I \in \mathcal{J}_n, d(I)^s \leq \sum_{p(I')=I} d(I')^s\}$$

$$\inf \{s/\forall n, \forall I \in \mathcal{J}_n, d(I)^s \geq \sum_{p(I')=I} d(I')^s\} .$$

La majoration est évidente ; pour la minoration on utilise le lemme suivant:

LEMME. - Etant donné une application m de l'ensemble des intervalles des \mathcal{J}_n (considérés comme intervalles de $E(\mathcal{J})$) dans \mathbb{R}^+ , m se prolonge en une mesure extérieure sur $E(\mathcal{J})$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $I \in \mathcal{J}_n$, $m(I)$ est compris entre $\sup_{p(I')=I} m(I')$ et $\sum_{p(I')=I} m(I')$;
- $\sup_{I \in \mathcal{J}_n} m(I) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En particulier, étant donné $s \geq 0$, m défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} , \forall I \in \mathcal{J}_n , m(I) = d(I)^s$$

se prolonge en mesure extérieure si (et seulement si)

$$d(I)^s \leq \sum_{p(I')=I} d(I')^s$$

et dans ce cas, d'après le théorème I , la dimension de $E(\mathcal{J})$ est au moins

égale à s si $\frac{d(p(I))}{d(I)}$ est borné.

Application à l'équirépartition de $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On sait que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$ la suite θ^n est équirépartie mod 1.

THEOREME III. - L'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que θ^n ne soit pas équiréparti mod 1 est de dimension 1.

On fixe $\epsilon > 0$. On peut trouver des suites finies d'entiers :

$$N_{1,1}, (N_{2,1}, N_{2,2}, \dots, N_{2,\lambda}), \dots, (N_{k,1}, N_{k,2}, \dots, N_{k,\lambda_{k-1}}), \dots$$

avec $\lambda = [N_{1,1}\epsilon]$ telles que chaque $[N_{k,j}^{1/k}, (N_{k,j} + \epsilon)^{1/k}[$ contienne les segments $[N_{k+1,i}^{1/k+1}, (N_{k+1,i} + \epsilon)^{1/k+1}[$ pour $\lambda(j-1) + 1 \leq i \leq \lambda j$. Soit alors \mathcal{J}_k l'ensemble des $[N_{k,j}^{1/k}, (N_{k,j} + \epsilon)^{1/k}[$ pour $1 \leq j \leq \lambda^{k-1}$; d'après le théorème I''', la dimension de $E(\mathcal{J})$ est au moins égale à $\frac{\log \lambda}{\log(N_1 + \epsilon)}$; or les éléments $\theta \in E(\mathcal{J})$ sont tels que pour tout n , $\theta^n \in [0, \epsilon[$ modulo 1; donc $E(\mathcal{J}) \subset E$ et $H - \dim E \geq \frac{\log \lambda}{\log(N_1 + \epsilon)} \geq \frac{\log(N_{1,1}\epsilon - 1)}{\log(N_{1,1} + \epsilon)}$ et comme on peut choisir $N_{1,1}$ arbitrairement grand, $H - \dim E = 1$.

Application aux fractions continues :

THEOREME IV. - L'ensemble E des $x \in]0, 1[$ tels que la suite des coefficients a_n du développement en fraction continue soit bornée est de dimension 1.

LEMME. - Soit $M \geq 1$ entier, la dimension de $E_M = \{x \in]0, 1[/ \forall n, a_n \leq M\}$ est comprise entre

$$\sup \{s / \forall \alpha \in [\frac{1}{M+1}, 1], \sum_{a=1}^M f_a(\alpha)^s \geq 1\}$$

et

$$\inf \{s / \forall \alpha \in [\frac{1}{M+1}, 1], \sum_{a=1}^M f_a(\alpha)^s \leq 1\}$$

avec $f_a(\alpha) = \frac{\alpha+1}{(\alpha+a)(\alpha+a+1)}$.

On obtient ce résultat en prenant pour intervalles de \mathcal{J}_n les ensembles $I_\sigma = \{x \in]0, 1[/ (a_1, \dots, a_n) = \sigma\}$ pour $\sigma \in \{1, \dots, M\}^n$.

Soit $s \in [0, 1[$; on a

$$\sum_{a=1}^{+\infty} f_a(\alpha)^s > f_1(\alpha)^s + \sum_{a=2}^{+\infty} f_a(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+2)^s} + \frac{\alpha+1}{\alpha+2} = f(\alpha),$$

soit $f(\alpha_0)$ le plus petit des $f(\alpha)$ pour $\alpha \in [0,1]$; pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$\sum_{a=1}^{+\infty} f_a(\alpha)^s \geq f(\alpha_0) > 1$, et cette série converge normalement ; donc il existe

$M_s \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\sum_{a=1}^{M_s} f_a(\alpha)^s \geq 1$; d'où $H\text{-dim } E_{M_s} \geq s$,

et, comme E contient tous les E_{M_s} pour $s \in [0,1[$, $H\text{-dim } E = 1$.

--:--:--

Alain THOMAS
 Villa Serena
 Avenue du Mugel
 13600 LA CIOTAT