JEAN-PIERRE SERRE

# Fonctions zêta $p$-adiques

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 37 (1974), p. 157-160
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__157_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 157-160

# FONCTIONS ZÊTA p-ADIQUES

par

Jean-Pierre SERRE

-:-:-:-

Le présent exposé résume, sans démonstrations, une partie des résultats de [4]. Il s'agit -en gros- d'attacher à tout corps de nombres totalement réel K, et à tout nombre premier $p$, une <u>fonction zêta p-adique</u> au sens de Kubota-Leopoldt ([1], [2], [3]), autrement dit une fonction analytique p-adique qui prenne les mêmes valeurs que la fonction zêta usuelle de $K$ aux entiers négatifs (à un facteur correctif près). La définition et les premières propriétés d'une telle fonction font l'objet du §2. Le §1 est préliminaire ; il précise la notion de "fonction analytique p-adique" utilisée.

Pour simplifier, on suppose $p \neq 2$ ; pour le cas $p = 2$, voir [4].

## §1. <u>L'ALGÈBRE D'IWASAWA</u> $\Lambda$.

C'est une algèbre de fonctions sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. Ses éléments peuvent être caractérisés de diverses façons (leur équivalence est démontrée dans [4], §4) :

(i) Une fonction $f$ appartient à $\Lambda$ si et seulement si elle est limite uniforme de fonctions de la forme

$$s \to \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^s \quad , \quad a_i \in \mathbf{Z}_p \ , \ u_i \in \Gamma \ ,$$

où $\Gamma$ désigne le groupe multiplicatif $1+p\mathbf{Z}_p$.

(ii) (d'après B. Mazur). On a $f \in \Lambda$ si et seulement si il existe une mesure (simplement additive) $\mu$ sur $\Gamma$, à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$, telle que

$$f(s) = \int_\Gamma u^s \mu(u) \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathbf{Z}_p \ .$$

Par définition, $\mu$ appartient à l'algèbre $A = \varprojlim \mathbf{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$, où $\Gamma_n = 1 + p^n\mathbf{Z}_p$. Or, on sait (cf. [2], §6) que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de séries formelles $\mathbf{Z}_p[[T]]$, l'isomorphisme dépendant du choix d'un générateur topologique $1+\pi$ du groupe $\Gamma$. On en déduit :

(iii) Le <u>changement de variables</u>

$$1 + T = (1+\pi)^s$$

identifie $\Lambda$ à l'algèbre $A = \mathbb{Z}_p[[T]]$ .

(iv) On a $f \in \Lambda$ si et seulement si $f$ a un <u>développement de Taylor</u> de la forme

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n s^n/n! \quad , \quad \text{avec} \quad b_n \in \mathbb{Z}_p \ ,$$

les $b_n$ vérifiant en outre les congruences

$$\sum_{i=1}^{n} c_{in} b_i \equiv 0 \pmod{n!\mathbb{Z}_p} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \ ,$$

où les $c_{in}$ sont des entiers définis par l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} c_{in} Y^i = Y(Y-1)\ldots(Y-n+1) \ .$$

En particulier, les éléments de $\Lambda$ sont holomorphes (au sens strict) sur un disque plus grand que le disque unité.

(v) On a $f \in \Lambda$ si et seulement si $f$ a un <u>développement binomial</u> de la forme

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p^n \binom{s}{n} \quad , \text{avec} \quad d_n \in \mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad \binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!} \ ,$$

les $d_n$ vérifiant en outre les congruences

$$\sum_{i=1}^{n} c_{in} d_i \equiv 0 \pmod{n!\mathbb{Z}_p} \text{ pour tout } n \geq 1 \ .$$

## §2. <u>FONCTIONS ZÊTA</u> p-<u>ADIQUES</u>.

Soit $K$ un corps de nombres totalement réel, de degré $r$, et soit $\zeta_K$ sa fonction zêta. D'après un théorème de Siegel, les valeurs de $\zeta_K$ aux entiers négatifs sont des <u>nombres rationnels</u> ; on peut les considérer comme des éléments de $\mathbb{Q}_p$ .

Soient $u \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{Z}_p$ . Choisissons une suite d'entiers négatifs $n_i$ , tendant vers $-\infty$ (au sens usuel), tendant vers $s$ (dans $\mathbb{Z}_p$) , et tels que $n_i \equiv u \pmod{p-1}$ . On peut alors montrer (cf. [4], n° 5.3) que les nombres rationnels $\zeta_K(n_i)$ <u>ont une limite</u> dans $\mathbb{Q}_p$ , mis à part le cas $s = 1$ , $r(u-1) = 0$ ; cette limite est indépendante de la suite $(n_i)$ choisie ; on la note $\zeta_K^*(s,u)$ .

Les $p-1$ fonctions $s \mapsto \zeta_K^*(s,u)$ sont les "fonctions zêta p-adiques" de K.

Elles jouissent des propriétés suivantes :

(i) Si $u$ est <u>pair</u>, i.e. si $u \in 2\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, on a $\zeta_K^*(s,u) = 0$. Si $u$ est <u>impair</u>, la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(s,u)$ n'a qu'un nombre fini de zéros.

(ii) Si $n$ est un entier $\leq 0$, et si $u$ désigne sa classe mod $(p-1)$, on a ([4], th.20) :

$$\zeta_K^*(n,u) = \zeta_K(n) \prod_{v|p} (1-Nv^{-n}) \quad ,$$

i.e. $\zeta_K^*(n,u)$ est la valeur en $n$ de la fonction $\zeta_K$ "débarrassée de ses termes en p ".

Il y a une formule analogue pour $\zeta_K^*(n,u)$ quand $n$ est un entier $\leq 0$ et $u$ un élément quelconque de $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ : la fonction $\zeta_K$ est alors remplacée par une fonction $L$ (cf. [4], th.22).

(iii) Supposons $ru \neq r$ dans $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Alors la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(s,u)$ appartient à l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda$ ([4], th.21). En particulier, c'est une fonction holomorphe de $s$ sur un disque plus grand que le disque unité ; ses valeurs sont des entiers p-adiques vérifiant des congruences analogues à celle de Kummer.

(iv) Si $ru = r$, la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(1-s,u)$ est de la forme $h(T)/((1+T)^r-1)$, avec $h \in \Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$. En particulier, la fonction $s \mapsto (s-1)\zeta_K^*(s,u)$ est holomorphe dans un disque contenant le disque unité.

On a des résultats analogues pour les fonctions zêta "partielles" attachées aux classes d'idéaux du corps $K$.

-:-:-:-

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. FRESNEL. - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques, Ann. Inst. Fourier, 17, 1967, pp. 281-333.

[2] K. IWASAWA. - Lectures on p-adic L functions, Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[3] T. KUBOTA et H.W. LEOPOLDT. - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. Crelle, 214-215, 1964, pp. 328-339.

[4] J-P. SERRE. - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Modular Functions of One variable, Lecture Notes in Math. n°350, pp. 191-268, Springer-Verlag 1973.

-:-:-:-

Collège de France
11, place Marcelin Berthelot
75005 PARIS