MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALAIN ESCASSUT

Algèbres de Krasner-Tate et générateurs universels

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 63-68
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__63_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 63-68

ALGEBRES DE KRASNER-TATE et GENERATEURS UNIVERSELS

par

Alain ESCASSUT

-:-:-:-

Introduction.

Pour rechercher une nouvelle forme de caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Tate, on introduira la notion de générateur universel et on étudiera les propriétés attachées à cette notion.

Rappelons brièvement qu'il existe deux théories qui permettent de définir des fonctions analytiques en analyse ultramétrique, dues respectivement à Marc Krasner et à John Tate, et chacune de ces deux théories permet de construire des algèbres de Banach ultramétriques, appelées habituellement algèbres de Krasner et algèbres de Tate. Alors, on appelle algèbre de Krasner-Tate une algèbre isomorphe à la fois à une algèbre de Krasner et à une algèbre de Tate.

1. - Théorie de Krasner ([12] et [13]).

Soit K un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos, et soit D une partie infinie de K. Soit $K(D)$ le groupe topologique des fractions rationnelles sans pôle dans D, muni de la topologie de la convergence uniforme sur D, et soit $H(D)$ le groupe topologique complété de $K(D)$. Alors $H(D)$ est une sous-K-algèbre de Banach de K^D pour la norme $\| \cdot \|$ de la convergence uniforme sur D si et seulement si D est fermé borné. On appelle algèbres de Krasner les algèbres de Banach $H(D)$ où D est fermé borné.

Remarque. - On peut donner une définition plus générale des algèbres de Krasner en considérant tous les ensembles D tels que $H(D)$ soit une sous-K-algèbre de K^D [3]. Toutefois nous n'utiliserons ici que des algèbres $H(D)$ normées pour la convergence uniforme sur D.

L'étude des algèbres de Krasner $H(D)$ a été traitée dans [9], [1], [3].

2. - Théorie de Tate.

Soit K un corps valué non archimédien complet ; on appelle <u>extension topologiquement pure</u> de degré n de K l'algèbre $K\{X_1,\dots,X_n\}$ des séries formelles restreintes, à n indéterminées, munie de la norme d'algèbre de Banach.

$$\|\Sigma a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}\| = \sup_{(i_1,\dots,i_n)} |a_{i_1,\dots,i_n}| \ .$$

Les extensions topologiquement pures sont nœthériennes et leurs idéaux sont fermés. Alors on appelle <u>algèbre topologiquement de type fini sur</u> K , un quotient d'une extension topologiquement pure muni de la structure d'algèbre de Banach quotient.

Les algèbres topologiquement de type fini sur K sont noethériennes et leurs idéaux maximaux sont de codimension finie. Leur étude a été traitée dans [15] , [14] , [7] , [8] , [11] , [6] , [10] , [5] .

3. - Algèbres de Krasner-Tate.

Pour comparer les théories de Krasner et de Tate, on doit naturellement prendre un corps K valué, non archimédien, complet, algébriquement clos. Alors nous appellerons <u>algèbre de Krasner-Tate</u> une K-algèbre de Banach ultramétrique isomorphe à la fois à une algèbre de Krasner H(D) et à une K-algèbre topologiquement de type fini A . Comme les algèbres de Krasner H(D) sont complètes pour leur norme spectrale, il est clair, d'après un théorème de Banach, que ces isomorphismes sont également topologiques, c'est-à-dire bicontinus.

Les algèbres de Krasner-Tate ont été étudiées dans [4] et [5] ; rappelons très brièvement certaines possibilités de caractérisation parmi les algèbres de Tate. On extrait du théorème V.8 de [5] le théorème 1.

THEOREME 1. - <u>Une K-algèbre topologiquement de type fini intègre</u> A <u>est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement s'il existe deux polynômes</u> P <u>et</u> Q <u>premiers entre eux dans</u> K[X] , <u>tels que</u>

1) P <u>soit unitaire</u> ;
2) $1 = \|P\| = \|Q\|$ (<u>où</u> $\|.\|$ <u>désigne la norme dans l'extension topologiquement pure</u> $K\{X\}$) ;

3) $\deg(P) > \deg(Q)$; <u>et tels que</u> $A \simeq K\{T,X\}/(P(X)-TQ(X))K\{T,X\}$.

<u>De plus</u>, <u>si</u> A <u>est l'algèbre de Krasner-Tate</u> $K\{T,X\}/(P(X)-TQ(X))K\{T,X\}$ <u>et si</u> D <u>est l'image réciproque de</u> U <u>par la fraction</u> P/Q , <u>on a</u> $A \simeq H(D)$.

Ce théorème donne une forme sympathique des algèbres de Krasner-Tate intègres (et se généralise, par un énoncé analogue mais plus compliqué, aux algèbres non intègres), mais il ne permet pas de reconnaître une algèbre de Krasner-Tate si celle-ci ne se présente pas sous la forme que l'on vient d'obtenir. Par exemple, pour reconnaître que l'algèbre

$$A = K\{T,Y\}/(Y^3+3TY^2+Y(T^2+1)+1)K\{T,Y\}$$

est une algèbre de Krasner-Tate, il faut faire le changement de variable $X = T+Y$ afin d'obtenir $A \simeq K\{T,X\}/(X^3+X+1-T(X^2+1))K\{T,X\}$.

On extrait de [5] le théorème plus intrinsèque suivant :

THEOREME 2. - <u>Une</u> K-<u>algèbre topologiquement de type fini</u> A <u>est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle est réduite et contient une sous</u>-K-<u>algèbre de type fini principale</u>, <u>dense dans</u> A .

Comme les algèbres de type fini principales sont les algèbres de la forme $K[t,x]$, où $t \in K(x)$, et comme les algèbres de Krasner-Tate intègres sont de la forme $K\{t\}[x]$ où $t \in K(x)$, il est naturel de faire la conjecture suivante :

<u>Conjecture</u>. - <u>Toute</u> K-<u>algèbre topologiquement de type fini principale est une algèbre de Krasner-Tate</u>.

Si cette conjecture était vraie, elle impliquerait que les algèbres de Krasner-Tate soient les algèbres topologiquement de type fini réduites dont tout idéal maximal est principal.

Nous allons rechercher un résultat voisin, en remarquant que dans une algèbre de Krasner-Tate $H(D)$, l'application identique x sur D est telle que si $a \in D$, $(x-a)H(D)$ soit un idéal maximal, et si $a \notin D$ alors $(x-a)$ est inversible dans $H(D)$.

4. - <u>Générateurs universels</u>.

Nous dirons qu'un élément x d'une K-algèbre topologiquement de type fini A est un <u>générateur universel</u> si pour tout $a \in K$,

ou $(x-a)A$ est un idéal maximal de A
ou $(x-a)$ est inversible dans A .

Remarques. - Si A admet un générateur universel, alors tout idéal maximal de A est principal et si A est réduite la transformation de Guelfand définit une injection de A dans l'ensemble des fonctions dérivables sur le spectre D de x , à valeurs dans K

Cette notion de générateur universel permet d'obtenir un théorème de caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Tate, par des considérations strictement algébriques, qui est plus faible que la conjecture ci-dessus mais s'en rapproche tout de même.

THEOREME 3. - Une K-algèbre topologiquement de type fini est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle est réduite et contient un générateur universel.

Le théorème 3 utilise notamment dans sa démonstration les trois théorèmes suivants intéressants par eux-mêmes.

THEOREME 4. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire nœthérienne, sans idempotent différent de 0 et 1 , dont tout idéal maximal est de codimension 1 . Supposons que A possède un générateur universel et que l'intersection des idéaux maximaux soit nulle. Alors A est principale.

THEOREME 5. - Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini de la forme $K\{t\}[y_1,\dots,y_q]$ qui possède un générateur universel x . Alors $A = K\{t\}[x]$.

On a enfin le théorème 6 qui permet sous certaines hypothèses de caractériser les générateurs universels d'une algèbre de Tate.

THEOREME 6. - Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini intègre de la forme $K\{t\}[x]$ et soit $F(t,X) = X^n + f_{n-1}(t)X^{n-1} + \dots + f_0(t) \in K\{t\}[X]$ le polynôme minimal de x sur $K\{t\}$. Alors x est un générateur universel de A si et seulement si pour tout $\alpha \in K$, $F(t,\alpha)$ admet au plus un zéro dans le disque unité (c'est-à-dire si $F(t,\alpha)$ est un élément premier ou inversible de l'anneau principal $K\{t\}$) .

De plus, si x est un générateur universel, si $\|F(t,x)\| = 1$, et si l'on écrit $F(t,X)$ sous la forme $P(X) - tQ(X) + t^2\epsilon(t,X)$ où P et $Q \in K[X]$, alors on a

$$A \simeq K\{T,X\}/F(t,X)K\{T,X\} \simeq K\{T,X\}/(P(X)-TQ(X))K\{T,X\} .$$

Remarque. - L'intérêt de ce dernier théorème est de donner une réponse positive, dans ce cas très particulier, au problème suivant :

soit $a_n(t)X^n + \ldots + a_o(t) \in K\{t\}[X]$; existe-t-il des polynômes $b_i(t) \in K[t]$ approchant suffisamment $a_i(t)$ pour que l'on ait

$$K\{T,X\}/(a_nX^n+\ldots+a_o) \simeq K\{T,X\}/(b_nX^n+\ldots+b_o) \quad ?$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de Bordeaux, 1970.

[2] ESCASSUT Alain. - Complément sur le prolongement analytique dans un corps valué non archimédien complet algébriquement clos. C.R.A.S., Paris, t. 271, pp. 718-721 (12 octobre 1970).

[3] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Krasner. C.R.A.S., Paris, t. 272, pp. 598-601 (1er mars 1971).

[4] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Banach ultramétriques, algèbres de Krasner et algèbres de Krasner-Tate. Table ronde d'analyse ultramétrique du C.N.R.S., Paris, septembre 1972.

[5] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate. Thèse de doctorat d'Etat. Astérisque n°10, octobre 1973.

[6] GERRITZEN Lothar. - Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten affinoiden Algebren. J. reine angew Math., 231, 1968.

[7] GRAUERT Hans et REMMERT Reinhold. - Uber die Methode der diskret bewerteten Ringe in den nicht-archimedischen Analysis. Inventiones Math. t. 2, pp. 87-133, 1966.

[8] GRAUERT Hans. - Affinoide Überdeckungen eindimensionaler, affinoïder Räume. Presses Universitaires de France, Paris, I.H.E.S., Publications mathématiques, n°34, 1968.

[9] GRUSON Laurent. - Algèbres de Banach ultramétriques. (Journées Poitou-Aquitaine, Poitiers, 1967).

[10] GRUSON Laurent. - Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique. Ann. Sc. Ecole Normale Sup., 4e série, t.1, pp. 45-89, 1968.

[11] HOUZEL Charles. - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique (d'après Tate). Colloque Poitou-Aquitaine, 1965.

[12] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque du C.N.R.S., Clermont-Ferrand, 1964.

[13] ROBBA Philippe. - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets ; prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué complet. Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Paris VII, 1972.

[14] SALMON Pietro. - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici (Annali di Matematica pura ed applicata, serie IVT LXV, 1964).

[15] TATE John. - Rigid analytic spaces. Inventiones Math., t.12, fasc.4, pp. 257-289, 1971.

-:-:-:-

Alain ESCASSUT
Université de Bordeaux I
U.E.R. DE Mathématiques et Informatiques
351, cours de la libération

33405 - TALENCE