Mémoires de la S. M. F.

Dang Ngoc Nghiem

Σ^*-algèbres, probabilités non commutatives et applications

Mémoires de la S. M. F., tome 35 (1973), p. 145-189
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__35__145_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 35, 1973, p. 145-189.

Σ^*-ALGEBRES, PROBABILITES NON COMMUTATIVES ET APPLICATIONS

par

DANG NGOC NGHIEM (*)

Résumé.- L'objet de ce travail est d'approfondir l'étude des Σ^*-algèbres introduites par E.B. Davies ; de définir les relations entre les Σ^*-algèbres et les C^*-algèbres, les W^*-algèbres, les espaces mesurables, les σ-algèbres de Boole abstraites ; de donner des applications à la théorie des probabilités non-commutatives, à la théorie d'intégration et de désintégration des représentations et des états d'une C^*-algèbre.

INTRODUCTION.

E.B.Davies a introduit puis développé dans (4), (5) la notion de Σ^*-algèbre ; pour lui une Σ^*-algèbre est une C^*-algèbre A munie d'un ensemble de suite d'éléments de A, ensemble dont les éléments sont appelés "suites faiblement convergentes" et qui satisfait à certains axiomes ; en termes vagues, la différence entre Σ^*-algèbres et W^*-algèbres consiste en ce que les premières sont fermées pour les suites faiblement convergentes alors que les secondes sont fermées pour les filtres faiblement convergents. L'étude de Davies portait essentiellement sur les points suivants : la Σ^*-enveloppe d'une C^*-algèbre (analogue à la W^*-enveloppe, mais plus simple ; par exemple la Σ^*-algèbre enveloppante de C(X), X espace compact, est l'algèbre des fonctions complexes de Baire bornées sur X) ; structure de la Σ^*-algèbre enveloppante d'une C^*-algèbre post-liminaire séparable ; application à l'étude des C^*-algèbres (traces, théorème de Plancherel) ; quelques propriétés des Σ^*-algèbres elles-mêmes (comparaison des projecteurs, σ-traces, théorème de Radon-Nikodym) ; application à l'axiomatique de la Mécanique Quantique (cf.(12)(37)).

Davies a écrit brièvement que les Σ^*-algèbres fournissaient un bon cadre pour la théorie des probabilités non-commutatives ; c'est ce point de vue que nous allons développer dans ce travail ainsi que dans les mémoires ultérieurs ; il convient de souligner que les algèbres des fonctions mesurables bornées sur les espaces

---

(*) Equipe de recherche n° 1 "Processus stochastiques et Applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématique - Informatique" associée au C.N.R.S.

mesurables sont <u>des</u> Σ^*-algèbres commutatives mais pas <u>toutes</u> les Σ^*-algèbres commutatives ; ceci tient au fait qu'une Σ^*-algèbre n'admet pas toujours suffisamment de Σ^*-représentations irréductibles (de même qu'une W^*-algèbre n'admet pas toujours suffisamment de représentations normales irréductibles).

Nous commençons par reprendre la définition des Σ^*-algèbres : il est en effet équivalent et parfois plus pratique de se donner, au lieu de l'ensemble des suites faiblement convergentes $x_n \to x$, l'ensemble des états s tels que $s(x_n) \to s(x)$ dès que $x_n \to x$ (cf.(4)) ; ce point de vue présente beaucoup d'avantages car il permet d'utiliser des notions introduites par divers auteurs ("basic subsets" (46), (47), (48) ; sous-ensembles invariants (13) ; folia (21) et aussi d'introduire une nouvelle relation d'équivalence entre représentations d'une C^*-algèbre, la <u>Σ^*-équivalence</u>, qui est strictement plus faible que la quasi-équivalence (mais elle lui est identique dans le cas des représentations dans des espaces de Hilbert séparables) et dont les classes d'équivalence sont en bijection avec les folia σ-saturés.

Nous faisons ensuite (chapitre B) une étude systématique de la catégorie des Σ^*-algèbres : sous-algèbres, produits, limites inductives, produits tensoriels finis et infinis ; nous montrons comment cette catégorie est reliée à celle des C^*-algèbres et à celle des W^*-algèbres ; nous démontrons les théorèmes de Jordan-Hahn et de Vitali-Hahn-Saks pour les Σ^*-algèbres dénombrablement engendrées.

Au chapitre C, nous étudions en détail les Σ^*-algèbres commutatives et leurs relations avec les σ-algèbres de Boole et les espaces mesurables : nous montrons qu'une Σ^*-algèbre commutative quelconque n'est pas identifiable à un espace mesurable mais seulement à l'image d'un espace mesurable par une Σ^*-représentation ; mais en nous restreignant aux Σ^*-algèbres admettant suffisamment de Σ^*-représentations irréductibles nous démontrons le théorème de Guelfand pour les espaces mesurables. Une autre propriété importante : le Σ^*-produit tensoriel dans la Σ^*-catégorie est très régulier, dans le sens que sur un Σ^*-produit tensoriel infini (qui est limite inductive de Σ^*-produits tensoriels finis) une limite projective de σ-états est toujours un σ-état, tandis que sur un produit infini d'espaces mesurables une limite projective de probabilités n'est pas toujours une probabilité ; ceci implique que sur la sous-catégorie des espaces mesurables ces deux produits ne peuvent coïncider, mais nous avons la coïncidence dans le cas des espaces mesurables usuels (espaces compacts munis de leur tribu de Baire, espaces polonais munis de leur tribu de Borel).

Le chapitre D est consacré à l'étude des intégrales d'états et de représentations des Σ^*-algèbres ; sur certains aspects, les intégrales de représentations des Σ^*-algèbres possèdent de meilleures propriétés que celles des algèbres de Von Neumann ; nous donnons aussi des applications aux désintégrations centrales.

L'auteur exprime toute sa reconnaissance au Professeur A. Guichardet pour l'aide et les encouragements qu'il lui a prodigués tout le long de ce travail.

NOTATIONS.

Nous nous intéressons seulement aux C^*-algèbres unitaires B, pour simplifier l'exposé, B^* désignera le dual de B, B^*_+ la partie positive de B^*, I l'unité de B, E l'ensemble des états sur B i.e. l'ensemble des formes linéaires positives de norme 1.

Soit s un état sur B, on notera π_s, $\mathcal{H}_s$ la représentation de Guelfand-Naimark-Segal associée à s, et ξ_s le vecteur cyclique.

Si S est un sous-ensemble de B^*, (S) désignera l'espace vectoriel complexe engendré par S dans B et $(S)_+$ l'intersection de (S) avec B^*_+.

On appellera espace mesurable tout couple $(X,\mathcal{A})$ composé d'un ensemble X muni d'une σ-algèbre de Boole (ou tribu) $\mathcal{A}$ de parties de X ; nous évitons la terminologie d'espace borélien qui risque de prêter à des confusions, car dans le cas d'un espace topologique X il y a l'espace mesurable de Baire et l'espace mesurable de Borel sous-jacents.

Soient $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, μ une mesure sur $(X,\mathcal{A})$; quand il y a risque de confusion, nous utilisons le qualificatif $\mathcal{A}$-mesurable (resp. μ-mesurable pour désigner la mesurabilité par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{A}$ (resp. par rapport à la mesure μ). On notera $B(X,\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions complexes $\mathcal{A}$-mesurables bornées et $S(X,\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $(X,\mathcal{A})$ (i.e. des mesures positives de norme 1). Si X est un espace compact, on notera $(X,\mathcal{A})$ l'espace mesurable de Baire associé et $B(X) = B(X,\mathcal{A})$ et $S(X) = S(X,\mathcal{A})$; pour $x \in X$, on notera δ_x la mesure de Dirac au point x.

CHAPITRE A : GENERALITES SUR LES PRE- Σ^*-ALGEBRES ET LES Σ^*-ALGEBRES.

A.I.- Sous-ensembles saturés du dual d'une C^*-algèbre.

Soit B une C^*-algèbre, nous noterons $\ell^\infty(B)$ l'ensemble des suites bornées $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ d'éléments de B.

§1. σ-polarité entre B^* et $\ell^\infty(B)$. Sous-ensembles saturés.

Définition 1.- Le σ-polaire d'une partie F de B^* est le sous-ensemble ${}^\sigma F$ de $\ell^\infty(B)$ formé de suites $\{b_n\}$ telles que $<f,b_n>$ converge pour tout $f \in F$; le σ-polaire d'une partie Γ de $\ell^\infty(B)$ est le sous-ensemble ${}^\sigma\Gamma$ de B^* formé des formes linéaires f telles que $<f,b_n>$ converge pour toute suite $\{b_n\}$ de Γ.

Les applications $F \to {}^\sigma F$ et $\Gamma \to {}^\sigma\Gamma$ sont décroissantes et on a pour tout $F \subset B^*$ et tout $\Gamma \subset \ell^\infty(B)$: $F \subset {}^{\sigma\sigma}F$, ${}^\sigma F = {}^{\sigma\sigma\sigma}F$, $\Gamma \subset {}^{\sigma\sigma}\Gamma$, ${}^\sigma\Gamma = {}^{\sigma\sigma\sigma}\Gamma$.

Définition 2.- Un sous-ensemble X de B^* ou de $\ell^\infty(B)$ sera dit σ-saturé si ${}^{\sigma\sigma}X = X$.

Les applications $F \to {}^\sigma F$ et $\Gamma \to {}^\sigma\Gamma$ définissent deux correspondances bijectives réciproques entre sous-ensembles σ-saturés de B^* et de $\ell^\infty(B)$.

Propriétés immédiates des sous-ensembles σ-saturés :

Toute intersection de sous-ensembles σ-saturés de B^* ou de $\ell^\infty(B)$ est σ-saturé ; pour tout sous-ensemble X de B^* ou de $\ell^\infty(B)$, ${}^{\sigma\sigma}X$ est le plus petit sous-ensemble σ-saturé contenant X, appelé le σ-saturé de X.

Les sous-ensembles σ-saturés de B^* forment un treillis complet dont le plus grand et le plus petit éléments sont respectivement B^* et $\{0\}$.

Définition 3.- Un sous-ensemble S de E sera dit σ-saturé si $S = ({}^{\sigma\sigma}S) \cap E$; tout sous-ensemble σ-saturé de E est convexe et fermé en norme.

§2. Sous-ensembles invariants saturés.

Introduisons quelques définitions inspirées de (13) ; un sous-ensemble F de B^* est dit bi-invariant si pour tout $\phi \in F$ et out $a \in B$, les formes linéaires $b \to < \phi , ab >$ et $b \to < \phi ,ba >$ appartiennent à F. Un sous-ensemble S de E, de B^*_+ ou de B^* est dit invariant si pour tout $s \in S$ et tout $a \in B$ vérifiant $< s,a^*a >= 1$, la forme linéaire $b \to <s,a^*ba>$ appartient à S. Un folium est un sous-ensemble de E qui est convexe, invariant et fermé en norme.

L'application $F \to F \cap E$ induit une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés en norme et bi-invariants de B^* sur l'ensemble des folia ; l'application réciproque est $S \to (S)$ (cf.(13)).

Proposition 1.- Si l'on se restreint aux sous-ensembles σ-saturés invariants on obtient des correspondances bijectives entre

a) l'ensemble des folia σ-saturés S de E.

b) l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés en norme bi-invariants et σ-saturés F de B^*.

c) l'ensemble des sous-ensembles Γ de $\ell^\infty(B)$ qui sont σ-saturés et possédant la propriété suivante : si $\{b_n\}$ Γ et a B alors $\{ab_n\}$ et $\{b_n a\}$ appartiennent à Γ(Γ est bi-invariant).

Les correspondances sont données par :

$S \to F = (X)$ $\quad$ $F \to S = F \cap E$

$S \to \Gamma = {}^{\sigma}S$ $\quad$ $F \to S = {}^{\sigma}\Gamma \cap E$

$F \to \Gamma = {}^{\sigma}F$ $\quad$ $\Gamma \to F = {}^{\sigma}\Gamma$

Toute intersection de folia σ-saturés est un folium σ-saturé ; si S est un sous-ensemble invariant de E, ${}^{\sigma\sigma}S$ E est le plus petit folium σ-saturé contenant S, appelé folium σ-saturé engendré par S ; l'ensemble des folia σ-saturés de E est un treillis complet dont le plus grand et le plus petit élément sont respectivement E et l'ensemble vide.

<u>Démonstration</u>.- Remarquons d'abord que si X et X' sont deux sous-ensembles de B^* engendrant un même sous-espace vectoriel, alors ${}^{\sigma}X = {}^{\sigma}X'$.

α) Soit S un folium σ-saturé de E, soit $F = (S)$, on a donc :

${}^{\sigma}F = {}^{\sigma}S$ et $({}^{\sigma\sigma}F) \cap E = ({}^{\sigma\sigma}S) \cap E = S = F \cap E$.

Les deux sous-espaces invariants fermés en norme ${}^{\sigma\sigma}F$ et F ont la même intersection S avec E, ils sont donc égaux (cf. (13), Corol. 4-11), F est bien un sous-espace invariant σ-saturé de B^*.

β) Soit F un sous-espace invariant σ-saturé de B^*, soit $S = F \cap E$, S est un folium et $F = (X)$, d'où :

${}^{\sigma}S = {}^{\sigma}F$ et $({}^{\sigma\sigma}S) \cap E = ({}^{\sigma\sigma}F) \cap E = F \cap E = S$; S est bien un folium σ-saturé. Le reste de la démonstration est laissé au soin du lecteur.

<u>Remarques</u> : 1). Pour les sous-espaces vectoriels de B^*, les notions de bi-invariance et d'invariance coïncident ; on peut le démontrer en utilisant l'égalité classique suivante :

$$b^* \times a = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon = 1,-1,i-i} \varepsilon(a+\varepsilon b)^* \, (a+\varepsilon b) \quad \text{pour } a,b,x \in B.$$

2). La notion de folium a été introduite d'abord par Takeda (cf. (46, (47), (48)) sous le nom de "basic subset" (non nécessairement séparant), puis par Haag, Kadison & Kastler (cf. (21)) ; la proposition 1 permet d'utiliser les résultats de (13) et (21).

A.II. Pré- Σ^*-algèbres et Σ^*-algèbres.

§1. Définitions et généralités.

Définition 1.- On appelle pré- Σ^*-algèbre tout couple (B,S) où B est une C^*-algèbre unitaire et S un folium σ-saturé de B. D'après la propositinn A.I.1, il revient au même de se donner un sous-espace vectoriel fermé en norme, bi-invariant et σ-saturé de B^*, ou encore un sous-ensemble $\Gamma(\doteq {}^{\sigma}S)$ de $\ell^{\infty}(B)$ σ-saturé et bi-invariant. Une pré- Σ^*-algèbre (B,S) est dite séparée si la topologie faible $\sigma(B,S)$ est séparée (ou encore si S sépare les points de B).

Dans toute la suite, la topologie $\sigma(B,S) = \sigma(B,(S))$ sera appelée la topologie faible ; les suites bornées faiblement de Cauchy sont exactement les éléments de ${}^{\sigma}\Gamma = (S)$ (resp. ${}^{\sigma}\Gamma \quad E = S$) et seront appelés les σ-formes linéaires (resp. les σ-états). Si en particulier on prend $S = E$, $\sigma(B,S)$ n'est autre que la topologie affaiblie de B. On peut alors donner des Σ^*-algèbres la définition suivante :

Définition 2.- Une Σ^*-algèbre est une pré- Σ^*-algèbre séparée (B,S) telle que B soit faiblement séquentiellement complète i.e. si $\{b_n\}$ est une suite de B telle que $< s,b_n >$ converge pour tout $s \in S$, il existe un $b \in B$ tel que $<s,b_n> \to <s,b> \; \forall s \in S$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, une telle suite $\{b_n\}$ est nécessairement bornée en norme (B se plonge isométriquement dans $(S)^*$) et la propriété précédente revient à dire que la boule unité de B est faiblement séquentiellement complète.

(L'équivalence entre la définition 2 et celle de Davies résulte du fait que les sous-ensembles Γ utilisés par Davies sont exactement les ensembles ${}^{\sigma}S$ où S est un folium σ-saturé invariant vérifiant les conditions de la définition 2 et de l'égalité :

$$b^* \times a = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon=1,-1,i,-i} \varepsilon(a+\varepsilon b)^* \quad \varepsilon(a+\varepsilon b) \;, \quad \forall a,b \times \in B \;;$$

de plus sur une Σ^*-algèbre les notions de suites faiblement de Cauchy et de suites faiblement convergentes coïncident).

Définition 3.- Soient (B,S) et (B_1,S_1) deux pré- Σ^*-algèbres, un Σ^*-morphisme π de B dans B_1 est un $*$-morphisme transformant toute suite faiblement de Cauchy en une suite faiblement de Cauchy. Un Σ^*-isomorphisme est un $*$-isomorphisme bi-continu pour les topologies faibles.

Comme le composé de deux Σ^*-morphismes est un Σ^*-morphisme, on pourra parler de la catégorie des pré- Σ^*-algèbres ou pré- Σ^*-catégorie et de la Σ^*-catégorie.

Proposition 1.- Soient (B,S) et (B_1,S_1) deux pré-Σ^*-algèbres, π un $*$-morphisme de B dans B_1 ; les conditions sont équivalentes :

i). π est un Σ^*-morphisme.

ii). $\pi^*((S_1)) \subset (S)$.

iii). $\pi^*(S_1) \subset S$.

iv). π est faiblement continu.

Démonstration.- laissée au soin du lecteur. ■

§2. Exemples de pré- Σ^*-algèbres et de Σ^*-algèbres.

a). Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, soient $B(X,\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées sur $(X,\mathcal{A})$ et $S(X,\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités de $(X,\mathcal{A})$, Davies (cf.(4)) a démontré que $(B(X,\mathcal{A}), S(X,\mathcal{A}))$ est une Σ^*-algèbre.

b). Soit μ une probabilité sur $(X,\mathcal{A})$, soit S_μ l'ensemble des probabilités absolument continues par rapport à μ, il est facile de vérifier que $(B(X,\mathcal{A}),S\ )$ est une pré- Σ^*-algèbre.

c). Soit B une C^*-algèbre, le couple (B,E) est une pré- Σ^*-algèbre canonique.

d). Soient A une algèbre de Von Neumann, $F = A_*$ son prédual ; F est un sous-espace vectoriel de A^*, fermé en norme et invariant (on verra qu'il n'est pas σ-saturé en général (cf. A.II.§9 Remarque e) ; $S = {}^{\sigma\sigma}F \cap E$ est le folium σ-saturé engendré par F (Prop. A.I.1), la topologie $\sigma(A,S)$ est plus fine que la topologie ultra-faible $\sigma(A,F)$ mais ces deux topologies ont les mêmes suites convergentes ; la pré-Σ^*-algèbre (A,S) est en fait une Σ^*-algèbre, car S est séparant et la boule unité de A est séquentiellement complète pour $\sigma(A,S)$ puisqu'elle est compacte pour $\sigma(A,F)$. La Σ^*-algèbre ainsi obtenue sera appelée Σ^*-algèbre sous-jacente à la W^*-algèbre A.

e). Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, B une C^*-algèbre d'opérateurs de $\mathcal{H}$, séquentiellement complète pour la topologie faible des opérateurs, Γ l'ensemble des suites faiblement convergentes de B, alors ${}^{\sigma}\Gamma$ est un folium σ-saturé et $(B, {}^{\sigma}\Gamma)$ est une Σ^*-algèbre (cf. (4)) ; une telle Σ^*-algèbre d'opérateurs sera dite concrète, en particulier $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une Σ^*-algèbre concrète. Davies a montré ((4)) qu'une Σ^*-algèbre quelconque (B,S) admet une réalisation concrète : il suffit de prendre la représentation $\pi_S = \bigoplus_{s \in S} \pi_s$ dans $\mathcal{H}_S = \bigoplus_{s \in S} \mathcal{H}_s$ où π_s, $\mathcal{H}_s$ sont les éléments de la représentation cyclique associée à l'état s.

§3. Sous-pré- Σ^*-algèbres.

Proposition 2.- Soient (B,S) une Σ^*-algèbre, B_o une sous-C^*-algèbre, π_o l'injection canonique de B_o dans B, S_o le folium σ-saturé engendré par $\pi_o^*(S)$; alors (B_o,S_o) est une pré- Σ^*-algèbre et π_o est un Σ^*-morphisme de B_o dans B possédant la propriété universelle suivante :

Si π_1 est un Σ^*-morphisme d'une pré- Σ^*-algèbre (B_1,S_1) dans (B,S) tel que $\pi_1(B_1) \subset B_o$ alors π_1 est un Σ^*-morphisme de (B_1,S_1) dans (B_o,S_o).

De plus on a : $S_o = \{s$ état sur $B_o/s(x_n)$ converge, $\forall \{x_n\} \in {}^\sigma S$ avec $x_n \in B_o\}$.

Si B_o est séquentiellement faiblement fermée alors (B_o,S_o) est une Σ^*-algèbre.

Démonstration : Soit $S_o' = \{s$ étant sur $B_o/s(x_n)$ converge $\forall \{x_n\} \in {}^\sigma S$ avec $x_n \in B_o\}$ d'après Prop. A.I.1, S_o' est le folium σ-saturé de B_o engendré par $\pi_o^*(S)$, d'où $S_o' = S_o$.

Si la C^*-algèbre B_o est séquentiellement complète pour la topologie $\sigma(B,S)$, elle l'est aussi pour la topologie $\sigma(B_o,S_o)$ puisque les suites convergentes de B_o pour les topologies $\sigma(B_o,S_o)$ et $\sigma(B_o,S)$ sont les mêmes par définition de $S_o' = S_o$.

Propriété universelle de (B_o,S_o) : par hypothèse $\pi_1({}^\sigma S_1) \subset {}^\sigma S$, donc $\pi_1({}^\sigma S_1) \subset {}^\sigma S_o$ puisque ${}^\sigma S|_{B_o} = {}^\sigma S_o$, π_1 est bien un Σ^*-morphisme de B_1 dans B_o d'après la proposition 1.

Définition 4.- On dira que la pré- Σ^*-algèbre (B_o,S_o) de la proposition précédente est une sous-pré- Σ^*-algèbre de (B,S).

On remarquera qu'en général $\pi_o^*(S)$ n'est pas σ-saturé, ce qui revient à dire qu'un σ-état sur une sous- Σ^*-algèbre n'est pas toujours prolongeable en un σ-état sur la grande Σ^*-algèbre : Prenons $B = B(I,\mathcal{P})$ où $I = (0,1)$, $\mathcal{P}$ = l'ensemble de toutes les parties de I et $B_o = B(I,\mathcal{B})$ l'ensemble des fonctions (Baire) mesurables bornées de I, $\mathcal{B}$ étant la tribu de Baire, d'après un résultat de Banach-Kuratowski (cf. (1)), la mesure de Lebesgue sur $(I,\mathcal{B})$ n'est pas prolongeable sur $(I,\mathcal{P})$ ($(I,\mathcal{P})$ n'admet que des mesures discrètes).

§4. Σ^*-représentations.

Définition 5.- Une Σ^*-représentation d'une Σ^*-algèbre (B,S) dans un Hilbert $\mathcal{H}$ est un Σ^*-morphisme π de B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors tout état de B

associé à π est un σ-état ; réciproquement la représentation déduite d'un σ-état par la construction de Gelfand-Naimark-Segal est une Σ^*-représentation.

La somme d'une famille de Σ^*-représentations est une Σ^*-représentation.

Définition 6.- La représentation $\pi_S = \boxplus_{s \in S} \pi_s$ de (B,S) dans $\mathcal{H}_S = \boxplus_{s \in S} \mathcal{H}_s$ est appelée représentation universelle de (B,S).

§5. W^*-algèbre enveloppante d'une pré- Σ^*-algèbre.

Propositinn 3.- Soit (B,S) une pré- Σ^*-algèbre ; posons $\pi_S = \boxplus_{s \in S} \pi_s$, $\mathcal{H}_S = \boxplus_{s \in S} \mathcal{H}_s$, $B''_S = \pi_S(B)''$ = algèbre de Von Neumann engendrée par $\pi_S(B)$; le couple formé par B''_S et π_S, considérée comme Σ^*-morphisme de B dans B''_S, est appelé W^*-algèbre enveloppante de (B,S) et possède despropriétés suivantes :

i). Si S est séparant, π_S est injectif et on peut considérer B comme une sous-pré- Σ^*-algèbre de B''_S.

ii). Si (B,S) est une Σ^*-algèbre, π_S est un Σ^*-isomorphisme de B sur son image ; on voit donc que toute Σ^*-algèbre est Σ^*-isomorphe à une Σ^*-algèbre concrète (cf. (4)). Par suite les combinaisons linéaires de projecteurs d'une Σ^*-algèbre sont normiquement denses dans cette Σ^*-algèbre.

iii). (propriété universelle) Pour tout Σ^*-morphisme π de B dans une W^*-algèbre A il existe un W^*-morphisme unique $\rho : B''_S \to A$ tel que $\rho \circ \pi_S = \pi$. Ceci montre que le forcteur "W^*-algèbre enveloppante" $\mathcal{F}_{\Sigma^* W^*} : (B,S) \to B''_S$ est adjoint à gauche au foncteur "Σ^*-algèbre sous-jacente" et par conséquent permute aux limites droites (cf. (33)).

iv). S s'identifie à l'ensemble des états normaux de B''_S, et (S) est isométriquement isomorphe au prédual de B''_S.

Démonstration.- Les propriétés (i), (ii) sont immédiates :

iii). Soit $S_\pi = \{s$ état sur $B \mid s = \tilde{s} \circ \pi$, $\tilde{s}$ état normal sur $A\}$, π étant un Σ^*-morphisme, on a $S_\pi \subset S$ (prop. 1 et §2-d)), π est donc quasi-contenue dans π_S (cf. (13) Th. 5-3) ; (iii) en résulte.

iv). On remarque que si $\tilde{s}$ est une forme linéaire ultrafaiblement continue de B''_S et si $s = \tilde{s} \circ \pi_S$ alors on a $||s|| = ||\tilde{s}||$ (l'inégalité $||s|| \leq ||\tilde{s}||$ est immédiate, l'inégalité inverse résulte du théorème de densité de Kaplansky : la boule unité de $\pi_S(B)$ est faiblement dense dans celle de B''_S).

§6. Σ^*-algèbre séparée complétée d'une pré-Σ^*-algèbre.

Théorème 1.- Soit (B,S) une pré-Σ^*-algèbre (séparée ou non) ; il existe une Σ^*-algèbre (B_S,S) et un Σ^*-morphisme π_S de B dans $\tilde{B}_S$ d'image séquentiellement faiblement dense. La Σ^*-algèbre $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ et le Σ^*-morphisme π_S possédant la propriété universelle suivante :

Pour tout Σ^*-morphisme π de (B,S) dans une Σ^*-algèbre (B_1,S_1), il existe un unique Σ^*-morphisme $\tilde{\pi}$ de $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ dans (B_1,S_1) tel que $\pi = \tilde{\pi}\circ\pi_S$.

La Σ^*-algèbre $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ est unique, à un Σ^*-isomorphisme près, à posséder cette propriété ; on l'appelle la Σ^*-algèbre séparée complétée de (B,S) ; si de plus (B,S) est séparée alors π_S est injectif et est un Σ^*-isomorphisme de B sur son image.

Démonstration : Considérons la représentation $\pi_S = \bigoplus_{s\in S} \pi_s$, $\mathcal{H}_S = \bigoplus_{s\in S} \mathcal{H}_s$. Soit $\tilde{B}_S$ la fermeture séquentielle faible de $\pi_S(B)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$, soit $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ la Σ^*-algèbre concrète associée, π_S est une Σ^*-morphisme de B dans $\tilde{B}_S$, il en résulte que $\pi_S^*(\tilde{S}) \subset S$ mais en fait on a $\pi_S^*(S) = S$ par construction même de π_S, cette égalité implique que si (B,S) est séparée alors π_S est injectif et est un Σ^*-isomorphisme de B sur son image.

Il nous reste à démontrer la propriété universelle de $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ pour cela nous allons nous servir de la propriété universelle des algèbres de Von Neumann B''_S et $B''_{1_{S_1}}$ associées par la proposition 3 ; on a :

$$\tilde{B}_S \subset B''_S \quad \text{et} \quad B''_S = (\tilde{S})^*$$

$$B_1 \subset B''_{S_1} \quad \text{et} \quad B''_{1_{S_1}} = (S_1)^*.$$

D'après (iii) Prop. 3 il existe un morphisme normal $\tilde{\pi}''$ de B''_S dans $B''_{1_{S_1}}$ tel que $\pi = \tilde{\pi}''.\pi_S$.

Montrons que $\tilde{\pi}''(\tilde{B}_S) \subset B_1$: considérons $(\pi'')^{-1}(B_1)$, cet ensemble est séquentiellement fermé dans B''_S pour la topologie faible $\sigma(B''_S,S)$ et il contient $\pi_S(B)$, il contient donc $\pi_S(B)$, il contient donc $\tilde{B}_S$ qui est le plus petit ensemble séquentiellement faiblement fermé de B''_S contenant $\pi_S(B)$, donc $\tilde{\pi}''(\tilde{B}_S) \subset B_1$; soit $\tilde{\pi}$ la restriction de $\tilde{\pi}''$ à $\tilde{B}_S$, $\tilde{\pi} : \tilde{B}_S \to B_1$, $\tilde{\pi}^*(S_1) = \pi^*(S_1) \subset S$, π est un Σ^*-morphisme de $\tilde{B}_S$ dans B_1 (Prop. 1) vérifiant $\pi = \tilde{\pi}\circ\pi_S$.

En combinant la proposition 3 et le théorème 1 on obtient :

Théorème 2 : Soit (B,S) une pré-Σ^*-algèbre ; il y a des correspondances bijectives entre :

- les Σ^*-représentations de (B,S)

- les Σ^*-représentations de $(\hat{B}_S,\tilde{S})$, la Σ^*-algèbre séparée complétée de (B,S)

- les représentations normales de B''_s, l'algèbre de Von Neumann enveloppante de (B,S).

§7. Σ^*-algèbre enveloppante d'une C^*-algèbre.

La Σ^*-algèbre enveloppante (A,E) d'une C^*-algèbre A peut être définie comme suit (cf.(4)) : $\tilde{A}$ est la fermeture séquentielle faible de A dans sa W^*-algèbre enveloppante A^{**} et $\tilde{E}$ est le folium σ-saturé engendré par les états normaux ; l'application $s \to s|_A$ est une bijection de $\tilde{E}$ sur l'ensemble des états de A ; étant donné une Σ^*-algèbre C, l'application $u \to u|_A$ est une bijection de l'ensemble des Σ^*-morphismes $\tilde{A} \to C$ sur l'ensemble des $*$-morphismes $A \longrightarrow C$. On peut dire que $(\tilde{A},\tilde{E})$ est la Σ^*-algèbre complétée de la pré- Σ^*-algèbre (A,E) où E est l'ensemble de tous les états de A. Le foncteur " Σ^*-algèbre enveloppante" est adjoint à gauche au foncteur qui associe à toute Σ^*-algèbre la C^*-algèbre sous-jacente; par suite il permute aux limites droites (cf. (33)).

On notera que la W^*-algèbre enveloppante d'une C^*-algèbre n'est autre que la W^*-algèbre enveloppante de sa Σ^*-algèbre enveloppante.

§8. Rappel de quelques résultats de Davies.

Nous donnons ici un bref rappel des résultats de Davies qui nous serviront constamment dans la suite (cf. (4)(5)).

Définition 7.- Une Σ^*-algèbre (B,S) est dite dénombrablement engendrée s'il existe une partie dénombrable de B telle que B soit le plus petit sous-ensemble séquentiellement faiblement fermé contenant cette partie ; il est équivalent de dire qu'il existe une partie dénombrable telle que B soit la plus petite Σ^*-algèbre contenant cette partie.

Ainsi, la Σ^*-algèbre enveloppe d'une C^*-algèbre séparable (en norme) est dénombrablement engendrée (mais non séparable en norme en général) ; les Σ^*-algèbres concrètes sur un Hilbert séparable sont dénombrablement engendrées.

Remarque : Une sous- Σ^*-algèbre d'une Σ^*-algèbre dénombrablement engendrée n'est pas toujours dénombrablement engendrée ; on peut le montrer en partant de l'exemple suivant : la tribu de Baire de (0,1) est dénombrablement engendrée mais la sous-tribu formée des ensembles dénombrables et leurs complémentaires ne l'est pas.

Lemme 1 (Davies).- a). Si ϕ est une Σ^*-représentation non dégénérée de (B,S) dans un Hilbert séparable $\mathcal{H}$; alors $\phi(B)$ est une algèbre de Von Neumann.

b). Les éléments de la décomposition polaire d'un élément $a \in B$ sont dans B.

Supposons de plus que (B,S) est dénombrablement engendrée, alors on a :

i). Tout élément a de B possède un support central.

ii). Soient e et f deux projecteurs de B, alors il existe un projecteur central g tel que : $eg \prec fg$ et $e(1-g) \succ f(1-g)$.

iii). Si s est un σ-état, alors $\mathcal{H}_s$ est séparable et $\pi_s(B)$ est une algèbre de Von Neumann.

iv). Si ϕ est une Σ^*-représentation de (B,S) dans un Hilbert séparable ; alors ϕ (centre de B) = Centre de $\phi(B)$.

§9. Représentations et folia σ-saturés :

Considérons une C^*-algèbre unitaire B, nous allons définir sur les représentations non dégénérées de B une nouvelle relation d'équivalence qui nous sera très utile dans la suite.

Notations : Si π est une représentation de B dans un Hilbert $\mathcal{H}$, $\pi(B)''$ désignera la fermeture faible de $\pi(B)$, S_π l'ensemble des états associés à (i.e. de la forme $s_o \circ \pi$, s_o état normal sur $\pi(B)''$), $\tilde{S}_\pi$ le folium σ-saturé engendré par S_π et

$$\Gamma_\pi = \{\{b_n\} \in \ell^\infty(B) \mid \pi(b_n) \text{ converge faiblement dans } \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Il est clair que $\tilde{S}_\pi = {}^\sigma\Gamma_\pi$ et $\Gamma_\pi = {}^\sigma\tilde{S}_\pi = S_\pi = {}^\sigma S_\pi$.

La C^*-algèbre $\pi(B)$ est munie de la structure de pré- Σ^*-algèbre concrète.

Définition 8.- Soient π_1 et π_2 deux représentations non dégénérées de B dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, on dit que π_1 est Σ^*-contenue dans π_2 et on note $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_2$, s'il existe un Σ^*-morphisme $\tilde{\pi}$ de $\pi_2(B)$ dans $\pi_1(B)$ tel que : $\pi_1 = \tilde{\pi} \circ \pi_2$.

On dit que π_1 est Σ^*-équivalente à π_2 et on note $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\sim} \pi_2$ s'il existe un Σ^*-morphisme $\tilde{\pi}$ de $\pi_2(B)$ sur $\pi_1(B)$ tel que $\pi_1 = \tilde{\pi} \circ \pi_2$.

Il est facile de vérifier que $\overset{\Sigma^*}{\sim}$ est une relation d'équivalence et que $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\sim} \pi_2$ si et seulement si $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_2$ et $\pi_2 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_1$.

Théorème 3.- Soient B une C^*-algèbre, π_1 et π_2 deux représentations non dégénérées de B dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Alors :

a). $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_2$ si et seulement si $\tilde{S}_{\pi_1} \subseteq \tilde{S}_{\pi_2}$ (ou $\Gamma_{\pi_1} \supseteq \Gamma_{\pi_2}$).

b). $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\sim} \pi_2$ si et seulement si $\tilde{S}_{\pi_1} = \tilde{S}_{\pi_2}$ (ou $\Gamma_{\pi_1} = \Gamma_{\pi_2}$).

c). La quasi-contenance (resp. quasi-équivalence) implique la Σ^*-contenance (resp. Σ^*-équivalence) et elle lui est identique si on se restreint aux représentations dans les espaces de Hilbert séparables.

d). Les classes de Σ^*-équivalence des représentations non-dégénérées de B sont en bijection avec les folia σ-saturés de B.

Démonstration.- Soit π une représentation de B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, il est immédiat d'après le théorème 1, que les représentations π et $\pi_{\tilde{S}_\pi}$ sont Σ^*-équivalentes, les propriétés a), b), et d) en résultent.

Les propriétés a), b) et $\tilde{S}_{\pi_i} = {}^{\sigma\sigma}S_{\pi_i} \cap E$ montrent que la relation $\pi_1 \subseteq \pi_2$ (ou $S_{\pi_1} \subseteq S_{\pi_2}$) implique $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_2$ (ou $\tilde{S}_{\pi_1} \subseteq \tilde{S}_{\pi_2}$).

Supposons maintenant que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont séparables et $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_2$, pour montrer que $\pi_1 \subseteq \pi_2$, il nous suffit de montrer que $S_{\pi_i} = \tilde{S}_{\pi_i}$; $i = 1,2,$.

Lemme 2.- Si π est une représentation non dégénérée de B dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$; alors $S_\pi = \tilde{S}_\pi$ et par conséquent S_π est un folium σ-saturé.

Démonstration du lemme : On sait que $S_\pi \subseteq \tilde{S}_\pi$, soit $s \in \tilde{S}_\pi$:

α) s s'annule sur Ker π : soit $b \in$ Ker π , considérons la suite

$$\begin{cases} b_{2n+1} = 0 \\ b_{2n} = b \end{cases}$$

il est clair que $\{b_n\} \in {}^{\sigma}S$, il s'ensuit que $\langle s,b_n\rangle \to 0$, donc $\langle s,b\rangle = 0$.
Il existe donc un état $\tilde{s}$ sur $\pi(B)$ tel que $s = \tilde{s}\circ\pi$.

β) Soit $\{\pi(y_n)\}$ une suite de $\pi(B)$ convergeant faiblement dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $K \geq 0$ tel que :

$$\sup_n ||(y_n)|| \leq K<\infty .$$

Considérons la décomposition canonique de l'application π ,
$\pi : B \xrightarrow{p} B/\text{Ker} \xrightarrow{i} \pi(B)$, i étant un isomorphisme de C^*-algèbres, donc $||\pi(y_n)|| = \inf_{j,\ \text{Ker}\ \pi} ||\ y_n+j\ ||$; on peut trouver une suite $\{x_n\}$ dans B telle que $\pi(x_n) = \pi(y_n)$ et $\sup_n (||x_n||) \leq 2K < \infty$. Il est immédiat que $\{x_n\}$ ${}^{\sigma}S_\pi$, donc $\langle s,x_n\rangle$ converge, autrement dit $\langle\tilde{s},y_n\rangle$ converge.

La boule unité de $\pi(B)$ est métrisable pour la topologie faible des opérateurs, puisque $\mathcal{H}$ est séparable, et d'après le théorème de densité de Kaplansky, elle est faiblement dense dans la boule unité de $\pi(B)''$; d'après ce qui précède $\tilde{s}$ est faiblement continu sur la boule unité de $\pi(B)$, il se prolonge en un état normal sur $\pi(B'')$ et par suite $s \in S_\pi$ et $S_\pi = \tilde{S}_\pi$. ∎

Remarques : a). La Σ^*-équivalence est strictement plus faible que la quasi-équivalence : soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, le folium engendré par les mesures de Dirac est formé de mesures discrètes positives de masse 1 , il diffère de l'ensemble des probabilités sur $(X,\mathcal{A})$ en général (si $(X,\mathcal{A})$ possède des probabilités diffuses par exemple) ; d'un autre côté il est facile de voir que le folium σ-saturé engendré par les mesures de Dirac est exactement l'ensemble des probabilités ; ainsi, en général, la représentation atomique (= $\bigoplus_{x\in X}\pi_{\varepsilon_x}$) est Σ^*-équivalente mais non quasi-équivalente à la représentation universelle.

b). Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, μ une mesure diffuse sur X, la représentation π_μ n'est pas quasi-contenue dans la représentation atomique, mais elle est Σ^*-contenue dans cette dernière, d'après la remarque précédente.

c). Soit $\widetilde{\pi_i(B)}$, $i = 1,2$,, la fermeture séquentielle faible de $\pi_i(B)$, on pourrait définir $\pi_1 \overset{\Sigma^{*\prime}}{\subseteq} \pi_2$ si et seulement si il existe un Σ^*-morphisme π de $\pi_2(B)$ dans $\pi_1(B)$ tel que $\pi_1 = \pi\circ\pi_2$. On démontre facilement les implications $(\pi_1 \subseteq \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \overset{\Sigma^{*\prime}}{\subseteq} \pi_2)$ et $(\pi_1 \overset{\Sigma^{*\prime}}{\subseteq} \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \overset{\Sigma^*}{\subseteq} \pi_2)$mais je ne sais pas si la dernière implication admet une réciproque, ce problème est d'ailleurs équivalent au suivant : Soient A une sous-C^*-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\tilde{A}$ sa fermeture séquentielle faible, un σ-état sur la pré- Σ^*-algèbre concrète A se prolonge-t-il en un σ-état sur la Σ^*-algèbre $\tilde{A}$? Ce problème admet une solution positive si $\mathcal{H}$ est séparable ou si A et $\tilde{A}$ proviennent des espaces mesurables dans ce cas, le problème se réduit au problème de prolongement d'une mesure dont la démonstration n'est pas du tout triviale.

d). Davies (cf. (4)) a démontré que la représentation universelle d'une C^*-algèbre est Σ^*-équivalente à sa représentation atomique.

e). Le prédual d'une algèbre de Von Neumann n'est pas toujours σ-saturé : soit B une C^*-algèbre telle que $\tilde{B} \neq B''$, soit E l'ensemble des états sur B, E s'identifie à l'ensemble des états normaux sur B'' ; si E était σ-saturé relativement à B'', la Σ^*-algèbre canonique (B'',E) posséderait la propriété universelle de la Σ^*-algèbre enveloppante de B ce qui contredirait l'hypothèse $\tilde{B} \neq B''$.

CHAPITRE B : ETUDE DES Σ^*-ALGEBRES.

Nous allons étudier dans ce chapitre les opérations élémentaires sur les Σ^*-algèbres, ainsi que les théorèmes de Jordan-Hahn et de Vitali-Haln-Saks pour les Σ^*-algèbres dénombrablement engendrées.

B.I. Produits de Σ^*-algèbres.

Soit $(B_j,S_j)_{j\in J}$ une famille de Σ^*-algèbres, réalisons les (B_j,S_j) dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_j$. Soient $\mathcal{H} = \underset{j\in J}{\boxplus} \mathcal{H}_j$ et $B = \prod_{j\in J} B_j = \{(a_j)_{j\in J}/a_j \in B_j\ ,\ \sup_j \|a_j\| < \infty\}$, E_j la projection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_j$; il est clair que E_j est dans le centre de $\prod_j B_j$ (E_j permute avec les éléments de $\prod_j B_j$ et $E_j \in \prod_j B_j$). Notons π_j le $*$-morphisme surjectif canonique de $\prod_j B_j$ sur B_j.

Proposition 1.- La C^*-algèbre $B = \prod_j B_j$ est une Σ^*-algèbre (opérant sur $\mathcal{H}$), les morphismes π_j sont des Σ^*-morphismes , S désignera l'ensemble des σ-états sur B. La Σ^*-algèbre (B,S) et les Σ^*-morphismes π_j sont solution du problème universel suivant :

Trouver une Σ^*-algèbre (B,S) et des Σ^*-morphismes $\pi_j : B \to B_j$, tels que si $\tilde{\pi}_j$ est une famille de Σ^*-morphismes d'une Σ^*-algèbre (B_o,S_o) dans (B_j,S_j) alors il existe un Σ^*-morphisme unique $\tilde{\pi} : (B_o,S_o) \to (B,S)$ tel que $\tilde{\pi}_j = \pi_j \circ \tilde{\pi}$.

Autrement dit, (B,S) est le produit des (B_j,S_j), on notera $(B,S) =$ $(B,S) = \prod_j (B_j,S_j)$.

Démonstration : Remarquons d'abord que si $a^n = (a_j^n)_{j\in J}$ est une suite de B, alors a^n converge vers $a = (a_j)_{j\in J}$ faiblement si et seulement si $a_j^n \to a_j$ faiblement, $j \in J$.

Il est clair que B est une C^*-algèbre, montrons d'abord que B est séquentiellement faiblement fermée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: soit $a^n = (a_j^n)_{j\in J}$ une suite de B convergeant faiblement dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vers $a = (a_j)$, $\|a\| \le \sup \|a^n\| = \sup_n \|a_j^n\| \le K \le \infty$, on a donc $a_j^n \to a_j$ faiblement pour tout $j \in J$, comme B_j est séquentiellement faiblement complète $a_j \in B_j$ et par suite $a = (a_j)_{j\in J} \in B$.

Le reste de la démonstration découle de la définition des Σ^*-morphismes et de la remarque précédente.

Le centre Z de $\prod_{j\in J} (B_j,S_j)$ est l'ensemble des $(z_j)_{j\in J}$ de $\prod_j B_j$ tels que z_j permute avec les éléments de B_j, autrement dit $z_j \in Z_j$ centre de B_j et on a $Z = \prod_j Z_j$; de plus les $E_j \in Z_j$ sont deux à deux orthogonaux et de somme (au sens faible) I.

Nous nous proposons d'étudier la réciproque : soit (B,S) une Σ^*-algèbre soit $(E_j)_{j\in J}$ une famille de projecteurs hermitiens deux à deux orthogonaux de de centre Z de B, telle que $I = \sum_{j \in J} E_j$ (sommation au sens faible), soit $B_j = E_j B$, on peut montrer que B_j est faiblement séquentiellement fermé dans B et qu'on peut le munir d'une structure de Σ^*-algèbre canonique (B_j, S_j) et que dans le cas où J est <u>dénombrable</u> (cette hypothèse est essentielle) on a $(B,S) = \prod_{j \in J} (B_j, S_j)$.

<u>Lemme 1</u> : Soient (B,S) une Σ^*-algèbre, E un projecteur hermitien du centre de B ; alors $B_E = BE$ est séquentiellement faiblement fermée dans B et peut être muni d'une structure de Σ^*-algèbre canonique.

<u>Démonstration</u> : Soit $x_n E$ une suite de B_E convergeant faiblement vers un $x \in B$, alors $x_n EE \to xE$ ou $x_n E \to xE$, ce qui montre que B_E est séquentiellement faiblement complet et peut être muni d'une structure de Σ^*-algèbre canonique.∎

Soit E_j un projecteur central de B, on notera (B_j, S_j) la Σ^*-algèbre donnée par le lemme 1.

<u>Proposition 2</u>.- Soit (B,S) une Σ^*-algèbre, soit $(E_n)_{n \in N}$ une famille de projecteurs hermitiens centraux de B, deux à deux orthogonaux, telle que $I = \sum_{n \in N} E_n$ (série convergente au sens faible). Alors (B,S) est Σ^*-isomorphe à $\prod_{n \in N} (B_n, S_n)$.

<u>Démonstration</u> : Soit π l'application canonique de B dans $\prod_n B_n$: $\pi(b) = (bE_n)_{n \in N}$, π est un Σ^*-morphisme puisque chaque π_n l'est $(\pi_n(b) = bE_n)$, π est aussi injectif, il nous reste à montrer que π est surjectif et σ-bicontinu :

soit $(a_n)_{n \in N} \in \prod_n B_n$, $\sup \|a_n\| \leq K < \infty$, $a_n = a_n E$,

soient $a^{(n)} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots 0, \ldots)$ et $b_n = \sum_{k \leq n} a_k E_k$, il est clair que $\pi(b_n) = a^{(n)}$.

Montrons que la suite $\{b_n\}$ converge faiblement dans B : soit $s \in S$:

$$<s, b_n> = <s, b_n \sum_{k=1}^{\infty} E_k> = \sum_{k=1}^{\infty} <s, b_n E_k> = \sum_{k=1}^{\infty} <s, a_k E_k>.$$

La dernière égalité provient de la construction de b_n ; donc pour $m \geq n$

$$\begin{aligned} |<s, b_m - b_n>| &= \left|\sum_{k=n+1}^{k=m} <s, a_k E_k>\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{k=m} |<s, a_k E_k>| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{k=m} <s, E_k> \quad \text{(inégalité de Schwarz).} \end{aligned}$$

Comme la série $<s,E_k>$ est à termes positifs et convergente, il en résulte que la suite $<s,b_n>$ converge, ceci étant vrai pour tout $s \in S$, il existe donc $b \in B$ tel que $b_n \to b$ faiblement.

Donc $\pi(b) = \lim_n \pi(b_n) = \lim_n a^{(n)} = a$ ce qui montre la surjectivité de π.

Montrons que π est σ-bicontinu : soit $\{(b^{(k)}E_1, b^{(k)}E_2, \ldots b^{(k)}E_n, \ldots)\}_{k \in N}$ une suite de $\prod_{n \in N} B_n$ convergeant vers 0 et soit $s \in S$, $b^{(k)} = \sum_{n \geq 1} b^{(k)}E_n$,

$$<s,b^{(k)}> = \sum_{n \geq 1} <s,b^{(k)}E_n> \quad \text{et} \quad \sup_k ||b^{(k)}|| \leq K < \infty$$

$$|s,b^{(k)}>| \leq \sum_{n=1}^{n=n_o} |<s,b^{(k)}E_n>| + 2K \sum_{n > n_o} <s,E_n>.$$

Le second membre de l'inégalité peut être rendu arbitrairement petit en prenant n_o assez grand et ensuite (n_o fixé) faire $k \to +\infty$, la suite $b^{(k)}$ converge bien faiblement vers 0. ∎

Remarque : L'hypothèse sur la dénombrabilité de J est essentielle : prenons $B = B((0,1))$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de $(0,1)$, E_i la fonction caractéristique du point $i \in (0,1)$, $\prod_{i \in (0,1)} E_i B$ est l'ensemble des fonctions bornées de $(0,1)$, il diffère donc de B.

B.II. Limites inductives de Σ^*-algèbres.

§1. Limites inductives de Σ^*-algèbres.

Définition 1.- Soit $((B_\gamma, S_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de Σ^*-algèbres, Γ étant un ensemble filtrant croissant, on suppose qu'à tout couple $\alpha < \beta$ de Γ, on associe un Σ^*-morphisme

$$f_{\beta\alpha} : (B_\alpha, S_\alpha) \to (B_\beta, S_\beta)$$

tel que

$$(1) \qquad f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} . f_{\beta\alpha} \quad \text{si } \alpha < \beta < \gamma;\ \alpha,\beta,\gamma \in \Gamma.$$

Munie de ces données, la famille $((B_\gamma, S_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ est appelée une famille inductive de Σ^*-algèbres.

Soit $B^u = \underline{C^*\text{-}\lim_{\rightarrow \gamma}} B_\gamma$ la limite inductive des B_γ dans la C^*-catogérie on note par f'_γ le $*$-morphisme canonique de B_γ dans B^u ; l'ensemble $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} f'_\gamma(B_\gamma)$ est dense en norme dans B^u.

Soit $S = \underline{\lim} S_\gamma$ la limite projective des S_γ.

<u>Théorème 1</u>.- Soit $((B_\gamma,S_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ une famille inductive de Σ^*-algèbres, soient B^u $C^*\text{-}\varinjlim B_\gamma$ et $S = \varprojlim S_\gamma$; alors (B^u,S) est une pré- Σ^*-algèbre et la Σ^*-algèbre séparée complétée associée (B,S) est la limite inductive des (B_γ,S_γ) dans la Σ^*-catégorie.

On la notera $\Sigma^*\text{-}\varinjlim (B_\gamma,S_\gamma)$.

<u>Démonstration</u> : <u>Lemme 1</u>.- Soient $s\in S$, $s = \varprojlim s_\gamma$ avec s_γ S_γ, π_s, $\mathcal{H}_s$, ξ_s les objets associés à s par la construction Guelfand-Naimark-Segal sur B^u et $\pi_s^\gamma = \pi_s \circ f'_\gamma$; π_s^γ est une Σ^*-représentation de (B_γ,S_γ).

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $\{a_n\}\in {}^\sigma S_\gamma$ une suite d'éléments de B_γ, on va montrer que $\pi_s^\gamma(a_n)$ converge faiblement dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s)$, or $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\pi_s(f'_\gamma(B_{\gamma_u}))\xi_\gamma$ est dense dans $\mathcal{H}_s$ (puisque $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f'_\gamma(B_\gamma)$ est uniformément dense dans B^u) il suffit de démontrer que

$$<\pi_s^\gamma(a_n)\ \pi_s^\beta(b_\beta)\ \xi_s\ ,\ \pi_s^\alpha(b'_\alpha)\xi_s> \text{ converge}$$

pour tous $\alpha,\beta\in\Gamma$ et $b'_\alpha\in B_\alpha$, $b'_\beta\in B_\beta$; l'ensemble Γ étant filtrant croissant, il existe un $\gamma_o\in\Gamma$ tel que $\alpha\le\gamma_o$, $\beta\le\gamma_o$ et $\gamma\le\gamma_o$, en faisant abstraction des Σ^*-morphiemes $f_{\gamma_o\alpha}$, $f_{\gamma_o\beta}$ et $f_{\gamma_o\gamma}$ on peut supposer que $\alpha=\beta=\gamma$; il s'agit donc de démontrer :

$$<\pi_s^\gamma\ (a_n)\ \pi_s^\beta(a)\xi_s\ ,\ \pi_s^\alpha(a')\xi_s> \text{ converge}$$

pour tous $a,a'\in B_\gamma$, or cette expression s'écrit aussi :

$$s_\gamma(a'^*\ a_n\ a) \quad \text{converge}$$

qui est vérifiée puisque $s_\gamma\in S_\gamma$; le lemme est démontré.

Montrons que S est un folium σ-saturé :

i) S est invariant : soit $s\in S$, soit $b\in B^u$ tel que $s(b^*b)=1$, soient π_s, $\mathcal{H}_s$, ξ_s les objets associés à s, on a :

$$s(b^*ab) = <\pi_s(a)\pi_s(b)\xi_s,\pi_s(b)\xi_s> \ \forall a\in B^u,$$

donc d'après le lemme 1, $s(b^*.b)$ induit sur chaque B_γ un σ-état, donc $s(b^*.b)\in S$ et S est bien invariant.

ii) Soit $S = {}^{\sigma\sigma}S\cap E$, soit ρ un état sur B^u tel que $\rho(a_n)$ converge, $\forall\{a_n\}\in{}^\sigma S$, on va montrer que $\rho\in S$: soient $\rho_\gamma=\rho\circ f'_\gamma$ et $\{b_n,b\}\in{}^\sigma S_\gamma$, il est immédiat que $\{f'_\gamma(b_n)\}\}\in{}^\sigma S$, ce qui revient à dire que

$$<\rho_\gamma,b_n = <\rho,f'(b_n)> \quad \text{converge } \forall\{b_n\}\in{}^\sigma S_\gamma$$

comme S_γ est un folium σ-saturé, on a $\rho_\gamma\in S_\gamma$, γ, et par suite $\rho\in S$.

Nous avons donc démontré que (B^u,S) est une pré- Σ^*-algèbre, soient (B,S) sa Σ^*-algèbre séparée complétée et f_γ les Σ^*-morphismes canoniques de B_γ dans B, montrons que $(B,S) = \Sigma^*\text{-}\varinjlim(B_\gamma,S_\gamma)$ soit $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille de Σ^*-morphismes de (B_γ,S_γ) dans une Σ^*-algèbre (B_1,S_1) vérifiant $g_\alpha = g_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ $\forall\alpha < \beta$ dans Γ.

B^u étant la C^*-limite inductive des B_γ ; il existe un $*$-morphisme π_o de B^u dans B_1, vérifiant : $g_\gamma = \pi_o . f_\gamma$, $\forall\gamma\in\Gamma$.

Il est immédiat que $\pi_o^*(S_1) \subset S$, puisque les g_γ sont des Σ^*-morphismes, π_o est donc un Σ^*-morphisme de B^u dans B_1 ; il existe donc (Théorème A.II.1) un Σ^*-morphisme π de (B,S) dans (B_1,S_1) tel que $g_\gamma = \pi \circ f_\gamma$, $\forall\gamma\in\Gamma$.
La Σ^*-algèbre (B,S) est bien la limite inductive des (B_γ,S_γ) dans la Σ^*-catégorie. ∎

Remarque : Il est clair que si Γ est dénombrable et si chaque B_γ est dénombrablement engendrée alors la limite inductive est dénombrablement engendrée.

Proposition 1.- Les hypothèses sont les mêmes que celles du théorème 1, on suppose de plus que :

- $f_{\beta\alpha}$ est injectif, $\forall\alpha < \beta$; $\alpha, \beta\in\Gamma$.
- $f^*_{\beta\alpha}(S_\beta) = S_\alpha$, $\forall\alpha<\beta$; $\alpha,\beta\in\Gamma$.
- Γ admet une partie cofinale dénombrable Γ_o.

Alors les Σ^*-morphismes f_γ sont injectifs et σ-bicontinus, on peut identifier (B_γ,S_γ) à une sous- Σ^*-algèbre de (B,S) possédant la propriété suivante ; tout σ-état de B_γ est prolongeable en un σ-état (non unique en général) sur B.

Démonstration : laissée au soin du lecteur.

§2 Limites inductives et foncteurs W^*-enveloppe et Σ^*-enveloppe.

D'après le proposition A.II.3 et A.II.§7, le foncteur W^*-enveloppe (resp. Σ^*-enveloppe) de la Σ^*-catégorie dans la W^*-catégorie (resp. de la C^*-catégorie dans la Σ^*-catégorie) permute aux limites droites donc en particulier aux limites inductives, on peut énoncer :

Théorème 2.- Les foncteurs W^*-enveloppe et Σ^*-enveloppe transforment une limite inductive en une limite inductive.

B.III. Produits tensoriels finis de Σ^*-algèbres :

Nous allons d'abord définir les produits tensoriels finis de Σ^*-algèbres et ensuite les produits tensoriels infinis comme limites inductives des produits tensoriels finis ; comme dans le cas des algèbres de Von Neumann il y a plusieurs définitions possibles de produits tensoriels ; nous nous intéressons seulement à celle qui nous donne la propriété universelle.

§ 1. Produit tensoriel de deux Σ^*-algèbres.

Soient (B_1,S_1) et (B_2,S_2) deux Σ^*-algèbres, soit $B^o = B_1 \overset{\vee}{\otimes} B_2$ la C^*-algèbre produit tensoriel de B_1 et B_2 dans la C^*-catégorie (cf. (16), p. 15) B^o possède la propriété universelle suivante : pour tout couple de morphismes (u_1,u_2) permutables de B_1 et B_2 dans une C^*-algèbre unitaire A, il existe un $*$-morphisme unique u de B^o dans A tel que l'on ait :

$$u(x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1)\, u_2(x_2)\ ,\quad \forall x_i \in B_i\ ,\ i=1,2.$$

B^o est unique, à un C^*-isomorphisme près, à posséder cette propriété. On notera i_1 et i_2 les injections canoniques de B_1 et B_2 dans B^o.

Considérons la catégorie $\mathcal{C}_{B^o}$ ainsi définie : ses objets sont des $*$-morphismes $u : B^o \to A$ où (A,S) est une Σ^*-algèbre et où $u(B^o)$ est faiblement dense dans B. Si $u : B^o \to (A,S)$ et $v : B^o \to (A_1,S_1)$ sont deux tels morphismes, un morphisme $u \to v$ est un Σ^*-morphisme $f : (A,S) \longrightarrow (A_1,S_1)$ tel que $f \circ u = v$.

Si maintenant on associe à toute représentation non dégénérée π de B^o dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ le $*$-morphisme u de B^o dans la Σ^*-algèbre concrète $\widetilde{\pi(B^o)}$, il est facile de voir, d'après A.II.§9, Remarque c, que deux représentations $\Sigma^{*'}$-équivalentes π et π' donnent deux objets isomorphes au sens précédent, comme d'autre part tout objet de $\mathcal{C}_{B^o}$ peut être obtenu de cette façon, on en conclut que les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}_{B^o}$ forment un ensemble.

Considérons parmi les objets $u : B^o \longrightarrow (A,S)$ de la catégorie $\mathcal{C}_{B^o}$ ceux pour lesquels les morphismes composés $u \circ i_1$ et $u \circ i_2$ sont des Σ^*-morphismes.

Choisissons une famille $(u_j)_{j \in J}$ contenant un objet et un seul dans chaque classe d'isomorphie, soit $u_j : B^o \to A_j$, formons le $*$-morphisme $u : B^o \to \prod_{j \in J} A_j$, on sait que $\prod_{j \in J} A_j$ est munie d'une structure de Σ^*-algèbre canonique (B-I), soit (B,S) la sous-Σ^*-algèbre de $\prod_{j \in J} A_j$ engendrée par $u(B^o)$, soient α_1 et α_2 les Σ^*-morphismes canoniques de (B_1,S_1) et (B_2,S_2) dans (B,S) : $\alpha_1 = u \circ i_1$, $\alpha_2 = u \circ i_2$; on a alors immédiatement le résultat suivant :

Théorème 1.- La Σ^*-algèbre (B,S) et le couple des Σ^*-morphismes (α_1,α_2) sont solution du problème universel suivant : trouver une Σ^*-algèbre (B,S) et un couple de Σ^*-morphismes (α_1,α_2) , $\alpha_i : B_i \to B$, $i = 1,2$, tels que :

i) $\alpha_1(a_1)\, \alpha_2(a_2) = \alpha_2(a_2)\, \alpha_1(a_1) \quad \forall a_1 \in B_1\ ,\ a_2 \in B_2$.

ii) Pour toute Σ^*-algèbre $(\tilde{A},\tilde{S})$ et tout couple de Σ^*-morphismes $t_i : B_i \longrightarrow \tilde{A}$ vérifiant :

$$t_1(a_1)\ t_2(a_2) = t_2(a_2)t_1(a_1) \ \forall a_1 \in B_1 \ , \ a_2 \in B_2.$$

Il existe un Σ^*-morphisme unique $t : B \to \tilde{A}$ tel que $t_i = t\circ\alpha_i$.

Cette Σ^*-algèbre (B,S) sera notée $(B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2, S)$ ou $(B_1,S_1) \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} (B_2,S_2)$ ou tout simplement $B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2$, si aucune confusion n'est à craindre ; et sera appelé le produit tensoriel de (B_1,S_1) et (B_2,S_2).

Remarque : La démonstration précédente peut être utilisée pour montrer l'existence de la limite inductive, comme dans (16).

§2. Produits tensoriels de Σ^*-représentations et de σ-états.

Il résulte d'un raisonnement analogue à celui de (18) n° 2.1 la

Proposition 1.- Soient (B_1,S_1) et (B_2,S_2) deux Σ^*-algèbres, $B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2$ leur produit tensoriel α_1 et α_2 les Σ^*-morphismes canoniques de B_1 et B_2 dans $B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2$. Alors :

i) α_1 et α_2 sont injectifs et σ-bicontinus.

ii) Si π_1 et π_2 sont deux Σ^*-représentations de B_1 et B_2 dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, il existe une Σ^*-représentation notée $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} \pi_2$ et une seule de $B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2$ dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ telle que $\pi_1 = (\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} \pi_2)\circ\alpha_1$ et $\pi_2 = (\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} \pi_2)\circ\alpha_2$; $\pi_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} \pi_2$ est factorielle (resp. irréductible) si et seulement si π_1 et π_2 sont factorielles (resp. irréductibles).

iii) Si s_1 et s_2 sont deux σ-états sur B_1 et B_2, il existe un σ-état sur $B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2$ et un seul noté $s_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} s_2$ tel que

$$(s_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} s_2)(a_1 \boxtimes a_2) = s_1(a_1)\ s_2(a_2) \ \forall a_1 \in B_1 \ , \ a_2 \in B_2.$$

La Σ^*-représentation $\pi_{s_1} \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} \pi_{s_2}$ est équivalente à la Σ^*-représentation $\pi_{s_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} s_2}$; $s_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} s_2$ est factoriel (resp. pur) si et seulement si s_1 et s_2 sont factoriels (resp. purs).

Proposition 2.- Le foncteur Σ^*-enveloppe de la C^*-catégorie dans la Σ^*-catégorie transforme le produit tensoriel ν en produit tensoriel Σ^* i.e.

$$\widetilde{B_1 \overset{\nu}{\boxtimes} B_2} = \tilde{B}_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} \tilde{B}_2 .$$

Démonstration.- laissée au lecteur. ■

<u>Corollaire</u> : Soient X_1 et X_2 deux espaces compacts, $B(X_1)$, $B(X_2)$ et $B(X_1 \times X_2)$ les Σ^*-algèbres des fonctions bornées mesurables par rapport aux tribus de Baire. Alors :

$$B(X_1) \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B(X_2) = B(X_1 \times X_2).$$

<u>Démonstration</u> : D'après (19) $\mathcal{C}(X_1 \overset{\nu}{\boxtimes} \mathcal{C}(X_2) = \mathcal{C}(X_1 \times X_2)$, le corollaire est alors immédiat. ∎

§4. <u>Produits tensoriels et foncteur W^*-enveloppe</u> : $\mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}$.

<u>Proposition 3</u>.- Le foncteur W^*-enveloppe $\mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}$ de la Σ^*-catégorie dans la W^*-catégorie transforme un produit tensoriel fini Σ^* en un produit tensoriel μ i.e.

$$\mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}(B_1 \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} B_2) = \mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}(B_1) \overset{\mu}{\boxtimes} \mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}(B_2).$$

<u>Démonstration</u> : laissée au soin du lecteur. ∎

B.IV. Produits tensoriels infinis de Σ^*-algèbres.

§1. <u>Produits tensoriels infinis de Σ^*-algèbres</u> :

Considérons une famille $((B_i,S_i))_{i \in I}$ de Σ^*-algèbre, soit J une partie finie de I, on peut définir le produit tensoriel fini :

$\overset{\Sigma^*}{\underset{J}{\boxtimes}}(B_i,S_i) = (B_j,S_j)$ (généralisation triviale du cas de deux Σ^*-algèbres). Si J et K sont deux parties finies de I telles que $J \subset K$, alors il existe un Σ^*-monomorphisme σ-bicontinu $\alpha_{K,J}$ de (B_j,S_j) dans (B_K,S_K) tel que

$$\alpha_{L,J} = \alpha_{L,K} \circ \alpha_{K,J} \quad \forall J,K,L \text{ finies et } J \subset K \subset L \subset I.$$

Le système $((B_J,S_J), \alpha_{J,K})$ avec $J \subset K$, où J,K parcourent l'ensemble filtrant croissant $\mathcal{F}(I)$ des parties finies de I est un système inductif, on note (B_I,S_I) ou $\overset{\Sigma^*}{\underset{i \in I}{\boxtimes}}(B_i,S_i)$ ou simplement $\overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} B_i$ sa limite, α_J les Σ^*-morphismes canoniques de (B_J,S_J) dans (B_I,S_I) et $\alpha_i = \alpha_{\{i\}}$; en utilisant les propriétés universelles des limites inductives et des produits tensoriels finis, on déduit :

<u>Théorème 1</u>.- La Σ^*-algèbre (B_I,S_I) et la famille Σ^*-morphismes $(\alpha_i)_{i \in I}$ sont solution du problème universel suivant : trouver une Σ^*-algèbre (B_I,S_I) et une famille de Σ^*-morphisme $(\alpha_i)_{i \in I}$ de B_i dans B, telles que

i) $\alpha_i(a_i)\ \alpha_j(a_j) = \alpha_j(a_j)\ \alpha_i(a_i)\ \forall a_i \in B_i\ ,\ a_j \in B_j\ ,\ i \neq j \in I.$

ii) Pour toute Σ^*-algèbre (A,S) et toute famille de Σ^*-morphismes $(t_i)_{i \in I}$ de B_i dans A vérifiant

$$t_i(a_i)\ t_j(a_j) = t_j(a_j) t_i(a_i)\ \forall a_i \in B_i\ ,\ a_j \in B_j\ ,\ i \neq j \in I.$$

Il existe un Σ^*-morphisme unique $t : B_I \to A$ tel que $t_i = t \circ \alpha$, $i \in I$.

La Σ^*-algèbre (B_I, S_I) est appelée le produit tensoriel des (B_i, S_i) et est notée

$$(B_I, S_I) = \overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\otimes}} (B_i, S_i).$$

§2. Produits tensoriels infinis de Σ^*-représentations et de σ-états.

Par un raisonnement analogue à celui sur les produits tensoriels finis, on peut établir les résultats suivants :

Proposition 1.- Soit $((B_i, S_i))_{i \in I}$ une famille de Σ^*-algèbres, soit $(B_I, S_I) = \overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} (B_i, S_i)$ son produit tensoriel, soient α_i les Σ^*-morphismes canoniques de (B_i, S_i) dans (B_i, S_i), alors :

i) les α_i sont injectifs et σ-bicontinus.

ii) si π_i est une famille de Σ^*-représentations de B_i dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_i$, pour chaque famille $(t_i)_{i \in I}$ de vecteurs unitaires de $\mathcal{H}_i$, il existe une Σ^*-représentation $\pi_I^{(t)}$ de (B_I, S_I) dans $\mathcal{L}(\overset{h(t_i)}{\boxtimes} \mathcal{H}_i)$ telle que $\pi_i = \pi_I^{(t)} \circ \alpha_i$, $\forall i \in I$.

Cette Σ^*-représentation $\pi_I^{(t)}$ est factorielle ou irréductible si et seulement si les π_i possèdent la même propriété.

Si $(t'_i)_{i \in I}$ est une autre famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{H}_i$, alors $\pi_I^{(t)}$ et $\pi_I^{(t')}$ sont équivalentes si et seulement si $(t_i) \sim (t'_i)$.

iii) Si $(s_i)_{i \in I}$ est une famille de σ-états sur les B_i, il existe un σ-état unique s sur B_I, noté $s = \overset{\Sigma^*}{\boxtimes} s_i$ tel que

$$\langle s, \boxtimes b_i \rangle = \prod_I \langle s, b_i \rangle \quad \text{pour } b_i \in B_i \text{ et } b_i = I_i \text{ pour presque tout } i.$$

La Σ^*-représentation $\Pi_{\overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} s_i}$ est équivalente à la Σ^*-représentation $\overset{\Sigma^*}{\boxtimes} (\xi_{s_i})_{s_i}$; $\overset{\Sigma^*}{\boxtimes} s_i$ est factoriel ou pur si et seulement si les s_i possèdent la même propriété.

§3. Produits tensoriels et foncteur Σ^*-enveloppe.

Le foncteur Σ^*-enveloppe de la C^*-catégorie dans la Σ^*-catégorie transforme un produit tensoriel fini ν (resp. une limite inductive) en un produit tensoriel (resp. une limite inductive), il résulte des procédés de construction des produits tensoriels abstraits le résultat suivant :

Théorème 2.- Le foncteur Σ^*-enveloppe de la C^*-catégorie dans la Σ^*-catégorie transforme le produit tensoriel ν (fini ou non) en un produit tensoriel i.e.

$$\widetilde{\left(\overset{\nu}{\underset{I}{\boxtimes}} B_i\right)} = \overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} \tilde{B}_i .$$

Corollaire : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) d'espaces compacts ; $B(X_i)$ et $B(\prod_I X_i)$ désignent les Σ^*-algèbres des fonctions bornées mesurables par rapport aux tribus de Baire. Alors :

$$B(\prod_I X_i) = \overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} B(X_i).$$

Démonstration : En effet, d'après (19) p. 53 $\mathcal{C}(\prod_I X_i) = \overset{\nu}{\boxtimes} \mathcal{C}(X_i)$, le corollaire découle alors immédiatement du théorème.

§4. Produits tensoriels et foncteur W^*-enveloppe.

Un raisonnement analogue à celui du §3 conduit au

Théorème 3 : Le foncteur W^*-enveloppe $\mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}$ de la Σ^*-catégorie dans la W^*-catégorie transforme le produit tensoriel Σ^*(fini ou non) en un produit tensoriel μ . i.e.

$$\mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*}\left(\overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} (B_i,S_i)\right) = \overset{\mu}{\underset{I}{\boxtimes}} \mathcal{F}_{\Sigma^*,W^*} (B_i,S_i).$$

B.V. Théorèmes de Jordan-Hahn et de Vitali-Hahn-Saks.

Nous allons démontrer ces deux théorèmes pour Σ^*-algèbres dénombrablement engendrées.

Théorème 1.- (Théorème de Jordan-Hahn) : Soit (B,S) une Σ^*-algèbre dénombrablement engendrée, soit ρ une σ-forme linéaire hermitienne sur B, alors il existe deux σ-formes linéaires positives s_1 et s_2 uniques telles que :

i) $\rho = s_1 - s_2$, $||\rho|| = ||s_1|| + ||s_2||$

ii) s_1 et s_2 sont étrangères i.e.il existe un projecteur hermitien e de B tel que $s_2(e) = 0$ et $s_1(I-e) = 0$, $s_1(.) = \rho(e.)$ et $s_2(.) = -\rho((I-e).)$; et pour tout $a \in B$, on a :

$$s_1(a) = s_1(ea) = s_1(eae)$$

$$s_2(a) = s_2((I-e)a) = s_2((I-e)a(I-e)).$$

Démonstration : La première partie du théorème résulte de la proposition A.I.1, de la proposition A.II.3 et de (9) théorème 12.3.3. p. 244 sur la décomposition d'une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue. Il nous reste à démontrer l'existence de la projection e ; soit $s = \frac{1}{\|\rho\|}(s_1+s_2)$ et considérons la Σ^*-représentation π_s, comme on a $s_i \leq \|\rho\|\ s$, $i=1,2$, il existe des formes linéaires positives normales $\tilde{s}_1$ et $\tilde{s}_2$ sur l'algèbre de Von Neumann $\pi_s(B)$ telle que $s_i = \tilde{s}_i \circ \pi_s$; soit $\tilde{\rho} = \tilde{s}_1 - \tilde{s}_2$, on a $\rho = \tilde{\rho} \circ \pi_s$. Soient e' et $(I-e')$ les projecteurs de l'algèbre de Von Neumann enveloppante B''_s contenant les supports de s_1 et s_2 (Prop. A.II.3. et (9) Th. 12.3.3) et soit $p = \pi''_s(e')$, p et $(I-p)$ sont des projecteurs de l'algèbre de Von Neumann $\pi_s(B)$ contenant respectivement les supports de $\tilde{s}_1$ et $\tilde{s}_2$, l'existence de e résultera du lemme suivant :

Lemme 1.- Soient (B,S) une Σ^*-algèbre, π une Σ^*-représentation de B dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, soit p un projecteur hermitien de $\pi(B)$. Il existe un projecteur hermitien e de B tel que $\pi(e) = p$.

Démonstration du lemme : Soit $x \in B$ tel que $\pi(x) = p$, on a aussi $\pi(x^*) = p^* = p$ et $\pi(x^*x) = pp = p$, on peut donc supposer que $x \geq 0$, soit e le support de x (cf. (3) lemme 2.4.) i.e. le plus petit projecteur de B vérifiant $ex = xe = x$, on a $e \in B(x)$ la sous- Σ^*-algèbre commutative par x ; on a donc :

$$\pi(e)p = p\ \pi(e) = p$$

$\pi(e)$ est donc un projecteur majorant p, montrons que $\pi(e) = p$: l'ensemble :

$$\{y \in B(x) \mid \pi(y)p = \pi(y)\}$$

est un $*$-idéal bilatère séquentiellement faiblement fermé de $B(x)$ contenant x et les polynômes sans termes constants, il est donc identique à $B(x)$, et on a $\pi(e)\ p = p = \pi(e)$.

Le reste de la démonstration s'obtient en utilisant l'inégalité de Schwarz. ∎

Théorème 2.- (Théorème de Vitali-Hahn-Saks) : L'ensemble des σ-états d'une Σ^*-algèbre dénombrablement engendrée est séquentiellement faiblement complet.

Démonstration : Soit (B,S) une Σ^*-algèbre, soit $\{s_n\}$ une suite de σ-états telle que $s_n(a)$ converge pour tout $a \in B$, l'application $s : a \to \lim s_n(a)$ de B dans C définit une forme linéaire positive de norme 1 sur B, il s'agit de démontrer que $s \in S$, soit $\rho = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} s_n$, on a $\rho \in S$ et $s_n \leq 2^n \rho$, considérons la Σ^*-représentation π_ρ associée à ρ , il existe des états normaux (= σ-états) $\tilde{\rho}$, $\tilde{s}_n$ sur l'algèbre de Von Neumann $\pi_\rho(B)$ tels que $\rho = \tilde{\rho}\circ\pi_\rho$, $s_n = \tilde{s}_n\circ\pi_\rho$ (Lemme A.II.1) pour tout $a \in B$.

$$s_n(a) = \tilde{s}_n(\pi_\rho(a)) \to s(a).$$

Il en résulte que s s'annule sur $\mathrm{Ker}\,\pi_\rho$ et il existe un état $\tilde{s}$ sur $\pi_\rho(B)$ tel que

$$s = \tilde{s}\circ\pi_\rho \quad \text{et} \quad \tilde{s}_n(b) \to s(b)\ ,\ \forall\, b \in \pi_\rho(B)$$

avec les $\tilde{s}_n$ normaux, or d'après Sakai (cf. (41)) le prédual d'une algèbre de Von Neumann est séquentiellement faiblement complet, $\tilde{s}$ est un état normal sur $\pi_\rho(B)$ et par suite $s = \tilde{s}\circ\pi_\rho$ est un σ-état sur B ou $s \in S$. ∎

CHAPITRE C : Σ^*-ALGEBRES COMMUTATIVES - ESPACES MESURABLES - σ-ALGEBRES DE BOOLE.

C.I. Structure des espaces mesurables - Théorème de Guelfand :

L'objet de ce paragraphe est de situer la catégorie des espaces mesurables par rapport à la Σ^*-catégorie et de démontrer une version du théorème de Guelfand pour les espaces mesurables. Nous commençons par préciser les relations entre les Σ^*-représentations et les mesures spectrales d'un espace mesurable.

§1. Espaces mesurables, Σ^*-représentations et mesures spectrales.

Soient $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $B(X,\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées à valeurs complexes, $S(X,\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $(X,\mathcal{A})$; le couple $(B(X,\mathcal{A}), S(X,\mathcal{A}))$ est une Σ^*-algèbre commutative.

On rappelle qu'une représentation π de $B(X,\mathcal{A})$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dite une Σ^*-représentation si la relation $f_n(x) \underset{n}{\to} f(x)$ pour tout $x \in X$ et $\sup_n \| f_n \| < \infty$ implique $\pi(f_n) \underset{n}{\to} \pi(f)$ pour la topologie faible des opérateurs ; une définition équivalente est : pour tout couple de vecteurs ξ , ξ' de $\mathcal{H}$, l'application $f \to \langle \pi(f)\xi , \xi'\rangle$ de $B(X,\mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}$ définit une mesure sur $(X,\mathcal{A})$.

Dans la suite on identifiera $\mathcal{A}$ à l'ensemble des projecteurs de $B(X,\mathcal{A})$. Nous allons formuler ici quelques résultats dont la démonstration est plus ou moins standard.

Proposition 1.- a). Si π est une Σ^*-représentation de $B(X,\mathcal{A})$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, soit M sa restriction à $\mathcal{A}$; alors M est une mesure spectrale sur $(X,\mathcal{A})$.

b). Si M est une mesure spectrale sur $(X,\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$, alors il existe une Σ^*-représentation unique π de $B(X,\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$ telle que M soit la restriction de π à $\mathcal{A}$.

On établit ainsi une bijection entre les mesures spectrales et les Σ^*-représentations de $B(X, \mathcal{A})$.

Si de plus, on suppose que X est compact et que $\mathcal{A}$ est sa tribu de Baire, il y a correspondances bijectives entre :

α) Les représentations de $C(X)$

β) Les Σ^*-représentations de $B(X, \mathcal{A})$

γ) Les mesures spectrales sur $(X, \mathcal{A})$.

Lemme 1.- Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mathcal{J}$ une semi-algèbre de Boole de $\mathcal{A}$ engendrant $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ une classe compacte contenue dans $\mathcal{J}$(cf. (34)). Tout morphisme M_o de $\mathcal{J}$ dans l'ensemble des projecteurs hermitiens d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que

$$M_o(X) = I \; ; \; M_o(A) = \sup\{ M_o(C) \mid C \subset A , C \in \mathcal{C}\}$$

pour tout $A \in \mathcal{J}$ se prolonge de manière unique en une mesure spectrale sur $\mathcal{A}$.

§2. <u>L'ensemble des σ-états purs d'une Σ^*-algèbre ; σ^*-algèbres</u>.

Soit (B,S) une Σ^*-algèbre, on notera σ-$P(B)$ l'ensemble des σ-états purs de B. Il est immédiat que si B est une C^*-algèbre unitaire, $\tilde{B}$ sa Σ^*-enveloppe, alors σ-$P(\check{B}) = P(B)$ où $P(B)$ désigne l'ensemble des états purs de B. Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, alors σ-$P(B(X, \mathcal{A}))$ est non vide car il contient toutes les mesures de Dirac δ_x , $x \in X$.

Nous allons montrer qu'il existe des Σ^*-algèbres, commutatives dont l'ensemble des σ-états purs est vide ce qui fournit en même temps l'existence des Σ^*-algèbres commutatives qui ne sont pas de la forme $B(X, \mathcal{A})$:

Soit X un espace compact séparable muni de sa tribu de Baire $\mathcal{A}$, alors $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ n'a aucun σ-état pur si μ est une probabilité <u>diffuse</u> sur X car un σ-état pur sur $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ définirait une mesure de Dirac sur X absolument continue par rapport à μ .

D'après cet exemple il est raisonnable de particulariser les Σ^*-algèbres dont l'ensemble des σ-états purs est assez important dans le sens suivant :

<u>Définition 1</u>.- Soient (B,S) une Σ^*-algèbre, $X = \sigma$-$P(B)$; on dira que (B,S) est une <u>σ^*-algèbre</u> si S est engendré par X i.e. $S = {}^{\sigma\sigma}X \cap E$.

On définit la σ^*-catégorie comme la sous-catégorie pleine de la Σ^*-catégorie dont les objets sont des σ^*-algèbres ; la sous-catégorie pleine de la σ^*-catégorie dont les objets sont des σ^*-algèbres commutatives sera appelée la σ^*-catégorie commutative.

Exemples de σ^*-algèbres.

α) $B(X,\mathcal{A})$ où $(X,\mathcal{A})$ est un espace mesurable, soit $X' = \sigma\text{-}P(B)$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, une suite bornée $\{f_n\}$ converge simplement vers f si et seulement si $P(f_n) \to P(f)$ pour toute probabilité P sur $\Omega(\mathcal{A})$, donc $B(X,\mathcal{A})$ est une σ^*-algèbre.

β) La Σ^*-algèbre enveloppante d'une C^*-algèbre quelconque est une σ^*-algèbre : cela résulte du fait que la représentation atomique est Σ^*-équivalente à la représentation universelle (cf. (4)) et du lemme suivant qui est une conséquence directe du théorème A.II.3 :

Lemme 2.- Soit (B,S) une Σ^*-algèbre, pour que (B,S) soit une σ^*-algèbre il faut et il suffit que sa Σ^*-représentation atomique $\left(\underset{x \in \sigma\text{-}P(B)}{\boxplus} \pi_x\right)$ soit Σ^*-équivalente à sa représentation universelle.

§3. Théorème de Guelfand pour les σ^*-algèbres commutatives.

Théorème 1.- (Théorème de Guelfand pour les σ^*-algèbres): Soient (B,S) une σ^*-algèbre commutative, X l'ensemble de ses σ-états purs ; il existe une σ-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ de parties de X telle que B soit Σ^*-isomorphe à $B(X,\mathcal{A})$ de plus $(X,\mathcal{A})$ possède la propriété suivante :

(P) $\mathcal{A}$ sépare les points de X et tout σ-état pur de $B(X,\mathcal{A})$ est représentable par une mesure de Dirac.

Réciproquement si $(X,\mathcal{A})$ est un espace mesurable possédant (P) ; alors $B(X,\mathcal{A})$ est une σ^*-algèbre dont l'ensemble des σ-états purs peut être identifié à X.

Il y a ainsi une correspondance bijective entre les espaces mesurables possédant (P) et les σ^*-algèbres et on a un foncteur contravariant canonique (et son inverse) de la σ^*-catégorie commutative sur la catégorie des espaces mesurables possédant (P) ; ce foncteur commute avec le foncteur de Guelfand classique dans le sens suivant :

Si X est un espace compact, $(X,\mathcal{A})$ l'espace de Baire associé alors le diagramme canonique suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & (X,\mathcal{A}) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathcal{C}(X) \arrow[r, leftrightarrow] & \widetilde{\mathcal{C}}(X) = B(X,\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales correspondent aux foncteurs de Guelfand et leur inverse.

Démonstration : Soit (B,S) une σ^*-algèbre, soit $\mathcal{A}$ la σ-algèbre de Boole des projecteurs hermitiens de B, considérons l'application Φ de $\tilde{\mathcal{A}}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X :

$$\Phi(\tilde{e}) = \{x \in X \ / < x,e > = 1\}$$

pour $\tilde{e} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

On démontre alors que $\mathcal{A} = \Phi(\tilde{\mathcal{A}})$ est une σ-algèbre de Boole de parties de X et que Φ est un isomorphisme de σ-algèbre de Boole de $\tilde{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A}$, et que l'on peut prolonger Φ en un Σ^*-isomorphisme de B sur $B(X,\mathcal{A})$. Le reste de la démonstration est laissé au soin du lecteur. ∎

Nous avons quelques propriétés immédiates des σ^*-algèbres :

Proposition 2.-

1) Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, il y a bijection entre les sous-Σ^*-algèbres B_o de $B(X,\mathcal{A})$ et les sous-σ-algèbres $\mathcal{A}_o$ de $\mathcal{A}$ cette bijection est donnée par $B_o = B(X,\mathcal{A}_o)$.

2) Si B est une σ^*-algèbre, $X = \sigma\text{-}P(B)$; le centre Z de B est une σ^*-algèbre commutative et il existe une unique σ-algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X telle que $Z = B(X,\mathcal{A})$.

Remarques : a) Exemples d'espaces possédant (P) ; espaces compacts munis de leur tribu de Baire, espaces standards.

b) Un espace mesurable séparé ne possède pas nécessairement (P) : soit X un ensemble ayant la puissance du continu, il est facile de vérifier que les sous-ensembles dénombrables de X et leur complémentaire forment une σ-algèbre de Boole $\mathcal{A}$; considérons la fonction χ définie sur de la manière suivante : $\chi(A) = 0$ si A est dénombrable, $\chi(A) = 1$ si A est non-dénombrable. Il est clair que χ est une probabilité sur $(X,\mathcal{A})$ ne chargeant aucun point de X et χ définit un σ-état pur de $B(X,\mathcal{A})$.

c) L'exemple α) et le théorème 1 permettent de remplacer un espace mesurable par un espace mesurable possédant (P).

d) Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace possédant (P) tel que chaque point soit mesurable, si $\mathcal{B}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$, alors (X,B) possède (P). Cette propriété permet de construire d'autres espaces possédant (P) à partir des exemples déjà cités : par exemple $(0,1)$ muni de la tribu $\mathcal{P}((0,1))$ (l'ensemble des parties de $(0,1)$) ou encore un espace compact muni de sa tribu de Borel.

e) On remarque que si $(X,\mathcal{A})$ possède (P) et si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, l'espace $(X,\mathcal{B})$ n'a aucune raison de posséder (P) : prendre $X = (0,1)$, $\mathcal{A}$ = tribu de Baire, $\mathcal{B}$ la tribu formée des parties dénombrables et de leurs complémentaires, la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}$ est un σ-état pur qui n'est pas représentable par une mesure de Dirac.

f) Si $(X,\mathcal{A})$ est séparé et si $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée ; alors $(X,\mathcal{A})$ possède (P).

C.II. Structure des Σ^*-algèbres commutatives.

Théorème 1.- Soit (B,S) une Σ^*-algèbre commutative, il existe un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$, et un Σ^*-morphisme de $B(X,\mathcal{A})$ sur B.

Démonstration : On peut supposer que (B,S) est réalisée universellement dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S$; soit $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble des projecteurs hermitiens de B ; $\tilde{\mathcal{A}}$ est une σ-algèbre de Boole (cf. (37)) ; le théorème de Loomis (cf. (29)) montre l'existence d'un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$, d'un σ-idéal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ et d'un isormophisme $\tilde{\Phi}$ de σ-algèbres de Boole de $\tilde{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, soit M l'application $M : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N} \to \tilde{\mathcal{A}}$.

Il est clair que M est une mesure spectrale sur $(X,\mathcal{A})$, soit π_o la Σ^*-représentation de $B(X,\mathcal{A})$ associée à M (Prop. C.I.1) ; $\pi_o(B(X,\mathcal{A}))$ est une C^*-algèbre contenue dans B et contenant tous les projecteurs hermitiens de B, elle est donc identique à B puisque les combinaisons linéaires des projecteurs hermitiens de B sont denses dans B. ∎

Définition 1.- Soit (B,S) une Σ^*-algèbre commutative, un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$ associé à (B,S) par le théorème 1 est appelé un espace mesurable de structure de (B,S) . $(X,\mathcal{A})$ n'est pas unique en général.

Remarques :

a) Dans le cas d'une Σ^*-algèbre de la forme $B(Y,\mathcal{B})$, l'espace X est l'ensemble des caractères de la C^*-algèbre $B(Y,\mathcal{B})$ (Voir la construction de Loomis (cf. (29)) il est donc en général strictement plus grand que Y qui peut être identifié à une partie de l'ensemble des σ-caractères de $B(Y,\mathcal{B})$ dans le cas où $\mathcal{B}$ sépare les points de Y.

b) Il serait intéressant de savoir si une forme linéaire sur (B,S) qui est σ-additive sur l'ensemble des projecteurs hermitiens est un σ-état.

Proposition 1.- Soit B une Σ^*-algèbre commutative, soit s un σ-état sur B ; alors $\pi_s(B)$ est une algèbre de Von Neumann.

Démonstration : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace de structure de B (Th. 1) π_o le Σ^*-morphisme $B(X, \mathcal{A}) \to B$ tout σ-état s sur B définit une probabilité μ sur $(X, \mathcal{A})$ et on a $\mathcal{H}_s = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\pi_s(A) = \pi_s(\pi_o(B(X, \mathcal{A}))) = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\pi_s(A)$ est donc une algèbre de Von Neumann (cf. (34) p. 44, (42)).

Proposition 2.- Soit B une Σ^*-algèbre commutative, π une Σ^*-représentation de B dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ admettant un vecteur séparateur, alors $\pi(B)$ est une algèbre de Von Neumann.

Démonstration : Soit ξ le vecteur séparateur de $\pi(B)$, $||\xi|| = 1$, soit $s = \omega_\xi \circ \pi$.

Soient $\mathcal{H}' = \overline{(\pi(B)\xi)}$ et E la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$, la Σ^*-représentation $b \to E\pi(b)E$ de B dans $\mathcal{H}'$ admet un vecteur totalisateur, $E\pi(B)E$ est une algèbre de Von Neumann d'après la proposition 1 ; sur $\pi(B)''$ l'application $a \to EaE$ est un isomorphisme de l'algèbre de Von Neumann $\pi(B)''$ sur $E\pi(B)E$ (ξ est séparateur pour $\pi(B)''$) on a nécessairement $\pi(B)'' = \pi(B)$. ∎

C. III. Produits d'espaces mesurables et Σ^*-produits tensoriels.

§1. Produits d'espaces mesurables et Σ^*-produits tensoriels.

Considérons une famille d'espaces mesurables $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ et posons $B_i = B(X_i, \mathcal{A}_i)$, $B = B(\pi_I X_i, \boxtimes_I \mathcal{A}_i)$; nous nous proposons de comparer B et $\overset{\Sigma^*}{\underset{i \in I}{\boxtimes}} B_i$. On a des morphismes naturels : $A_i : B_i \to B$ qui donnent naissance, en vertu de la propriété universelle du produit tensoriel, à un morphisme $\Lambda : \overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} B_i \longrightarrow B$; le problème consiste à chercher si Λ est un isomorphisme.

Pour que Λ soit un isomorphisme il faut et il suffit que B possède la même propriété universelle que $\overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} B_i$, laquelle s'exprime au moyen de mesures spectrales (cf. Prop. C.I.1):

Lemme 1.- Pour que Λ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que pour toute famille de mesures spectrales M_i sur $(X_i, \mathcal{A}_i)$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les images commutent deux à deux, il existe une mesure spectrale unique M sur $(\Pi X_i, \boxtimes \mathcal{A}_i)$ dans $\mathcal{H}$ telle que $M(\Pi e_i) = \Pi M_i(e_i)$ pour $e_i \in \mathcal{A}_i$, et $e_i = X_i$ pour presque tout i.

Théorème 1.- On suppose que I est infini, pour que $\overset{\Sigma^*}{\underset{I}{\boxtimes}} B(X_i, \mathcal{A}_i)$ soit égale à $B(\prod_{i \in I} X_i, \boxtimes_{i \in I} \mathcal{A}_i)$ il faut et il suffit que l'on ait :

a) Pour toute partie finie $J \subset I$ et toute famille de mesures spectrales M_i sur $(X_i, \mathcal{A}_i)$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $i \in J$, dont les images commutent deux à deux, ; il existe une mesure spectrale M sur $(\prod_J X_j, \boxtimes_J \mathcal{A}_j)$ telle que :

$$M(\prod_{i \in J} e_i) = \prod_{i \in J} M_i(e_i) \quad \forall e_i \in \mathcal{A}_i, \ i \in J.$$

b) Sur l'espace produit $(\prod_{i \in I} X_i, \boxtimes_{i \in I} \mathcal{A}_i)$ toute limite projective de probabilités est une probabilité.

Démonstration : La condition a) exprime, d'après le lemme 1, que $\overset{\Sigma^*}{\boxtimes}_{i \in J} B_i = B(\prod_{i \in J} X_i, \boxtimes_{i \in J} \mathcal{A}_i)$ pour toute partie finie $J \subset I$, elle est nécessaire car on peut compléter la famille $(M_i)_{i \in J}$ pour obtenir une famille de mesures spectrales $(M_i')_{i \in I}$ avec :

$$M_i' = M_i \quad \text{si } i \in J$$

$$M_i' = \delta_{x_i} \, id_{\mathcal{H}} \quad \text{si } i \in I \ J \text{ en choisissant un point } x_i \in X_i$$

et on utilise le lemme 1 pour trouver la mesure spectrale M' sur B qui définit sur $B(\prod_{i \in J} X_i, \boxtimes_{j \in J} \mathcal{A}_i)$ la mesure spectrale M cherchée.

Le condition b) est aussi nécessaire par construction du Σ^*-produit tensoriel infini.

Montrons que a) et b) sont suffisantes : on a $\overset{\Sigma^*}{\boxtimes}_{i \in J} B_i = B(\prod_{j \in J} X_i, \boxtimes_{i \in J} \mathcal{A}_i)$ pour toute partie finie $J \subset I$; soit $(t_i)_{i \in I}$ une famille de Σ^*-représentations de $B(X_i, \mathcal{A}_i)$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ vérifiant :

$$t_i(a_i)\, t_j(a_j) = t_j(a_j)\, t_i(a_i) \quad i \neq j, \ a_i \in B(X_i, \mathcal{A}_i)$$
$$a_j \in B(X_j, \mathcal{A}_j)$$

d'après la condition a) et le lemme 1, pour toute partie finie $J \subset I$ on sait construire une Σ^*-représentation t_J de $B(\prod_{i \in J} X_i, \boxtimes_{i \in J} \mathcal{A}_i)$ dans vérifiant :

$$t_J(\prod_{i \in J} a_i) = \prod_{i \in J} t_i(a_i), \ a_i \in B(X_i, a_i), \ i \in J.$$

Soient $\xi, \xi' \in \mathcal{H}$, l'application $\mu_{J,\xi,\xi'}(f) = \langle t_J(f)\xi, \xi' \rangle$ définit une mesure sur $(\prod_{i \in J} X_i, \boxtimes_{i \in J} \mathcal{A}_i)$, $\|\mu_{J,\xi,\xi'}\| \leq \|\xi\| \, \|\xi'\|$; il est facile de voir que quand J parcourt les parties finies de I les $\mu_{J,\xi,\xi'}$ forment un système projectif de mesures, soit

$$\mu_{\xi,\xi'} = \varprojlim_J \mu_{J,\xi,\xi'}$$

$\mu_{\xi,\xi'}$ est une mesure sur $(\prod_I X_i , \boxtimes_i \mathcal{A}_i)$ par hypothèse et

$$||\mu_{\xi,\xi'}|| \leq ||\xi||.||\xi'||$$

L'application $(\xi,\xi') \to \mu_{\xi,\xi'}(f)$, pour $f \in B(\prod_I X_i , \boxtimes_I \mathcal{A}_i)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $\mathcal{H}$ de sorte qu'il existe un opérateur $t(f)$ et un seul tel que

$$<t(f)\xi,\xi'> = \mu_{\xi,\xi'}(f)$$

$$||t(f)|| \leq ||f|| ;$$

et on vérifie que t est une représentation de la C^*-algèbre $B(\prod_I X_i, \boxtimes \mathcal{A}_i)$, il est en fait une Σ^*-représentation puisque pour tout couple $\xi,\xi' \in \mathcal{H}$, l'application $f \to <t(f)\xi,\xi'>$ $f \in B(\ _I X_i, \boxtimes_I \mathcal{A}_i)$ est une mesure sur $(\prod_I X_i , \boxtimes_I \mathcal{A}_i)$.

On vérifie immédiatement que

$$t \circ \alpha_i = t_i \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

On a bien

$$B(\prod_I X_i , \boxtimes_I \quad _i) = \overset{\Sigma^*}{\boxtimes_I} B(X_i, \mathcal{A}_i). \blacksquare$$

Remarques : Sur un Σ^*-produit tensoriel, tout système projectif de σ-états admet une limite qui est un σ-état ; le théorème de Kolmogorov est valable dans la Σ^*-catégorie sans hypothèse supplémentaire ; l'exemple III, 3.1 p. 79 de (34) et le théorème 1.b) montrent qu'en général

$$\overset{\Sigma^*}{\boxtimes_I} B(X_i, \mathcal{A}_i) \neq B(\prod_I X_i , \boxtimes_I \mathcal{A}_i).$$

§2. Espaces mesurables réguliers :

Nous allons étudier une classe d'espaces mesurables stable pour la formation des produits (ordinaires) et dans laquelle le produit ordinaire et le Σ^*-produit tensoriel coïncident.

Définition 1.- Un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est dit régulier s'il existe :

a) une semi-algèbre de Boole $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ engendrant $\mathcal{A}$.

b) une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$;

telles que toute probabilité P sur $(X,\mathcal{A})$ jouisse de la propriété d'approximation suivante :

$P(e) = \sup \{P(c)/c \subset e , c \in \mathcal{C}\}$

pour tout $e \in \mathcal{S}$.

Exemples d'espaces réguliers :

1) Espaces compacts munis de leur tribu de Baire, $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties compactes.

2) Espaces polonais munis de leur tribu de Borel (espaces standards), $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties compactes (cf. (34) prop. II.7.3 p. 61).

Théorème 2.- Pour toute famille $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ d'espaces mesurables réguliers, on a :

$$\mathop{\boxtimes}_{I}^{\Sigma^*} B(X_i, \mathcal{A}_i) = B(\prod_I X_i, \mathop{\boxtimes}_I \mathcal{A}_i).$$

Démonstration : On va montrer que la famille $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ satisfait aux conditions du théorème 1, on notera $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{C}_i$ les objets associés à $(X_i, \mathcal{A}_i)$ par la définition 1.

1) La condition b) du th. 1 est satisfaite ; en effet, d'après le théorème III.3 p. 78 de (34) (dans ce théorème on suppose que $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i$ mais la démonstration reste valable sans cette hypothèse supplémentaire).

2) La condition a) du théorème 1 résultera du lemme suivant en remarquant qu'un produit d'espaces réguliers est encore régulier.

Lemme 2.- Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(X', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables réguliers, soient M_o et M'_o deux mesures spectrales sur $(X, \mathcal{A})$ et $(X', \mathcal{A}')$ dans un Hilbert $\mathcal{H}$ dont les images commutent ; alors il existe une mesure spectrale M sur $(X \times X', \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}')$ dans $\mathcal{H}$ telle que

$$M(e \times e') = M_o(e)\, M_o(e') \text{ pour } e \in \mathcal{A}, \; e' \in \mathcal{A}'.$$

Démonstration du lemme : Notons $(X, \mathcal{A}, \mathcal{S}_o, \mathcal{C}_o)$ et $(X', \mathcal{A}', \mathcal{S}'_o, \mathcal{C}'_o)$ les objets donnés par la définition 1 ; d'après (34) lemme I.6.1 et Prop. I.6.1 on peut supposer que $\mathcal{S}_o$ et $\mathcal{S}'_o$ sont des algèbres de Boole et que $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{C}'_o$ sont stables pour la réunion finie ; soient $\mathcal{S} = \mathcal{S}_o \times \mathcal{S}'_o$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_o \times \mathcal{C}'_o$, il est clair que $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre de Boole et que $\mathcal{C}_o$ est une classe compacte. Sur $\mathcal{S}$ on peut définir :

$$M(e \times e') = M_o(e).M'_o(e') \quad \text{pour } e \times e \in \mathcal{S}$$

D'après le lemme C.I.1 il suffit de démontrer que, $\forall e \times e' \in \mathcal{S}$, $\forall \xi \in \mathcal{H}$, $||\xi|| = 1$, et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $c \times c' \in \mathcal{C}$, $c \subset e$, $c' \subset e'$, tel que

$$|\langle (M(e \times e') - M(c \times c'))\xi, \xi \rangle| \, \varepsilon .$$

Or

$$|\langle (M(e \times e')-M(c \times c))\xi,\xi \rangle|^{1/2} = ||(M_o(e)M'_o(e')-M_o(c)\ M'_o(c'))\xi||$$
$$\leq ||(M_o(e)-M_o(c))M'_o(e')\xi\ ||$$
$$+||(M'_o(e')-M'_o(c'))M_o(c)\xi\ ||.$$

D'après les hypothèses, il existe un $c \subset e$, $c \in \mathcal{C}_o$ rendant le 1er terme du second membre inférieur à $\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}$, c étant ainsi fixé, il existe un $c' \subset e'$, $c' \in \mathcal{C}'_o$ rendant le second terme inférieur à $\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}$. Le lemme est démontré. ∎

Remarque : Un espace mesurable possédant (P) du Th. C.5.1 n'est pas régulier : dans l'exemple de (34) (Ex. III,3.1, p. 79), il est facile de voir qu'on peut choisir des espaces $(X_n, \mathcal{A}_n)$ séparés et dénombrablement engendrés (dnnc possédant (P) d'après la remarque C-I-f)) tels que

$$B(\prod_{n \in N} X_n, \boxtimes_{n \in N} \mathcal{A}_n) \neq \overset{\Sigma^*}{\boxtimes_{n \in N}} B(X_n, \mathcal{A}_n)$$, les $(X_n, \mathcal{A}_n)$ ne sont pas tous réguliers d'après le théorème 2.

CHAPITRE D : INTEGRATION DES σ-ETATS ET DES Σ^*-REPRESENTATIONS.

§1. Structure mesurable sur l'ensemble des σ -états d'une pré- Σ^*-algèbre.

Définition 1.- Soit (B,S) une pré-Σ^*-algèbre, on appelle structure mesurable canonique sur S la structure mesurable la moins fine rendant mesurables toutes les fonctions $s \to s(b)$, $\forall b \in B$; on note $(S, \mathcal{A})$ l'espace mesurable canonique ainsi obtenu.

Soit $(\tilde{B}_S, \tilde{S})$ la Σ^*-enveloppe de (B,S), en identifiant S à $\tilde{S}$, il est facile de voir que les structures mesurables définies par B et B_S sur S coïncident (car $\tilde{B}_S$ est la fermeture séquentielle faible de $\tilde{B}$).

En particulier si A est une C^*-algèbre, E l'ensemble de ses états, sur sa Σ^*-enveloppe $(\tilde{A},E)$, la structure mesurable canonique sur E coïncide avec la structure mesurable la moins fine rendant mesurables les fonctions $s \to s(a)$, $\forall a \in A$, autrement dit la structure mesurable de Baire sur l'ensemble des états de A.

§2. Résultante d'une probabilité sur l'ensemble des σ-états :

Lemme 1.- Soit (B,S) une pré- Σ^*-algèbre, μ une probabilité sur S muni de la structure mesurable canonique ; alors il existe un unique σ-état s_μ de S tel que

$$s_\mu(b) = \int_S \phi(b)\ d\mu(\phi) \quad \forall b \in B$$

On dira que s_μ est lá résultante (ou le barycentre) de μ.

Démonstration : L'application $b \to \int_S \phi(b)\, d\mu(\phi)$ est une forme linéaire positive sur B, de plus si $\{b_n\}$ est une suite faiblement de Cauchy dans B : $\phi(b_n)$ converge, $\forall \phi \in S$ et $\sup \|b_n\| < \infty$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique :

$$\int_S \phi(b_n)\, d\mu\,(\phi) \quad \text{converge quand} \quad n \to \infty\,.$$

L'application $b \to \int_S \phi(b)\, d\mu\,(\phi)$ est bien un σ-état sur B, il existe un unique $s_\mu \in S$ tel que

$$s_\mu(b) = \int_S \phi(b)\, d\mu(\phi) \quad \forall b \in B. \blacksquare$$

§3. Champs mesurables de Σ^*-représentations.

Soient $(Z, \mathcal{Q})$ un espace mesurable, μ une mesure positive sur Z, $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ une intégrale hilbertienne sur Z, (B,S) une pré- Σ^*-algèbre ; pour tout $\zeta \in Z$, soit $\pi(\zeta)$ une Σ^*-représentation de B dans $\mathcal{H}(\zeta)$, on dira que $\zeta \to \pi(\ )$ est un champ de Σ^*-représentations de B.

Définition 2.- Le champ de Σ^*-représentations $\zeta \to \pi(\zeta)$ est dit μ-mesurable si pour tout $x \in B$, le champ d'opérateurs $\zeta \to \pi(\zeta)\,(x)$ est μ-mesurable.

Comme on a $\|\pi(\zeta)(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in B$, $\forall \zeta \in Z$, on peut former l'opérateur continu

$$\pi(x) = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(x)\, d\mu(\zeta)$$

dans $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$; π est appelée l'intégrale hilbertienne des $\pi(\zeta)$ (cf. (8),(9)).

Proposition 1.- Une intégrale hilbertienne de Σ^*-représentations sur une pré- Σ^*-algèbre est une Σ^*-représentation.

Démonstration : Nous reprenons les notations précédentes, soit $\{x_n\}$ une suite faiblement de Cauchy dans B, $\sup_n \|x_n\| \leq K < \infty$.

$$<\pi(x_n)\phi\ ,\ \psi = \int_Z <\pi(\zeta)(x_n)\ \phi(\zeta)\ ,\ \psi(\zeta)>\, d\mu(\zeta) \quad \forall \phi\ , \psi \in \mathcal{H}.$$

Par hypothèse

$$<\pi(\zeta)(x_n)\phi(\zeta),\psi(\zeta) \quad \text{converge quand} \quad n \to \infty\,.$$

$$|<\pi(\zeta)(x_n)\phi(\zeta),\psi(\zeta)>| \leq K\ \|\phi(\zeta)\|\,.\,\|\psi(\zeta)\| \quad \forall n$$

$$\|\phi(\zeta)\|.\|\psi(\zeta)\|\ d\mu(\zeta) \leq (\ _Z \|\phi(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta))^{1/2} (\ _Z \|\psi(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta))^{1/2}$$

$$= \|\phi\|.\ \|\psi\|.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :
$< \pi(x_n)\phi,\psi> = \int_Z <\pi(\zeta)(x_n)\phi(\zeta),\psi(\zeta)> d\mu(\zeta)$ converge quand $n \to \infty$.

π est bien une Σ^*-représentation. ∎

Théorème 1.- Soient (B,S) une pré- Σ^*-algèbre, $\zeta \to \pi(\zeta)$ un champ μ-mesurable de Σ^*-représentations de B dans une intégrale hilbertienne $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$; soit $\widetilde{\pi(\zeta)}$ (resp. $\tilde{\pi}$) la Σ^*-représentation prolongeaut $\pi(\zeta)$ (resp. π) sur la Σ^*-algèbre séparée complétée $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$.

Le champ $\zeta \to \tilde{\pi}(\zeta)$ est un champ μ-mesurable de Σ^*-représentations et l'on a

$$\tilde{\pi} = \int_Z^{\oplus} \widetilde{\pi(\zeta)}\, d\mu(\zeta).$$

Démonstration : Pour simplifier les notations on suppose $B \subset \tilde{B}_S$ mais ce n'est pas une restriction. Montrons d'abord que le champ $\zeta \to \widetilde{\pi(\zeta)}$ est μ-mesurable : considérons l'ensemble :

$$\begin{aligned} B_1 &= \{b \in \tilde{B}_S)/\text{le champ } \zeta \to \pi(\zeta)\,(b) \text{ est } \mu\text{-mesurable}\} \\ &= \{b \in \tilde{B}_S/\text{la fonction} \to <\pi(\zeta)(b)\phi(\zeta)\,,\ \psi(\zeta)> \text{ est mesurable} \\ &\quad \forall \phi,\psi \in \mathcal{H}\}. \end{aligned}$$

Cet ensemble contient B par hypothèse, pour montrer qu'il coïncide avec $\tilde{B}_S$, il suffit de montrer qu'il est faiblement séquentiellement fermé dans $\tilde{B}_S$: soit $\{a_n\}$ une suite de cet ensemble convergeant faiblement vers un élément $a \in B_S$, on a

$$\widetilde{\pi(\zeta)}(a_n) \to \widetilde{\pi(\zeta)}(a)\ ,\ n \to \infty,$$

donc

$$< \widetilde{\pi(\zeta)}(a_n)\phi(\zeta),\psi(\zeta)> \to <\widetilde{\pi(\zeta)}(a)\phi(\zeta),\psi(\zeta)>\ ,\quad n \to \infty$$

pour tous $\zeta \in Z$ et $\phi,\psi \in \mathcal{H}$; la fonction $\zeta \to <\widetilde{\pi(\zeta)}(a)\phi(\zeta),\psi(\zeta)>$ est une fonction μ-mesurable car c'est une limite simple de fonctions μ-mesurables, il en résulte que $a \in B_1$ et par suite $B_1 = \tilde{B}_S$, et le champ $\zeta \to \widetilde{\pi(\zeta)}$ est μ-mesurable.

Les deux Σ^*-représentations $\tilde{\pi}$ et $\int_Z^{\oplus} \widetilde{\pi(\zeta)}\, d\mu(\zeta)$ coïncident sur B, elles sont donc égales. ∎

Corollaire : Soient A une C^*-algèbre, $\tilde{A}$ sa Σ^*-algèbre enveloppante, $\zeta \to \pi(\zeta)$ un champ μ-mesurable de représentations de A dans $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta)d\mu(\zeta)$, $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, soit $\widetilde{\pi(\zeta)}$ (resp. $\tilde{\pi}$) la Σ^*-représentation prolongeant $\pi(\zeta)$ (resp. π) sur $\tilde{A}$. Le champ $\zeta \to \widetilde{\pi(\zeta)}$ est un champ μ -mesurable de Σ^*-représentations et l'on a

$$\tilde{\pi} = \int_Z^{\oplus} \widetilde{\pi(\zeta)} \, d\mu(\zeta).$$

Remarques : a) Soit $(Z,\mathcal{A})$ un espace mesurable, d'après la remarque p. 143 de (8) (ou Appendice de (9)), on peut définir les notions de champs $\mathcal{A}$-mesurables d'espaces de Hilbert, d'opérateurs, de représentations et de Σ^*-représentations etc..., on peut reformuler le théorème 1 dans le cadre abstrait (sans mesure μ) :

Soit $(Z,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $\zeta \to \mathcal{H}(\zeta)$ un champ $\mathcal{A}$-mesurable d'espaces de Hilbert, $\zeta \to \pi(\zeta)$ un champ $\mathcal{A}$-mesurable de Σ^*-représentation d'un pré- Σ^*-algèbre (B,S) ; le champ de Σ^*-représentations $\zeta \to \widetilde{\pi(\zeta)}$ sur $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

b) L'analogue du corollaire du théorème 1 pour l'algèbre de Von Neumann enveloppante n'existe pas ; même si A est commutative séparable, $\mathcal{H}$ séparable on peut avoir :

α) le champ de représentations normales associées sur A'' n'est pas mesurable : en effet soient $A = C((0,1))$, μ la mesure de Lebesgue $\mathcal{H} = L^2((0,1),\mu)$ f une fonction bornée non-μ-mesurable, $\tilde{f} \in A''$ tel que $\delta_x(\tilde{f}) = f(x)$, pour tout $x \in (0,1)$, le champ de représentations normales $x \to \delta_x(\tilde{f}) = f(x)$ n'est pas μ-mesurable.

β) Un élément $a \in A''$ tel que le champ $\zeta \to \pi(\zeta)(a)$ soit mesurable et que $\pi(a) \neq \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)(a)\, d\mu(\zeta)$ (cf. exemple de la remarque 3 de (20)).

§4. Champs mesurables sur l'ensemble des σ-états d'une Σ^*-algèbre dénombrablement engendrée :

Soit (B,S) une pré- Σ^*-algèbre dénombrablement engendrée (B n'est pas nécessairement uniformément séparable) soit $(X,\mathcal{A})$ l'espace mesurable canonique ; soit $\{f_n\}_{n \in N}$ une suite engendrant B fixée une fois pour toutes, les champs définis sur $(S,\mathcal{A})$: $s \to \pi_s(f_n)\xi_s$ sont $\mathcal{A}$-mesurables et définissent un champ $\mathcal{A}$-mesurable d'espaces de Hilbert $s \to \mathcal{H}_s$; on vérifie immédiatement que le champ $s \to \pi_s$ est un champ $\mathcal{A}$-mesurable de Σ^*-représentations de B. Si $(\tilde{B}_S,\tilde{S})$ est la Σ^*-algèbre séparée complétée de (B,S) en identifiant S à $\tilde{S}$, la suite $\{f_n\}$ engendre encore $\tilde{B}_S$ et on obtient encore le même champ en utilisant $\tilde{B}_S$, S et $\{f_n\}$.

La structure de champs mesurables ainsi définie est indépendante du choix de la suite $\{f_n\}$ en effet soit $\{f'_n\}$ une autre suite engendrant B, les champs

$s \to \pi_s(f'_n)\xi_s$ sont mesurables pour la structure définie par la suite $\{f_n\}$: (car $<\pi_s(f'_n)\xi_s , \pi_s(f_m)\xi_s >= s(f^*_m f'_n))$ la structure de champs mesurables définie par la suite $\{f'_n\}$ est donc moins fine que celle définie par $\{f_n\}$; par raison de symétrie ces deux structures coïncident.

Soit μ une probabilité sur $(X,\mathcal{A})$ de résultante s_μ (Lemme 1) tous les champs $\mathcal{A}$-mesurables sont μ-mesurables ; un raisonnement analogue à celui de (20) donne :

<u>Proposition 20</u> : Soit μ une probabilité sur $(S,\mathcal{A})$ de résultante s ; la Σ^*-représentation π_s est quasi-équivalente à l'intégrale $\pi=\int_S^{\boxplus} \pi_\psi \, d\mu(\psi)$ du champ de Σ^*-représentations $\psi \to \pi_\psi$.

§5. <u>Σ^*-représentation d'une σ^*-algèbre commutative dans un Hilbert séparable</u>.

<u>Proposition 3</u>.- Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, soit π une Σ^*-représentation de $B(X,\mathcal{A})$ dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Il existe une probabilité μ sur $(X,\mathcal{A})$, une intégrale hilbertienne $\mathcal{H}' =\int^{\boxplus} \mathcal{H}'(x)d\mu(x)$, une isométrie U de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ telles que

$$U\pi(f)\, U^{-1} = T_f \quad \forall f \in B(X,\mathcal{A})$$

où T_f désigne l'opérateur de multiplication par f ; de plus l'ensemble des T_f quand f parcourt $B(X,\mathcal{A})$ est l'algèbre de Von Neumann des opérateurs diagonalisables.

<u>Démonstration</u> : La démonstration suivante est adpatée de celle donnée dans (17) pour le cas des espaces localement compacts, nous en donnons seulement l'idée directrice :

a) Cas où π admet un vecteur totalisateur ξ ; on peut supposer $||\xi|| = 1$, soit $\mu = \omega_\xi \circ \pi$, la représentation π est spatialement équivalente à π_μ ; prenons $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\mu = L^2(X,\mu)$ et la proposition est démontrée dans ce cas.

b). Cas général : d'après le théorème de Zorn et la séparabilité de on peut trouver des vecteurs $(\xi_n)_{n \in N}$ de $\mathcal{H}$ et des sous-espaces fermés deux à deux orthogonaux $(\mathcal{H}_n)_{n \in N}$ tels que

$$||\xi_n|| = 1 , \mathcal{H}_n = \overline{\pi(B(X,\mathcal{A}))\xi_n} , \mathcal{H} = \underset{n \in N}{\boxplus} \mathcal{H}_n.$$

On définit $\mu_n(f) = <\pi(f)\xi_n,\xi_n >$ et $\mu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(f)$,

$f \in B(X,\mathcal{A})$; les probabilités μ_n admettant chacune une densité par rapport à $\mu : \mu_n = \psi_n$ où $\psi_n \geq 0$ et $\psi_n \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

Le reste de la démonstration est classique. ∎

§6. Applications à la théorie des désintégrations centrales.

Nous allons donner quelques applications de la théorie des Σ^*-algèbres à la théorie des désintégrations centrales récemment développée dans plusieurs articles (cf. (10), (20), (28), (38), (39), et (45)).

Nous verrons ainsi que l'utilisation des Σ^*-algèbres donne des résultats plus satisfaisants que ceux obtenus par l'utilisation des algèbres de Von Neumann.

Soient A une C^*-algèbre unitaire, E l'ensemble des états de A, $\tilde{A}$ la Σ^*-enveloppe de A, Z le centre de $\tilde{A}$, Z_o une sous- Σ^*-algèbre de Z ; d'après Prop. C.II.2, Z est une σ^*-algèbre, on a $Z = B(X,\mathcal{B})$ avec $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable (Prop. C.I.2) et y a correspondance bijective entre les sous-Σ^*-algèbres Z_o de Z et les sous-σ -algèbres de Boole $\mathcal{B}_o$ de $\mathcal{B}$, cette correspondance est donnée par $Z_o = B(X,\mathcal{B}_o)$ (cf. C.I.§3).

Pour tout $a \in \tilde{A}$, on considère la fonction $\hat{a} : s \to s(a)$, $s \in E$, les fonctions a, $a \in \tilde{A}$, sont Baire-mesurables sur le compact E(cf. D. §1) et (4)).

Soit $s \in E$, $\pi_s(Z_o)$ est une sous-W^*-algèbre du centre de $\pi_s(A)''$ (cf. CII); on peut reprendre tout le raisonnement de Guichardet et Kastler sur les mesures Z_o-centrales (cf.(20)).

Définition 1.- Soit μ une mesure positive normée sur E, soit $s = \int \varphi d\mu(\varphi)$ le barycentre de μ; on dit que μ est Z_o-centrale s'il existe un Σ^*-morphisme de Z_o sur $L^\infty(E,\mu)$ tel que l'on ait :

$$(1) \qquad s(za) = \mu(\Lambda(z)\hat{a}) \quad \forall z \in Z_o , \forall a \in A.$$

On remarque que la relation (1) est séquentiellement faiblement fermée et on en déduit :

$$(1') \qquad s(za) = \mu(\Lambda(z)\hat{a}) \quad \forall z \in Z_o , \forall a \in \tilde{A}$$

Soit P_s la projection orthogonale de $\mathcal{H}_s$ sur $\overline{(\pi_s(Z_o)\xi_s)}$;

on a les résultats suivants : (cf. (20)) :

1) Pour qu'une mesure normée μ sur E de barycentre s soit Z_o-centrale il faut et il suffit que l'on ait :

$$\mu(\hat{a}_1,\dots\hat{a}_n) = \langle \pi_s(a_1)P_s \dots P_s\, \pi_s(a_n)\xi_s,\xi_s \rangle$$
$$\forall a_1,\dots a_n \in A.$$

2) Tout état s est barycentre d'une mesure Z_o-centrale et d'une seule ; en outre, le Σ^*-morphisme Λ est unique.

En fait nous avons un résultat plus précis sur le Σ^*-morphisme Λ :

<u>Proposition 1</u>.- Pour tout $z_o \in Z_o$, on a $\Lambda(z_o) = \hat{z}_o$ μ-preque partout.

<u>Démonstration</u> : Soit $z_o \in Z_o$, la fonction $\hat{z}_o$ est Baire-mesurable et bornée sur E, donc $\hat{z}_o \in \mathcal{L}^\infty(E,\mu)$. On a alors :

$$\begin{aligned} s(zz_o) &= \mu(\Lambda(z)\hat{z}_o) \\ &= \mu(\Lambda(z)\Lambda(z_o)) \quad \forall z \in Z_o. \end{aligned}$$

Comme Λ est surjectif, on a $\mu(f\hat{z}_o) = \mu(f\,\Lambda(z_o))$ pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty(E,\mu)$, ce qui implique que

$$\hat{z}_o = \Lambda(z_o) \quad \mu\text{-presque partout.} \blacksquare$$

Supposons désormais que A est séparable, on utilise le champ mesurable d'espaces de Hilbert $\psi \to \mathcal{H}_\psi$ sur E défini par une suite dense dans A (cf. D §4 ou (20)). On obtient alors (cf. (20))

$$\mathcal{H}_s = \int_E^\oplus {}_\psi\, d\mu(\psi)$$

$$\xi_s = \int_E^\oplus \xi_\psi\, d\mu(\psi)$$

$$\pi_s = \int_E^\oplus \pi_\psi\, d\mu(\psi)$$

$$\pi_s(Z_o) = \text{algèbre des opérateurs diagonalisables.}$$

Rappelons (cf. (20)) qu'un état ψ sur $\tilde{A}$ est dit Z_o-pur si ψ est multiplicatif sur Z_o ou encore si $\pi_\psi(Z_o)$ est réduite aux scalaires, autrement dit si la restriction de ψ à Z_o est un σ-caractère.

<u>Lemme 1</u>.- On a $\pi_\psi(Z_o) = \{\text{scalaires}\}$ pour μ-presque tout ψ de E, autrement dit ψ est Z_o-pur pour μ-presque tout ψ de E.

<u>Démonstration</u> : Soit $z_o \in Z_o$, d'après le théorème D.1 sur l'intégrale de Σ^*-représentations, on a :

$$\pi_s(z_o) = \int_E^\oplus \pi_\psi(z_o)\, d\mu(\psi)$$

Comme $\pi_s(Z_o)$ est l'algèbre des opérateurs diagonalisables, $\pi_\psi(Z_o) = \{\text{scalaires}\}$ pour μ-presque tout ψ de E. $\blacksquare$

On en déduit :

<u>Théorème 1</u>.- Les mesures Z_o-centrales sont portées par des états Z_o-purs.

Soient Z_o et Z_1 deux sous-Σ^*-algèbres du centre de $\tilde{A}$ avec $Z_1 \subset Z_o$, s un état sur A. Soit μ_o^s (resp. μ_1^s) la mesure Z_o (resp. Z_1) - centrale de

$$\pi_s(z) = \int_E^{\oplus} \pi_\psi(z)\, d\mu_1^s(\psi) \qquad \forall z \in Z_o$$

$$Z_1 \subset Z_o \subset (Z_1).$$

Le champ d'algèbres de Von Neumann $\psi \to \pi_\psi(Z_o)$ est μ_1^s-mesurable et admet pour intégrable $\pi_\psi(Z_o)$ (cf. (8), (9)). On peut donc appliquer le théorème 5 de Guichardet et Kastler (cf. (20)) et on obtient le résultat suivant

<u>Théorème 2</u>.- Soient A une C^*-algèbre séparable, Z_o et Z_1 deux sous-Σ^*-algèbres du centre de $\tilde{A}$, s un état, μ_o^s (resp. μ_1^s) sa mesure Z_o (resp. Z_1)-centrale. Alors on a

$$\mu_o^s = \int_E \mu_o^\psi \, d\mu_1^s(\psi)$$

où μ_o^ψ désigne la mesure Z_o-centrale de ψ.

<u>Remarques</u> : La proposotion 1 est fausse pour les algèbres de Von Neumann (cf. (20) Remarque 3 p. 357) et on ne sait démontrer les théorèmes 1 et 2 pour les algèbres de Von Neumann que dans des cas très particuliers (cf. (20)).

BIBLIOGRAPHIE

(1) BANACH & KURATOWSKI : Sur une généralisation du problème de la mesure. Fund. Math. 14 (1929) 127-131.

(2) BERBERIAN S.K. : Notes on spectral Theory (Van Nostrand 1966).

(3) BODIOU G. : Théorie dialectique des probabilités englobant leurs calculs classique et quantique (Gauthier-Villars) 1964.

(4) DAVIES E.B. : On the Borel structure of C^*-algebras (with an appendix by R.V. KADISON). Comm. Math. Phys. 8 (1968) 147-164.

(5) DAVIES E.B. : The structure of Σ^*-algebras. Quart. J. Math. 20 (1969) 351-366.

(6) DAVIES E.B. : Quantum Stochastic Processes. Comm. Math. Phys. 15 (1969) 277-304.

(7) DENY J. : Les noyaux élémentaires. Séminaire de Théorie du Potentiel (Brelot-Choquet-Deny) (1959-60).

(8) DIXMIER J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. (Gauthier-Villars) (1969).

(9) DIXMIER J. Les C^*-algèbres et leurs représentations. (Gauthier-Villars) (1969).

(10) DOPLICHER, KASTLER & STØRMER : Invariant states and asymptotic abelianness. J. Func. Ana. 3 (1969) 419-434.

(11) DYNKIN E.B. : Theory of Markov Processes I & II. Springer-Verlag (1965).

(12) EDWARDS C.M. : The operational approach to algebraic quantum theory. Comm. Math. Phys. 16 (1970) 207-230.

(13) EFFROS E.G. : Order Ideals in a C^*-algebra and its dual. Duke Math. J. 30 (1963) 391-411.

(14) GOLODETS V. Ya : Classification of representations of the anticommutation relations. Russian Math. Surveys 24 (1969) 1-64.

(15) GUICHARDET A: Algèbres d'observables associées aux relations de commutation. (Armand Colin).

(16) GUICHARDET A. : Sur la catégorie des algèbres de Von Neumann. Bull. Sci. Math. 90 (1966), 41-64.

(17) GUICHARDET A. : Leçons sur certaines algèbres topologiques. (Gordon & Breach) (1967).

(18) GUICHARDET A. : Tensor Products of C^*-algebras. I. Lecture Notes Series 13 Aarhus Universitet (1969).

(19) GUICHARDET A. : Tensor Products of C^*-algebras. II. Lecture Notes Series 13 Aarhus Universitet (1969).

(20) GUICHARDET A. & KASTLER D. : Désintégration des états quasi-invariants des C^*-algèbres. Journ. Math. Pures et Appl. 49 (1970) 349-380.

(21) HAAG, KADISON & KASTLER : Nets of C^*-algebras and classification of states. Comm. Math. Phys. 16 (1970) 81-104.

(22) HAAG & KASTLER : An algebraic approach to quantum field theory.J. Math. Phys. 5 (1964) 848-861.

(23) HALMOS P.R. : Measure Theory. (Van Nostrand) (1961).

(24) HALMOS P.R. : Lectures on Boolean algebras (Van Nostrand Math. Studies) (1963).

(25) KADISON R.V. : Transformation of states in operator theory and dynamics. Topology 3, Suppl. 2 (1965) 177-198.

(26) KADISON R.V. : States and Representations. T.A.M.S. 103 (1962) 304-319.

(27) KADISON R.V. : Operator algebras with a faithful weakly closed representation. Ann. Math. 64 (1954) 175-181.

(28) LANDFORD O. & D. RUELLE : Integral representations of invariant states on B^*-algebras. J. Math. Phys. 8 (1967) 1460-1463.

(29) LOOMIS L.H. : On the representation of σ-complete Boolean algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 757-760.

(30) LOOMIS L.H. : Abstract harmonic analysis. (D. Van Nostrand Company) (1953).

(31) MACKEY G.W. : Mathematical foundations of Quantum Mechanics. (W.A. Benjamin, Inc.) (1963).

(32) MEYER P.A. : Probabilités et Potentiels (Hermann, 1966).

(33) MITCHELL : Theory of categories (Academic Press, 1965).

(34) NEVEU J. : Bases mathématiques du Calcul des Probabilités. (Masson, 1970).

(35) PEDERSEN G.K. : On weak and σ-monotone closures of C^*-algebras. Comm. Math. Phys. 11 (1969) 221-266.

(36) PEDERSEN G.K. : C^*-integrals (Kobenhavns Universitet, May 1970).

(37) PLYMEN R. : C^*-algebras and Mackey's axioms. Comm. Math. Phys. 8 (1968) 132-146.

(38) RUELLE D. : Statistical Mechanics (Benjamin, New York, 1969).

(39) RUELLE D. : Integral representation of states on a C^*-algebra. J. Func. Ana. 6 (1970) 116-151.

(40) SAKAI S. : On the central decomposition of positive functionals on C^+-algebras. T.A.M.S. 118 (1965) 406-419.

(41) SAKAI S. : On topological properties of W^*-algebras. Proc. Japan Acad. 33 (1957) 439-444.

(42) SAKAI S. : C^*-algebras and W^*-algebras. Springer-Verlag (1971).

(43) SEGAL I.E. : Postulates for general quantum mechanics. Ann. of Math. 4 (1947), 930-948.

(44) SEGAL I.E. & KUNZE : Integrals and Operators (Mc GrawHill) (1968).

(45) STØRMER E. : States and invariant maps of operator algebras. J. Func. Ana. 5 (1970) 44-65.

(46) TAKEDA Z. : On the representation of operator algebras. Proc. Japan Acad. 30 (1954) 299-304.

(47) TAKEDA Z. : On the representations of operator algebras II. Tohôku Math. J. 6 (1954), 212-219.

(48) TAKEDA Z. : Inductive limit and infinite direct product of operator algebras. Tohôku Math. J. 7 (1955) 67-86.

(49) TURUMARU T. : On the direct product of operator algebras. I. Tohôku Math. J. 4 (1952) 242-251.

(50) TURUMARU T. : On the direct product of operator algebras II. Tohôku Math. J. 5 (1953) 1-7.

DANG NGOC NGHIEM
Université de Paris-VI
Calcul des Probabilités
4 place Jussieu, Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05