MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LUCIEN WAELBROECK

Les quotients de *b*-espaces

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 389-394
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__389_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 389-394.

LES QUOTIENTS DE b-ESPACES.

par
Lucien WAELBROECK

---

1. Au hasard de ses recherches en théorie spectrale, l'auteur a rencontré une catégorie abélienne qui pouvait être utile en analyse fonctionnelle. Il en a fait une étude préliminaire, puis est arrivé à la conclusion que l'introduction de cette catégorie était liée à des problèmes techniques, totalement étrangers à l'analyse fonctionnelle. Cette introduction ne se justifiait donc, que si un nombre suffisant de problèmes d'analyse fonctionnelle pouvaient être résolus, ou au moins, avancés, simplifiés de ce fait. Grâce aux travaux de Guy Noël sur le produit tensoriel, et à ceux d'Ivan Cnop et de Jean Pierre Ferrier en analyse complexe, il semble justifié d'introduire cette catégorie, au moins à titre expérimental.

Jean Pierre Ferrier [4], [5], [6], et Ivan Cnop [1], [2], [3] utilisent le "calcul symbolique relatif" de l'auteur[11]. C'était afin de mieux comprendre ce qui est relatif dans la construction, que l'auteur avait commencé à regarder cette catégorie. Toute application intéressante du calcul symbolique relatif est une indication du fait que les quotients de b-espaces pourraient être utiles.

Guy Noël [8], [9], [10] définit le produit tensoriel de deux objets de notre catégorie. Il montre que le produit tensoriel de deux espaces de Banach n'est en général pas un espace de Banach, mais un objet plus général. Si E a la propriété d'approximation, pour que $E \otimes_q F$ soit un espace de Banach quel que soit l'espace de Banach F, il faut et il suffit que E soit un espace de type $\mathcal{L}_1$ au sens de Lindenstrauss.

Le foncteur de complétion a des propriétés assez pathologiques, dans la catégorie des espaces bornologiques convexes (cf. [12] ou [7]). Par contre, ce foncteur se comporte de manière tout à fait régulière dans la catégorie qui nous intéresse.

2. C'est en généralisant aux b-algèbres le théorème affirmant que le spectre joint de n éléments d'une algèbre de Banach n'est pas vide, que j'ai rencontré les quotients de b-espaces pour la première fois. Commençons par fixer la terminologie. Une b-algèbre est une algèbre bornologique ayant une base de bornologie formée d'ensembles complétants, donc convexes, équilibrés et ayant pour jauge une norme banachique. Un b-idéal α de la b-algèbre $\mathcal{A}$ est un idéal α de $\mathcal{A}$, avec une bornologie complétante plus fine que la bornologie induite, et telle que la multiplication applique $\mathcal{A} \times \alpha$ et $\alpha \times \mathcal{A}$ de manière bornée dans α. Si $\mathcal{A}$ est commutative, et si α est engendré par un nombre fini d'éléments, $a_1, \ldots, a_n$, la bornologie naturelle de α est celle pour laquelle B est borné lorsque :

$$B \subseteq \Sigma_1^n a_i B_i$$

pour un choix convenable de bornés B_i de $\mathcal{A}$.

Le résultat suivant est connu, et généralise en un certain sens le théorème affirmant que le spectre d'un élément d'une algèbre de Banach n'est pas vide. Soit $\mathcal{A}$ une b-algèbre commutative unifère, $a \in \mathcal{A}$. Il n'existe pas de fonction $u(s)$, localement bornée et à croissance polynomiale à l'infini sur $\mathbb{C}$, qui vérifie identiquement la relation $(a-s)\, u(s) = 1$.

On pose $\delta_o(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$. On appelle $\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A})$ l'algèbre des fonctions $u(s)$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, et telles que $\delta_o(s)^N u(s)$ soit bornée pour N suffisamment grand, avec la bornologie évidente. Cette algèbre se définit aussi bien lorsque $s = (s_1 ,\dots, s_n)$ est une variable sur $\mathbb{C}^n$ que lorsque s est une variable sur $\mathbb{C}$. La conjecture suivante est la généralisation naturelle du théorème rappelé ci-dessus :

Soient $a_1 ,\dots, a_n$ des éléments de $\mathcal{A}$. Il n'existe pas d'éléments $u_1 ,\dots, u_n$ de $\Theta(s_1 ,\dots, s_n\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A})$ et vérifiant identiquement la relation

$$\Sigma_1^n (a_i - s_i)\, u_i(s) = 1 \quad .$$

Cette conjecture se vérifie. On appelle $\mathcal{A}'$ l'algèbre $\Theta(s_2 ,\dots, s_n\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A})$, et α' l'idéal engendré dans $\mathcal{A}'$ par $(a_2 - s_2 ,\dots, a_n - s_n)$ avec sa bornologie naturelle. L'algèbre $\Theta(s_1 ,\dots, s_n\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A})$ s'identifie avec $\Theta(s_1\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A}')$. Quant à l'idéal engendré par $(a_1 - s_1 ,\dots, a_n - s_n)$ dans notre algèbre, il s'identifie avec

$$(a_1 - s_1)\ \Theta(s_1\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A}') + \Theta(s_1\ ;\ \delta_o\ ;\ \alpha') \ .$$

Le pas de récurrence est donc le suivant :

Soit $\mathcal{A}$ une b-algèbre commutative, unifère. Soit $a \in \mathcal{A}$. Supposons qu'il existe une fonction $u(s) \in \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathcal{A})$ et une fonction $v(s) \in \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \alpha)$ vérifiant identiquement la relation

$$(a - s)\, u(s) + v(s) = 1 \quad .$$

Alors $\mathcal{A} = \alpha$.

La suite de la démonstration n'est pas au programme (cf. [15]). Le seul but de ce développement était de montrer comment la démonstration d'un théorème intéressant les b-algèbres pouvait se simplifier lorsque l'on osait faire intervenir le quotient de l'algèbre par un idéal qui n'a rien de fermé.

3. J'ai affirmé que la catégorie q est une catégorie. Ce n'est pas un simple truc publicitaire. Comme toute catégorie qui se respecte, elle a des objets

et des morphismes. Nous décrirons d'abord une catégorie $\tilde{q}$ plus petite que q : elle a les mêmes objets, mais moins de morphismes. Et nous décrirons ensuite les morphismes de q qui n'appartiennent pas à $\tilde{q}$.

Soit E un b-espace, donc un espace vectoriel bornologique dont la bornologie est complétante. Soit F un sous b-espace de E , c'est-à-dire un sous-espace de E , avec une bornologie complétante plus fine que la bornologie induite. Alors, le couple (E,F) est un quotient de b-espaces. Et pour bien montrer que nous considérons (E,F) comme un objet de q , nous écrirons $(E,F) = E|F$, et nous dirons que $E|F$ est un q-espace.

Si $E|F$ et $E'|F'$ sont deux q-espaces, nous nous intéresserons aux applications linéaires bornées de E dans E' dont la restriction à F est une application linéaire bornée de F dans F' , modulo les applications linéaires bornées de E dans F' . C'est un espace vectoriel, $\tilde{q}(E|F , E'|F')$. La composition des applications induit une application bilinéaire de

$$\tilde{q}(E|F , E'|F') \times \tilde{q}(E'|F' , E''|F'')$$

dans $\tilde{q}(E|F , E''|F'')$.

Nous avons ainsi défini des objets, les couples $E|F$, des morphismes, les espaces $\tilde{q}(E|F , E'|F')$, et une opération de composition des morphismes. On vérifie directement que nous avons bien une catégorie. Nous l'appelons $\tilde{q}$.

Il manque des morphismes de q . Si E est un b-espace, si G est un sous-espace fermé de E (i. e. un sous-espace vectoriel de E avec une bornologie complétante qui se trouve être celle induite par la bornologie de E ; la bornologie de E induit donc une bornologie complétante sur G), on peut définir le b-espace E/G . Nous voudrions que E/G , ou plus exactement, que le q-espace $E/G|0$ soit isomorphe au q-espace $E|G$.

Plus généralement, si $E|F$ est un q-espace, si G est un sous b-espace de F qui est fermé dans E , nous pouvons définir les b-espaces E/G et F/G , donc le q-espace $(E/G)|(F/G)$. L'application quotient $E \to E/G$ induit un morphisme $E|F \to (E/G)|(F/G)$. Nous voulons que ce morphisme soit un isomorphisme dans q . (Le lecteur observera au passage que notre hypothèse sur E , F , G implique qu'une partie bornée de E qui est contenue dans G est bornée dans G et donc dans F).

Nous définirons donc q d'une manière telle que ces morphismes $E|F \to (E/G)|(F/G)$ soient des isomorphismes. Et c'est tout ce que nous voulons. De manière précise q est une catégorie qui contient $\tilde{q}$, et a les mêmes objets que $\tilde{q}$. Les morphismes $E|F \to (E/G)|(F/G)$ associés aux applications quotients $E \to E/G$ sont des isomorphismes de q , lorsque G est un sous b-espace de F qui est fermé dans E . Enfin, un foncteur de $\tilde{q}$ dans une catégorie se prolonge à q si ces

<u>morphismes</u> $E|F \to (E/G)|(F/G)$ <u>sont appliqués sur des isomorphismes</u> ; <u>le prolongement est alors unique.</u>

Il est évident que s'il existe une catégorie q vérifiant ces propriétés, cette catégorie est unique (à un isomorphisme près). Il n'est pas difficile de voir qu'il existe effectivement une telle catégorie. Il faut en fait vérifier que la classe des morphismes $E|F \to E'|F'$ que l'on obtient en appliquant toutes les opérations permises est équipotente avec un ensemble. Et cela découle du fait que la catégorie des b-espaces a suffisamment d'objets projectifs. Les b-espaces $\oplus_{i\in I} \ell_1(X_i)$ sont projectifs, tout b-espace est isomorphe à un quotient d'un tel b-espace projectif.

4. On définit de manière naturelle des applications multilinéaires de q-espaces. L'espace des morphismes $E|F \to E'|F'$ peut être muni de manière naturelle d'une structure de q-espace, une application bilinéaire $E_1|F_1 \times E_2|F_2 \to E'|F'$ s'identifie encore avec un morphisme de $E_1|F_1$ dans le q-espace des morphismes $E_2|F_2 \to E'|F'$. Un produit tensoriel commutatif et associatif, $q \times q \to q$ est associé à cette notion d'application multilinéaire.

Toutes ces affirmations doivent être prises avec un grain de sel. Les q-espaces ne sont pas des espaces. Il n'est pas question de parler d'application linéaire, multilinéaire de q-espace, ni de mettre, du moins dans le sens usuel, une q-structure sur un espace vectoriel.

Un foncteur $\sigma : q \to E.V.$ va jouer un rôle important. Il fait correspondre au q-espace $E|F$ l'espace vectoriel $\sigma(E|F) = E/F$. L'espace vectoriel $\sigma(E|F) = E/F$. L'espace vectoriel $\sigma(E|F)$ sera appelé <u>l'espace vectoriel sous-jacent de</u> $E|F$.

Si A et B sont deux q-espaces, nous appellerons $A \pitchfork B$ l'espace vectoriel des morphismes $A \to B$. Un foncteur $A \pitchfork_q B$, $q^o \times q \to q$ peut être défini, de manière telle que $A \pitchfork B = \sigma(A \pitchfork_q B)$: l'égalité étant fonctorielle. Nous désignons par q^o la catégorie opposée à q. Le foncteur $\pitchfork_q$ est exact à gauche. De plus, lorsque A est projectif, le foncteur $B \to A \pitchfork_q B$ est exact. Ces conditions sont suffisantes pour déterminer le foncteur $\pitchfork_q$. On observe d'ailleurs que :

$$A \pitchfork_q (B \pitchfork_q C) \quad \text{et} \quad B \pitchfork_q (A \pitchfork_q C)$$

sont naturellement isomorphes.

Un foncteur $\otimes_q : q \times q \to q$ existe également. Il vérifie la relation :

$$(A \otimes_q B) \pitchfork_q C \simeq A \pitchfork_q (B \pitchfork_q C) .$$

Il est exact à droite, et $[\oplus_i \ell_1(X_i)] \otimes [\oplus_j \ell_1(Y_j)]$ est isomorphe à $\oplus_{i,j} \ell_1(X_i \times X_j)$.

C'est cette algèbre multilinéaire que Guy Noël a étudié dans sa thèse, ainsi que les rapports entre elle et l'algèbre multilinéaire de b . Le foncteur $\tau : q \to b$, ajoint de l'immersion naturelle $b \to q$, joue un rôle important. Si $\overline{F}$ est le fermeture de F , le plus petit sous-espace fermé de E contenant F , on a $\tau(E|F) = E/\overline{F}$ avec sa structure de b-espace. Evidemment $E \otimes_b F$ est le produit tensoriel projectif usuel de E et F .

Un b-espace est approximant si pour un système fondamental de parties bornées complétantes B , E_B est un espace de Banach ayant la propriété d'approximation. Un b-espace approximant E est ultraplat si $E \otimes_b F = E \otimes_q F$ quel que soit le b-espace F .

Guy Noël montre qu'un b-espace approximant ultraplat est plat, donc que le foncteur $F \to E \otimes_q F$ est exact. Les b-espaces nucléaires (ou co-nucléaires pour certains) sont ultraplats. Par contre, les espaces de Banach ne sont généralement pas ultraplats, un espace de Banach est ultraplat si il est de type $\mathcal{L}_1$ au sens de Lindenstrauss.

5. Juste quelques mots en guise de conclusion. L'existence de la catégorie q est sous-jacente dans la définition du "calcul symbolique relatif" de l'auteur [11]. De 1960 à 1962, l'auteur a étudié cette catégorie, a rédigé des notes préliminaires, secrètes [13]. Il a exposé ses résultats, en mettant la catégorie q mieux en évidence qu'auparavant, dans une série d'exposés à Yale [14]. Et suite à ces exposés, il est arrivé à la conclusion que le moment n'était pas venu de pousser dans cette direction.

Depuis, de l'eau a coulé sous les ponts. D'autres mathématiciens que lui ont eu l'occasion de voir cette catégorie. Il y a peut-être des raisons de l'étudier à nouveau, au moins d'en parler.

C'est ce que j'ai fait à Bordeaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CNOP (I.). - Un problème de spectre dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance tempérées. C. R. A. S. 270, 1970, p.1690-1691.

[2] CNOP (I.). - (A paraître).

[3] CNOP (I.). - Un "Nullstellensatz" pour les fonctions holomorphes à croissance. A paraître au Coll. Analyse Fonct. Bordeaux, 1971.

[4] FERRIER (J.P.). - Approximations des fonctions holomorphes de plusieurs variables avec croissance. C. R. A. S. 271, 1970, p. 722-724.

[5] FERRIER (J.P.). - Approximations avec croissance des fonctions holomorphes de plusieurs variables. (A paraître Annales Inst. Fourier).

[6] FERRIER (J.P.). - Intervention de la bornologie dans la convexité holomorphe avec croissance dans $\mathbb{C}^n$. (A paraître Coll. Analyse Fonct. Bordeaux, 1971).

[7] HOGBE-NLEND (H.). - Sur la complétion des espaces bornologiques. C. R. A. S. 268, 1969, p. 382-384.

[7]bis HOGBE-NLEND (H.). - Sur la structure du complété d'un espace bornologique. C. R. A. S. 268, 1969, p. 540-542.

[8] NOEL (G.). - Immersion de la catégorie des espaces bornologiques séparés dans une catégorie abélienne. C. R. A. S. 269, 1969, p. 195-197.

[8]bis NOEL (G.). - Sur le complété d'un Q-espace. C. R. A. S. 269, 1969, p.238-240.

[8]ter NOEL (G.). - Sur le produit tensoriel dans les catégories QESP et QESPC. C. R. A. S. 269, 1969, p. 275-278.

[9] NOEL (G.). - Produit tensoriel et platitude des Q-espaces. Bull. Soc. Math. Belgique. 22, 1970, p.119-142.

[10] NOEL (G.). - Espaces de Banach ultraplats et espaces de type $\mathcal{L}_1$. (A paraître Coll. Analyse Fonct. Bordeaux, 1971).

[11] WAELBROECK (L.). - Etude spectrale des algèbres complètes. Acad. R. Belgique, Mém. Cl. des Sc., 1960.

[12] WAELBROECK (L.). - Le complété et le dual d'un espace "à bornés". C. R. A. S., 253, 1961, p. 2827-2828.

[13] WAELBROECK (L.). - Les quotients de b-espaces. Université Libre de Bruxelles, Institut de Mathématiques, 1962.

[14] WAELBROECK (L.). - Notes on spectral theory. Yale University, Department of Mathematics, 1963.

[15] WAELBROECK (L.). - Proof of a spectral theorem. In function algebras. Frank Birtel editor, p. 310-321. Scott Foresman and Co. 1966.

Université Libre de Bruxelles
Département de Mathématique
FACULTE DES SCIENCES
Avenue F.-D. Roosevelt, 50
1050 BRUXELLES