BULLETIN DE LA S. M. F.

R. GÂTEAUX

Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 47-70

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__47_1>

SUR LA NOTION D'INTÉGRALE DANS LE DOMAINE FONCTIONNEL ET SUR LA THÉORIE DU POTENTIEL ;

Par M. R. Gâteaux.

Le nom de R. Gâteaux, tué dès le début de la guerre (septembre 1914), est bien connu de tous ceux qui s'intéressent au Calcul fonctionnel. Cinq Notes, publiées en 1913 et en 1914 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et dans les *Rendiconti della R. Ac. dei Lincei*, contenaient de très remarquables résultats, que l'Académie des Sciences a sanctionnées en lui décernant en 1916 le prix Francœur.

Mais les découvertes qu'il avait obtenues sans avoir le temps de les publier dépassent encore de beaucoup les précédentes en importance, et montrent quelles grandes espérances la Science française était en droit de fonder sur leur auteur. Elles ne sont heureusement pas perdues. On a retrouvé dans les papiers de Gâteaux des notes qui m'ont été confiées et dans l'examen desquelles M. Paul Lévy, hautement qualifié pour cette étude par ses travaux antérieurs, a bien voulu me prêter son concours.

En particulier, deux Mémoires : l'un sur les fonctions d'une infinité de variables indépendantes, l'autre sur la théorie du potentiel, étaient presque complètement rédigés, au moins d'une manière provisoire [1]. Nous en commençons ici la publication. M. P. Lévy a assumé le travail, assez considérable, de leur mise au point : tous les amis de la Science et de la France seront unanimes à lui en garder leur vive reconnaissance.

(Février 1919.) J. HADAMARD.

Le Mémoire sur la théorie de l'intégrale et du potentiel dans le champ fonctionnel est, quoique le dernier en date (juin 1914), celui que nous publions tout d'abord. C'est, à mon avis, celui qui est le plus riche en résultats. Il ouvre un nouveau et important Chapitre du Calcul fonctionnel et sa lecture permet de se rendre compte de l'immense perte que la Science a faite en la personne de Gâteaux.

La rédaction trouvée dans ses papiers n'était certainement pas, dans son idée, une rédaction définitive. Aussi ai-je cru respecter sa pensée en y apportant, lorsque je le pouvais, quelques simplifications. Les passages modifiés sont écrits en petits caractères. Les modifications de quelque importance sont, de plus, signalées par des notes, les autres étant bornées à des simplifications de calcul ou à l'addition de phrases explicatives destinées à faciliter la lecture.

Je donne en outre, dans une Note finale, quelques indications sur une autre rédaction du même Mémoire qui a été également retrouvée, et quelques résultats complémentaires que j'ai obtenus.

PAUL LÉVY.

CHAPITRE I.

EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE.

1. *Domaine fonctionnel.* — Nous nous plaçons dans le champ réel, et nous considérons les fonctions $x(\alpha)$, définies entre 0 et 1, continues ou admettant un nombre fini de discontinuités de première espèce. Soit E leur domaine.

Nous considérerons des fonctionnelles définies dans E et n'admettant de singularité en aucun point de l'intervalle (0, 1).

---

[1] Les Manuscrits originaux seront déposés aux Archives de l'Académie des Sciences.

2. *Fonctions simples d'ordre n.* — Divisons l'intervalle o, 1 en n intervalles égaux; une fonction constante dans chacun de ces intervalles sera dite *fonction simple d'ordre n.* La valeur aux points de division est indifférente. Le domaine de ces fonctions est un espace à n dimensions E_n.

Lorsque $x(\alpha)$ est une fonction simple d'ordre n, égale à x_i pour les valeurs de α comprises entre $\frac{i-1}{n}$ et $\frac{i}{n}$, une fonctionnelle $U|[x(\overset{1}{\underset{0}{\alpha}})]|$ devient une fonction $u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que j'appellerai la $n^{\text{ième}}$ section de $U|[x(\overset{1}{\underset{0}{\alpha}})]|$.

De même une surface du domaine E, par exemple

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\alpha, \beta) x(\alpha) x(\beta)\, d\alpha\, d\beta = m,$$

devient une surface de l'espace E_n, dans l'exemple ci-dessus la quadrique

$$\sum_{p,q}^{1,\ldots,n,} \frac{K_{p,q} x_p x_q}{n^2} = m,$$

que j'appellerai la $n^{\text{ième}}$ section de la surface considérée du domaine E.

J'appellerai $n^{\text{ième}}$ section d'une fonction $x(\alpha)$ la fonction simple d'ordre n qui a même valeur moyenne que $x(\alpha)$ dans chacun des intervalles $\left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$. Cette fonction $y_n(\alpha)$ est celle pour laquelle l'intégrale

$$\int_0^1 [x(\alpha) - y_n(\alpha)]^2\, d\alpha$$

est minima.

3. *Extension de l'opération d'intégration à l'espace fonctionnel. Valeur moyenne.* — Si nous considérons un domaine fonctionnel (volume, surface, etc.) et sa $n^{\text{ième}}$ section, la mesure de cette section, quand n augmente indéfiniment, est en général un infiniment petit ou un infiniment grand. D'où la nécessité de considérer non l'intégrale, mais la valeur moyenne d'une fonctionnelle dans ce domaine. On la calculera en prenant la valeur

moyenne de la $n^{\text{ième}}$ section de la fonctionnelle dans la $n^{\text{ième}}$ section du domaine, puis la limite de cette valeur moyenne quand n augmente indéfiniment.

4. *Exemple de calcul de valeurs moyennes.* — Exceptionnellement, j'envisage une fonctionnelle admettant une singularité pour une valeur α_1 de α.

Soit à calculer la valeur moyenne de la fonctionnelle $f[x(\alpha_1)]$ à l'intérieur de la sphère

$$(S) \qquad \int_0^1 [x(\alpha)]^2 \, d\alpha = R^2$$

dont la $n^{\text{ième}}$ section est

$$(S_n) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n R^2.$$

Si l'on observe ([1]) que la section de cette sphère, par un plan situé à une distance x de l'origine, a pour mesure

$$V_{n-1}(n R^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

V_n désignant le volume de la sphère de rayon 1 dans l'espace à n dimensions, la valeur moyenne considérée s'écrit

$$(1) \qquad \frac{1}{J_n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(R\sqrt{n}\sin\theta) \cos^n\theta \, d\theta,$$

en posant

$$x = R\sqrt{n}\sin\theta, \qquad J_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \, d\theta.$$

L'intégrale J_n est pour n très grand équivalente à $\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Les valeurs de θ voisines de zéro y apportent seule une contribution. D'une manière précise, si l'on ne considère que les valeurs de θ comprises entre $-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ et $+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, on a une nouvelle intégrale dont le rapport à J_n tend, pour n

([1]) Nous simplifions ici la méthode de l'auteur qui introduit dans son calcul des intégrales multiples d'ordre n. Cela nous paraît inutile, la formule (1) pouvant s'écrire presque sans calcul (P. L.).

très grand, vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{\psi^2}{2}}\,d\psi,$$

quantité aussi voisine de 1 que l'on veut, pourvu que α soit assez grand.

Donc, sous certaines conditions [1] quant à la croissance de $f(x)$, on peut remplacer le rapport (1) par

$$\frac{1}{J_n}\int_{-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}^{+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} f(R\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n\theta\,d\theta.$$

Faisant le changement de variable $\theta = \frac{\psi}{\sqrt{n}}$, et faisant croître indéfiniment n, puis α, on trouve que : *la valeur moyenne de* $f[x(\alpha_1)]$ *à l'intérieur de* S *est*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(R\psi)\,e^{-\frac{\psi^2}{2}}\,d\psi.$$

En cherchant la valeur moyenne de cette fonctionnelle sur la surface de la sphère S, on trouve précisément la même expression.

On s'explique ce résultat si l'on remarque que la presque totalité du volume de S_n est fournie par la couronne comprise entre sa surface et celle d'une sphère concentrique de rayon $(R - \Delta R)\sqrt{n}$. Le fait est donc général, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Une fonctionnelle a la même valeur à l'intérieur d'une sphère que sur sa surface.* (Sans doute, pour la validité de la proposition, faut-il que la fonctionnelle satisfasse à certaines conditions de continuité.)

5. *Généralisations de l'exemple précédent.* — 1° Si l'on considère la fonctionnelle

$$\int_0^1 f[x(\alpha), \alpha]\,d\alpha,$$

---

[1] Il arrivera souvent que l'auteur parle de conditions qu'il ne précise pas et que son intention était certainement de préciser dans une rédaction ultérieure. En pareil cas, nous reproduisons exactement les termes de son manuscrit (P. L.).

sa valeur moyenne à l'intérieur de la sphère Σ est donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{R}\psi,\alpha)\,e^{-\frac{\psi^2}{2}}\,d\psi.$$

2° Si l'on considère la fonctionnelle $f[x(\alpha_1), x(\alpha_2), x(\alpha_3)]$, α_1, α_2, α_3 désignant trois valeurs particulières de α, sa valeur moyenne à l'intérieur de la sphère Σ est

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 f(\mathrm{R}x_1, \mathrm{R}x_2, \mathrm{R}x_3)\,e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}}.$$

Si, au lieu de trois variables, on en avait p, l'exposant de 2π serait $\frac{p}{2}$.

3° La fonctionnelle

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f[x(\alpha_1),\ldots,x(\alpha_p),\alpha_1,\ldots,\alpha_p]\,d\alpha_1\ldots d\alpha_p$$

admet comme valeur moyenne à l'intérieur de Σ

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_0^1 d\alpha_1\ldots\int_0^1 d\alpha_p\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ldots$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} dx_p f(\mathrm{R}x_1,\ldots,\mathrm{R}x_p,\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\,e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_p^2}{2}}$$

6. *Autre exemple.* — Soit une fonctionnelle $\mathrm{U}|[x(\alpha)]|$ définie dans S et jouissant de la propriété suivante :

Étant donné ε, on peut déterminer h tel que, si l'intervalle (0, 1) est divisé en intervalles d'étendue inférieure à h, dans lesquels $x_1(\alpha)$ et $x_2(\alpha)$ ont mêmes valeurs moyennes, on ait

$$\big|\,\mathrm{U}|[x_1(\alpha)]| - \mathrm{U}|[x_2(\alpha)]|\,\big| < \varepsilon.$$

Dans ces conditions, la valeur moyenne de $\mathrm{U}|[x(\alpha)]|$ *dans* S *est* $\mathrm{U}|[0]|$ (1).

---

(1) J'indique ici ce résultat sans démonstration. D'après les indications très brèves contenues dans le manuscrit de l'auteur, il m'a semblé que sa démonstration contenait une faute de calcul, et ne subsistait pas lorsqu'on rectifie cette faute.

Pourtant le résultat est exact. L'auteur lui-même a démontré (*R. Accademia dei Lincei*, 21 décembre 1913) que les fonctionnelles considérées peuvent être

Si U est défini seulement sur la surface, on obtiendra sa valeur moyenne sur cette surface en considérant les fonctions de la surface dont la $n^{\text{ième}}$ section est nulle; les valeurs de U pour ces fonctions tendent, pour n infini, vers une même limite, qui est la valeur moyenne cherchée.

7. *Surface fermée dans l'espace fonctionnel.* — C'est une multiplicité comprise tout entière à l'intérieur d'une sphère

$$(S) \qquad \int_0^1 [x(\alpha)]^2 \, d\alpha = R^2$$

et qui sépare l'espace en deux régions. En général elle pourra être représentée par une équation

$$(\Sigma) \qquad F \,|\, [x(\overset{1}{\underset{0}{\alpha}})] \,| = 0,$$

dont les solutions sont toutes intérieures à la sphère S. Suivant le signe de F, une fonction sera dite intérieure ou extérieure à Σ, les fonctions extérieures à S étant certainement extérieures à Σ; nous supposerons que pour ces fonctions F soit positif. Si cette fonctionnelle est sans singularité et admet une dérivée première, nous appellerons *cosinus directeurs de la normale intérieure à* Σ les quantités

$$-\frac{1}{H} F'_x \,|\, [x(\overset{1}{\underset{0}{\alpha}}), \beta] \,|$$

où

$$H^2 = \int_0^1 \left[F'_x \,|\, [x(\overset{1}{\underset{0}{\alpha}}), \beta] \,| \right]^2 d\beta.$$

CHAPITRE II.

POTENTIEL ET FONCTIONNELLES HARMONIQUES.

8. *Le potentiel de double couche dans l'espace à n dimen-*

---

définies comme limites d'expressions de la forme

$$\sum_{p=1}^{n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f_p(\alpha, \ldots, \alpha_p) x(\alpha_1) \ldots x(\alpha_p) \, d\alpha_1 \, d\alpha_p.$$

Le résultat énoncé résulte immédiatement de l'application à cette expression des résultats du paragraphe 5 (P. L.).

sions. — Un tel potentiel est représenté par

$$(2) \qquad \int_{\Sigma_n} \Phi_M \frac{d}{dn} \frac{1}{r^{n-2}} d\Sigma_M,$$

r étant la distance du point M de la surface Σ_n au point attiré A. Appelons φ l'angle de MA avec la normale intérieure à Σ_n, s_n une sphère de centre A et de rayon 1, ou la surface de cette sphère, μ le point où la demi-droite AM coupe cette sphère, et ds_μ l'élément de surface décrit par μ, tandis que M décrit l'élément $d\Sigma_M$. Nous écrirons de même S_n et dS_μ pour une sphère de centre A et de rayon $\sqrt{n}$.

Le potentiel (2) est égal à

$$(n-2)\int_{\Sigma_n} \Phi_M \frac{\cos\varphi}{r^{n-1}} d\Sigma_M = (n-2)\int_{s_n} \Phi_M \, ds_\mu,$$

ce qui en constitue une définition ne faisant pas intervenir le plan tangent à la surface.

Pour obtenir une quantité restant finie quand n augmente indéfiniment, il faut multiplier l'expression précédente par $\frac{1}{(n-2)s_n}$, et considérer l'expression

$$(3) \qquad P_A = \frac{1}{s_n}\int_{s_n} \Phi_M \, ds_\mu = \frac{1}{S_n}\int_{S_n} \Phi_M \, dS_\mu.$$

9. *Extension au cas de l'espace fonctionnel.* — Soit une fonctionnelle $\Phi\,|[x(\alpha)]|$ définie sur la surface fermée Σ (*voir* n° 7). Par analogie avec la formule (3), nous appellerons *potentiel de double couche* de densité Φ sur Σ la fonctionnelle $P\,|[a(\alpha)]|$ définie à l'intérieur de Σ comme égale à la valeur moyenne de

$$\Phi\,|[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]|$$

sur la sphère

$$(S) \qquad \int_0^1 [y(\alpha)]^2 \, d\alpha = 1,$$

ρ étant une quantité positive, indépendante de α, fonctionnelle de $a(\alpha)$ et $y(\alpha)$, définie par l'équation

$$F\,|[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]| = 0.$$

10. *Calcul des dérivées dans le cas de l'espace à n dimensions : Première méthode.* — Revenons à l'expression (3). Nous appellerons $a_1, \ldots, a_n$ les coordonnées de A, $x_1, \ldots, x_n$ celles de M, $r = \rho\sqrt{n}$ la distance de ces deux points, et $F(a_1, \ldots, a_n)$ le premier membre de l'équation de la surface Σ_n. En partant de

$$P_A = \frac{1}{(n-2)s_n}\int_{\Sigma_n} \Phi_M \frac{d}{dn}\frac{1}{r^{n-1}}\, d\Sigma_M,$$

un calcul facile donne

$$(4)\qquad \frac{\partial P_A}{\partial a_p} = \frac{1}{S_n}\int_{S_n} \Phi_M \frac{x_p - a_p}{\rho^2}\, dS_\mu - \frac{1}{nS_n}\int_{S_n} \Phi_M \frac{nF'x_p}{\Sigma_i (x_i - a_i)F'x_i}\, dS_\mu.$$

Lorsque n devient très grand, Σ_n étant défini pour chaque valeur de n comme la $n^{\text{ième}}$ section de Σ, ρ et $x_p - a_p$ sont des quantités finies. On voit alors que le premier terme de l'expression précédente est fini, et le second de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$.

On trouve de même

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 P_A}{\partial^2 a_p} = \frac{1}{S_n}\int_{S_n} \Phi_M \frac{(x_p - a_p)^2 - \rho^2}{\rho^4}\, dS_\mu$$
$$+ \frac{2}{nS_n}\int_{S_n} \Phi_M \left[\frac{(x_p - a_p)^2}{\rho^4} - \frac{n(x_p - a_p)F'x_p}{\rho^3 \Sigma_i (x_i - a_i)F'x_i}\right] dS_\mu,$$

expression dans laquelle le premier terme est fini et le second de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$.

11. *Deuxième méthode.* — Calculons maintenant les dérivées en partant de la formule

$$P_A = \frac{1}{S_n}\int_{S_n} \Phi_M\, dS_\mu,$$

dS_p étant l'élément de la sphère S_n de centre A correspond au point de coordonnées $a_1 + y_1, \ldots, a_n, y_n$.

Les coordonnées de M sont définies en partant des a et des y par les formules

$$x_p = a_p = \rho y_p,$$

ρ étant la même quantité que dans le numéro précédent, définie implicitement par la formule

$$F(a_1 + \rho y_1, \ldots, a_n + \rho y_n) = 0.$$

La fonction Φ est définie sur Σ_n; définissons-la arbitrairement dans le voisinage de cette surface et supposons-la dérivable sur la surface. On trouve alors pour les dérivées de Φ la formule

$$(4)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial a_p} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_p} - \frac{\partial F}{\partial x_p}\,\frac{\sum_i y_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}}{\sum_i y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}}.$$

Pour simplifier le calcul des dérivées secondes, on peut supposer Φ constant sur la droite A M, ce qui annule l'expression $\Sigma y_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$, mais bien entendu pas sa dérivée par rapport à a_p. Il vient ainsi

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial a_p^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_p^2} - 2\sum_i y_i \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_p}\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}}{\sum_i y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}} + \sum_i\sum_k y_i y_k \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_p}\right)^2}{\left(\sum_i y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2}.$$

Les dérivées premières et secondes de P seront alors respectivement définies comme valeurs moyennes sur la sphère S_n des expressions (4) et (5).

Il arrivera en général que chaque dérivée première de F ou Φ dépend d'une manière spéciale de la variable par rapport à laquelle elle est prise. Ces dérivées sont alors en général de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ainsi que les dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial a_p^2}$ et $\frac{\partial^2\Phi}{\partial a_p^2}$; les autres dérivées secondes seront de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

12. *Cas de la sphère dans l'espace fonctionnel.* — Prenons pour surface Σ la sphère

$$\int_0^1 [x(\alpha)]^2\,d\alpha = R^2.$$

D'après le n° 9, nous avons à prendre la valeur moyenne de $\Phi|[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]|$ sur la sphère S. Or, d'après un théorème connu (voir Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, p. 64 et suiv.), dans l'espace à un nombre très grand de dimensions, la surface d'une zone d'angle au centre 2θ très petit, dont les bases sont situées symétriquement de part et d'autre de l'équateur, est égale à la presque totalité de l'aire de la sphère.

Il en résulte que *la valeur moyenne sur la sphère d'une fonctionnelle finie et continue ne dépend que de ses valeurs sur un équateur.*

Nous pouvons prendre comme *équateur* de la sphère S sa section par le plan perpendiculaire à AO, [O étant le point $x(\alpha)=0$], sur laquelle ρ a la valeur constante

$$c=\sqrt{R^2-\int_0^1[x(\alpha)]^2\,dx}. \tag{6}$$

On voit alors qu'on peut remplacer dans la définition du potentiel la fonctionnelle $\Phi|[a(\alpha)+\rho y(\alpha)]|$ par toute autre ayant la même valeur sur cet équateur, par exemple par $\Phi|[a(\alpha)+cy(\alpha)]|$, expression qui a un sens si $\Phi|[x(\alpha)]|$ est défini dans tout l'espace et pas seulement sur la sphère Σ; nous supposerons cette fonctionnelle définie de manière à respecter la continuité uniforme, ce qui est facile. Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

Le potentiel $P|[a(\alpha)]|$ *est égal à la valeur moyenne de* $\Phi|[a(\alpha)+cy(\alpha)]|$ *sur la sphère* $\int_0^1[y(\alpha)]^2d\alpha=1$.

On en déduit immédiatement les résultats suivants :

1° *Le potentiel* $P|[a(\alpha)]|$ *est uniformément continu dans la sphère* Σ;

2° *Si* $a(\alpha)$ *tend vers une fonction* $b(\alpha)$ *de la surface de* Σ, c *tend vers* 0 *et le potentiel tend vers* $\Phi|[b(\alpha)]|$.

Lorsque $a(\alpha)$ est sur la surface, la moitié seulement de la zone utile sur la sphère S est employée, et le potentiel est égal à $\frac{1}{2}\Phi|[b(\alpha)]|$. Lorsque la fonction $a(\alpha)$ est extérieure, la zone utile n'est plus employée ; le potentiel est nul.

13. *Propriété fondamentale de la moyenne. — Le potentiel de double couche est égal, au centre d'une sphère, à la moyenne des valeurs qu'il prend sur la surface de cette sphère.*

Soit la sphère Σ' de centre A et de rayon ρ. D'après la remarque déjà utilisée (nº 12) pour prendre la valeur moyenne du potentiel sur Σ', nous pouvons remplacer le potentiel par une fonctionnelle qui lui est égale sur l'équateur section de cette sphère par le plan

$$\int_0^1 a(\alpha)z(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

en désignant par $a(\alpha)+z(\alpha)$ une fonction située sur la surface de Σ'.

Or, si nous appliquons le théorème du nº 12, en appelant c la valeur en A de l'expression (6) et $m\sqrt{c^2-\rho^2}$ sa valeur pour la fonction $a(\alpha)+z(\alpha)$ située sur l'équateur considéré Σ', nous voyons qu'une fonctionnelle égale au potentiel sur cet équateur est la valeur moyenne de $\Phi|[a(\alpha)+my(\alpha)]|$ sur la sphère S. Nous sommes donc ramené à démontrer que

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{M}_{\Sigma'}\mathfrak{M}_S\,\Phi|[a(\alpha)+z(\alpha)+\sqrt{c^2-\rho^2}\,y(\alpha)]| \\ &\quad = \mathfrak{M}_S\,\Phi|[a(\alpha)+cy(\alpha)]|, \end{aligned}$$

M_S et $M_{\Sigma'}$ désignant respectivement des moyennes prises sur les surfaces S et Σ'.

Nous allons le vérifier en précisant la forme de la fonctionnelle Φ.

Soit d'abord

$$(8)\qquad \Phi|[x(\alpha)]| = \varphi[x(\alpha_1), x(\alpha_2)],$$

α_1 et α_2 étant deux valeurs fixes (¹).

Le second membre de la formule (7), d'après le nº 5, 2º, a alors la valeur

$$(9)\quad P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi[a(\alpha_1)+cy_1, a(\alpha_2)+cy_2]\,e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}\,dy_1\,dy_2.$$

(¹) L'emploi d'une fonctionnelle dépendant de $x(\alpha)$ d'une manière spéciale pour certaines valeurs de α peut être évité pour le résultat final, que l'on peut obtenir directement. (Note de l'Auteur.)

De même, en un point de Σ', le potentiel a la valeur

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi[(a)\alpha_1+z(\alpha_1)+my_1, a(\alpha_2)+z(\alpha_2)+my_2]\,e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}\,dy_1\,dy_2,$$

expression dont la valeur moyenne sur Σ' est

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{+\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi[a(\alpha_1)+\rho z_1+my_1,\ a(\alpha_2)+\rho z_2+my_2]$$
$$\times\, e^{-\frac{y_1^2+y_2^2+z_1^2+z_2^2}{2}}\,dy_1\,dy_2\,dz_1\,dz_2.$$

Il faut montrer l'identité de cette expression et de P. On y arrive aisément par le changement de variables

$$\rho z_2+my_1=cu_1,\qquad \rho z_1-my_1=cv_1,$$
$$\rho z_2-my_3=cu_2,\qquad \rho z_2-my_2=cv_2.$$

Du cas qui vient d'être traité, on passe au cas où Φ est de la forme

$$(10)\qquad \int_0^1\cdots\int_0^1\varphi[x(\alpha_1),\ \ldots,\ x(\alpha_p);\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p]\,d\alpha_1\ldots d\alpha_p,$$

φ étant une fonction bornée, puis au cas où Φ est une série uniformément convergente d'expressions de cette forme. La propriété de la moyenne est donc démontrée pour une classe très étendue de fonctionnelles.

14. *Équation aux dérivées fonctionnelles du potentiel de double couche.*

Considérons d'abord le cas où Φ est de la forme (10), avec $p=2$, et calculons les dérivées fonctionnelles du potentiel; l'expression du potentiel résulte de la formule (9), en intégrant par rapport à α_1 et α_2. En faisant d'abord le changement de variables

$$y_1=\frac{u_1-a(\alpha_1)}{c},\qquad y_2=\frac{u_2-a(\alpha_2)}{c},$$

il vient

$$(11)\quad P=\frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}du_1\int_{-\infty}^{+\infty}du_2\int_0^1 d\alpha_1\int_0^1 d\alpha_2\,\varphi(u_1,\ u_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2)$$
$$\times\, e^{-\frac{[a(\alpha_1)-u_1]^2+[a(\alpha_2)-u_2]^2}{2c^2}}$$

D'après la formule (6), qui définit c, la dérivée fonctionnelle de c

est

$$c'_\alpha | [a(\alpha), \beta] | = -\frac{a(\beta)}{c}$$

et par suite celle de P est

$$\begin{aligned} P'_\alpha | [a(\alpha), \beta] | = \frac{2a(\beta)}{c^2} P - \frac{\alpha(\beta)}{2\pi c^6} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \\ \times \varphi(u_1, u_2; \alpha_1, \alpha_2) \{ [a(\alpha_1) - u_1]^2 + [a(\alpha_2) - u_2]^2 \} \\ \times e^{-\frac{[a(\alpha_1)-u_1]^2 + [a(\alpha_2)-u_2]^2}{2c^2}} \\ - \frac{1}{2\pi c^4} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_0^1 d\alpha \\ \times [\varphi(u_1, u_2; \alpha, \beta) + \varphi(u_2, u_1; \beta, \alpha)] [a(\beta) - u_2] \\ \times e^{-\frac{[a(\alpha)-u_1]^2 + [a(\beta)-u_2]^2}{2c^2}}. \end{aligned}$$

Cette dérivée dépend d'une manière spéciale de a (β). La dérivée par rapport à a (β) est

$$\begin{aligned} \{ P'_\alpha | [a(\alpha), \beta] | \}'_{a(\beta)} = \frac{2P}{c^2} - \frac{1}{\pi c^4} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_0^1 d\alpha \\ \times [\varphi(u_1, u_2; \alpha, \beta) + \varphi(u_2, u_1; \beta, \alpha)] \\ \times e^{-\frac{[a(\alpha)-u_1]^2 + [a(\beta)-u_2]^2}{2c^2}} \\ - \frac{1}{2\pi c^6} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \\ \times \varphi(u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2) \{ [a(\alpha_1) - u_1]^2 + [a(\alpha_2) - u_2]^2 \} \\ \times e^{-\frac{[a(\alpha_1)-u_1]^2 + [a(\alpha_2)-u_2]^2}{2c^2}} \\ + \frac{1}{2\pi c^6} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_0^1 d\alpha \\ \times [\varphi(u_1, u_2; \alpha, \beta) + \varphi(u_2, u_1; \beta, \alpha)] [a(\beta) - u_2]^2 \\ \times e^{-\frac{[a(\alpha)-u_1]^2 + [a(\beta)-u_2]^2}{2c^2}} \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que la valeur moyenne de cette expression, lorsque β varie de o à 1, est nulle. Donc le potentiel vérifie l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$\text{(E)} \qquad \int_0^1 \{ P'_\alpha | [a(\alpha), \beta] | \}'_{a(\beta)} d\beta = 0$$

analogue à l'équation de Laplace.

Le calcul est le même si Φ est de la forme (10) avec une valeur quelconque de p.

Si Φ est une série d'expressions de cette forme, on est conduit à dériver une série d'expressions analogues à l'expression (11) étendue au cas de p quelconque, opération légitime si les séries dérivées vérifient certaines conditions de convergence uniforme. On arrive encore à la même équation (E).

15. *Fonctionnelles harmoniques et problème de Dirichlet.* — Appelons *fonctionnelle harmonique* une fonctionnelle vérifiant l'équation (E). [On peut aussi définir ces fonctionnelles par la propriété de la moyenne.]

Le *problème de Dirichlet* consistera à trouver une telle fonctionnelle à l'intérieur d'une surface fermée Σ connaissant ses valeurs Φ sur la surface.

D'après ce qui précède, dans le cas de la sphère, le potentiel de double couche de densité Φ est une solution du problème. D'après le n° 13, on sait le calculer effectivement dans des cas très étendus.

Si Σ est une surface fermée quelconque [1], il est certain que le potentiel $P|[a(\alpha)]|$ tend vers la densité $\Phi|[b(\alpha)]|$ quand la fonction $a(\alpha)$ tend vers une fonction $b(\alpha)$ de la surface.

Il suffit de se reporter à la démonstration dans le cas de la sphère pour se convaincre qu'il en est ainsi, du moins si Σ satisfait à certaines conditions générales, probablement les suivantes, dont le sens est d'ailleurs à préciser : les sections normales en un point ont toutes leur concavité vers l'intérieur et leurs rayons de courbure sont bornés.

Il est probable que le potentiel de double couche, dans le cas où Σ est quelconque, est une fonctionnelle harmonique, et que par suite il résout encore le problème de Dirichlet.

---

[1] D'ici à la fin du paragraphe, nous reproduisons exactement la rédaction de l'auteur, bien que, en dehors du cas des surfaces convexes, le premier résultat énoncé comme certain soit inexact. La suite du texte montre d'ailleurs que le mot certain dépassait la pensée de l'auteur.

En réalité, il faut modifier les données habituelles du problème de Dirichlet et se donner les valeurs de la fonctionnelle seulement sur les portions de surface pour lesquelles la courbure moyenne est dirigée vers l'intérieur; cela suffit pour déterminer la solution, qui est bien donnée par un potentiel de double densité Φ. (P. L.)

16 *Le potentiel de simple couche.* — Dans l'espace à n dimensions, en gardant les notations des n^{os} 8 et 10, ce potentiel s'écrit

$$\int_{\Sigma_m} \Phi_M \frac{1}{r^{n-2}} d\Sigma_M = \int_{s_n} \Phi_M \frac{r}{\cos\varphi} ds_\mu = \sqrt{n} \int_{s_n} \Phi_M \frac{\rho}{\cos\varphi} ds_\mu.$$

Pour obtenir une expression restant finie pour n infini, il faut multiplier l'expression précédente par $\frac{1}{s_n\sqrt{n}}$ et considérer l'expression

$$\frac{1}{s_n} \int_{s_n} \Phi_M \frac{\rho}{\cos\varphi} ds_\mu = \frac{1}{S_n} \int_{S_n} \Phi_M \frac{\rho}{\cos\varphi} dS_\mu.$$

Ceci nous conduit, en passant à l'espace fonctionnel, à définir *le potentiel de simple couche comme valeur moyenne, sur la sphère*

(S) $$\int_0^1 [y(\alpha)]^2 d\alpha$$

de l'expression

(12) $$\frac{\rho \Phi |[x(\alpha)]|}{\cos\varphi},$$

ρ, $x(\alpha)$ et $\cos\varphi$ étant définis en partant de $a(\alpha)$ et $y(\alpha)$ par les formules

$$F|[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]| = 0, \qquad \rho > 0,$$
$$x(\alpha) = a(\alpha) + \rho y(\alpha),$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{H} \int_0^1 F'_x |[x(\alpha), \beta]| y(\beta) d\beta,$$
$$H^2 = \int_0^1 \{ F'_x |[x(\alpha), \beta]| \}^2 d\beta, \qquad H > 0.$$

17. *Cas de la sphère.* — Comme pour le cas du potentiel de double couche, il suffit de prendre la valeur moyenne de l'expression (12) sur l'équateur de la sphère S défini par la formule

$$\int_0^1 a(\alpha) y(\beta) d\beta = 0.$$

Or, sur cet équateur, $\frac{\rho}{\cos\varphi} = R$, R étant le rayon de la sphère Σ. Donc :

Sur une sphère de rayon R, *le potentiel de simple couche de* *densité* Φ *est égal au potentiel de double couche de densité* $R\,\Phi$.

18. *Cas d'une surface quelconque.* — Les deux potentiels n'ont évidemment pas de rapport aussi simple. La proposition suivante, dont le sens est à préciser, me paraît probable :

Appelons $R|[b(\alpha), y(\alpha)]|$ le rayon de courbure de la section normale déterminée en un point $b(\alpha)$ de la surface, par la fonction $b(\alpha)+y(\alpha)$. Appelons $R|[b(\alpha)]|$ la moyenne de ce rayon de courbure sur la sphère S.

Quand $a(\alpha)$ tend vers $b(\alpha)$, le potentiel de simple couche $P|[a(\alpha)]|$ tend vers $\Phi|[b(\alpha)]|\,R|[b(\alpha)]|$.

Les recherches précédentes sont à relier à des recherches analogues relatives aux fonctions d'une infinité discrète de variables.

CHAPITRE III.

ÉTUDE D'AUTRES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES.

19. *L'équation* $\Delta U+\lambda U=0$ *dans le cas de la sphère.* — Par extension de la notation employée pour les fonctions de n variables, nous appellerons ΔU le premier membre de l'équation (E) du n° 14 (en appelant la fonctionnelle considérée U au lieu de P). Soit à trouver *une solution* [1] de l'équation

$$\Delta U+\lambda U=0 \tag{E'}$$

égale sur la sphère

$$\int_0^1 [x(\alpha)]^2\,d\alpha = R^2 \tag{Σ}$$

à une fonctionnelle donnée $\Phi|[x(\alpha)]|$.

Ce problème est résolu par la formule

$$U|[x(\alpha)]| = e^{\frac{\lambda c^2}{2}}\,\mathfrak{M}\,\Phi|[a(\alpha)+c\,y(\alpha)]|, \tag{13}$$

[1] L'indication « constantes caractéristiques ? » écrite au crayon, en marge, indique que l'auteur comptait étudier la question de l'unicité de la solution, au sujet de laquelle aucune indication ne se trouve dans le texte. Il n'y a pas de constantes caractéristiques, c'est-à-dire que la solution est toujours unique, et cela quel que soit λ, réel ou imaginaire, et quelle que soit la surface Σ. (P. L.)

où c a la même signification que n° **12** et où M désigne la moyenne sur la sphère

$$\int_0^1 [y(\alpha)]^2\, d\alpha = 1. \tag{5}$$

En premier lieu, si $a(\alpha)$ tend vers une fonction $b(\alpha)$ de la surface Σ, c tend vers o et $U|[a(\alpha)]|$ tend bien vers $\Phi|[b(\alpha)]|$.

Il reste à vérifier que U est solution de l'équation (E′) ([1]). Observons que si U est un produit de deux facteurs V et W, on a

$$U'_x|[x(\alpha), \beta]| = V|[x(\alpha)]|\,W''_x|[x(\alpha, \beta]| + W|[x(\alpha)]|\,V'_x|[x(\alpha), \beta]|,$$

d'où, comme V et W ne dépendent pas spécialement de β,

$$\{U'_x|[x(\alpha), \beta]|\}'_{x(\beta)} = V\{W'_x|x(\alpha), \beta]|\}'_{x(\beta)} + W\{V'_x|[x(\alpha), \beta|]\}'_{x(\beta)}$$

et par suite, en intégrant par rapport à β,

$$\Delta U = V\,\Delta W + W\,\Delta V. \tag{14}$$

En appliquant ce résultat au cas où

$$V = e^{\frac{\lambda c^2}{2}}, \qquad W = \mathfrak{M}\,\Phi|[a(\alpha) + c\,y(\alpha)]|,$$

on trouve immédiatement que U vérifie l'équation (E′) si W est une fonction harmonique, ce qui est le cas comme nous le savons déjà, du moins pour une classe très étendue de fonctionnelles Φ.

20. *Essai d'intégration d'une autre équation.* — Soit à trouver une solution de l'équation

$$\Delta U + \lambda f(U) = 0, \tag{E''}$$

égale sur la sphère Σ à une fonctionnelle donnée Φ.

([1]) Nous indiquons ici cette vérification par une méthode différente de celle de l'auteur, et plus simple. Sur la Méthode de l'auteur, *voir* la Note du paragraphe 21. Il n'a pas écrit la formule (14); il est probable que s'il avait écrit cette formule, il aurait vu que toutes les solutions de l'équation (13) sont le produit de l'une d'entre elles par des fonctions harmoniques, et que par suite il n'y a pas de constantes caractéristiques. La formule (14) est un cas particulier de la formule

$$\Delta f(U, V) = f'_U\,\Delta U + f'_V\,\Delta V$$

qui montre que le symbole Δ se comporte dans les calculs comme un symbole de dérivation du premier ordre. (P. L.)

Dans l'espace à n dimensions, le problème dont celui-ci est la généralisation se ramène à l'équation intégrale

$$(15)\quad U_A = \frac{\lambda}{(n-2)s_n}\int_V f(U_M)\, g_M^A\, dV_M + \frac{1}{(n-2)s_n}\int_\Sigma u_M \frac{dg_M^A}{dn} d\Sigma_M,$$

V désignant le volume intérieur à la sphère Σ, g_M^A la fonction de Green, et $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise suivant la normale intérieure.

Le dernier terme représente la valeur en A de la fonction harmonique égale sur la surface à U, et par suite aux valeurs données Φ. Nous connaissons son expression dans le cas de l'espace fonctionnel.

Pour évaluer le premier terme, remplaçons g_M^A, M étant ici un point intérieur à Σ, par son expression

$$(16)\qquad G_M^A = \frac{1}{r^{n-2}} - \left(\frac{R_n}{d}\right)^{n-2} \frac{1}{r'^{(n-2)}},$$

R_n désignant le rayon de la sphère Σ, d la distance de A au centre de la sphère, r et r' les distances de M à A et à son conjugué. Le premier terme de cette expression nous donne d'abord l'intégrale

$$\frac{\lambda}{(n-2)s_n}\int_V \frac{1}{r^{n-2}} f(U_M)\, dV_m.$$

Évaluons cette intégrale en divisant le volume V en couronnes limitées par des sphères de centre A, et en tenant compte de ce que, pour chaque couronne, il n'y a à tenir compte que de la portion voisine du plan passant par A et perpendiculaire au diamètre OA de la sphère Σ. Or, si r est supérieur à

$$c_n = \sqrt{R_n - d^2},$$

cette portion est extérieure au volume V et ne doit pas être considérée. Si r est inférieur à cette valeur, elle est entièrement intérieure à V. L'intégrale considérée s'écrit donc

$$\frac{\lambda}{n-2}\int_0^c r\, dr\, \mathfrak{M}_r\, f(U_M),$$

$\mathfrak{M}_r$ désignant une moyenne prise sur la sphère de centre A et de rayon r, et devient à la limite égale à

$$(17)\qquad \lambda \int_0^c \rho\, d\rho\, \mathfrak{M}\, f\{U[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]\}.$$

$\mathfrak{M}$ désignant toujours une moyenne sur la sphère S.

Tenons compte maintenant du second terme de l'expression (16); comme il est inférieur au premier, il n'y a pas non plus à tenir compte des portions de V où $r > c$, et, pourvu que ε soit assez petit, on commet une erreur négligeable devant le terme déjà calculé en ne tenant compte que des points M pour lesquels $r > c - \varepsilon$ et situés de plus dans le voisinage du plan passant par A et perpendiculaire à OA. Or, pour ces points

$$\frac{R_n}{dr'} < \frac{k}{r},$$

k étant un nombre indépendant de n et inférieur à 1. Il en résulte que pour n assez grand ce second terme, qui représente au plus une fraction du premier égale à k^{n-2}, peut être négligé, et finalement l'intégrale de volume se réduit à l'expression (17).

L'équation (15) devient donc à la limite

$$\begin{aligned}(18)\qquad U\,|[a(\alpha)]| = \lambda \int_0^c \rho\, d\rho\, \mathfrak{M}\, f\,\{ U\,|[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]| \} \\ + \mathfrak{M}\, \Phi\,|[a(\alpha) + c y(\alpha)]|.\end{aligned}$$

Il reste à résoudre cette équation et à examiner si sa solution satisfait aux conditions de l'énoncé.

21. *Résolution de l'équation intégrale généralisée.* — Procédons par approximation successive, en définissant les approximations par les formules

$$U_i\,|[a(\alpha)]| = \mathfrak{M}\,\Phi\,|[a(\alpha) + c y(\alpha)]| + \lambda \int_0^c \rho\, d\rho\, \mathfrak{M} f\,\{ U\,|[a(\alpha) + \rho y(\alpha)]| \},$$

$$U_1\,|[a(\alpha)]| = \mathfrak{M}\,\Phi\,|[a(\alpha) + c y(\alpha)]|.$$

Supposons que $|\Phi| < M$ et que, pour $|U| < P$, $|U'| < P$

$$|f(U)| < N, \qquad |f(U) - f(U')| < K\,|U - U'|.$$

Tant que les U_i sont de modules inférieurs à P, on a

$$|U_{i+1} - U_i| < |\lambda| \frac{R^2}{2} K\, |U_i - U_{i-1}|.$$

La série $\Sigma(U_i - U_{i-1})$ est donc majorée par la progression géométrique

$$\begin{aligned} M + N|\lambda|\frac{R^2}{2} + N|\lambda|\frac{R^2}{2} + \ldots + N|\lambda|\frac{R^2}{2}\left[|\lambda|K\frac{R^2}{2}\right]^n + \ldots \\ = M + N|\lambda|\frac{R^2}{2}\,\frac{1}{1 - K|\lambda|\frac{R^2}{2}},\end{aligned}$$

la condition

$$(19) \qquad |\lambda| < \frac{2}{R^2}\,\frac{1}{K + \dfrac{N}{P - M}}$$

suffisant pour que la progression géométrique soit sûrement convergente et que les U_i restent en module inférieurs à P. Les approximations considérées convergent donc uniformément à l'intérieur de Σ vers une fonctionnelle continue. De plus, si $a(x)$ tend vers une fonction de la surface, c tend vers zéro et U prend bien sur la surface des valeurs données.

Dans le cas linéaire, on peut vérifier l'identité de la solution ainsi obtenue avec celle qui est donnée par la formule (16) (¹).

Par suite, au moins dans ce cas, le développement fourni par la méthode des approximations successives converge pour toute valeur de λ, et pas seulement pour les valeurs vérifiant l'inégalité (19).

NOTE DE M. PAUL LÉVY.

A côté du Mémoire qui précède, a été trouvée dans les papiers de R. Gâteaux une autre rédaction, pouvant se lire à la suite du n° 5 de la rédaction précédente. Bien que celle qui est publiée ci-dessus soit évidemment postérieure, je crois utile de donner des

---

(¹) On peut procéder de la manière suivante :

Si l'on prend comme première approximation V_1 l'expression (14), il est aisé d'établir que, toute solution de l'équation E″ étant solution de l'équation intégrale (17), toutes les approximations successives $V_2, \ldots, V_i, \ldots$ sont identiques entre elles. D'autre part, $U_i - V_i$ peut être limité si l'on a limité $U_{i-1} - V_{i-1}$, et l'on constate ainsi que, pour λ assez petit, $U_i - V_i$ tend vers zéro quand i augmente. Ceci est l'application classique de la méthode d'approximations successives.

Or le développement considéré étant un développement en série de puissances de λ, et étant égal pour λ assez petit à l'expression (15), est identique au développement de cette expression en série de Taylor en λ, et est par suite convergente quel que soit λ.

La méthode de l'auteur consiste à se borner au cas où Φ est de la forme considérée (§ 5), et étudiée depuis (§ 14 et 15), et à faire le calcul effectif du développement. C'est une méthode analogue qu'il avait déjà employée (§ 19). Ici les calculs sont plus compliqués. L'auteur se contente, dans la forme de fonctionnelles considérée (§ 15), de traiter le cas où $p = 1$, et de montrer l'identité des développements considérés jusqu'au terme en λ^2, le calcul donnant déjà l'allure de celui qui est relatif au terme général. (P. L.)

indications sur quelques passages de la première rédaction qui marquent bien l'évolution de la pensée de l'auteur.

Il avait pris d'abord comme point de départ la formule qui résout le problème de Dirichlet, pour la sphère, dans l'espace à n dimensions, puis avait réalisé le passage à la limite. Il était arrivé à une expression un peu moins simple que celle du n° 9, considérant la valeur moyenne sur la sphère S, non de la quantité Φ, mais d'une expression un peu plus compliquée. Ces deux expressions sont d'ailleurs égales sur l'équateur de S perpendiculaire à la ligne des centres de S et Σ, et d'après le n° 12 il suffit de considérer cet équateur. Mais l'auteur n'avait pas d'abord remarqué la simplification qui résultait de cette circonstance et qui fait que la solution était donnée simplement par un potentiel de double couche.

C'est en cherchant à démontrer que la solution ainsi formée est bien égale sur la surface aux valeurs données que l'auteur a aperçu cette circonstance, qui l'a décidé à recommencer une nouvelle rédaction, dans laquelle il part de la notion de potentiel de double couche, et peut, grâce à la simplicité des résultats et des raisonnements, donner quelques indications sur le cas d'une surface quelconque.

La première rédaction contient encore un essai de démonstration du théorème de la moyenne, basée sur la connaissance de ce théorème dans l'espace à n dimensions et la légitimation du passage à la limite. Cette légitimation est très délicate, et il semble que Gâteaux y ait renoncé, au moins provisoirement, pour baser sa deuxième rédaction sur le calcul effectif du cas où la couche attirante est portée par une sphère et où sa densité s'exprime à l'aide des fonctionnelles étudiées n° 5. La vérification directe des principales propriétés est alors possible, et les résultats sont moins généraux, mais plus concrets.

Bien qu'il n'ait réussi à légitimer le passage à la limite, il a été conduit par ses tentatives pour le faire à une remarque importante, qui s'applique d'une manière générale à la justification de la notion de valeur moyenne, et qui s'énonce de la manière suivante :

La valeur moyenne d'une fonctionnelle Φ dans un domaine, fonctionnel, telle qu'elle a été définie au n° 3 du précédent Mémoire existe sûrement si, étant donnés ε et η positifs, on peut déterminer n tel que Φ diffère de sa $n^{\text{ième}}$ section de moins de ε, sauf dans une fraction η du domaine considéré.

Restreignant la condition précédente par l'hypothèse que n existe pour $\eta = 0$ et ε positif, Gâteaux arrive, à la fin de sa première rédaction, à considérer l'exemple par lequel il commence sa deuxième rédaction (n° 6 du précédent Mémoire). Mais il constate lui-même que « cette condition paraît beaucoup trop restrictive ».

Comme je le montrerai ultérieurement, c'est bien en excluant une fraction très petite du domaine considéré qu'on arrive le plus facilement à démontrer l'existence de la valeur moyenne pour une catégorie étendue de fonctionnelles et justifier l'extension de théorèmes établis seulement dans le cas de fonctions d'un nombre fini de variables. On peut alors établir une théorie des fonctionnelles harmoniques plus générale que celle qui précède, et dont voici les principales circonstances :

1° Bien que l'équation des fonctionnelles harmoniques soit du second ordre, le problème de Cauchy se confond avec celui de Dirichlet, et est correctement posé lorsqu'on se donne les valeurs de la fonctionnelle harmonique U sur une surface Σ (ou même sur une intersection de plusieurs surfaces). La solution en est donnée par un potentiel de double couche de densité égale aux valeurs données, et est bien défini en tout point par lequel il est impossible de faire passer une surface minima ne coupant pas Σ. A l'extérieur du volume V ainsi défini, le potentiel est nul, et à la surface il est égal à la moitié de la valeur qu'il prend dans le voisinage de la surface du côté intérieur. Mais le prolongement de la fonctionnelle harmonique U à l'extérieur de V peut être fait d'une infinité de manières, de sorte qu'en un point extérieur à V, même très voisin de sa surface, même s'il s'agit des parties de la surface constituées par Σ, la valeur de U est arbitraire.

2° Si la surface Σ est minima, le volume V précédent se réduit à cette surface. La valeur de ΔU en un point de Σ ne dépend que des valeurs de U sur Σ, et est indépendante de la valeur de $\dfrac{dU}{dn}$ et de $\dfrac{d^2U}{dn^2}$. Les valeurs données U doivent donc vérifier une équation aux dérivées fonctionnelles pour pouvoir donner naissance à une fonction harmonique, et elles sont entièrement définies dans une région de Σ si elles sont définies sur le contour C de cette région. Chacune des dérivées $\dfrac{d^i U}{dn^i}$ est de même définie par sa valeur sur C.

3° Les surfaces U = const. sont toutes des surfaces minima. La détermination de U peut donc s'obtenir en déterminant les surfaces minima contenant les régions U = const. sur la surface Σ. Ces surfaces sont déterminées dans tout le volume V, même si la surface Σ n'entoure pas complètement ce volume.

La surface minima limitée à un contour C peut d'ailleurs s'obtenir comme lieu des points A tels que ce contour, vu d'un de ces points, divise l'espace en deux angles solides égaux. La sphère ayant pour centre un tel point A et un rayon arbitraire est partagée par cette surface (comme aussi par le cône de sommet A contenant C) en deux aires égales. Mais presque toute son aire est voisine de la surface, de sorte que pour prendre la valeur moyenne d'une fonctionnelle sur une sphère, il suffit de connaître les valeurs de cette fonctionnelle sur les points communs à cette sphère et à une surface minima passant par son centre. On voit ainsi l'identité entre les solutions des problèmes de Cauchy ou Dirichlet, soit par le potentiel de double couche, soit par la théorie des surfaces minima.

(P. L.)