BULLETIN DE LA S. M. F.

W. SIERPINSKI

Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'une tel nombre

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 125-132

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__125_1>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE M. BOREL SUR LES NOMBRES ABSOLUMENT NORMAUX ET DÉTERMINATION EFFECTIVE D'UN TEL NOMBRE;

PAR M. W. SIERPINSKI.

On appelle, d'après M. Borel, *simplement normal* par rapport à la base q [1] tout nombre réel x dont la partie fractionnaire

[1] E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 197, Paris, 1914.

donne un développement

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{q^k},$$

dans lequel les b_k sont des entiers inférieurs à q, tels que $c_0^{(n)}$, $c_1^{(n)}$, ..., $c_{q-1}^{(n)}$ désignant les nombres respectifs de fois que figurent les chiffres $0, 1, 2, \ldots, q-1$ parmi les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$, chacun des rapports

$$\frac{c_0^{(n)}}{n}, \quad \frac{c_1^{(n)}}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{c_{q-1}^{(n)}}{n}$$

a pour limite $\frac{1}{q}$ lorsque n augmente indéfiniment.

Lorsqu'un nombre donné est simplement normal par rapport à toutes les bases possibles ($q = 2, 3, 4, \ldots$), il est dit *absolument normal.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration élémentaire (sans faire appel aux théorèmes de la théorie des ensembles) d'une proposition remarquable de M. Borel, d'après laquelle *presque tous les nombres réels sont absolument normaux.* Notre démonstration nous donnera en même temps un moyen de déterminer effectivement un nombre absolument normal.

Désignons pour tout système de nombres naturels donnés q, m, n, et pour tout nombre p de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$ par

$$\Delta_{q,m,n,p} \tag{1}$$

l'ensemble de tous les intervalles

$$\left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + \ldots + \frac{b_n}{q^n} - \frac{1}{q^n}, \ \frac{b_1}{q} + \ldots + \frac{b_n}{q^n} + \frac{2}{q^n}\right), \tag{2}$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des nombres de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$, satisfaisant à l'inégalité

$$\left| \frac{c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n} - \frac{1}{q} \right| \geqq \frac{1}{m}, \tag{3}$$

$c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ désignant le nombre de fois que figure le nombre p parmi les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Posons ensuite, ε étant un nombre positif donné quelconque,

$$n_{m,q}(\varepsilon) = \mathrm{E}\,\frac{24 m^6 q^2}{\varepsilon} + 2. \tag{4}$$

et

$$\Delta(\varepsilon) = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \Delta_{q,m,n,p}; \tag{5}$$

ce sera évidemment un ensemble bien déterminé (dénombrable) d'intervalles, ne dépendant que de ε. Nous démontrerons que la somme des longueurs des intervalles formant l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ est $< \varepsilon$ et que tout nombre x de l'intervalle $(0, 1)$ qui n'est intérieur à aucun des intervalles de l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ est absolument normal.

Calculons d'abord la somme $S_{q,m,n,p}$ des longueurs de tous les intervalles de l'ensemble (1), où q, m et n sont des nombres naturels donnés $(q > 1)$, et p est un nombre donné de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$. La longueur de tout intervalle (2) est évidemment $\frac{3}{q^n}$: pour calculer la somme $S_{q,m,n,p}$, il suffira donc de calculer combien d'intervalles (2) appartiennent à l'ensemble (1), c'est-à-dire combien de systèmes

$$b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_n \tag{6}$$

de n entiers non négatifs $\leqq q-1$ satisfont à la condition (3).

Divisons les systèmes (6) en classes, en rangeant dans la $k^{\text{ième}}$ classe $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ tous les systèmes (6) pour lesquels

$$c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = k. \tag{7}$$

Pour qu'un système (6) satisfasse à la condition (7), il faut et il suffit que, parmi les n termes de la suite (6), k soient égaux au nombre p, chacun des $n-k$ autres termes de la suite (6) pouvant prendre une des $q-1$ valeurs $0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, q$. Il s'ensuit sans peine qu'il y a

$$\binom{n}{k}(q-1)^{n-k}$$

systèmes (6) satisfaisant à la condition (7).

Désignons par $\theta(k)$ le nombre 1 ou 0, suivant que l'inégalité

$$\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{q}\right| \geqq \frac{1}{m} \tag{8}$$

est remplie ou non. Le nombre de systèmes (6) satisfaisant à la condition (3) est donc évidemment égal à la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \theta(k) \binom{n}{k} (q-1)^{n-k}.$$

Nous avons donc

$$S_{q,m,n,p} = \frac{3}{q^n} \sum_{k=0}^{n} \theta(k) \binom{n}{k} (q-1)^{n-k}. \tag{9}$$

D'après la définition du symbole $\theta(k)$ et d'après (8) nous avons pour $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\theta(k) \leqq m^4 \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{q}\right)^4, \tag{10}$$

puisque pour $\theta(k) = 0$ l'inégalité (10) subsiste évidemment et que pour $\theta(k) = 1$ elle résulte de l'inégalité (8).

La formule (9) donne donc, d'après (10) [1],

$$S_{q,m,n,p} \leqq \frac{3m^4}{n^4 q^{n+4}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qk-n)^4 (q-1)^{n-k}. \tag{11}$$

Pour calculer la dernière somme, posons

$$f(x) = (x^2 + q - 1)^n x^{-n}; \tag{12}$$

nous aurons évidemment

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^{n-k} x^{qk-n}. \tag{13}$$

Posons ensuite

$$xf'(x) = f_1(x), \quad xf'_1(x) = f_2(x), \quad xf'_2(x) = f_3(x), \quad xf'_3(x) = f_4(x); \tag{14}$$

d'après (13) et (14) nous aurons évidemment

$$f_4(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qk-n)^4 (q-1)^{n-k}; \tag{15}$$

---

[1] *Cf.* F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 420, Leipzig, 1914. M. Hausdorff ne considère d'ailleurs que le cas $q = 2$.

or, d'après (12) et (14), nous trouvons, en effectuant le calcul,

$$f_4(1) = n(q-1)q^n[3(q-1)n + q^2 - 6(q-1)];$$

donc, pour $q \geqq 2$, n naturel,

$$f_4(1) < 4n^2q^{n+3}. \tag{16}$$

Nous avons donc, d'après (14) et (16),

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qk-n)^4 (q-1)^{n-k} < 4n^2 q^{n+3} \quad \text{(1)}$$

et l'inégalité (11) donne

$$S_{q,m,n,p} < \frac{12m^4}{qn^2}. \tag{17}$$

D'après (5) nous concluons sans peine que la somme $S(\varepsilon)$ des longueurs de tous les intervalles formant l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ ne surpasse pas la somme

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} S_{q,m,n,p};$$

donc, d'après (17), nous trouvons

$$S(\varepsilon) < \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \frac{12m^4}{qn^2} = 12 \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m^4 \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right). \tag{18}$$

Pour tout k naturel nous avons

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{k}; \tag{19}$$

donc, pour $k = \mathrm{E}\,\frac{24m^6q^2}{\varepsilon} + 1 > \frac{24m^6q^2}{\varepsilon}$, d'après (4),

$$\sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{24m^6q^2},$$

(1) Cette inégalité pourrait être évidemment démontrée sans faire appel au calcul différentiel.

et l'inégalité (18) donne

$$(20) \qquad S(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Or, d'après (19), nous trouvons sans peine

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < 2;$$

l'inégalité (20) donne donc

$$S(\varepsilon) < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré que la somme des longueurs de tous les intervalles formant l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ est inférieure à ε.

Désignons maintenant par $E(\varepsilon)$ l'ensemble de tous les nombres x de l'intervalle (0, 1) qui ne sont intérieurs à aucun des intervalles appartenant à l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$: il est bien évident que $E(\varepsilon)$ est un ensemble bien déterminé, ne dépendant que de ε, et qu'il existe toujours pour $\varepsilon \leqq 1$. Je dis que tout nombre x de l'ensemble $E(\varepsilon)$ est un nombre absolument normal.

Soient, en effet, x un nombre donné de l'ensemble $E(\varepsilon)$, q un nombre naturel donné $\geqq 2$, et

$$(21) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{q_k}$$

le développement du nombre x en fraction à base q.

Soit, ensuite, p un nombre donné de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Désignons maintenant par m un nombre naturel quelconque et posons

$$(22) \qquad \mu = \frac{24 m^6 q^2}{\varepsilon} + 2.$$

Je dis que nous aurons l'inégalité

$$(23) \qquad \left| \frac{c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n} - \frac{1}{q} \right| < \frac{1}{m}, \qquad \text{pour } n > \mu.$$

Supposons, en effet, que pour un indice $n > \mu$ l'inégalité (23) ne subsiste pas. Nous aurons pour cet indice n l'inégalité (3), qui prouve que l'intervalle (2) appartient à l'ensemble (1), donc, à plus forte raison, à l'ensemble (5), puisque, d'après (22) et (4) (n étant un nombre naturel $> \mu$), nous avons

$$n > n_{m,q}(\varepsilon).$$

Donc l'intervalle (2) appartient à l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$. Or, de (21), nous concluons sans peine que le nombre x est intérieur à l'intervalle (2). Le nombre x serait donc intérieur à un intervalle de l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$, ce qui est impossible puisque x appartient à l'ensemble $E(\varepsilon)$.

Nous avons ainsi démontré que pour tout nombre naturel m existe un nombre correspondant μ, pour lequel subsiste (23), ce qui prouve que

$$(24) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n} = \frac{1}{q}.$$

La formule (24) étant vraie pour $p = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, nous en concluons que le nombre x est simplement normal par rapport à la base q.

Le nombre x est donc simplement normal par rapport à toute base $q = 2, 3, 4, \ldots$: c'est donc un nombre absolument normal.

Nous avons ainsi démontré que tout nombre de l'ensemble $E(\varepsilon)$ est absolument normal. Il s'ensuit que tous les nombres de l'intervalle (0, 1) qui ne sont pas absolument normaux peuvent être enfermés dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε, et cela pour tout ε positif, donné arbitrairement *a priori*. En d'autres termes, *l'ensemble de tous les nombres de l'intervalle* (0, 1) *qui ne sont pas absolument normaux est de mesure nulle*, ce qui constitue le théorème de Mr. Borel.

Nous allons maintenant déterminer effectivement un nombre absolument normal. Considérons l'ensemble $E(1)$: ce sera évidemment un ensemble bien déterminé de nombres de l'intervalle (0, 1), non vide [puisque les ensembles $E(\varepsilon)$ existent pour $\varepsilon \leq 1$]. Désignons par ξ la borne inférieure de l'ensemble $E(1)$; ξ sera donc un nombre réel bien déterminé. Il suit sans peine de la définition de la borne inférieure et de la définition de l'ensemble $\varepsilon(1)$, que ξ ne peut être intérieur à aucun intervalle appartenant à l'ensemble $\Delta(1)$. Il en résulte que ξ appartient à l'ensemble $\varepsilon(1)$: c'est donc un nombre absolument normal.

Nous avons donc déterminé effectivement un nombre absolument normal.