G. VALIRON

Sur quelques théorèmes de M. Borel

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 247-252

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__247_0>

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE M. BOREL;

PAR M. G. VALIRON.

M. Borel a montré, dans son *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (1), la relation étroite qui existe entre la croissance du maximum $M(r)$ du module d'une fonction entière $f(z)$ pour $|z| = r$ et la croissance des fonctions suivantes : le maximum $P(r)$ des valeurs positives de la partie réelle de $f(z)$ pour $|z| = r$, le minimum $-P_1(r)$ des valeurs négatives de cette partie réelle, le maximum $M_1(r)$ du module de la dérivée $f'(z)$, toujours pour $|z| = r$. Certaines des propositions de M. Borel ont été depuis obtenues par d'autres voies par MM. Landau, Schottky et Carathéodory (2) et généralisées par M. Rémoundos (3). La méthode de M. Borel consiste en somme dans la comparaison des fonctions considérées ci-dessus au module $\mu(r)$ du terme de la série de Taylor qui définit $f(z)$ qui a le plus grand module (s'il y a plusieurs termes dont le module pour $|z| = r$ dépasse ou égale celui de tous les autres, $\mu(r)$ est le module de l'un d'eux). Relativement à la comparaison de $\mu(r)$ et $M(r)$, j'ai obtenu la proposition suivante (4) :

Soit $n(x)$ le rang du terme (dont le rang est le moins élevé) dont le module est égal pour $|z| = x$ à $\mu(x)$, on a les relations

$$(1) \quad M(r) < \left\{ 2n\left[r + \frac{r}{n(r)}\right] + 1 \right\} |f(0)|\,\mu(r), \qquad \log \mu(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx.$$

---

(1) *Acta mathematica*, t. XX, 1897, p. 357; *voir* aussi les *Leçons sur les fonctions entières*, p. 63-69.

(2) *Voir* O. BLUMENTHAL, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Collection de Monographies de M. Borel), p. 92-94.

(3) *Voir*, en particulier, *Extension d'un théorème de M. Borel aux fonctions algébroïdes multiformes* (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1911, 1er semestre, p. 267) où l'on trouvera une liste des autres travaux de cet auteur.

(4) *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini*, ... (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 3e série, t. V, 1913, p. 117).

En particulier, pour une fonction d'ordre nul ou fini inférieur ou égal à ρ, on aura

$$(2)\qquad M(r) < r^{\rho+\varepsilon(r)}\mu(r), \qquad \lim_{r=\infty}\varepsilon(r) = 0.$$

Pour les fonctions d'ordre infini, l'inégalité (1) et les théorèmes de M. Borel sur les fonctions croissantes montrent que le rapport de $\log M(r)$ à $\mu(r)$ tend vers 1, sauf peut-être lorsque r se trouve dans une infinité dénombrable d'intervalles à l'intérieur desquels $\log r$ varie pour $r > r_0$ d'une quantité qui tend vers zéro avec r_0. J'appellerai ces intervalles *intervalles d'exclusion de* $f(z)$. Je vais montrer que la proposition précédente donne immédiatement les théorèmes de M. Borel et que l'inégalité (2) en particulier permet de les préciser dans le cas de l'ordre fini. Dans tout ce qui suit, j'appellerai $\varepsilon(x)$ ou ε toute quantité positive qui tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives.

1. Relation entre $M(r)$ et $M_1(r)$. — Nous poserons

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

et nous désignerons par $n_1(r)$ le rang du terme de $f'(z)$ qui a le plus grand module pour $|z| = r$, et par $\mu_1(r)$ sa valeur. Nous avons, d'après l'inégalité (1), en supposant, ce que nous pouvons faire, $f'(0) \neq 0$,

$$M_1(r) < \left\{2n_1\left[r + \frac{r}{n_1(r)}\right] + 1\right\}|f'(0)|\,\mu_1(r), \qquad \mu_1(r) = n_1|c_{n_1}|r^{n_1-1},$$
$$n_1 = n_1(r);$$

et par suite

$$M_1(r) < \frac{2|f'(0)|}{r}\left\{n_1\left[r + \frac{r}{n_1(r)}\right] + 1\right\}^2 |c_{n_1}|\,r^{n_1},$$

et puisque $|c_{n_1}|\,r^{n_1}$ est inférieur ou égal à $\mu(r)$ qui est inférieur à $M(r)$, nous obtenons

$$M_1(r) < \frac{h}{r}\left\{n_1\left[r + \frac{r}{n_1(r)}\right]\right\}^2 M(r) \qquad (h \text{ fini});$$

ce qui montre en particulier que, à l'extérieur des intervalles d'exclusion de $f'(z)$, on a l'inégalité

$$M_1(r) < [M(r)]^{1+\varepsilon(r)}, \tag{3}$$

inégalité qui démontre le théorème de M. Borel, puisqu'il est bien connu que $M_1(r)r$ est supérieur à $M(r) - A$, A étant un nombre fixe. Dans le cas d'une fonction d'ordre fini inférieur ou égal à ρ, ce premier résultat montre que $f'(z)$ est aussi d'ordre ρ, et par suite on aura, quel que soit r,

$$\frac{M(r) - A}{r} < M_1(r) < r^{2\rho-1+\varepsilon(r)} M(r) \quad (^1).$$

2. Relation entre $M(r)$ et $P(r)$ ou $P_1(r)$. — M. Hadamard a montré (²) que $P(r)$ et $P_1(r)$ qui sont évidemment inférieurs à $M(r)$ sont supérieurs à $\frac{1}{4}|c_n|r^n - B$, quel que soit le nombre n et B étant un nombre fixe, d'après l'inégalité (1), $P(r)$ et $P_1(r)$ sont donc supérieurs à

$$\frac{1}{4}\mu(r) - B > \frac{M(r)}{8\left\{n\left[r + \frac{r}{n(r)}\right] + 1\right\}} - B;$$

par suite, à l'extérieur des intervalles d'exclusion de $f(z)$, on aura

$$P(r) > [M(r)]^{1-\varepsilon(r)}, \qquad P_1(r) > [M(r)]^{1-\varepsilon(r)};$$

c'est le théorème de M. Borel. En particulier, pour une fonction d'ordre inférieur ou égal à ρ, on aura, quel que soit r,

$$P(r) > M(r)r^{-\rho-\varepsilon(r)}, \qquad P_1(r) > M(r)r^{-\rho-(r)}.$$

On a des résultats analogues pour la partie imaginaire de $f(z)$.

3. J'appliquerai encore la formule (1) à la démonstration de quelques propriétés des fonctions entières de deux variables réelles positives à coefficients positifs étudiées par MM. Borel et Sire (³).

(¹) Les résultats obtenus par M. Boutroux sur la dérivée logarithmique (*Acta mathematica*, t. XXVIII, p. 147) montrent bien que (3) a lieu sans restriction, mais ne donnent pas cette inégalité.

(²) *C. R. Acad. Sc.*, t. CIV, p. 1053.

(³) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. VI; Sire, *Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXI, Chap. II).

Soit

$$N(R, z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(R) z^n$$

une fonction entière de la variable réelle positive R et de z à coefficients positifs, M. Sire a montré (*loc. cit.*, p. 15) que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)} = 1 \tag{4}$$

uniformément pour toutes les valeurs de R et R_1 comprises entre deux nombres positifs fixes quelconques. Supposons alors que, pour une valeur R_0, $N(R_0, z)$ ne soit pas d'ordre infini; on aura pour $R > R_0$

$$N(R_0, r) < N(R, r) = \sum_0^{\infty} [A_n(R_0)]^{1-\varepsilon_n} r^n = \left\{ [A_{n_1}(R_0)]^{1-\varepsilon_{n_1}} r^{n_1} \right\}^{1+\varepsilon(r)},$$

n_1 étant le rang du terme maximum de $N(R, r)$, d'où encore

$$N(R, r) = [A_{n_1}(R_0)(r^{1+\varepsilon'_{n_1}})^{n_1}]^{1+\varepsilon(r)} < [N(R_0, r^{1+\varepsilon_1(r)})]^{1+\varepsilon(r)}.$$

Ainsi nous obtenons

$$N(R_0, r) < N(R, r) < [N(R_0, r^{1+\varepsilon_1(r)})]^{1+\varepsilon(r)}, \tag{5}$$

ce qui montre en particulier que si $N(R, r)$ est d'ordre ρ pour une valeur particulière R_0 de R, il en est de même pour toute autre valeur de R (Borel, Sire); si $N(R, z)$ est régulière d'ordre ρ (au sens de M. Borel) pour une valeur R_0, il en est de même pour toute autre valeur de R (Sire). Les inégalités (5) contiennent également les résultats relatifs aux fonctions d'ordre nul; si l'on a par exemple

$$\log N(R_0, r) = [1 + \eta(r)](\log r)^k \qquad [k > 1], \; |\eta(r)| < \varepsilon(r),$$

on a encore la même égalité en remplaçant R_0 par R. Dans le cas de l'ordre infini, les inégalités (5) ont encore lieu, sauf dans les intervalles exceptionnels de $N(R, z)$. Dans le cas particulier où $N(r, r)$ est d'ordre fini et où, pour une valeur R_0, $N(R_0, r)$ reste supérieur à une exponentielle e^{r^α} (α pouvant être très petit, mais fixe), on a les relations beaucoup plus simples

$$N(R_0, r) < N(R, r) < N(R_0, Ar) r^B \qquad (R > R_0),$$

A et B étant deux nombres faciles à calculer.

4. Extensions de M. Rémoundos. — L'extension de la propriété énoncée au paragraphe 2, aux fonctions algébroïdes multiformes à n branches a été faite par M. Rémoundos par une méthode assez longue et parfois confuse. Je l'établirai en m'appuyant sur la proposition suivante :

Considérons la fonction à n branches $u(z)$ définie par l'équation

$$u^n + A_1(z)u^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0,$$

où $A_i(z)$ désigne une fonction entière; soient $U(r)$ le maximum du module des diverses branches $u_i(z)$ sur le cercle $|z| = r$, $[M_i(r)]^i$ le maximum de $|A_i(z)|$, $M(r)$ le plus grand des nombres $M_i(r)$, on a

$$B\,U(r) < M(r) < A\,U(r) \qquad (r > r_0),$$

A *et* B *étant deux constantes positives.*

La deuxième inégalité résulte des relations entre les coefficients et les racines, la première de la limitation supérieure des racines d'une équation [1]. Ceci étant, considérons une valeur de r qui ne soit valeur d'exclusion pour aucune des fonctions $A_i(z)$ et soit $A_\nu(z)$ celle de ces fonctions, ou l'une de celles pour lesquelles $[M_i(r)]^i$ est égal à $M(r)$; soient $[P_\nu(r)]^\nu$ le maximum de la valeur absolue de la partie réelle de $A_\nu(z)$ sur le cercle $|z| = r$, $[Q_\nu(r)]^\nu$ le maximum de la valeur absolue du coefficient de i dans $A_\nu(z)$; nous aurons

$$[U(r)]^{1-\varepsilon} < P_\nu(r) < A\,U(r), \qquad [U(r)]^{1-\varepsilon} < Q_\nu(r) < A\,U(r) \qquad [\varepsilon = \varepsilon(r)].$$

La première inégalité est réalisée pour une valeur ζ de z, la seconde pour une valeur ζ' de z. Marquons sur le cercle $|z| = r$ un point z_0 et considérons ce point comme constituant une coupure sur le cercle, $u_i(z)$ étant l'une des déterminations de $u(z)$ sur le cercle ainsi sectionné; soient $p_i(r)$ et $q_i(r)$ les maxima des valeurs absolues de la partie réelle et du coefficient de i; $p(r)$ et $q(r)$

(1) En particulier, on voit qu'étant données n fonctions entières régulières d'ordre ρ, pour chaque valeur de r, l'un au moins des coefficients de l'équation ayant ces fonctions pour racines est supérieur à $e^{r^{\rho-1}}$. (Comparer Sire, *Journal de Mathématiques*, 1913, p. 6-8).

les plus grands des nombres $p_i(r)$ et $q_i(r)$. *Nous allons montrer qu'on a*

$$p(r) > [\mathrm{U}(r)]^{1-\varepsilon n}\mathrm{A}_1, \qquad q(r) > [\mathrm{U}(r)]^{1-\varepsilon n}\mathrm{A}_1 \qquad (\mathrm{A}_1 > 0),$$

ε *étant le nombre même qui figure dans les inégalités écrites ci-dessus.* En effet, nous avons aux points ζ et ζ' :

$$[\mathrm{P}_\nu(r)]^\nu = \Sigma p_1(\zeta) p_2(\zeta)\dots p_\nu(\zeta) - \Sigma p_1(\zeta)\dots p_{\nu-2}(\zeta) q_{\nu-1}(\zeta) q_\nu(\zeta) + \dots.$$
$$[\mathrm{Q}_\nu(r)]^\nu = \Sigma p_1(\zeta')\dots p_{\nu-1}(\zeta') q_\nu(\zeta') - \dots;$$

si nous considérons dans les seconds membres le monôme qui a le plus grand module, nous aurons les inégalités

$$p_{i_1}(r) p_{i_2}(r)\dots p_{i_k}(r) q_{i_{k+1}}(r)\dots q_{i_\nu}(r) > [\mathrm{U}(r)]^{n-\varepsilon n}\mathrm{A}_1,$$
$$p_{j_1}(r) p_{j_2}(r)\dots p_{j_l}(r) q_{j_{l+1}}(r)\dots q_{j_\nu}(r) > [\mathrm{U}(r)]^{n-\varepsilon n}\mathrm{A}_1,$$

qui montrent que chaque facteur des premiers membres est supérieur à $\mathrm{A}_i[\mathrm{U}(r)]^{1-\varepsilon n}$, puisque chacun d'eux est inférieur ou égal à $\mathrm{U}(r)$. Comme, de plus, la parité des nombres de facteurs p ou q est différente dans les deux inégalités, on voit qu'il existe un nombre $q_i(r)$ et un nombre $p_{i'}(r)$ qui est supérieur à $\mathrm{A}_1[\mathrm{U}(r)]^{1-\varepsilon n}$. La proposition énoncée, qui est le théorème de M. Rémoundos, est ainsi établie. Lorsque les fonctions $\mathrm{A}_i(z)$ sont d'ordre fini, on a, à partir d'une valeur r_0 de r_1, les inégalités

$$p(r) > r^{-k}\,\mathrm{U}(r), \qquad q(r) > r^{-k}\,\mathrm{U}(r) \qquad (k \text{ fini}).$$