S. LATTÈS

Sur le prolongement analytique de certaines séries de Taylor

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 95-112

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__95_1>

SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE CERTAINES SÉRIES DE TAYLOR;

PAR M. S. LATTÈS.

1. *But de ce Mémoire.* — Dans un travail antérieur [1] j'ai étudié, après M. Fatou [2], les séries de Taylor

$$(u) \qquad \varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

dans lesquelles chaque coefficient est lié au précédent par une relation de récurrence de la forme

$$(1) \qquad u_{n+1} = f(u_n);$$

la fonction f est supposée holomorphe en un point double α à convergence régulière et u_0 est pris dans un certain domaine entourant ce point double.

---

(1) *Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. III, 1911).

(2) P. FATOU, *Sur une classe remarquable de séries de Taylor* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVII, 1910).

Si l'on pose

$$S = f'(\alpha)$$

et si l'on suppose

$$S \neq 0, \quad |S| < 1,$$

la somme $\varphi(z)$ de la série (u) est une fonction méromorphe admettant pour pôles simples les points

$$1, \ \frac{1}{S}, \ \frac{1}{S^2}, \ \ldots, \ \frac{1}{S^n}, \ \ldots$$

ou certains de ces points. J'ai donné la décomposition de cette fonction méromorphe en série de fractions simples : ce développement, que je rappellerai un peu plus loin, nous fournit explicitement le prolongement analytique de la fonction $\varphi(z)$ dans tout son domaine d'existence.

Je me propose maintenant d'obtenir, d'une façon plus générale, le prolongement analytique dans tout son domaine d'existence de la fonction $F(z)$ définie par la série

$$(au) \qquad F(z) = a_0 u_0 + a_1 u_1 z + a_2 u_2 z^2 + \ldots + a_n u_n z^n + \ldots,$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ ont la même signification que plus haut et où $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont les coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction donnée $\theta(z)$, holomorphe au point $z = 0$,

$$(a) \qquad \theta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Nous supposons que la fonction analytique $\theta(z)$, définie par la série (a), est connue dans tout son domaine d'existence et nous voulons en déduire une formule donnant la fonction $F(z)$, définie par la série (au), dans tout son domaine d'existence.

Une proposition bien connue, due à M. Hadamard [1], permet d'indiquer *a priori* les points singuliers de la fonction $F(z)$ définie par la série (au). D'après cette proposition, $F(z)$ ne peut pas avoir d'autres points singuliers que les points z obtenus en multipliant le z d'un point singulier de (u) par le z d'un point singulier de (a). Nous avons indiqué plus haut les singularités de

(1) HADAMARD, *Théorème sur les séries entières* (*Acta Mathematica*, t. XXII, 1898).

la fonction $\varphi(z)$ définie par la série (u). On en conclut que, si a désigne un point singulier quelconque de la fonction $\theta(z)$, la fonction $F(z)$ ne peut pas avoir d'autres points singuliers que les points

$$a, \quad \frac{a}{S}, \quad \frac{a}{S^2}, \quad \dots, \quad \frac{a}{S^n}, \quad \dots.$$

Quant à la nature de la singularité, il résulte des compléments apportés par M. Borel [1] au théorème de M. Hadamard que la singularité de $F(z)$ au point $\frac{a}{S^n}$ est la même que la singularité de $\theta(z)$ au point a.

Dans le cas qui nous occupe, tous ces résultats vont apparaître d'une façon évidente sur le développement de la fonction $F(z)$ que je vais établir et qui sera valable dans tout le domaine d'existence de cette fonction.

2. *Théorème fondamental.* — Je rappellerai d'abord quelques résultats relatifs à la suite récurrente

$$(2) \qquad u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_n \quad \dots$$

en renvoyant le lecteur, pour de plus amples détails, à mon Mémoire des *Annales de Toulouse* cité plus haut.

Soit α un point double de la relation (1), soit S la quantité définie plus haut et qu'on appelle le *multiplicateur* relatif à ce point double α. Si le terme initial u_0 de la suite (2) est suffisamment voisin du point double, il existe une série $\omega(y)$ de la forme

$$\omega(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_n y^n + \dots,$$

convergente dans un certain cercle de rayon ρ et telle que u_0, $u_1, \dots, u_n, \dots$ s'expriment en fonction d'un même paramètre y_0 par les formules

$$u_0 = \omega(y_0), \qquad u_1 = \omega(Sy_0), \qquad \dots, \qquad u_n = \omega(S^n y_0), \qquad \dots.$$

Pour $y_0 = 0$, tous les termes de la suite se confondent avec le

(1) Borel, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bulletin de la Société mathém. de France*, t. XXVI, 1898, p. 238).

point double α; au lieu de se donner u_0, on peut se donner y_0, et si y_0 est voisin de zéro, u_0 est voisin de α (¹).

Ces propriétés rappelées, nous supposerons $|y_0| < \rho$, ce qui entraîne $|S^n y_0| < \rho$, et nous exprimerons $u_0, \ldots, u_n$ en fonction de y_0. La fonction $F(z)$, somme de la série (au), sera alors une fonction de y_0. Nous obtiendrons la formule que nous avons en vue en cherchant à développer $F(z)$ en une série convergente procédant suivant les puissances croissantes de y_0.

La proposition que nous allons établir est la suivante :

La fonction $F(z)$ *est une fonction holomorphe de* y_0 *dans le cercle*

$$|y_0| < \rho$$

et l'on a

$$F(z) = \alpha\theta(z) + \alpha_1 y_0 \theta(Sz) + \ldots + \alpha_n y_0^n \theta(S^n z) + \ldots; \tag{3}$$

$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sont les coefficients de la série* $\omega(y)$: *ils ne dépendent donc que de la relation de récurrence considérée et ils ne dépendent pas de la fonction* $\theta(z)$. *La série* (3) *réalise le prolongement analytique de la fonction analytique* $F(z)$ *définie par la série* (au).

Pour démontrer cette proposition, nous partirons de l'expression de la série (au) par une intégrale employée par M. Hadamard et par M. Borel pour la démonstration des propositions rappelées plus haut. On a

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \theta(x) \varphi\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{x}. \tag{4}$$

Dans cette expression, prenons d'abord pour C un contour intérieur au cercle de convergence de la série (a), de somme $\theta(z)$, et comprenant à son intérieur le point z. La série (u), de somme $\varphi(z)$, a pour rayon de convergence l'unité, puisque le pôle de $\varphi(z)$ le plus voisin de l'origine est le pôle $z = 1$. Le point $\frac{z}{x}$ est donc intérieur au cercle de convergence de $\varphi(z)$,

(¹) La fonction $\omega(y)$ n'est pas autre chose que la fonction inverse de la fonction de Schrœder introduite par M. Kœnigs dans l'étude des relations (1).

et dans ces conditions l'expression (4) est égale à la somme $F(z)$ de la série (au).

Prenons maintenant pour C un contour comprenant à son intérieur le point z ainsi que tous les points $S^n z$, et tel que les points singuliers a de la fonction $\theta(x)$ soient tous à l'extérieur de ce contour : c'est possible si le point z ne coïncide pas avec l'un des points $\frac{a}{S^n}$. Dans ces conditions, l'intégrale (4) est une fonction holomorphe de z et elle réalise le prolongement analytique de la série (au).

Le raisonnement que nous venons de faire n'est jusqu'ici que l'application immédiate au cas actuel du raisonnement général de M. Hadamard.

Mais servons-nous maintenant de l'expression de la série (u), de somme $\varphi(z)$, par une série de fractions rationnelles, que j'ai établie dans le Mémoire cité plus haut et que je me borne à rappeler ici. Cette expression est

$$\varphi(z) = \frac{\alpha}{1-z} + \frac{\alpha_1 y_0}{1-Sz} + \frac{\alpha_2 y_0^2}{1-S^2 z} + \ldots + \frac{\alpha_n y_0^n}{1-S^n z} + \ldots;$$

$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les coefficients de la série $\omega(y)$ définie plus haut et l'on suppose $|y_0|$ inférieur au rayon de convergence de cette série. L'expression (4) devient

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \theta(x) \sum_n \frac{\alpha_n y_0^n}{x - S^n z}\, dx.$$

Montrons qu'en intégrant terme à terme la série du second membre on obtiendra une série convergente dont la somme sera égale à $F(z)$. Si l'on pose

$$R_n = \frac{\alpha_{n+1} y_0^{n+1}}{x - S^{n+1} z} + \frac{\alpha_{n+2} y_0^{n+2}}{x - S^{n+2} z} + \ldots,$$

il suffit de prouver que l'intégrale

$$R'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \theta(x) R_n\, dx$$

tend vers zéro pour n infini.

Or, lorsque le point x parcourt le contour C, on a, quel que soit p,

$$|x - S^p z| > \delta,$$

δ étant la distance minimum du point z à un point quelconque du contour. On a, par suite,

$$|R_n| < \frac{|\alpha_{n+1} y_0^{n+1}| + |\alpha_{n+2} y_0^{n+2}| + \dots}{\delta}$$
$$< \frac{M}{\delta}\left|\frac{y_0}{\rho}\right|^{n+1} \frac{1}{1-\left|\frac{y_0}{\rho}\right|},$$

M étant un nombre fixe.

On en déduit

$$|R'_n| < \frac{MM_1L}{2\pi\delta}\left|\frac{y_0}{\rho}\right|^{n+1} \frac{1}{1-\left|\frac{y_0}{\rho}\right|},$$

M_1 étant la borne supérieure de $|\theta(x)|$ sur le contour et L la longueur du chemin d'intégration. On voit que R'_n tend vers zéro pour n infini.

L'expression de $F(z)$ donnée plus haut peut donc s'écrire

$$F(z) = \Sigma \alpha_n y_0^n \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\theta(x)\,dx}{x - S^n z}.$$

Le théorème des résidus donne la valeur de l'intégrale qui figure au terme général de cette série. On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\theta(x)\,dx}{x - S^n z} = \theta(S^n z),$$

en supposant, comme nous l'avons fait, que le point $S^n z$ est un point régulier de la fonction $\theta(x)$. Par suite, la formule (3) que nous avions en vue est établie.

Cette formule (3) définit la fonction $F(z)$ en tout point où la fonction $\theta(S^n z)$ existe quel que soit n. Le point z est donc régulier pour $F(z)$ si les points $S^n z$ sont tous réguliers pour $\theta(z)$. Si a est un point singulier de $\theta(z)$, le point $\frac{a}{S^n}$ est, quel que soit n, un point singulier de $F(z)$, si α_n est $\neq 0$. C'est un point singulier isolé si a est un point singulier isolé de $\theta(z)$ et la formule (3) permet l'étude complète de la fonction $F(z)$ en un pareil point. De même, si $\theta(z)$ possède une ligne L de singularités ou un ensemble parfait quelconque E de singularités, on en déduit pour $F(z)$ une infinité de lignes ou d'ensembles de singularités déduits de L ou de E par les transformations

$$z' = \frac{z}{S^n},$$

où n reçoit toutes les valeurs entières et où z désigne un point singulier de $\theta(z)$, z' un point singulier de $F(z)$.

3. *Exemple I.* — On obtiendra diverses catégories générales de fonctions en particularisant, soit la relation de récurrence, soit la série (a). Dans ce premier exemple, nous particulariserons la relation de récurrence. Supposons que ce soit la suivante :

$$u_{n+1} = u_n^S.$$

Cette relation admet le point double $\alpha = 1$ et le multiplicateur correspondant à ce point double est S. Nous supposons $|S| < 1$. Nous préciserons la détermination à prendre pour u_n^S en écrivant la suite sous la forme suivante

$$u_0 = u_0; \quad u_1 = u_0^S = e^{S \log u_0}; \quad u_2 = u_1^S = e^{S^2 \log u_0}; \quad \ldots; \quad u_n = e^{S^n \log u_0}; \quad \ldots$$

et en convenant de prendre partout la même détermination pour $\log u_0$. Dans ces conditions, la fonction $\omega(y)$ de la théorie générale est ici

$$\omega(y) = e^y.$$

Si l'on pose en effet $u_0 = e^{y_0}$, on aura bien

$$u_0 = \omega(y_0), \quad u_1 = \omega(Sy_0), \quad \ldots, \quad u_n = \omega(S^n y_0), \quad \ldots.$$

Les coefficients $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la théorie générale seront donc ceux du développement de e^y :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Considérons maintenant la série (a) de somme $\theta(z)$ et la série (au) de somme $F(z)$. On a

$$F(z) = a_0 u_0 + a_1 u_0^S z + a_2 u_0^{S^2} z^2 + \ldots + a_n u_0^{S^n} z^n + \ldots.$$

La formule (3) nous donne pour $F(z)$ la nouvelle expression

$$F(z) = \theta(z) + y_0\theta(Sz) + \frac{y_0^2}{1.2}\theta(S^2z) + \ldots + \frac{y_0^n}{1.2\ldots n}\theta(S^nz) + \ldots,$$

où l'on a posé $y_0 = \log u_0$: on prendra pour $\log u_0$ la détermination que l'on aura adoptée dans le calcul de la suite récurrente.

Nous avons laissé jusqu'ici la fonction $\theta(z)$ arbitraire. En prenant pour $\theta(z)$ diverses fonctions élémentaires on aura des séries $F(z)$ dont on connaîtra la somme. Soit par exemple

$$\theta(z) = \sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2.4}z^2 + \frac{1.3}{2.4.6}z^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}z^4 + \ldots.$$

La série

$$F(z) = u_0 + \frac{1}{2}u_0^S z - \frac{1}{2.4}u_0^{S^2}z^2 + \frac{1.3}{2.4.6}u_0^{S^3}z^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}u_0^{S^4}z^4 + \ldots$$

aura pour somme la fonction

$$F(z) = \sqrt{1+z} + \log u_0\sqrt{1+Sz} + \frac{(\log u_0)^2}{1.2}\sqrt{1+S^2z} + \ldots$$
$$+ \frac{(\log u^0)^n}{1.2\ldots n}\sqrt{1+S^nz} + \ldots,$$

c'est-à-dire une fonction multiforme de z admettant une infinité de points critiques algébriques

$$-1, \quad -\frac{1}{S}, \quad -\frac{1}{S^2}, \quad \ldots, \quad -\frac{1}{S^n}, \quad \ldots.$$

Exemple II. — Au lieu de nous donner la relation de récurrence, donnons-nous maintenant la série (a), de somme $\theta(z)$. Soit

$$\theta(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

La série (au) est ici

$$F(z) = u_0 + u_1\frac{z}{1} + u_2\frac{z^2}{1.2} + \ldots + u_n\frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Elle a pour somme une fonction entière de z fournie par la formule (3) :

$$F(z) = \alpha e^z + \alpha_1 y_0 e^{Sz} + \alpha_2 y_0^2 e^{S^2z} + \ldots + \alpha_n y_0^n e^{S^nz} + \ldots;$$

les coefficients α, α_1, α_2, ..., ainsi que l'exposant S, dépendent de la relation de récurrence établie entre les u_n. Leur détermination exige la résolution d'une équation fonctionnelle et ce n'est que dans des cas tout à fait particuliers que la solution s'exprime par des fonctions élémentaires (comme dans l'exemple I). Mais je n'insisterai pas sur ce point que j'ai déjà examiné ailleurs [1].

4. *Cas d'une relation de récurrence homographique.* — J'étudierai avec quelque détail un dernier exemple, celui où la relation de récurrence est une relation homographique

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

Nous supposerons d'abord que les racines ρ_1, ρ_2 de l'équation

$$\begin{vmatrix} a-\rho & b \\ c & d-\rho \end{vmatrix} = 0$$

ont des modules différents. Soit $|\rho_2| < |\rho_1|$. Soient α_1, α_2 les points doubles de la relation correspondant respectivement aux racines ρ_1 et ρ_2. Posons $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \mathrm{S}$. On a

$$|\mathrm{S}| < 1.$$

La fonction $\omega(y)$ s'obtient ici en posant

$$y_0 = \frac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2},$$

d'où

$$u_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 y_0}{1 - y_0} = \omega(y_0).$$

On aura en effet, d'après des propriétés bien connues de la relation homographique,

$$u_0 = \omega(y_0), \qquad u_1 = \omega(\mathrm{S}y_0), \qquad \ldots, \qquad u_n = \omega(\mathrm{S}^n y_0), \qquad \ldots.$$

La fonction $\omega(y)$ développée en série s'écrit

$$\omega(y) = \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)y + (\alpha_1 - \alpha_2)y^2 + \ldots + (\alpha_1 - \alpha_2)y^n + \ldots$$

---

[1] *Sur les suites récurrentes*... (n°s 7-10), p. 80-83.

et le rayon de convergence de cette série est égal à 1. Nous supposons donc $|y_0| < 1$, c'est-à-dire

$$|u_0 - \alpha_1| < |u_0 - \alpha_2|.$$

Dans ces conditions, si l'on désigne par $\theta(z)$ *la fonction analytique définie par la série* (a), *la fonction analytique* $F(z)$ *définie par la série* (au) *sera donnée par la formule*

$$\begin{aligned} F(z) = \alpha_1\theta(z) + (\alpha_1 - \alpha_2)\frac{u_0-\alpha_1}{u_0-\alpha_2}\theta(Sz) + \ldots \\ + (\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{u_0-\alpha_1}{u_0-\alpha_2}\right)^n \theta(S^n z) + \ldots. \end{aligned}$$

Soit par exemple

$$\theta(z) = \log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots - \frac{z^n}{n} - \ldots.$$

On aura

$$\begin{aligned} F(z) &= -u_1 z - \frac{u_2 z^2}{2} - \ldots - \frac{u_n z^n}{n} - \ldots \\ &= \alpha_1 \log(1-z) + (\alpha_1-\alpha_2)\frac{u_0-\alpha_1}{u_0-\alpha_2}\log(1-Sz) + \ldots \\ &\quad + (\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{u_0-\alpha_1}{u_0-\alpha_2}\right)^n \log(1-S^n z) + \ldots. \end{aligned}$$

Tous les résultats qui précèdent supposent $|u_0 - \alpha_1| < |u_0 - \alpha_2|$. Mais il est facile de passer de là au cas où u_0 ne vérifie plus l'inégalité précédente, en procédant comme je l'ai fait antérieurement ([1]) pour le cas particulier où il s'agit de la fonction $F(z)$ définie par la série (u). Il nous suffira d'énoncer le résultat.

Soit k le plus petit entier tel que l'on ait

$$|u_k - \alpha_1| < |u_k - \alpha_2|.$$

Cet entier existe puisque u_n tend vers α_1 pour n infini. Posons

$$\theta_1(z) = \theta(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}.$$

On aura

$$\begin{aligned} F(z) = a_0 u_0 + a_1 u_1 z + \ldots + a_{k-1} u_{k-1} z^{k-1} + \alpha_1 \theta_1(z) \\ + (\alpha_1-\alpha_2)\frac{u_k-\alpha_1}{u_k-\alpha_2}\frac{1}{S^k}\theta_1(Sz) + \ldots \\ + (\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{u_k-\alpha_1}{u_k-\alpha_2}\right)^n \frac{1}{S^{nk}}\theta_1(S^n z) + \ldots. \end{aligned}$$

([1]) *Sur les suites récurrentes*..., p. 104.

En retranchant ainsi un polynome de $\theta(z)$, on assure la convergence de la série $F(z)$.

Dans l'étude précédente, ainsi que dans mon Mémoire *Sur les suites récurrentes,* j'ai supposé

$$|\rho_1| \neq |\rho_2|,$$

afin d'avoir pour $|S|$ une valeur inférieure à 1. Je me propose maintenant de compléter ces résultats en étudiant le cas où l'on a

$$|\rho_1| = |\rho_2|$$

sans supposer toutefois $\rho_1 = \rho_2$. Si la relation homographique est à coefficients réels, ce cas se présentera en particulier lorsque l'équation en ρ a ses racines ρ_1, ρ_2 imaginaires : ces deux racines étant imaginaires conjuguées ont en effet le même module.

Considérons d'abord la série (u), de somme $\varphi(z)$, et supposons $\left|\frac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2}\right| < 1$. On a encore, comme dans le cas précédent,

$$(5)\quad \varphi(z) = \frac{\alpha_1}{1 - z} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\dfrac{u_0 - \alpha_1}{u_0 + \alpha_2}}{1 - Sz} + \ldots + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\dfrac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2}\right)^n}{1 - S^n z} + \ldots.$$

La démonstration de cette relation, faite pour le cas où $|S|$ est inférieur à 1, dans le Mémoire cité plus haut, subsiste entièrement si l'on a $|S| = 1$. Dans ce dernier cas, toutefois, elle exige $|z| < 1$.

Dans le cas actuel, S a pour module l'unité, parce que l'on a posé $S = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ et que ρ_1 et ρ_2 ont le même module. Posons

$$S = e^{i\theta}.$$

Supposons d'abord que θ ne soit pas commensurable avec π. Les points $\frac{1}{S^n} = e^{-ni\theta}$, qui sont des points singuliers de la fonction $\varphi(z)$, forment un ensemble dense partout sur le cercle de rayon 1 et celui-ci est une coupure pour la fonction analytique définie par la série (u).

La série de fractions rationnelles qui figure au second membre de (5) est d'ailleurs aussi convergente pour un point z extérieur au cercle de rayon 1 et elle représente à l'extérieur de ce cercle une deuxième fonction analytique $\varphi_1(z)$ admettant aussi ce cercle comme coupure. Cette deuxième fonction peut être définie à partir de l'un quelconque de ses éléments, par exemple à partir de son développement en série de Taylor dans le domaine du point à l'infini. Il est remarquable que, dans ce dernier développement, les coefficients vérifient encore une relation de récurrence homographique : on obtient, en effet, le résultat suivant, dont la démonstration est aisée, et que je me contente d'énoncer :

Soient

$$u_{-1}, \quad u_{-2}, \quad \ldots, \quad u_{-n}, \quad \ldots$$

les valeurs successives déduites de u_0 par la relation inverse de la relation donnée, c'est-à-dire les valeurs obtenues en calculant les antécédents successifs de u_0 par la relation donnée, au lieu de calculer les conséquents, comme on le faisait pour avoir la série (u). La série (5) *représente si $|z|$ est supérieur à* 1, *la fonction analytique $\varphi_1(z)$ définie par la série*

$$\varphi_1(z) = -\frac{u_{-1}}{z} - \frac{u_{-2}}{z^2} - \ldots - \frac{u_{-n}}{z^n} - \ldots.$$

Supposons maintenant

$$|u_0 - \alpha_1| > |u_0 - \alpha_2|.$$

Il suffira de permuter α_1 et α_2 dans la série (5), ainsi que ρ_1 et ρ_2. On obtiendra ainsi un nouveau développement qui admettra pour points singuliers les points $e^{+ni\theta}$. La circonférence de rayon 1 est encore une coupure pour la fonction $\varphi(z)$ [1].

Je ne traiterai pas le cas où l'on a

$$|u_0 - \alpha_1| = |u_0 - \alpha_2|,$$

cas auquel les raisonnements précédents ne s'appliquent plus. Si la relation homographique donnée est à coefficients réels, ce

---

[1] M. Goursat a donné, comme exemple de fonctions analytiques admettant le cercle de convergence comme coupure, une série qui se trouve comprise dans les séries générales que nous étudions ici. Cette série est la suivante :

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{2a - 1} + \ldots + \frac{z^n}{2a^n - 1} + \ldots$$

où l'on suppose $|a| = 1$ et *arg.* a incommensurable avec π.

On constate aisément que, en désignant par u_n le coefficient de z^n, il y a entre cas se présente lorsque, les points doubles étant imaginaires conjugués, on prend pour u_0 une valeur réelle. Ce cas serait donc particulièrement intéressant, mais il présente des difficultés qui m'obligent à laisser son étude de côté pour l'instant.

Supposons maintenant θ *commensurable avec* π. Dans ce cas la suite récurrente est périodique. En effet, il existe un entier k tel que l'on ait

$$S^k = e^{ki\theta} = 1$$

et l'on a alors

$$u_{k+n} = \omega(S^{n+k}y_0) = \omega(S^n y_0) = u_n.$$

La série (u) a alors pour somme la fraction rationnelle

$$\varphi(z) = \frac{u_0 + u_1 z + \ldots + u_{k-1} z^{k-1}}{1 - z^k}.$$

L'étude de la série (u) est ainsi achevée.

Passons maintenant à l'étude de la série (au) déduite de la série $(\mathfrak{a})$, dans l'hypothèse actuelle où $|\rho_1| = |\rho_2|$.

Le cas où θ *est commensurable avec* π *se traite immédiatement;* soit k le plus petit entier tel que S^k soit égal à 1 : la suite des puissances de S est périodique; dans la formule qui donne $F(z)$, groupons les termes de k en k. Nous obtenons ainsi, dans l'hypothèse où l'on a

$$\left|\frac{u_0 - \alpha_1}{u_0 - \alpha_2}\right| < 1,$$

---

u_n et u_{n+1} la relation homographique suivante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{a}\frac{u_n}{u_n+1}.$$

Les points doubles sont $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$.

Si l'on pose $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $S = \frac{1}{a}$, $u_0 = 1$, la série (5) devient

$$\varphi(z) = \sum_n \frac{1}{2^n}\frac{1}{1 - \frac{z}{a^n}}.$$

C'est précisément de cette formule que part M. Goursat pour définir la fonction $\varphi(z)$.

Voir Goursat, *Analyse*, t. II, p. 248; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1887, p. 109, et 1893, p. 247.

la formule suivante :

$$F(z)=\frac{\alpha_1-\alpha_2 y_0^k}{1-y_0^k}\theta(z)+\frac{(\alpha_1-\alpha_2)y_0}{1-y_0^k}\theta(Sz)+\ldots+\frac{(\alpha_1-\alpha_2)y_0^{k-1}}{1-y_0^k}\theta(S^{k-1}z)$$

où l'on a posé

$$\frac{u_0-\alpha_1}{u_0-\alpha_2}=y_0.$$

Supposons θ *incommensurable avec* π. Si R est le rayon de convergence de la série $\theta(z)$, la fonction $F(z)$ admettra le cercle de rayon R comme coupure et la formule fondamentale qui nous avait donné le prolongement de $F(z)$ ne sera valable que si $|z|$ est inférieur à R. Reprenons, en effet, l'expression (4) de $F(z)$ par une intégrale définie qui nous a servi à établir cette formule. Le contour C doit comprendre à son intérieur le point z ainsi que tous les points $S^n z$: or, ceux-ci forment actuellement un ensemble ayant pour points limites tous les points du cercle de centre O passant par le point z. D'autre part, le contour doit laisser à son extérieur tous les points singuliers de $\theta(z)$. La formule ne peut donc s'appliquer qu'aux points z tels que le cercle de centre O passant par un pareil point ne comprenne à son intérieur aucun point a. Comme il y a au moins un point singulier a sur le cercle de rayon R, la formule (3) ne s'appliquera ici qu'à l'intérieur du cercle de convergence de $\theta(z)$. Mais, si a est un point singulier de $\theta(z)$ situé sur ce cercle, les points $\frac{a}{S^n}$ sont situés sur ce cercle et ils forment un ensemble dense partout : comme ce sont des points singuliers de $F(z)$, cette dernière fonction admet le cercle comme coupure, de sorte que le problème du prolongement analytique de $F(z)$ en dehors du cercle ne se pose plus.

On a ainsi un procédé de transformation d'une série de Taylor quelconque en une nouvelle série admettant son cercle de convergence comme coupure. Il suffit en effet de multiplier le terme général $a_n z^n$ de la série primitive par le terme général u_n d'une suite récurrente appartenant à la catégorie que nous venons d'étudier pour que la nouvelle série de Taylor admette son cercle de convergence comme coupure.

5. *Cas particulier où la série* (a) *est elle-même une série à*

coefficients récurrents. — Considérons les deux séries

$$(u) \qquad u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$
$$(v) \qquad v_0 + v_1 z + \ldots + v_n z^n + \ldots$$

dans lesquelles nous supposons

$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad v_{n+1} = \varphi(v_n),$$

f et φ étant deux fonctions holomorphes, la première dans le domaine du point double α, admettant le multiplicateur S, et la deuxième dans le domaine du point double β auquel correspond le multiplicateur S'. Nous supposons

$$|S| < 1, \qquad |S'| < 1.$$

A chacune de ces relations de récurrence correspond une fonction analogue à la fonction $\omega(y)$ définie au nº 2. Soient

$$\omega\,(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n + \ldots,$$
$$\omega_1(y) = \beta + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \ldots + \beta_n y^n + \ldots$$

ces deux fonctions. Les valeurs u_0, v_0 correspondront respectivement aux valeurs y_0, y'_0 données à y dans $\omega(y)$, $\omega_1(y)$.

La série

$$F(z) = u_0 v_0 + u_1 v_1 z + \ldots + u_n v_n z^n + \ldots$$

définira une fonction méromorphe admettant pour pôles les points $\frac{1}{S^p S'^q}$ (*p et q entiers positifs ou nuls*) *ou certains de ces points.*

D'après un résultat rappelé plus haut (nº 2), la somme $\theta(z)$ de la série (v) est en effet :

$$\theta(z) = \frac{\beta}{1-z} + \frac{\beta_1 y'_0}{1-S'z} + \ldots + \frac{\beta_n y'^n_0}{1-S'^n z} + \ldots.$$

La formule (3) donne donc, pour $F(z)$ dans le cas actuel, une série entière en y_0, y'_0 qui s'exprimera ainsi

$$F(z) = \sum_{p,q} \frac{\alpha_p \beta_q y_0^p y'^q_0}{1 - S^p S'^q z} \qquad (p,\ q \text{ entiers} \geqq 0).$$

La proposition est démontrée. Le pôle $S^p S'^q$ disparaît si $\alpha_p \beta_q$ est nul, ce qui n'a lieu que pour des relations de récurrence particulières.

6. *Généralisation.* — On peut maintenant, en partant d'une fonction analytique $\theta(z)$ définie par la série (a) et des deux suites récurrentes (u), (v), former la série

$$a_0 u_0 v_0 + a_1 u_1 v_1 z + \ldots + a_n u_n v_n z^n + \ldots.$$

Cette série aura pour somme la fonction analytique $F(z)$ donnée par la formule

$$F(z) = \sum_{p,q} \alpha_p \beta_q y_0^p y_0'^q \theta(S^p S'^q z)$$

qui généralise la formule (3). La fonction $F(z)$ admet les points singuliers $\frac{a}{S^p S'^q}$, a étant un point singulier quelconque de $\theta(z)$.

En considérant plusieurs suites récurrentes (u), (v), (w), ..., on aurait un résultat analogue qu'il est inutile d'énoncer relativement à la série obtenue en multipliant par $u_n v_n w_n \ldots$ le terme général de la série (a).

7. *Cas d'une relation de récurrence à plusieurs termes.* — Les résultats précédents s'étendent immédiatement au cas d'une relation d'ordre quelconque. Soit par exemple une relation à trois termes

$$u_{n+3} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}).$$

On suppose que f est une fonction holomorphe dans le domaine du point double α de la relation, *que les multiplicateurs* S_1, S_2, S_3 *relatifs à ce point double sont distincts, différents de zéro et de modules inférieurs à* 1. *En outre, nous supposerons qu'aucun des multiplicateurs n'est le produit à exposants entiers positifs ou nuls des autres multiplicateurs* (1).

Ici encore, on peut poser (2)

$$u_n = \omega(S_1^n y_1, S_2^n y_2, S_3^n y_3),$$

(1) Pour la définition des multiplicateurs, *voir* mon Mémoire *Sur les suites récurrentes...*, p. 78.

(2) *Ibid.*, p. 79, 80, 81. La fonction que j'appelle ici ω est celle qui est désignée par λ_{-1} dans ce Mémoire.

ω étant une certaine fonction holomorphe de trois variables et y_1, y_2, y_3 trois fonctions holomorphes de u_0, u_1, u_2.

Soit

$$\omega(y_1, y_2, y_3) = \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} y_1^p y_2^q y_3^r$$

le développement de la fonction ω en série de Taylor. (Le terme indépendant $\alpha_{0,0,0}$ est égal à l'affixe α du point double.) Supposons que la série soit absolument convergente pour les valeurs

$$|y_1| < \rho_1, \qquad |y_2| < \rho_2, \qquad |y_3| < \rho_3.$$

Faisons varier y_1, y_2, y_3 dans le domaine ainsi défini; aux valeurs ainsi choisies pour y_1, y_2, y_3 correspondent pour u_0, u_1, u_2 des valeurs voisines de α.

Ceci posé, on établira, comme au n° 2, la proposition suivante que je me contente d'énoncer.

Soit donnée une fonction analytique $\theta(z)$ *définie par la série de Taylor*

$$\theta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Soit d'autre part $F(z)$ *la fonction analytique* $F(z)$ *définie par la série*

$$F(z) = a_0 u_0 + a_1 u_1 z + \ldots + a_n u_n z^n + \ldots.$$

On aura

$$F(z) = \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} y_1^p y_2^q y_3^r \theta(S_1^p S_2^q S_3^r z) \qquad (p, q, r \text{ entiers positifs ou nuls}).$$

La fonction $F(z)$ *admet ainsi pour points singuliers les points*

$$z = \frac{a}{S_1^p S_2^q S_3^r},$$

où a désigne un point singulier quelconque de $\theta(z)$. *Certains points singuliers disparaissent si les coefficients* $\alpha_{p,q,r}$ *sont nuls, ce qui dépend uniquement de la relation de récurrence envisagée et non pas de la fonction* $\theta(z)$.

La démonstration se fait comme au n° 2 en prenant $F(z)$ sous la forme (4) d'une intégrale définie. Il suffira de se servir ensuite de l'expression par une série de fractions rationnelles de la somme $\varphi(z)$ de la série (u), expression que j'ai établie antérieurement (¹).

8. *Cas d'une relation de récurrence linéaire et homogène.* — Dans ce cas, la fonction $\omega(y_1, y_2, y_3)$ se réduit à un polynome linéaire et homogène en y_1, y_2, y_3 (²).

La fonction $F(z)$ *se réduira donc à la forme suivante :*

$$F(z) = \alpha_1 y_1 \theta(S_1 z) + \alpha_2 y_2 \theta(S_2 z) + \alpha_3 y_3 \theta(S_3 z).$$

On obtient ainsi une généralisation de la proposition connue d'après laquelle la somme d'une série en z dont les coefficients sont liés par une relation de récurrence linéaire et homogène est une fraction rationnelle en z.

Pour traiter un cas particulier, supposons par exemple que la série $\theta(z)$ soit le développement suivant les puissances de z d'une branche de fonction algébrique. La formule précédente rend alors évidente la proposition suivante :

Si la série

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

définit une fonction algébrique, la nouvelle série

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 z + \ldots + a_n u_n z^n + \ldots,$$

dans laquelle $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *sont supposés liés par une relation de récurrence linéaire et homogène à coefficients constants, définit aussi une fonction algébrique.*

(¹) *Loc. cit.*, p. 107-108.

(²) *Loc. cit.*, p. 111-112. Rappelons les résultats suivants : Si la relation de récurrence écrite explicitement est

$$u_{n+3} = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2},$$

les multiplicateurs S_1, S_2, S_3 sont les racines de l'équation

$$S^3 = a + bS + cS^2$$

et la valeur explicite de $\alpha_1 y_1$ est la suivante :

$$\alpha_1 y_1 = \frac{u_0 S_2 S_3 - u_1 (S_2 + S_3) + u_2}{(S_1 - S_2)(S_1 - S_3)}.$$

On a pour $\alpha_2 y_2$ et $\alpha_3 y_3$ des valeurs analogues.