BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JULIA

Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 351-366

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__351_0>

SUR LES LIGNES SINGULIÈRES DE CERTAINES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. G. JULIA.

Depuis Hermite, on sait qu'il existe des fonctions analytiques dont le prolongement est impossible au delà d'une certaine courbe L. Lorsque cette courbe est fermée, la fonction définie au sens de Weierstrass, à l'extérieur ou à l'intérieur de L, présente un espace lacunaire qui est, soit l'intérieur, soit l'extérieur de la courbe L.

M. Picard (*C. R. Acad. Sc.* du 21 mars 1881) et, dans un autre ordre d'idées, M. Goursat (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI et XVII) et Poincaré dans deux Mémoires, insérés l'un aux *Acta Societatis Scientiarium Fennicæ*, t. XIII, l'autre dans l'*American Journal of Mathematics,* ont donné des moyens de former très simplement des fonctions analytiques admettant pour coupures des lignes données arbitrairement dans des conditions déjà très générales.

Plus tard, dans un Mémoire paru au Tome XLII des *Mathematische Annalen*, M. Pringsheim est revenu sur cette question, mais en l'envisageant d'un point de vue différent. Son but était de former des fonctions analytiques admettant certaines lignes données pour coupures, tout en restant finies, continues ainsi que leurs dérivées, sur ces coupures.

Voici, en résumé, la méthode de M. Pringsheim :

Soit L la ligne donnée, considérons d'un côté de cette ligne un ensemble dénombrable E de points dont les affixes seront représentés par a_n. Cet ensemble admet L pour ensemble dérivé, sans cependant qu'il y ait des points a_n sur L [1].

---

[1] M. Pringsheim envisage en Note le cas où les a_n seraient denses dans une portion du plan, mais il suppose alors que cette aire est bordée par une courbe sur laquelle les a_n sont denses (tout comme dans les exemples fournis par Poincaré et M. Goursat).

Prenons une série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

et formons la série

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}.$$

Elle converge en tout point z qui n'appartient ni à E, ni à son dérivé L et dans toute région qui ne contient pas de points a_n elle définit une fonction analytique. En particulier du côté de L où ne sont pas les a_n, la série définit une fonction qui, d'après M. Pringsheim, n'est pas prolongeable analytiquement au delà de L. Moyennant des restrictions tout intuitives sur la grandeur des A_n, M. Pringsheim démontre que la fonction dont il s'agit reste finie, continue, ainsi que ses dérivées sur L.

Je ne reviendrai pas sur les objections qu'a faites M. Borel dans sa Thèse, à la démonstration de M. Pringsheim; cette démonstration suppose, en effet, qu'il y a identité entre les fonctions que définit la série de part et d'autre de L; cette supposition est toute gratuite, comme l'a montré M. Borel, par des exemples simples. Ultérieurement, dans le Tome XLIV des *Mathematische Annalen*, M. Pringsheim a justifié ses conclusions pour un cas très particulier de distribution de pôles a_n, présentant une symétrie parfaite autour du centre d'un cercle qui joue le rôle de la ligne L.

Les cas où les a_n sont denses partout d'un côté de la ligne L, n'a été examiné jusqu'ici qu'en supposant ces a_n denses aussi *sur* L. Si l'on écarte cette dernière supposition, peut-on affirmer que L est une coupure pour la fonction que définit la série

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z},$$

du côté de L où ne sont pas les a_n.

Chaque terme de la série $f(z)$ admet un pôle; mais ces pôles, partout denses, ne se compensent-ils pas? Dans les lignes qui suivent, nous allons reconnaître comment pourrait se faire cette compensation. Nous verrons qu'en général elle ne se produit pas, donc L est une coupure; enfin nous formerons un exemple simple, où nous démontrerons rigoureusement que L est bien une coupure, et, avec cet exemple, en appliquant les considérations qu'emploie M. Pringsheim dans le Tome XLII des *Mathematische Annalen*, on obtiendra une fonction qui admet L pour ligne singulière essentielle, tout en jouissant sur L des propriétés de continuité indiquées.

I.

Dans ce qui suit nous faisons un constant usage de la proposition suivante démontrée par M. Goursat :

Si les points a_n sont distribués sur une série de lignes A (la distribution étant dense sur ces lignes), telles que par chaque point a_n de ces lignes, on puisse faire passer un cercle laissant toutes les lignes A à son extérieur, la fonction analytique définie par la série

$$(1) \qquad f(z) = \sum \frac{A_n}{a_n - z}$$

admet les lignes A pour coupure.

La démonstration s'appuie principalement sur le fait suivant :

Si l'un des pôles a_i est sur la circonférence d'un cercle c, les autres pôles étant quelconques *à l'extérieur* de c et si l'on forme la série de Taylor procédant suivant les puissances de $z - \alpha$ (α affixe du centre C), relative à la série (1), cette série admet C pour cercle de convergence.

Ceci étant posé, envisageons les pôles a_n situés d'un côté de L et formant un ensemble dense, et formons la série

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}$$

dans les conditions indiquées où $\sum |A_n|$ converge. Elle converge uniformément dans tout aire A ne contenant aucun a_n. Dans cette aire A, on peut donc la définir par une série de Taylor et ses prolongements. Il est facile de former la série de puissances relative à (1) et à un point α pris dans A. Nous pouvons toujours supposer par un déplacement des axes Ox, Oy que α est l'origine ($\alpha = 0$), la série de Taylor relative à (1) est alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \tag{2}$$

avec

$$v_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n^{k+1}}.$$

Nous sommes sûrs que le cercle de convergence de (2) est au moins le plus grand cercle C de centre α qui ne coupe pas L. Ce cercle C a au moins un point commun avec L, et si l'on suppose que α est assez voisin de L (ce qu'on peut toujours supposer quand on examine si une fonction est prolongeable au delà de L). C pourra être supposé n'avoir qu'un point commun β avec L. Notre problème est de chercher si β est effectivement un point singulier de la série (2).

Dans l'ensemble des pôles a_n, choisissons une suite infinie de points, admettant β pour point limite, par le procédé suivant. Prenons un pôle au hasard, parmi les a_n, appelons-le a_{11}. Joignons-le à β. Choisissons[1] un deuxième pôle $a_{12}(\overline{a_{12}\beta} < \overline{a_{11}\beta})$. Joignons $a_{12}\beta$ et, dans l'angle de $\overline{a_{12}\beta}$ avec la droite $\overline{a_{11}a_{12}}$ prolongée, choisissons $a_{13}(\overline{a_{13}\beta} < \overline{a_{12}\beta})$, continuons ce processus indéfiniment ($a_{1,i+1}$ sera pris dans l'angle que fait $\overline{a_{1i}\beta}$ avec $\overline{a_{1,i-1}a_{1i}}$ prolongée, et $\overline{a_{1,i+1}\beta} < \overline{a_{1i}\beta}$) en astreignant toutefois la distance $a_{1i}\beta$ à tendre vers zéro quand i croît indéfiniment, et tous les $a_{1i}\beta$ à être situés d'un même côté d'une certaine droite βt que l'on choisira comme on voudra dirigée du côté des a_n (βt pourra être par exemple la tangente à C) (*fig.* 1). Notre suite sera formée des pôles $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1i}, \ldots$.

Dans la série (1) qui est absolument et conformément convergente dans A, j'isole les termes dont les pôles sont a_{11}, a_{12}, ..., a_{1i}, ...; j'obtiens la série

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{1i}}{a_{1i} - z}$$

---

(1) Toutes ces constructions sont possibles, car les a_n forment un ensemble dont tous les points de L sont des points limites.

dont la série de Taylor relative à α est

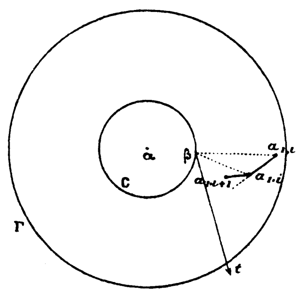
$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$$

avec

$$u_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{1i}}{a_{1i}^{k+1}}.$$

Il est facile de voir que le cercle de convergence Γ de la série (3) est précisément le cercle C. Si en effet, il était plus grand que C, il comprendrait β à son intérieur. Donc à partir d'une valeur de i assez grande, tous les a_{1i} seraient intérieurs à ce cercle Γ (*fig.* 1).

Fig. 1.



Mais d'après le choix des a_{1i} on peut tracer un cercle γ qui passe par a_{1i}, qui soit tout entier intérieur à Γ et qui laisse tous les a_{1j} à son extérieur, sauf a_{1i}. On pourra par exemple prendre un cercle tangent en a_{1i} à $\overline{a_{1i}a_{1,i-1}}$ du côté opposé à β par rapport à $\overline{a_{1i}a_{1,i-1}}$.

Ce cercle γ serait le cercle de convergence du développement de $\varphi(z)$ suivant les puissances de $z - \alpha'$ (α' affixe du centre de γ) et ceci est absurde puisque γ devrait être au moins tangent intérieurement à Γ.

Donc C est bien le cercle de convergence de la série (3)

Pour trouver le cercle de convergence de la série (2) relative à

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z},$$

il paraît naturel de comparer les séries (2) et (3).

On voit que

$$v_k = u_k + w_k.$$

Qu'est-ce que w_k? Si après avoir fait dans les a_n le choix des a_{1i} nous appelons a'_n les a_n qui restent et A'_k les numérateurs correspondants,
on a

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{1i}}{a_{1i} - z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_1}{a'_n - z},$$

donc

$$w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{a'^{k+1}_n}.$$

Le rayon de convergence de la série (2) est, comme on sait, égal à $\frac{1}{\rho}$, ρ étant la plus grande des limites de

$$|v_k|^{\frac{1}{k}};$$

or

$$v_k = u_k\left(1 + \frac{w_k}{u_k}\right).$$

Donc

$$|v_k|^{\frac{1}{k}} = |u_k|^{\frac{1}{k}} e^{\frac{1}{k}\log\left|1 + \frac{w_k}{u_k}\right|}.$$

Soit ρ_1 la plus grande limite de $|u_k|^{\frac{1}{k}}$; le cercle C, cercle de convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k,$$

a pour rayon $\frac{1}{\rho_1}$.

On peut donc trouver (d'une infinité de façons) une suite d'entiers $k_1, k_2, \ldots, k_p, \ldots$, telle que $|u_{k_p}|^{\frac{1}{k_p}}$ tende vers ρ_1. Considérons les valeurs correspondantes de $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$; si l'ensemble des points qui, dans un plan, ont pour affixes ces nombres $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$, a un point limite distinct du point (-1), on pourra trouver, dans la suite $k_1, \ldots, k_p, \ldots$, une suite $K_1, K_2, \ldots, K_p, \ldots$ telle que $\log\left|1 + \frac{w_{K_p}}{u_{K_p}}\right|$

tende vers une limite *finie* $\left[\text{ou égale à } +\infty \text{ si le point à l'infini est un point limite de la suite des points } \frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}\right]$. Dans ce cas, la plus grande limite de $|v_k|^{\frac{1}{k}}$ sera au moins égale à celle de $|u_k|^{\frac{1}{k}}$ puisque $e^{\frac{1}{k}\log\left|1+\frac{w_k}{u_k}\right|}$, pour les valeurs de K égales à $K_1, \ldots, K_p, \ldots$, tendra vers l'unité (ou sera à partir d'une certaine valeur de p supérieur à un).

On en conclut que

$$\rho \geqq \rho_1.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho} \leqq \frac{1}{\rho_1}.$$

Le cercle de convergence de la série (2) est donc intérieur à C ou coïncide avec C. Comme on sait qu'il est au moins égal à C, on conclut que C est bien le cercle de convergence de la série (2), dont β est un point singulier. Si ceci a lieu pour tout point β de la ligne L, on est sûr que L est une coupure pour la fonction analytique que définit la série (2) dans A.

Dans le cas où pour toute suite $k_1, k_2, \ldots, k_p, \ldots$, telle que $|u_{k_p}|^{\frac{1}{k_p}}$ tende vers ρ_1 les points $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$ admettraient pour *seul* point limite le point (-1), nous ne pouvons rien affirmer, car $\log\left|1+\frac{w_k}{u_k}\right|$ tend alors vers $-\infty$, et nous ne savons pas si le facteur exponentiel dans $|v_k|^{\frac{1}{k}}$ tend vers l'unité.

Nous sommes ici dans le cas où la compensation signalée au début pourrait se produire, mais nous ne pouvons décider si elle se produit effectivement. (Si la circonstance précédente ne se rencontrait qu'en des points isolés de la ligne L ou même en des points formant un ensemble n'ayant qu'un nombre fini de points limites, on pourrait encore affirmer que L est une coupure.)

Cependant nous pouvons concevoir que ce cas de compensation serait très particulier. Car, si l'on admet un instant qu'il se produise, il suffira de multiplier tous les A_{1i} par un même nombre arbitraire [1] (ce qui n'altère pas la convergence absolue de la série des A_n), pour multiplier u_k par ce nombre. Les w_k n'étant

[1] Ce nombre pourrait être de la forme $e^{i\lambda}$, en sorte que les modules des A_{1i} ne seraient pas altérés.

pas changés, l'ensemble des $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$ avait un point limite distinct de (-1) et, par suite, la compensation ne se produirait plus.

Ce simple fait montre que l'ensemble de points $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$ n'aura pas en général le seul point -1 pour point limite; dans w_{k_p} ne figurent en effet que les pôles a'_n et les numérateurs correspondants A'_n, dans u_{k_p} ne figurent que les a_{1i} et les numérateurs correspondants A_{1i}, et l'on ne suppose aucune relation particulière entre ces diverses quantités, quand on dit qu'on envisage le cas général.

En définitive, si l'on se place dans le cas où il n'y a aucune relation particulière entre les pôles et les numérateurs des fractions correspondantes qui servent à former la fonction $f(z)$, la ligne L est bien une coupure pour la fonction que définit la série de Taylor (2) dans l'aire A.

Les considérations précédentes sont nécessairement un peu vagues; mais un cas particulier étant donné, la méthode précédente nous fournit un moyen, tout au moins théorique, pour étudier si la ligne L est dans ce cas une ligne singulière. Le principe de la méthode, qui est de comparer la série (2) à une série (3) dont on est sûr qu'elle admet le point β pour point singulier, pourra s'adapter à des circonstances variées, puisque le choix des a_{1i} qui servent à former (3) comporte un degré notable d'arbitraire. Dans certains cas, le choix des a_{1i} sera particulièrement simple : c'est par exemple celui où les pôles a_n seraient les sommets d'un réseau de courbes analogues aux mailles d'un filet carré, l'une des deux familles de courbes coupant la ligne L en une infinité dénombrable de points partout denses sur L (on prendrait pour a_{1i} les pôles situés sur une des courbes de la famille coupant L).

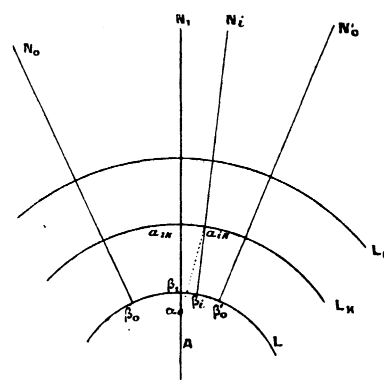
Notons en passant que la méthode s'applique aussi bien à un ensemble non dense de points a_n admettant pour dérivé la seule ligne L. Cette méthode a cependant le même inconvénient que les critères de convergence ordinaires des séries. Elle nous permet d'affirmer dans certains cas que L est une coupure, mais elle ne nous donne pas toujours une réponse précise.

II.

Laissons de côté ces généralités et montrons comment on peut appliquer la méthode exposée plus haut à un exemple simple.

Prenons une courbe fermée L ayant en chaque point un rayon de courbure déterminé (sauf peut-être en un nombre fini de points). Sur cette courbe, choisissons arbitrairement un ensemble dénombrable de points partout dense que nous dénommerons $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots$. Par chacun de ces points, élevons une normale à L vers l'extérieur. Sur l'une de ces normales $\beta_i N_i$, choisissons arbitrairement un ensemble dénombrable de points ayant β_i pour point limite. Cet ensemble pourra être dense sur $\beta_i N_i$ ou non, je suppose seulement que β_i soit un point limite de l'ensemble. Dénommons ces points $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}, \ldots$. Pour chacun des a_{ik} envisageons la courbe L_k parallèle à L. Cette courbe L_k rencontre chaque normale $\beta_j N_j$ en un point correspondant à a_{ik} que nous appellerons a_{jk} (*fig.* 2). Nous avons ainsi formé un ensemble de

Fig. 2.



points $a_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots)$ qui admet tous les points de la ligne L pour points limites (nous supposons, bien entendu, que $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ sont choisis tels qu'aucun des pôles ne tombe dans A, ce qui pourrait arriver avec une courbe L non partout convexe). Affectons chaque a_{ik} d'un coefficient A_{ik} tel que la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik}$$

soit *absolument* convergente.

Formons la série

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z}; \tag{1}$$

dans l'aire A limitée par L cette série définit une fonction holomorphe; à quelles conditions sera-t-il certain que L est une coupure pour cette fonction ?

Nous savons que si tous les β_i sont des points singuliers de cette fonction, L est bien une coupure.

Il suffit donc de voir dans quelles conditions β_1 par exemple est sûrement un point singulier. Prenons dans A sur la normale $\beta_1 N_1$, un point α que nous pouvons supposer assez voisin de β_1 pour que les conditions suivantes soient vérifiées :

Pour tous les pôles a_{ik} compris : 1° entre deux des normales $\beta_0 N_0$, $\beta'_0 N'_0$ suffisamment voisines de $\beta_1 N_1$ et de part et d'autre de $\beta_1 N_1$; 2° entre L et l'une L_0 des lignes L_k suffisamment voisine de L, on a

$$|a_{ik}-\alpha| > |a_{1k}-\alpha|.$$

Comme nous avons supposé qu'en chaque point de L il y avait un rayon de courbure fini, ceci est toujours possible.

Nous pouvons écrire

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

$\varphi(z)$ étant la partie de $f(z)$ relative aux pôles a_{ik} compris dans les limites indiquées plus haut.

La fonction $\psi(z)$ est holomorphe dans l'aire A, plus l'aire qu'occupent les pôles a_{ik} entrant dans $\varphi(z)$.

Formons la série de Taylor procédant suivant les puissances de $z = \alpha$, qui correspond à $f(z)$: c'est la somme des séries correspondant à φ et ψ. Si dans certaines conditions nous montrons que β_1 est point singulier pour la série de Taylor de φ, ce sera un point singulier pour la série de Taylor de f. Nous nous bornons donc à $\varphi(z)$, ce qui revient à dire que nous supposons, quels que soient ik,

$$|a_{ik}-\alpha| > |a_{1k}-\alpha|.$$

Prenons

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{ik}}{a_{ik}-z}.$$

Posant

$$f_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{ik}}{a_{ik}-z},$$

on a

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) = f_1(z) + \sum_{i=2}^{\infty} f_i(z),$$

Nous pouvons supposer que α est l'origine, puisque ce sont seulement les quantités $a_{ik} - z$ qui interviennent.

Le cercle de convergence de chaque série $f_i(z)$ passe par le point β_i, ainsi qu'il résulte du théorème démontré par M. Goursat. Nous pouvons donc sans inconvénient supprimer dans $\varphi(z)$ un nombre fini d'indices i à partir du deuxième jusqu'à l'indice I; si la série $\pi(z)$ restante possède β_1 pour point singulier, la série totale $f(z)$ le possédera aussi.

Considérons la série

$$\pi(z) = f_1(z) + \sum_{\mathrm{I}}^{\infty} f_i(z).$$

Sa série de Taylor est

$$\pi(z) = \Sigma\, u_n z^n,$$

où

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} + \sum_{\mathrm{I}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}}.$$

Posons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{ik}^{n+1}} = v_n, \qquad f_1(z) = \sum v_n z^n.$$

D'après nos hypothèses, toutes les séries simples ou doubles qui figurent ici sont absolument convergentes. Donc, on peut écrire

$$u_n = v_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathrm{I}}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}}.$$

Or

$$|a_{ik}| > |a_{1k}|$$

(car α est supposé être l'origine). Donc

$$\frac{|A_{ik}|}{|a_{ik}|^{n+1}} < \frac{|A_{ik}|}{|a_{1n}|^{n+1}}$$

quels que soient i et k :

$$\left| \sum_{\mathrm{I}}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} \right| < \sum_{\mathrm{I}}^{\infty} \left| \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} \right| < \sum_{\mathrm{I}}^{\infty} \frac{|A_{ik}|}{|a_{1k}|^{n+1}}.$$

Supposons alors que, ε étant un nombre positif donné arbitrairement, l'on puisse déterminer un nombre I assez grand pour que l'on ait, *quel que soit k*,

$$\sum_{1}^{\bullet} | A_{ik} | < \varepsilon | A_{1k} |$$

[c'est ce nombre I que nous choisissons pour figurer dans $\pi(z)$].

Nous reviendrons plus loin sur cette restriction imposée aux A_{ik}.

On a dans ces conditions

$$\left| \sum_{1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} \right| < \varepsilon \frac{| A_{1k} |}{| a_{1k}^{n+1} |},$$

ce que nous pouvons écrire

$$\sum_{1} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} = \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} \varepsilon_{kn},$$

ε_{kn} étant un nombre complexe dépendant de k et de n, tel en outre que

$$| \varepsilon_{kn} | < \varepsilon,$$

quels que soient k et n.

Ceci étant, on a

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} \varepsilon_{kn}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}}}.$$

Dans tout ceci, nous suivons pas à pas la méthode générale. Ici nous comparons la série initiale à la série

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} v_n z^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k} - z}.$$

Étudions la quantité

$$\xi_n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{1n}^{n+1}} \varepsilon_{kn}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{1k}^{n+1}}}.$$

Dans ce rapport, l'argument de la droite $\beta_1 N_1$ n'intervient pas, car tous les a_{1k} ont le même argument. Nous pouvons donc supposer tous les a_{1k} réels et positifs.

Si l'on pose alors

$$\frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} = p_{kn} + iq_{kn},$$

p_{kn} et q_{kn} sont réels et de même signe que les parties réelles et imaginaires de A_{1k}.

ξ_n s'écrit

$$\xi_n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{kn}\varepsilon_{kn} + i\sum_{k=1}^{\infty} q_{kn}\varepsilon_{kn}}{\sum_{k=1}^{\infty} p_{kn} + i\sum_{k=1}^{\infty} q_{kn}}.$$

Supposons que tous les A_{1k} aient leurs parties réelles de même signe, ainsi que leurs parties imaginaires (ce signe n'étant pas nécessairement le même pour les deux); tous les p_{kn} seront alors de même signe, ainsi que tous les q_{kn}, et ceci quel que soit n.

On a alors

$$\xi_n = \frac{\varepsilon_n \Sigma p_{kn} + i\,\varepsilon'_n \Sigma q_{kn}}{\Sigma p_{kn} + i\,\Sigma q_{kn}} \qquad |\varepsilon_n| < \varepsilon;\ |\varepsilon'_n| < \varepsilon,$$

puisque, tous les ε_{kn} étant en module $< \varepsilon$, le rapport $\frac{\Sigma p_{kn}\varepsilon_{kn}}{\Sigma p_{kn}}$, d'après un théorème connu, a lui-même un module $< \varepsilon$. L'égalité précédente a lieu quel que soit n.

On en tire

$$|\xi_n| \leqq \frac{|\varepsilon_n|\,|\Sigma p_{kn}| + |\varepsilon'_n|\,|\Sigma q_{kn}|}{\sqrt{(\Sigma p_{kn})^2 + (\Sigma q_{kn})^2}} < \varepsilon \frac{|\Sigma p_{kn}| + |\Sigma q_{kn}|}{\sqrt{(\Sigma p_{kn})^2 + (\Sigma q_{kn})^2}}.$$

Or si r et s sont deux nombres positifs quelconques, on a

$$\frac{r+s}{\sqrt{r^2+s^2}} \leqq \sqrt{2}.$$

Donc, quel que soit n,

$$|\xi_n| < \varepsilon\sqrt{2},$$

à condition de choisir I suffisamment grand, ε sera aussi petit qu'on voudra.

On peut en particulier prendre $\varepsilon\sqrt{2} < 1$, et puisque

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \xi_n,$$

il vient

$$0 < 1 - \varepsilon\sqrt{2} < \left|\frac{u_n}{v_n}\right| < 1 + 2\sqrt{2},$$

ce qui suffit à prouver que la série $\Sigma u_n z^n$ a même cercle de convergence que la série $\Sigma v_n z^n$, c'est-à-dire que β_1 est bien un point singulier de $\Sigma u_n z^n$.

Résumons les conclusions précédentes :

Supposons que dans l'ensemble des $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots$, qui est partout dense sur L, on puisse choisir un ensemble $\beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_2}, \ldots, \beta_{\lambda i}, \ldots$, partout dense sur L jouissant des propriétés suivantes :

1° Sur toute normale $\beta_{\lambda_i} N_{\lambda_i}$, tous les $A_{\lambda_i, k}$ ont leurs parties réelles de même signe, ainsi que leurs parties imaginaires (ce signe pouvant varier arbitrairement avec l'indice λ_i) ;

2° A tout nombre positif ε donné arbitrairement et à toute normale $\beta_{\lambda i} N_i$, on peut faire correspondre un nombre I tel que, quel que soit l'indice k correspondant à une ligne L_k comprise dans une certaine bande d'épaisseur finie bordée par L, on ait

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \varepsilon |A_{\lambda_i, k}|.$$

Dans ces conditions on peut affirmer que la série

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z}$$

définit à l'intérieur de L une fonction analytique pour laquelle L est une ligne singulière essentielle.

Remarques. — I. La condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \varepsilon |A_{\lambda_i, k}|$$

sera sûrement vérifiée dans le cas où l'on aura par exemple

$$\rho'_k < \left|\frac{A_{ik}}{A_{i1}}\right| < \rho_k,$$

quel que soit l'indice i, les nombres ρ_k et ρ'_k dépendant seulement de k, et le quotient $\frac{\rho_k}{\rho'_k}$ qui est > 1 restant toujours inférieur à un nombre fixe P.

En effet, on aura

$$\sum_{i=I}^{\infty} |A_{ik}| < \rho_k \sum_{i=I}^{\infty} |A_{i1}|.$$

Si, pour $k = 1$, on choisit I tel que

$$\sum_{i=I}^{\infty} |A_{i1}| < \varepsilon |A_{\lambda_i,1}|,$$

on aura pour un indice k quelconque

$$\sum_{i=I}^{\infty} |A_{ik}| < \rho_k \varepsilon |A_{\lambda_i,1}|.$$

Or

$$\left|\frac{A_{\lambda_i,k}}{A_{\lambda_i,1}}\right| > \rho'_k.$$

Donc

$$\sum_{I}^{\infty} |A_{ik}| < \frac{\rho_k}{\rho'_k} \varepsilon |A_{\lambda_i,k}| < P\varepsilon |A_{\lambda_i,k}|.$$

$P\varepsilon$ sera aussi petit qu'on veut avec ε et la condition cherchée est bien vérifiée.

Un cas particulier de l'hypothèse sur les A_{ik} serait celui où l'on aurait, quel que soit i,

$$\frac{A_{ik}}{A_{i1}} = \Upsilon_k,$$

la série $|\Upsilon_k|$ étant naturellement supposée convergente.

II. Il est facile d'assigner aux $|A_{ik}|$ des limites supérieures telles que la fonction

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z},$$

qui converge dans L ainsi que toutes ses dérivées, converge aussi sur L ainsi que toutes ses dérivées. Si en effet δ_{ik} désigne la plus courte distance de a_{ik} au contour L et si u_{ik} représente le terme général d'une série convergente à termes tous positifs, telle que $u_{ik} < \delta_{ik}$, en prenant $|A_{ik}| < e^{-\frac{1}{u_{ik}}}$, on verra bien facilement que la série

$$f^{(p+1)}(z) = (p+1)!\sum\sum \frac{A_{ik}}{(a_{ik}-z)^{p+2}}$$

converge absolument et uniformément dans A et sur L. Donc la fonction $f(z)$ et ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque qui sont holomophes dans A restent finies et continues sur L.

III. Dans le cas où les A_n décroissent très vite $\left(|A_n| < e^{-e^{n^{2+\varepsilon}}}\right)$ de telle façon que l'on puisse former pour

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}$$

une série de polynomes (M) qui converge sur une infinité dénombrable de droites traversant l'espace où les a_n sont denses (sans toutefois passer par aucun point a_n), M. Borel a démontré que L est toujours une coupure pour $f(z)$. Nous avons essayé, dans les lignes qui précèdent, d'étudier des cas où l'on a le même résultat sans imposer aux A_n une décroissance aussi rapide, et nous y sommes parvenus dans l'exemple que nous avons développé en second lieu.