BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Équations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 194-206
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__194_1>

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES DÉPOURVUES DE RACINES RÉELLES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

I. — ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A TOUTES LES RACINES IMAGINAIRES.

1. Laguerre s'est à plusieurs reprises ([1]) occupé du problème : déterminer une suite de quantités

$$(1) \qquad \omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots,$$

([1]) *Sur la théorie des équations numériques* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 3e série, t. IX, 1883; *Œuvres*, p. 4-47).
Sur quelques points de la théorie des équations numériques (*Acta mathematica*, t. IV, 1884; *Œuvres*, p. 185-206).

telles que

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{2}$$

étant une équation algébrique *quelconque* à toutes les racines *réelles*, l'équation

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 z + \ldots + \omega_n a_n z^n = 0 \tag{3}$$

ait également toutes ses racines *réelles*. Il a donné plusieurs solutions particulières du problème, comme le sont, par exemple, les nombres ω_n fonction suivantes de n :

1° Polynomes en n n'ayant que des zéros réels négatifs;

2° Fonctions entières de n du genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels négatifs;

3° Fonctions $e^{-\alpha n^2}$, α étant un nombre réel négatif;

4° Produits d'un nombre arbitraire de fonctions 1°, 2°, 3°.

On peut se proposer le problème réciproque : *déterminer des suites* (1) *telles que* (2) *étant une équation algébrique* quelconque, *à toutes les racines* IMAGINAIRES, *l'équation* (3) *ait également toutes ses racines* IMAGINAIRES.

J'en trouve la solution simple et assez générale suivante :

Désignons par λ_{kn} l'intégrale définie

$$\lambda_{kn} = \int_{a_k}^{b_k} u_k r_k^n \, dt, \tag{4}$$

où les limites a_k et b_k sont arbitraires, mais réelles et indépendantes de n; u_k et r_k sont deux fonctions arbitraires de la variable t, indépendantes de n, réelles dans l'intervalle (a_k, b_k) et u_k gardant un signe invariable dans cet intervalle.

Le produit

$$\omega_n = \lambda_{1n} \lambda_{2n} \ldots \lambda_{pn}, \tag{5}$$

d'un nombre arbitraire des intégrales λ_{kn} *fournit une solution du problème.*

Il suffit manifestement de faire voir que

$$\omega_n = \lambda_{kn} \tag{6}$$

en est une solution. Or, dans ce cas, le premier membre de (3) se laisse mettre sous la forme

$$(7) \qquad \int_{a_k}^{b_k} u_k \mathrm{P}(r_k x)\, dt,$$

$\mathrm{P}(x)$ étant le premier membre de (2), ce qui démontre d'un coup la proposition, les fonctions u_k et $\mathrm{P}(r_k x)$ ne changeant de signe pour aucune valeur réelle de t, comprise entre les limites d'intégration, ni aucune valeur réelle de x.

Dans l'expression de λ_{kn} on dispose des élements u_k, r_k, a_k, b_k. En les faisant varier, ainsi que les paramètres qui peuvent y figurer, on aura un nombre illimité de suites λ_{kn}, lesquelles, ainsi que leurs produits en nombre quelconque, jouissent de la propriété énoncée et fournissent des suites (1) cherchées.

Voici quelques expressions pouvant jouer le rôle de λ_{kn} :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a+n} &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-nt}\, dt, \\ \frac{\Gamma(a)}{(n+1)^{a+1}} &= \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^a t^n\, dt, \\ \frac{b-a}{(a+n)(b+n)} &= \int_0^\infty (e^{-bt} - e^{-at}) e^{-nt}\, dt, \\ 1.2.3\ldots n &= \int_0^\infty e^{-t} t^n\, dt, \\ \frac{\pi}{2} \, \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+4)} &= \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n dt, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, \frac{1}{\sqrt{a+bn}} &= \int_0^\infty e^{-at^2} e^{-bnt^2}\, dt, \end{aligned} \right.$$

où a et b sont des constantes réelles positives.

2. Dans un travail antérieur ([1]) j'ai donné les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_i d'une équation algébrique

$$(9) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

([1]) *Une classe remarquable de séries entières* (*Atti del* IV *Congresso internationale dei matematici*, Roma, 1908, p. 36-43).

d'un degré *arbitraire* pour jouir des propriétés suivantes :

1° Que toutes ses racines soient *réelles;*

2° Que si l'on néglige un nombre *arbitraire* de derniers termes dans son premier membre, l'équation restante ait encore toutes ses racines *réelles.*

Ce qui précède fournit la possibilité de former des classes générales d'équations algébriques d'un ordre pair *arbitraire* jouissant des propriétés suivantes, réciproques aux précédentes :

1° Que l'équation ait toutes ses racines *imaginaires;*

2° Que si l'on néglige dans son premier membre un nombre pair *arbitraire* de derniers termes, l'équation restante ait encore toutes ses racines *imaginaires.*

Telles sont, par exemple, les équations

$$(9') \qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n} = 0,$$

$$(10) \qquad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} = 0.$$

Et d'une manière générale, en appelant *équations* E_{2n} toute équation algébrique jouissant des propriétés 1° et 2°, *toute équation*

$$(11) \qquad \omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{2n} x^{2n} = 0,$$

où ω_n *est une expression* (5), *est une équation* E_{2n}.

On le voit en prenant pour

$$(12) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

l'équation (9). Telles seraient, par exemple, les équations

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a+1} + \ldots + \frac{x^{2n}}{a+2n} = 0,$$

$$1 + \frac{x}{2^{a+1}} + \frac{x^2}{3^{a+1}} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)^{a+1}} = 0,$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{x}{(a+1)(b+1)} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(a+2n)(b+2n)} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{x}{\sqrt{a+b}} + \ldots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{a+2nb}} = 0,$$

où a et b sont des constantes réelles positives.

De même : *toute équation*

(13) $$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{\omega_{2n}}{1.2\ldots 2n} x^{2n} = 0$$

est une équation E_{2n}. On le voit en prenant pour (12) l'équation (10).

Et d'une manière générale : *l'équation*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^{2n} = 0,$$

étant une équation E_{2n}, *l'équation*

(14) $$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \ldots + \omega_{2n} a_{2n} x^{2n} = 0$$

en est aussi une.

3. Dans le cas où r_k garde un signe invariable pour t variant de a_k à b_k, les équations E_{2n} de la forme

(15) $$\lambda_{k0} + \lambda_{k1} x + \ldots + \lambda_{k,2n} x^{2n} = 0,$$

ont une distribution particulière de leurs racines dans le plan de la variable x.

Supposons, pour fixer les idées, que r_k soit positif et désignons par δ_1, δ_2, δ_3, ... les intervalles numériques, indépendants des coefficients de l'équation, tous contenus dans l'intervalle de 0 à 2π et tels que pour toute valeur θ contenue dans δ_k le produit

(16) $$\sin\theta \sin 2n\theta$$

soit *positif* et le produit

(17) $$\sin\theta \sin(2n+1)\theta$$

négatif. Alors :

Les arguments des racines de (15) *se trouvent toujours en dehors des intervalles* δ_1, δ_2, δ_3, ...

En effet, le premier membre de l'équation (15) se laisse mettre sous la forme

(18) $$\int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1-(r_k x)^{2n+1}}{1-r_k x} dt,$$

et sa partie imaginaire pour $x = \rho e^{\theta i}$ sera

$$(19) \qquad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{\Phi\, dt}{P^2 + Q^2},$$

où

$$(20) \qquad \begin{cases} P = 1 - r_k \rho \cos\theta, \\ Q = r_k \rho \sin\theta. \end{cases}$$

$$\Phi = r_k \rho \sin\theta - (r_k \rho)^{2n+1} \sin(2n+1)\theta + (r_k \rho)^{2n+2} \sin 2n\theta.$$

Cette partie imaginaire ne saurait s'annuler pour aucune valeur positive de ρ lorsque θ est compris dans un des intervalles δ_k, ce qui démontre la proposition.

Dans le cas où r_k est négatif, les intervalles δ_k doivent être remplacés par ceux dans lesquels le produit (16) est *négatif* et le produit (17) *positif*.

II. — Équations transcendantes sans racines réelles.

4. Il existe des séries de puissances

$$(21) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

jouissant de cette propriété remarquable d'avoir tous leurs zéros *réels* et que, de plus, le polynome formé d'un nombre arbitraire de leurs premiers termes ait également tous ses zéros *réels*.

J'ai donné dans le travail cité les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_i d'une série (21) pour qu'elle jouisse de pareilles propriétés.

Il existe, de même, des séries (21) jouissant de la propriété réciproque à la précédente : *de n'avoir, ni elle-même ni le polynome formé d'un nombre impair arbitraire de ses premiers termes, aucun zéro réel*, la série dans son cercle de convergence, le polynome dans tout le plan de la variable x.

L'exemple le plus simple est fourni par les séries élémentaires

$$(22) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

$$(23) \qquad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

En appelant *séries* S les séries pareilles, les suites précédentes

$$(24) \qquad \omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots$$

fournissent la possibilité d'en former un nombre illimité.

Si

(25) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

est une série S, *la série*

(26) $$a_0 \omega_0 + a_1 \omega_1 x + a_2 \omega_2 x^2 + \dots,$$

dans le cas où elle converge dans une certaine circonférence, en est aussi une.

Car, en partant d'une série S déterminée, par exemple de (22) ou (23), ou, d'une manière générale, de (25), la série

(27) $$\lambda_{k0} - \lambda_{k1} x + \lambda_{k2} x^2 + \dots,$$

où λ_{ku} est une expression (4), se laisse exprimer par l'intégrale définie

(28) $$\int_{a_k}^{b_k} u_k f(r_k x)\, dt.$$

Comme u_k et $f(r_k x)$ ne s'annulent pour aucune valeur de t comprise entre les limites d'intégration et aucune valeur de x pour laquelle la série $f(r_k x)$ converge et l'intégrale (28) ait un sens, la série (27), et par suite aussi la série (26), sont des séries S.

En désignant par M_k la plus grande valeur absolue que prend la fonction r_k pendant que t varie de a_k à b_k, on a

(29) $$\lambda_{kn} < \lambda_{k0} M_k^n,$$

et par suite la série (27) aura son rayon de convergence au moins égal à

(30) $$\frac{R}{M_k},$$

R désignant le rayon de convergence de (25). Il s'ensuit que *le rayon de convergence de la série* (26) *est au moins égal à*

(31) $$\frac{R}{M},$$

où M *désigne le produit* $M_1 M_2 \dots M_p$ et que son coefficient de x^n est plus petit en valeur absolue que

(32) $$\mu \alpha_n M^n,$$

où α_u désigne la valeur absolue du coefficient a_n, et μ est la constante égale à la valeur absolue de ω_0. Le module de la série (26), pour toute valeur de x de module ρ plus petit que (31), est inférieur à

$$\mu F(M\rho), \tag{33}$$

où

$$F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots. \tag{34}$$

Ainsi, toute série S de la forme

$$\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots \tag{35}$$

a son rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{M}$ et son module inférieur à

$$\frac{\mu}{1 - M\rho};$$

toute série S de la forme

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1.2} x^2 + \dots \tag{36}$$

converge dans tout le plan de x et a son module inférieur à

$$\mu e^{M\rho}.$$

5. Une limite inférieure des modules des zéros d'une série de Taylor quelconque

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \tag{37}$$

est fournie par la valeur

$$\xi = \frac{|A_0|}{\sqrt{N}}, \tag{38}$$

où N est la plus petite valeur que prend la fonction

$$v(x) = \frac{1}{x^2} \sum_0^\infty e_n x^{2n}, \tag{39}$$

pendant que x varie par valeurs réelles de o jusqu'au rayon de convergence de la série (37), les e_n étant des valeurs positives égales ou supérieures aux carrés de modules des coefficients correspondants A_n (¹).

Pour la série S

$$\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \ldots, \tag{40}$$

d'après ce qui précède, on peut prendre

$$e_n = \mu^2 M^{2n}; \tag{41}$$

la fonction $v(x)$ sera

$$\frac{\mu^2}{(1 - M^2 x^2) x^2}, \tag{42}$$

et elle atteint son minimum pour la valeur

$$z = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

inférieure au rayon de convergence $\frac{1}{M}$ de la série (40). Ce minimum étant

$$4\mu^2 M^2,$$

on trouve

$$\xi = \frac{1}{2M}.$$

Aucune série (40) *n'a donc des zéros à l'intérieur de la circonférence de rayon* $\frac{1}{2M}$ *décrite autour de* $x = 0$.

Pour les polynomes S_{2n} obtenus en arrêtant la série (40) à son terme de degré $2n$, la fonction $v(x)$ sera

$$v(x) = \frac{\mu^2}{x^2} \frac{1 - (Mx)^{2n+1}}{1 - M^2 x^2}, \tag{43}$$

de sorte qu'une limite inférieure des modules des zéros de S_{2n} est donnée par

$$\frac{\mu}{\sqrt{N}},$$

N étant le minimum de (43).

(¹) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIX, 1902.

6. Pour les séries S plus particulières, de la forme

$$\varphi(x) = \lambda_{k0} + \lambda_{k1} x + \lambda_{k2} x^2 + \ldots, \tag{44}$$

on peut montrer qu'*elles n'ont point de zéros, ni réels ni imaginaires, inférieurs, en module, à la valeur* $\frac{1}{M_k}$.

En effet, la série se laisse écrire sous la forme

$$\varphi(x) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{u_k}{1 - r_k x} dt, \tag{45}$$

et sa partie réelle pour $x = \rho e^{\theta i}$ sera

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1 - r_k \rho \cos\theta}{P^2 + Q^2} dt, \tag{46}$$

P et Q étant les valeurs précédentes (20).

La valeur absolue de

$$r_k \rho \cos\theta, \qquad \text{pour} \qquad \rho < \frac{1}{M_k},$$

étant plus petite que 1, l'intégrale (46), et par suite aussi la fonction $\varphi(Z)$, ne saurait s'annuler pour aucune valeur dont le module serait inférieur à $\frac{1}{M_k}$.

Il s'ensuit que les fonctions

$$\frac{1}{\varphi(x)} \qquad \text{et} \qquad \log \varphi(x)$$

sont aussi développables en série de puissances convergentes dans la circonférence au moins égale à $\frac{1}{M_k}$.

Telles seraient, par exemple, les séries

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{a+n}, \qquad \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+1)^a},$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{(a+n)(b+n)}, \qquad \sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{a+bn}},$$

$$\sum_0^\infty \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} x^n.$$

La classe (44) des séries S se présente comme éléments de réduction pour les intégrales définies

$$\int_a^b \mathrm{R}(t, x)\, dt, \tag{47}$$

où R est une fonction rationnelle de x à coefficients fonctions de t. En désignant par

$$\theta_1(x), \quad \theta_2(x), \quad \theta_3(x), \quad \ldots,$$

les diverses intégrales

$$\theta_k(x) = \int_a^b \frac{u_k}{1 - r_k x}\, dt,$$

jouant le rôle de fractions simples obtenues par la décomposition de la fraction rationnelle $\mathrm{R}(t, x)$, l'intégrale (47) se laisse toujours exprimer sous la forme de la somme d'un polynome en x et d'une combinaison linéaire et homogène de termes

$$\begin{array}{llll}
\theta_1(x), & x\dfrac{d\theta_1}{dx}, & x^2\dfrac{d^2\theta_1}{dx^2}, & \ldots, \\
\theta_2(x), & x\dfrac{d\theta_2}{dx}, & x^2\dfrac{d^2\theta_2}{dx^2}, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}$$

en nombre limité (¹).

Toutes les fois qu'à une fraction simple correspondent les fonctions u_k et r_k réelles dans l'intervalle (a, b) et u_k gardant un signe invariable dans cet intervalle, la fonction correspondante $\theta_k(x)$ représente une série S *de la classe* (44). Les séries (44) se présentent donc comme *éléments simples* pour les intégrales (47).

C'est, par exemple, ainsi que la série

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{a + bn}}$$

joue le rôle d'élément simple pour toute intégrale

$$\int_0^\infty \mathrm{R}(t, x)\, dt,$$

(¹) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXII, 1904.

pour laquelle existe une fraction simple avec

$$u_k = e^{at^2}, \qquad r_k = e^{bt^2},$$

a et b étant des constantes positives; que la série

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+1)^a} \qquad (a > 0)$$

joue ce rôle pour les intégrales

$$\int_0^1 \mathrm{R}(t, x)\, dt,$$

pour lesquelles existe une fraction simple avec

$$u_k = \log\frac{1}{t}, \qquad r_k = t, \qquad \ldots.$$

7. Les séries S de la forme

$$(48) \qquad \chi(x) = \lambda_{k0} + \frac{\lambda_{k1}}{1}x + \frac{\lambda_{k2}}{1.2}x^2 + \frac{\lambda_{k3}}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

sont représentables par des intégrales

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k x}\, dt,$$

et représentent des fonctions *entières* de x qui n'ont pas de zéros réels. Plus généralement, comme la partie réelle de $\chi(\alpha + \beta i)$, qui est

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k \alpha} \cos r_k \beta\, dt,$$

ne s'annule pour aucune valeur de β comprise entre

$$-\frac{\pi}{\mathrm{M}_k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{\mathrm{M}_k},$$

la fonction $\chi(x)$ n'a aucun zéro dans la bande comprise dans le plan des x entre les deux droites

$$\beta + \frac{\pi}{\mathrm{M}_k} = 0, \qquad \beta - \frac{\pi}{\mathrm{M}_k} = 0.$$

La série, par exemple

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} = \int_{0}^{\infty} e^{xt \log \frac{1}{t}} dt, \tag{49}$$

appartenant à la classe (48) n'a pas de zéros dans la bande comprise entre les deux droites

$$\beta + \pi e = 0, \qquad \beta - \pi e = 0.$$

Les séries (48) jouissent de propriétés présentant une grande analogie avec celles de la fonction élémentaire e^{ax} et ont fait objet de mes deux Notes [1] antérieures. Je m'en occuperai aussi dans un travail qui paraîtra prochainement.

---

[1] *Sur des transcendantes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CLVI, p. 1213); *Séries hypertrigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CLVI).