BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GODEAUX

Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 178-194

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__178_1>

SUR LES INVOLUTIONS
APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Il y a quelques années, MM. Enriques et Severi d'une part ([2]), MM. Bagnera et De Franchis d'autre part ([3]), ont montré que les

([1]) Pour les démonstrations données antérieurement et pour la bibliographie, *voir* surtout :

P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 20-26;

C. CARATHÉODORY et E. LANDAU, *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der Kön. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. XXVI, 1911, p. 587 595).

([2]) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, t. XXXII et XXXIII, 1909) (Prix Bordin, 1908).

([3]) *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione* involutions de genres $p_a = P_4 = 1$ existant sur une surface de Jacobi ou de Picard ($p_a = -1, p_g = P_4 = 1$) ont l'ordre égal à $2^\alpha 3^\beta (\alpha \leqq 3, \beta \leqq 1)$, complétant ainsi les belles recherches de MM. Picard, Humbert et Traynard sur les surfaces hyperelliptiques. En m'appuyant sur un théorème de M. Enriques, d'après lequel une involution de genres $p_a = P_4 = 1$, existant sur une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, est cyclique ou composée avec une involution cyclique, j'ai démontré récemment que l'ordre d'une pareille involution ne peut avoir comme facteurs premiers que 2 et 3 (¹). J'ai remarqué depuis qu'un résultat analogue pouvait s'obtenir pour les involutions de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ existant sur une surface de mêmes genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. C'est ce que je me propose d'exposer ici.

Au moyen d'un raisonnement déjà employé une première fois par MM. Enriques et Severi (²), une seconde fois par M. Enriques (³), j'établirai tout d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Étant donnée sur une surface algébrique une involution* I_n, *d'ordre* n, *n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, s'il est possible de trouver sur cette surface un système complet* $\{C\}$, *simple, dépourvu de points-bases, tel que les courbes, transformées des* C *au moyen de la correspondance* $(n-1, n-1)$ *définie par* I_n, *appartiennent à un système continu de dimension supérieure à celle de* $\{C\}$, *l'involution* I_n *est cyclique ou composée avec une involution cyclique.*

J'applique ensuite ce théorème aux involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, en laissant de côté les involutions rationnelles. En profitant des recherches de M. Enriques sur ces surfaces (⁴), j'établis que :

THÉORÈME II. — *Une involution de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$,

---

parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti (*Memorie della Società italiana delle Scienze*, 3ᵉ série, t. XV, 1908).

(¹) *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un.* (*Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1913).

(²) *Loc. cit.*, t. XXXII, p. 333 et suiv.

(³) *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno* (*Rend. R. Accad. di Bologna*, mars 1910).

(⁴) *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (*Memorie della Società italiana delle Scienze* [detta dei XL], 3ᵉ série, t. XIV, 1906).

existant sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, *est cyclique ou composée avec une involution cyclique.*

Considérant le cas particulier où l'ordre d'une pareille involution est un nombre premier p, j'établis que $p = 2$ ou $p = 3$. Par suite :

Théorème III. — *L'ordre d'une involution de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, *existant sur une surface de mêmes genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, *n'admet comme facteurs premiers que* 2 *et* 3.

J'établis ensuite les deux théorèmes suivants :

Théorème IV. — *Si sur une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, *il existe une involution d'ordre* 2 *et de mêmes genres, on peut prendre comme surface représentative de cette involution une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et possédant, en outre, quatre points doubles coniques.*

Théorème V. — *Si sur une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, *il existe une involution d'ordre* 3 *et de mêmes genres, on peut prendre comme surface représentative de l'involution une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et possédant, en outre, trois points doubles biplanaires ordinaires.*

1. Soit, sur une surface algébrique F, une involution I_n, d'ordre n, ne possédant qu'un nombre fini ($\geqq 0$) de points de coïncidence. Cette involution I_n détermine, entre les points de la surface F, une correspondance $(n-1, n-1)$.

Supposons que, sur la surface F, il soit possible de trouver un système complet $\{C\}$, simple, dépourvu de points-bases, tel que les courbes K, qui correspondent aux courbes C dans la correspondance $(n-1, n-1)$ définie par I_n, appartiennent à un système continu complet $\{K\}$, de dimension supérieure à celle de $\{C\}$. Nous allons montrer que, dans ces conditions, supposer que les courbes K sont irréductibles conduit à une absurdité.

Considérons une courbe K_1 du système $\{K\}$ qui ne soit pas la conjuguée d'une C au moyen de I_n [c'est-à-dire de la transformation $(n-1, n-1)$ définie par I_n]. Soit L la courbe qui correspond à K_1 au moyen de I_n. Pour fixer les idées, supposons qu'un groupe de I_n appartenant à la courbe composée $K_1 + L$ ait exactement k de ses points sur K_1. On a certainement $k < n-1$, sans quoi la courbe L appartiendrait au système $\{C\}$, alors qu'on a supposé le contraire. La courbe L sera d'ailleurs généralement irréductible.

Faisons varier la courbe K_1 d'une manière continue dans le système $\{K\}$. Lorsque K_1 coïncidera avec une courbe K conjuguée d'une C au moyen de I_n, la courbe L se décomposera, elle se réduira précisément à la courbe $(n-k)K + C$. Mais, d'après une observation faite par MM. Enriques et Severi (¹), une pareille réduction de la courbe L n'est possible que si la courbe C contient les points de coïncidence de I_n. Or, cela n'a pas lieu, en général, puisque le système $\{C\}$ est dépourvu de points-bases et que I_n n'a qu'un nombre fini de points de coïncidences. L'absurdité à laquelle nous sommes parvenus prouve que la courbe K est réductible quelle que soit la courbe C choisie.

Si les courbes K ne sont pas réductibles en $n-1$ courbes, on recommencera le raisonnement précédent sur chaque partie de courbe K sur laquelle se trouvent plusieurs points d'un même groupe de I_n, et l'on parviendra de même à une absurdité.

Il s'ensuit que les courbes K sont réductibles en $n-1$ courbes. Par suite, l'involution I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

2. Supposons que la surface F et l'involution I_n soient toutes deux de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. Nous allons déduire du théorème I qui vient d'être établi que dans ce cas, I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique; mais, auparavant, nous rappellerons brièvement les principales propriétés d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, propriétés établies par M. Enriques (²).

(¹) *Loc. cit.*, t. XXXII, p. 335.

(²) *Sopra le superficie di bigenere uno* (*loc. cit.*). — *Voir* aussi le Mémoire de M. Fano : *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (*Rend. Circ. Matem.*, t. XXIX, Palermo, 1910).

Une surface de genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$ est dépourvue de courbes $(2i-1)$-canoniques, elle possède les courbes $2i$-canoniques d'ordre zéro. On a donc pour une telle surface

$$p_g = P_3 = P_5 = \ldots = P_{2i+1} = 0, \qquad P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = P_{2i} = 1$$

et, de plus, $p_a = 0$, $p^{(1)} = 1$. Un système linéaire complet $|C|$, de genre $\pi > 1$, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. Il admet un système adjoint $|C'|$ de mêmes caractères. On a $2C \equiv 2C'$. Si le système est irréductible, il n'admet des points-bases que si ses courbes sont hyperelliptiques, et alors ces points-bases sont simples et au nombre de deux. Il existe toujours un système linéaire de genre 4, de courbes non hyperelliptiques, de sorte que l'on peut prendre comme modèle projectif d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ une surface d'ordre 6 de S_3 passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (¹).

Revenons à l'involution I_n donnée sur F. Soit Φ une surface représentative de l'involution, c'est-à-dire une surface en correspondance $(1, n)$ avec F, les n points correspondant à un même point de Φ formant un groupe de I_n.

Pour appliquer le théorème I au cas actuel, le premier point à établir est que cette involution ne possède qu'un nombre fini de coïncidences. Supposons qu'elle puisse en avoir une infinité, formant une courbe D. D'après un théorème de M. Enriques (²), la transformée d'une courbe bicanonique de Φ (qui est d'ordre zéro), augmentée de $2D$, donne une courbe bicanonique de F. Si D existe, F aurait une courbe bicanonique d'ordre non nul, ce qui est impossible. Donc, l'involution I_n a au plus un nombre fini de points de coïncidence.

Le second point à établir est l'existence sur F d'un système

(¹) Nous ne rappelons ici que les propriétés qui nous sont nécessaires pour la suite, car l'analyse des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ a été poussée très loin par M. Enriques. Ce géomètre a notamment attiré l'attention sur les transformations birationnelles non périodiques de la surface en elle-même. Notons encore ce théorème de M. Fano, d'après lequel le lieu des droites de S_3 appartenant à ∞^1 quadriques d'un réseau sans points-bases, est une congruence d'ordre 3, de classe 7, et de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

(²) *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (*Memorie della R. Accad. di Torino*, 2ᵉ série, t. XLIV, 1893).

complet, simple et sans points-bases, dont la dimension soit inférieure à celle du système complet auquel appartiennent (comme courbes totales) les transformées au moyen de I_n des courbes du premier système. Il est facile de voir que tout système simple de courbes non hyperelliptiques satisfait à ces conditions. Soit, en effet, un système complet (donc linéaire) $|C|$, simple, de courbes non hyperelliptiques, de genre $\pi > 2$. Ce système est donc dépourvu de points-bases. Indiquons par K les courbes transformées des C au moyen de I_n, par ξ le genre de ces courbes. Entre une C et la K correspondante, on a une correspondance $(1, n-1)$; la formule de Zeuthen donne

$$\xi - 1 \geqq n(\pi - 1).$$

Considérons le système complet $\{K\}$. Ce système ne sera, en général, pas linéaire, parce que les courbes K pourront avoir des points multiples variables. Les courbes de $\{K\}$ infiniment voisines d'une K générique, découpent sur celle-ci la série caractéristique complète ([1]). Or, cette série caractéristique est d'ordre $2\xi - 2$ et de dimension $\xi - 2$. Par suite, le système $\{K\}$ a au moins la dimension $\xi - 1$ et celle-ci est supérieure à la dimension $\pi - 1$ de $|C|$, car $n > 1$.

Le théorème I est donc applicable au cas actuel et l'involution I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique. Le théorème II se trouve donc établi.

3. Nous allons faire voir que, pour démontrer le théorème III, c'est-à-dire que pour démontrer que l'ordre n de I_n n'admet comme facteurs premiers que 2 et 3, il suffit de prouver que si l'on a une involution I_p d'ordre premier p et de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ sur une surface également de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, p est égal à 2 ou 3.

Posons $n = p_1 p_2 \ldots p_\alpha$, les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ étant premiers. Supposons que l'involution I_n est composée avec une involution cyclique I_r, où $r = p_1 p_2 \ldots p_\beta$ $(\beta \leqq \alpha)$. Soit Φ_β une surface représentative de l'involution I_r. Entre Φ_β et F on a une corres-

---

([1]) Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (*Rend. R. Accad. di Bologna*, décembre 1904).

pondance $(1, r)$ et entre Φ et Φ_β une correspondance $(1, p_{\beta+1} \dots p_\alpha)$. On en conclut que la surface Φ_β a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, car l'irrégularité, le genre géométrique et les plurigenres d'une surface sont respectivement supérieurs ou égaux à l'irrégularité, au genre géométrique et aux plurigenres d'une involution donnée sur cette surface.

D'après ce que nous avons vu, il existe sur F une transformation birationnelle T, de période r, qui engendre I_r. La transformation T^{p_β} engendre une involution d'ordre $p_1 \dots p_{\beta-1}$, car on a $(T^{p_\beta})^{p_1 \dots p_{\beta-1}} = T^r = 1$. Soit $\Phi_{\beta-1}$ une surface qui représente cette involution. Entre $\Phi_{\beta-1}$ et F, on a une correspondance $(1, p_1 \dots p_{\beta-1})$ et entre Φ_β et $\Phi_{\beta-1}$ une correspondance $(1, p_\beta)$. $\Phi_{\beta-1}$ est donc de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. En considérant l'involution d'ordre $p_1 \dots p_{\beta-2}$ engendrée par $T^{p_{\beta-1} p_\beta}$, on trouverait une surface $\Phi_{\beta-2}$ de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ en correspondance $(1, p_1 \dots p_{\beta-2})$ avec F, $(1, p_{\beta-1})$, avec $\Phi_{\beta-1}$. En continuant de même et en opérant de la même manière avec l'involution d'ordre $\frac{n}{r} = p_{\beta+1} \dots p_\alpha$ existant sur Φ_p, on arrivera à construire une chaîne de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$

$$\Phi_0 \equiv F, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \qquad \dots, \qquad \Phi_\alpha \equiv \Phi,$$

telle que, entre Φ_k et Φ_{k-1}, par exemple, on ait une correspondance $(1, p_k)$, p_k étant premier. Si donc nous parvenons à prouver que l'on a $p_k \leqq 3$, nous aurons démontré notre théorème III.

4. Soient Φ et F deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ entre lesquelles il existe une correspondance $(1, p)$, p étant premier. Soit I_p l'involution formée par les groupes de p points de F qui correspondent aux points de Φ. L'involution I_p est cyclique, c'est-à-dire engendrée par une transformation birationnelle T de F en elle-même, de période p $(T^p = 1)$.

Nous utiliserons la terminologie suivante :

1° Un système linéaire $|C|$ sera dit *invariant pour* T, ou plus simplement *invariant*, lorsque T transformera une courbe de $|C|$ en une courbe de $|C|$, distincte ou non de la première.

2° Une courbe C sera dite *invariante pour* T, ou tout simplement *invariante*, lorsque T transformera un point de C en un point de C.

On prouve aisément l'existence de systèmes invariants. Soit, en effet, $|C_1|$ un système qui ne soit pas invariant. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} changent $|C_1|$ en des systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$. Le système complet

$$|C| = |C_1 + C_2 + \ldots + C_p|$$

est invariant pour T, car une courbe C′, transformée d'une courbe C par T, satisfait à la relation fonctionnelle

$$C' \equiv C_2 + C_3 + \ldots + C_p + C_1 \equiv C.$$

Le système $|C|$, invariant, ne peut d'ailleurs pas être composé avec l'involution I_p. Supposons, en effet, que cela soit possible. Rapportons projectivement les courbes C, supposées de genre $\pi \geqq 3$ et non hyperelliptiques, aux hyperplans d'un espace à $\pi - 1$ dimensions, $S_{\pi-1}$. On obtient une certaine surface Ψ, d'ordre $\frac{1}{p}(2\pi - 2)$, représentative de l'involution et, par suite, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. La dimension du système des sections hyperplanes de Ψ est donc, d'une part, égale à $\frac{1}{p}(\pi - 1)$; mais, d'autre part, elle est égale à $\pi - 1$; on aurait donc $p = 1$, ce qui est absurde.

Si, au contraire, le système $|C|$ était formé de courbes hyperelliptiques, il serait composé avec une involution rationnelle de couples de points et un raisonnement simple prouverait que I_p est rationnelle, ce qui est absurde également. Donc :

Un système linéaire complet ne peut être composé avec I_p.

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons l'existence de courbes invariantes et en même temps nous construirons un modèle projectif de Φ.

5. Soit $|A|$ un système linéaire invariant, complet, simple, sans points-bases, de genre π et, par conséquent, de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$.

Considérons une courbe quelconque A_1 de $|A|$ et soient A_2,

A_3, ..., A_p les courbes (également de $|A|$) en lesquelles T, T^2, ..., T^{p-1} transforment respectivement A_1. A la courbe $A_1 + A_2 + \ldots + A_p$ correspond sur la surface Φ une certaine courbe Γ, birationnellement identique à A_1 et, par conséquent, de genre effectif π.

Soit M un point commun aux courbes A_1, A_i. La transformation T^{p-i+1} fait correspondre à ce point un point M' commun aux courbes A_{p-i+2} et A_1. Les points M, M' appartiennent donc à un même groupe de I_p et, par suite, il ne leur correspond qu'un seul point sur Φ. Ce point est situé sur Γ et correspond à deux points de A_1, il est donc double pour Γ. On trouve de la sorte $(p-1)(\pi-1)$ points doubles sur la courbe Γ, correspondant aux groupes de I_p ayant deux de leurs points sur A_1. Le genre virtuel de Γ est donc égal à $(p-1)(\pi-1)+\pi = p(\pi-1)+1$. Cette courbe Γ détermine un système linéaire $|\Gamma|$ de genre $p(\pi-1)+1$, de degré $2p(\pi-1)$ et de dimension $p(\pi-1)$.

Aux courbes de $|\Gamma|$ correspondent sur F des courbes invariantes C vérifiant la relation fonctionnelle

$$C \equiv A_1 + A_2 + \ldots + A_p \equiv pA.$$

Les courbes C ont le degré $2p^2(\pi-1)$, le genre $p^2(\pi-1)+1$, et elles forment un système linéaire $|C|$ de dimension $p(\pi-1)$, c'est-à-dire *incomplet* (ce qui vérifie le théorème trouvé à la fin du paragraphe précédent).

Le système $|\Gamma|$ est simple, car s'il ne l'était pas il en serait de même de $|C|$ et, par suite, de $|A|$, alors qu'on a supposé $|A|$ simple.

Le système $|\Gamma|$ est dépourvu de points-bases, car autrement $|C|$ et, par suite, $|A|$ auraient aussi des points-bases, ce qui est contre l'hypothèse.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire à $p(\pi-1)$ dimensions. Nous obtenons une surface d'ordre $2p(\pi-1)$, birationnellement identique à Φ, que nous désignerons encore par Φ. A une courbe A correspond, sur Φ, la section de cette surface par un hyperplan la touchant en $(p-1)(\pi-1)$ points.

6. Soit P un point de coïncidence de l'involution I_p sur F. Le

point P est changé en lui-même par T, par conséquent le point P, compté p fois, forme un groupe de I_p. Soit P′ le point de diramation correspondant sur Φ.

Comment agit la transformation T sur les points infiniment voisins de P? Nous allons démontrer que :

Si la transformation T *laisse invariants les points infiniment voisins de* P, *on a* $p=2$ *et réciproquement ;*
Si T *échange entre eux les points infiniment voisins de* P, *on a* $p\geqq 3$ *et réciproquement.*

Supposons, en premier lieu, que la transformation T laisse invariant chaque point infiniment voisin de P. Considérons une courbe A'_1 de $|A|$ passant par P. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} changent A'_1 en des courbes $A'_2, A'_3, \ldots, A'_p$ de $|A|$ touchant A'_1 en P. Nous obtenons ainsi une courbe C particulière, que nous indiquerons par C'_2,

$$C'_2 \equiv A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_p,$$

ayant deux points p-uples infiniment voisins en P.

Soit C''_2 une courbe analogue, construite en partant d'une autre courbe de $|A|$ passant par P. Les courbes C'_2, C''_2 déterminent un système linéaire de courbes C, que nous désignerons par $|C_2|$. Les courbes C_2 ont, en P, un point p-uple à tangentes variables, et ont donc le genre effectif égal à $p^2(\pi-1)-\frac{1}{2}p(p-1)$.

Soient Γ_2 les courbes Γ correspondant sur Φ aux courbes C_2, et ν le degré virtuel du système $|\Gamma_2|$. Entre une courbe Γ_2 et la courbe C_2 correspondante, nous avons une correspondance $(1, p)$ et l'involution γ'_p ainsi déterminée sur C_2 possède, par hypothèse, une coïncidence (nécessairement p-uple, puisque I_p est cyclique) sur chacune des branches de cette courbe, au point infiniment voisin de P. Appliquons la formule de Zeuthen à cette correspondance, nous obtenons

$$p\nu + p(p-1) = 2p^2(\pi-1) - p(p-1),$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2p(\pi-1) - 2(p-1).$$

Mais le degré effectif du système $|C_2|$ est égal à $2p^2(\pi-1)-p^2$, donc le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est égal à $2p(\pi - 1) - p$. Le degré effectif d'un système linéaire étant au plus égal à son degré virtuel, on a

$$\nu \geqq 2p(\pi - 1) - p.$$

On en déduit $p \leqq 2$, c'est-à-dire $p = 2$. Ainsi se trouve démontrée une partie de l'énoncé précédent.

Supposons maintenant que T ne laisse pas invariants les points infiniment voisins de P. Entre ces points, ou, si l'on préfère, entre les tangentes à F en P, on a une correspondance $(p-1, p-1)$ possédant deux coïncidences p-uples. T laisse donc invariants deux points infiniment voisins de P, c'est-à-dire deux directions issues de P. Nous désignerons par d_1, d_2 ces directions invariantes.

Considérons une courbe A'_1 de $|A|$, touchant la direction d_1 en P. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} changent A'_1 en des courbes A'_2, A'_3, ..., A'_p touchant également d_1 en P. On obtient donc la courbe

$$C'_2 \equiv A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_p,$$

courbe C particulière ayant en P deux points p-uples infiniment voisins. On obtiendra une seconde courbe C, soit C''_2, jouissant de la même propriété, en opérant sur d_2 comme on a opéré sur d_1. Les courbes C'_2, C''_2 déterminent un système linéaire de courbes C, soit $|C_2|$, ayant en P un point p-uple à tangentes variables.

Indiquons encore par $|\Gamma_2|$ le système des sections hyperplanes Γ de Φ correspondant aux C_2, par ν le degré virtuel de ce système. Entre une courbe Γ_2 et la C_2 correspondante, on a une correspondance $(1, p)$, mais l'involution γ'_p déterminée ainsi sur C_2 ne possède, cette fois, aucune coïncidence. La formule de Zeuthen donne, par conséquent,

$$p\nu = 2p^2(\pi - 1) - p(p-1),$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2p(\pi - 1) - p(p-1).$$

Le degré virtuel d'un système linéaire tracé sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ est toujours pair ; par suite, ν est pair et p est impair $(p > 2)$. Ainsi se trouve démontrée la seconde et dernière partie de l'énoncé ci-dessus. Cependant, nous montrerons que la comparaison du degré effectif de $|\Gamma_2|$ et de son degré virtuel ν ne conduit pas, comme dans le premier cas, à une limite de p. Le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est en effet égal à $2p(\pi - 1) - p$ et l'on a toujours

$$\nu = 2p(\pi - 1) - (p - 1) > 2p(\pi - 1) - p.$$

7. Nous supposerons actuellement $p > 2$ et nous démontrerons que les courbes C passant par P ont généralement, en ce point, un point double dont les branches touchent respectivement les directions d_1, d_2.

Auparavant, nous montrerons qu'en dehors de ses courbes multiples éventuelles, la surface Φ possède au plus des points doubles non tacnodaux. Supposons en effet que Φ possède, en dehors de ses courbes multiples, un point m-uple. Les sections hyperplanes passant par ce point forment un système linéaire de dimension $p(\pi - 1) - 1$, et, par suite, de genre $p(\pi - 1)$. Or, le genre de ces courbes est égal à $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}m(m - 1)$, par conséquent $\frac{1}{2}m(m - 1) = 1$, c'est-à-dire $m = 2$. Un point multiple de Φ (en dehors des lignes multiples) est certainement double. Ce point double ne peut être tacnodal, c'est-à-dire posséder dans son domaine du premier ordre une droite double. En effet, si cela était possible, les sections hyperplanes de Φ passant par ce point auraient le genre $p(\pi - 1) - 1$, et la dimension du système linéaire qu'elles forment serait aussi $p(\pi - 1) - 1$, ce qui est impossible.

Considérons maintenant les courbes C assujetties à la seule condition de passer par P. Elles forment un système linéaire de dimension $p(\pi - 1) - 1$, que nous désignerons par $|C_1|$. Soit $|\Gamma_1|$ le système formé par les courbes Γ de Φ correspondant aux C_1. Les courbes Γ_1 passent donc par P'.

Indiquons par i l'abaissement du genre produit par la singularité que les C_1 ont en général en P. Entre une courbe Γ_1 et la C_1 correspondante, on a une correspondance $(1, p)$ déterminant une involution cyclique γ'_p sur C_1. Cette γ'_p a certainement des points de coïncidence dans le voisinage de P, sans quoi ce point ne serait pas une coïncidence de I_p. De plus, ces points de coïncidence sont p-uples, puisque γ'_p est cyclique. Indiquons leur nombre par δ.

Supposons que P' soit simple pour Φ et appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une Γ_1 et la C_1 correspondante. On obtient

$$p.2p(\pi - 1) + (p - 1)\delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

d'où $\delta = i = 0$, ce qui est impossible. Par suite, P' est multiple pour Φ. D'après ce que nous avons vu, il est double. La formule de Zeuthen donne actuellement

$$p[2p(\pi - 1) - 2] + (p - 1)\delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

d'où

$$(p - 1)\delta + 2i = 2p.$$

p étant impair, $(p - 1)\delta$ est pair, de sorte que deux cas peuvent, *a priori*, se présenter :

1° $\delta = 2, \quad i = 1;$

2° $\delta = 1, \quad i = \frac{1}{2}(p + 1).$

Nous allons faire voir que ce second cas conduit à une absurdité. Si $\delta = 1$, $i = \frac{1}{2}(p + 1)$, les courbes C_1 ont en P une multiplicité supérieure à 2, car autrement on aurait $p = 1$. De plus, il y a une de leurs branches qui touche soit d_1, soit d_2. Considérons un point qui s'approche indéfiniment de P sur une branche d'une courbe C_1 non tangente à d_1 ou d_2. Les $p - 1$ points qui complètent le groupe de I_p, dont le point en question fait partie, s'approchent également indéfiniment de P. Ce ne peut d'ailleurs être que sur des branches différentes de C_1, puisque, en dehors des directions d_1, d_2, il n'y a pas de coïncidence infiniment voisine de P. Les courbes C_1 ont donc en P une multiplicité de la forme $1 + \mu p$, μ étant entier. On a donc

$$\frac{1}{2}(p + 1) = \frac{1}{2}\mu p(\mu p + 1),$$

c'est-à-dire $p = 1$. On ne peut donc pas avoir $\delta = p$.

Si $\delta = 2$, les courbes C_1 touchent nécessairement les directions d_1, d_2, de sorte que :

Les courbes C *passant par* P *ont généralement en ce point* *un point double dont les branches touchent les directions unies issues de* P.

8. Nous allons actuellement montrer qu'en un point de diramation, la surface Φ possède un point biplanaire ordinaire et que, de plus, on a $p = 3$ (nous supposons toujours, bien entendu, $p > 2$).

Nous avons déjà établi que le point de diramation P' est double pour Φ. Pour faire voir qu'il n'est pas uniplanaire, il suffit de prouver que les courbes Γ_1 ont généralement en P' un point double à tangentes distinctes. Or, cela est évident, car une courbe C_1 quelconque a en P un point double à tangentes distinctes d_1, d_2 et, sur chacune de ses branches, un point de coïncidence infiniment voisin de P. A ces deux points infiniment voisins de P, comptés chacun p fois, correspondent sur une courbe Γ_1 (correspondant à la C_1 choisie) deux points distincts, situés un sur chaque branche de la courbe. Les courbes Γ_1 ont donc bien, en général, un point double ordinaire en P', et ce point n'est donc pas uniplanaire pour Φ.

Considérons les courbes C_1 assujetties à toucher en P une direction différente de d_1, d_2. Soient $\overline{C}_2$ ces courbes. Elles forment un système linéaire $|\overline{C}_2|$ de dimension $p(\pi - 1) - 2$, et ont en P une multiplicité au moins égale à 3.

Lorsqu'un point s'approche indéfiniment de P sur l'une des branches d'une courbe $\overline{C}_2$ (non tangente à d_1 ou d_2 le cas échéant), les $p - 1$ autres points du groupe de I_p déterminé par ce premier point, s'approchent également indéfiniment de P, mais c'est nécessairement sur les branches différentes, puisqu'un point infiniment voisin de P n'est généralement pas invariant pour T. On en conclut que les courbes $\overline{C}_2$ ont, en P, un point multiple d'indice μp, μ étant un entier.

Désignons par $\overline{\Gamma}_2$ les courbes Γ_1 qui correspondent aux courbes $\overline{C}_2$, et par $\bar{\nu}$ le degré virtuel du système $|\overline{\Gamma}_2|$.

Une courbe $\overline{C}_2$ est de genre $p^2(\pi - 1) - \frac{1}{2}\mu p(\mu p - 1)$, donc la formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance existant entre une $\overline{\Gamma}_2$ et la $\overline{C}_2$ correspondante, donne

$$p\bar{\nu} = 2p^2(\pi - 1) - \mu p(\mu p - 1),$$

c'est-à-dire

$$\bar{\nu} = 2p(\pi - 1) - \mu(\mu p - 1).$$

La dimension du système $|\overline{\Gamma}_2|$ est donc égale à

$$\frac{1}{2}\bar{\nu} = p(\pi - 1) - \frac{1}{2}\mu(\mu p - 1).$$

Mais, d'autre part, la dimension *effective* de ce système est égale à celle de $|\overline{C}_2|$, c'est-à-dire à $p(\pi - 1) - 2$. Cette dimension effective peut être inférieure à la première trouvée, car il se peut que les courbes $\overline{\Gamma}_2$ aient des points-bases simples *imposés*. On a donc

$$\frac{1}{2}\bar{\nu} \geqq p(\pi - 1) - 2,$$

c'est-à-dire

$$p(\pi - 1) - \frac{1}{2}\mu(\mu p - 1) \geqq p(\pi - 1) - 2.$$

On en déduit

$$p \leqq \frac{\mu + 4}{\mu^2},$$

c'est-à-dire $\mu = 1$, $p = 3$ ou 5.

Les courbes du système $|\overline{C}_2|$ ont donc en P un point p-uple à tangentes variables et ce système coïncide avec le système $|C_2|$ rencontré dans la seconde partie du paragraphe 6.

Nous avons vu que le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est égal à $p(\pi - 1) - p$, tandis que son degré virtuel est égal à $2p(\pi - 1) - p + 1$. Par suite, le système $|\Gamma_2|$ possède un point-base simple assigné. Sa dimension effective est donc $p(\pi - 1) - \frac{1}{2}(p - 1) - 1$. Mais, d'autre part, cette dimension est égale à $p(\pi - 1) - 2$, par suite

$$\frac{1}{2}(p - 1) + 1 = 2,$$

ou $p = 3$.

Considérons une courbe C_2. Sur cette courbe, il y a un groupe de I_p infiniment voisin de P et ayant un point sur chaque branche de C_2. A ce groupe correspond sur la Γ_2 homologue un seul point infiniment voisin de P′, par suite les Γ_2 ont en P′ un point de rebroussement. Le point-base simple de $|\Gamma_2|$ est donc infiniment voisin de P′.

Nous avons ainsi établi que, en P′, Φ a un point double non uniplanaire et qu'il y a un système linéaire de sections hyperplanes de Φ ayant en P′ un point de rebroussement. Par suite :

En un point de diramation, Φ′ possède un point double biplanaire ordinaire, et l'on a $p = 3$ (*si* $p > 2$).

9. Reprenons le cas $p = 2$. Nous avons établi que, dans ce cas, T laisse invariants les points infiniment voisins de P.

Considérons les courbes C passant par P et désignons-les par C_1. En adoptant les mêmes notations que tantôt (§ 7) et en appliquant la formule de Zeuthen comme on l'a fait en cet endroit, on trouve que Φ a un point double en P′ et que $\delta = 2$, $i = 1$. Les courbes C_1 ont donc en P un point double à tangentes variables. On voit qu'actuellement les systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ coïncident.

A une courbe C_1 correspond sur Φ une courbe Γ_1, ayant en P′ un point double ordinaire, car aux deux points infiniment voisins de P sur cette C_1 correspondent des points distincts sur Φ, situés un sur chaque branche de la Γ_1. De plus, la même particularité se présentera en général pour toutes les courbes C_1. On en conclut que :

Si $p = 2$, *la surface* Φ *possède un point double conique en un point de diramation.*

10. Nous allons calculer le nombre x de points de diramation situés sur Φ. Remarquons d'abord qu'un point double conique abaisse la classe de Φ de deux unités, un point double biplanaire ordinaire de trois unités. Nous pourrons donc dire que si entre les surfaces Φ, F nous avons une correspondance $(1, p)$, en un point de diramation, la surface Φ possède une singularité abaissant sa classe de p unités.

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre I de Φ et de F. Nous savons que cet invariant est donné par

$$I = 12p_a + 9 - p^{(1)},$$

donc qu'actuellement il est égal à 8.

Considérons un faisceau de courbes Γ et soit m la classe effective de Φ. On a, sur cette surface, d'après la formule de M. Segre,

$$I = 8 = m + px - 2p(\pi - 1) - 4p(\pi - 1) - 4.$$

Considérons le faisceau de courbes C correspondant sur F, on a

$$I = 8 = pm + x - 2p^3(\pi - 1) - 4p^2(\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de m entre ces deux formules donne

$$12(p - 1) = x(p^2 - 1),$$

d'où

$$x = \frac{12}{p + 1}.$$

Si $p = 2$, on a $x = 4$; si $p = 3$, on trouve $x = 3$. Ainsi se trouvent démontrés les théorèmes IV et V énoncés au début de ce travail, car par l'existence sur Φ d'un système linéaire simple de courbe de genre quatre, dépourvu de points-bases, on pourra transformer Φ en une surface d'ordre six, de S_3 possédant quatre points doubles si $p = 2$, trois points doubles biplanaires si $p = 3$.