N. PODTIAGUINE

Les conditions de convergence de l' intégrale

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 97-113
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__97_0>

LES CONDITIONS DE CONVERGENCE DE L'INTÉGRALE

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx\,dy\ldots dt}{(x^\alpha+y^\beta+\ldots+t^\lambda)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+\ldots+t^{\lambda_1})^{a_2}(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2}+\ldots+t^{\lambda_2})^{a_3}};$$

Par M. N. Podtiaguine.

M. Borel, dans son Livre *Leçons sur la théorie de la croissance* [1], en étudiant l'ordre de grandeur de certaines intégrales

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \mathfrak{F}(x, y, \alpha, \beta, \ldots, \lambda)\,dx\,dy,$$

relativement aux paramètres α, β, ..., λ, a donné une méthode pour la recherche des conditions de leur convergence. Cette méthode consiste à déterminer tout d'abord le champ des variables, dans lequel l'intégrale peut devenir infinie. Puis on divise ce champ en plusieurs zones de manière à pouvoir, dans chacune de ces zones, réduire l'élément différentiel à une partie principale de forme simple. En ne retenant que ce terme prépondérant de l'élément différentiel, on cherche les conditions de convergence de l'intégrale dans chacune des zones.

M. Borel a ainsi trouvé les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})}.$$

Ici, dans ce petit travail, je me suis proposé de généraliser ces recherches et d'étudier, par une méthode basée sur le même principe, les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx\,dy\ldots dt}{(x^\alpha+y^\beta+\ldots+t^\lambda)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+\ldots+t^{\lambda_1})^{a_2}(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2}+\ldots+t^{\lambda_2})^{a_3}}.$$

Dans ce qui suit nous désignerons toujours par les lettres

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

---

[1] Pages 61-73.

des nombres quelconques fixes; par les lettres

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad \ldots$$

les nombres arbitrairement grands; enfin, par les lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad k, \quad l,$$
$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \beta, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \gamma, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \varkappa, \quad \varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \lambda, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2$$

des nombres fixes positifs.

Nous allons commencer par l'étude de l'intégrale

$$I = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\, dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}}.$$

Si nous supposons que

$$a_1 \alpha > 1, \qquad a_1 \beta > 1,$$

l'intégrale I ne peut diverger que dans un champ où x et y sont tous les deux très grands. Donc, il suffit d'étudier l'intégrale

$$I' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx\, dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}}.$$

Dans ce champ des variables x, y, traçons la courbe

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Cette courbe divise le champ en deux zones, et nous avons

$$I' = I_1 + I_2,$$

I_1 étant l'intégrale I' prise dans la première zone, I_2 la même intégrale prise dans la deuxième zone.

On a, dans la première zone,

$$y > x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

et, dans la seconde,

$$y < x^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

de sorte que

$$\varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} = y^{a_1\beta}. h_1 \qquad (1 < h_1 < 2^{a_1})$$

dans le premier cas, et

$$\varphi(x, y) = x^{a_1\alpha}. h_2 \qquad (1 < h_2 < 2^{a_1})$$

dans le second cas. Nous avons donc

$$I_1 = \frac{1}{h_1}\int_{B'}^{\infty}\frac{dy}{y^{a_1\beta}}\int_{A}^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = \frac{1}{h_1}\int_{B'}^{\infty}\frac{dy}{y^{a_1\beta}}\left[y^{\frac{\beta}{\alpha}} - A\right] \quad (^1).$$

Mais le nombre B est arbitrairement grand. Donc, nous pouvons le prendre assez grand pour que l'on ait

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} - A = y^{\frac{\beta}{\alpha}}(1-\eta),$$

η étant inférieur à 1. En appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$I_1 = h'_2\int_{B'}^{\infty}\frac{dy}{y^{a_1\beta - \frac{\beta}{\alpha}}}.$$

Cette intégrale converge si

$$a_1\beta - \frac{\beta}{\alpha} > 1$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Quant à l'intégrale I_2, on a

$$I_2 = \frac{1}{h_2}\int_{A}^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha}}\int_{B}^{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} dy = \frac{1}{h_2}\int_{A}^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha}}\left[x^{\frac{\alpha}{\beta}} - B\right].$$

Ici, nous intéressent seulement les valeurs de x qui sont très grandes.

Donc, nous pouvons remplacer ici A par une nouvelle limite A', de sorte que

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} - B = x^{\frac{\alpha}{\beta}}(1-\eta),$$

η étant inférieur à 1. La condition de convergence de l'intégrale I_2 est donc

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Nous voyons ainsi que la condition de convergence de l'inté-

---

(1) Pour simplifier nos calculs nous supposons que $A^{\frac{\alpha}{\beta}} > B$, de sorte que $B' > B$.

grale I est seulement

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<a_1.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\text{II}=\int_a^\infty\int_b^\infty\int_c^\infty\frac{dx\,dy\,dz}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}}.$$

En supposant

$$a_1\alpha>1,\qquad a_1\beta>1,\qquad a_1\gamma>1,$$

nous pouvons nous borner à l'étude de l'intégrale

$$\text{II}'=\int_A^\infty\int_B^\infty\int_C^\infty\frac{dx\,dy\,dz}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}}.$$

Imaginons dans le champ des variables x, y, z la surface

$$z^\gamma=x^\alpha+y^\beta.$$

Cette surface divise le champ en deux domaines, de sorte que

$$\text{II}'=\text{II}_1+\text{II}_2,$$

où II_1 est l'intégrale II' prise dans le premier domaine et II_2 l'intégrale prise dans le second domaine. Mais dans le premier domaine on a

$$z^\gamma>x^\alpha+y^\beta,$$

d'où

$$\varphi(x,y,z)=(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}=z^{a_1\gamma}.h_1\qquad(1<h_1<2^{a_1}),$$

et dans le second

$$z^\gamma<x^\alpha+y^\beta,$$

d'où

$$\varphi(x,y,z)=(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}.h_2\qquad(1<h_2<2^{a_1}).$$

Donc

$$\text{II}_1=\frac{1}{h_1}\int_{C'}^\infty\frac{dz}{z^{a_1\gamma}}\int_B^{w_1}dy\int_A^{w_2}dx\quad(^1).$$

La limite supérieure w_1 est définie par les équations

$$z^\gamma=x^\alpha+w_1^\beta\qquad\text{et}\qquad x=A,$$

d'où

$$w_1=z^{\frac{\gamma}{\beta}}(1-\eta).$$

(1) Pour simplifier nos calculs nous supposons que $A^\alpha+B^\beta>C^\gamma$, de sorte que $C'>C$.

C' étant arbitrairement grand, nous pouvons le supposer assez grand pour que η soit inférieur à 1.

De même pour w_2 on a

$$w_2 = z^{\frac{\gamma}{\alpha}}(1-\eta_1),$$

η_1 étant inférieur à 1. Donc

$$\text{II}_1 = h'_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{a_1\gamma}} z^{\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}}[1-\eta_2].$$

Ici encore nous pouvons prendre C' assez grand pour que η_2 soit inférieur à 1. On a finalement

$$\text{II}_1 = h''_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{a_1\gamma-\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

La condition de convergence de cette intégrale est

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < a_1.$$

Envisageons maintenant l'intégrale II_2. On a

$$\begin{aligned}\text{II}_2 &= \frac{1}{h_2}\int_A^{\infty}\int_B^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}} \int_C^{(x^\alpha+y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} dz \\ &= \frac{1}{h_2}\int_A^{\infty}\int_B^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}}\left[(x^\alpha+y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}-C\right].\end{aligned}$$

Mais la question de la convergence se pose seulement pour x, y très grands. Nous pouvons donc remplacer ici A et B par deux nouvelles limites de telle sorte que

$$(x^\alpha+y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}-C = (x^\alpha+y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}(1-\eta_3),$$

η_3 étant inférieur à 1. Mais l'intégrale

$$\int_A^{\infty}\int_B^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1-\frac{1}{\gamma}}}$$

a la forme de l'intégrale I, dont la condition de convergence, comme nous avons déjà vu, est

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<a_1-\frac{1}{\gamma},$$

c'est-à-dire la même que celle de l'intégrale II_1.

Les mêmes raisonnements sont applicables aux intégrales de la forme

$$\mathfrak{I}_1=\int_a^\infty\int_b^\infty\cdots\int_l^\infty\frac{dx\,dy\ldots dt}{(x^\alpha+y^\beta+\ldots+t^\lambda)^{a_1}}.$$

On trouvera pour elles la condition de convergence

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots+\frac{1}{\lambda}<a_1.$$

Si l'on suppose

$$a_1=1,$$

on obtiendra pour l'intégrale

$$\int_a^\infty\int_b^\infty\cdots\int_l^\infty\frac{dx\,dy\ldots dt}{x^\alpha+y^\beta+\ldots+t^\lambda}$$

la condition de convergence

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots+\frac{1}{\lambda}<1$$

qui a déjà été donnée par M. Borel (¹).

Nous allons maintenant considérer l'intégrale

$$\text{III}=\int_a^\infty\int_b^\infty\frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{a_2}}.$$

Nous supposons que

$$\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

En considérant y comme constant, nous voyons qu'il faut tout d'abord avoir

$$a_1\alpha+a_2\alpha_1>1$$

pour que l'intégrale III ait un sens. De même il faut que

$$a_1\beta+a_2\beta_1>1.$$

En supposant ces conditions remplies, l'intégrale III ne peut

(¹) *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 70.

diverger que pour x et y tous deux très grands. Donc, nous pouvons nous borner à l'étude de l'intégrale

$$\mathrm{III}' = \int_{\mathrm{A}}^{\infty} \int_{\mathrm{B}}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^{\alpha}+y^{\beta})^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{a_2}}.$$

Dans le champ des variables x, y traçons deux courbes

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{et} \quad y = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}.$$

A cause de la condition $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, la première courbe sera au-dessus de la seconde. Ces courbes divisent le champ considéré en trois zones. On a, dans la première zone,

$$y^{\beta} > x^{\alpha}, \qquad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1};$$

dans la deuxième,

$$y^{\beta} < x^{\alpha}, \qquad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1},$$

et dans la troisième,

$$y^{\beta} < x^{\alpha}, \qquad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1},$$

de sorte que nous avons, dans les trois cas indiqués,

$$\varphi(x, y) = (x^{\alpha}+y^{\beta})^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{a_2} = y^{a_1\beta+a_2\beta_1}.h_1,$$
$$\varphi(x, y) = x^{a_1\alpha}y^{a_2\beta_1}.h_2,$$
$$\varphi(x, y) = x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1}.h_3,$$

h_1, h_2, h_3 étant compris entre 1 et $2^{a_1+a_2}$

En désignant par III_1, III_2, III_3 l'intégrale III' prise respectivement dans les première, deuxième et troisième zones, on a

$$\mathrm{III}' = \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2 + \mathrm{III}_3.$$

Envisageons séparément les trois intégrales ci-dessus. On a

$$\mathrm{III}_1 = \frac{1}{h_1}\int_{\mathrm{B}'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1\beta+a_2\beta_1}} \int_{\mathrm{A}}^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = h'_1 \int_{\mathrm{B}'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1\beta+a_2\beta_1-\frac{\beta}{\alpha}}} \quad (^1),$$

$$\mathrm{III}_2 = \frac{1}{h_2}\int_{\mathrm{A}}^{\infty} \frac{dx}{x^{a_1\alpha}} \int_{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}^{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \frac{dy}{y^{a_2\beta_1}} = h'_2 \int_{\mathrm{A}}^{\infty} \frac{dx}{x^{a_1\alpha}} \left[x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)} - x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}(1-a_2\beta_1)} \right].$$

---

(1) Nous supposons que $\mathrm{A}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} > \mathrm{B}$, de sorte que $\mathrm{B}' > \mathrm{B}$.

Mais à cause de la condition $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, on a

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)} - x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}(1-a_2\beta_1)} = x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)}[1-\eta],$$

η étant inférieur à 1 ([1]). Il en résulte que

$$\mathrm{III}_2 = h'_2 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a-\alpha_1\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)}}.$$

La condition de convergence des intégrales III_1 et III_2 est donc la même

$$a_2\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1.$$

Quant à l'intégrale III_3, elle donne la nouvelle condition de convergence. En effet, on a

$$\mathrm{III}_3 = \frac{1}{h_3}\int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1}}\int_B^{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} dy = h'_3 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}$$

si nous supposons A assez grand. La condition de convergence de l'intégrale III_3 est donc

$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2.$$

Ainsi, pour que l'intégrale III soit convergente, il faut et il suffit que ses paramètres satisfassent à deux conditions :

$$a_2\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

En supposant ici

$$a_1 = a_2 = 1,$$

on a

$$\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1,$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - 1.$$

([1]) Nous supposons donc que $1 - a_2\beta_1 > 0$. Si $1 - a_2\beta_1 < 0$, il est aisé de démon-

Ce sont les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})}$$

qui ont été données par M. Borel [1].

Nous allons maintenant chercher les conditions de convergence de l'intégrale

$$\text{IV} = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1})^{a_2}}.$$

Si nous supposons

$$a_1\alpha + a_2\alpha_1 > 1,$$
$$a_1\beta + a_2\beta_1 > 1,$$
$$a_1\gamma + a_2\gamma_1 > 1,$$

l'étude de cette intégrale se ramène à l'étude de l'intégrale

$$\text{IV}' = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1})^{a_2}}.$$

Divisons le champ des variables x, y, z en trois domaines par deux surfaces

$$z^\gamma = x^\alpha + y^\beta,$$
$$z^{\gamma_1} = x^{\alpha_1} + y^{\beta_1}.$$

Supposons

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1},$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\alpha_1}{\gamma_1},$$

de sorte que

(1) $$(x^\alpha+y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} > (x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}} \quad [2].$$

Dans le premier domaine nous avons

$$\varphi(x,y,z) = (x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1})^{a_2} = z^{a_1\gamma+a_2\gamma_1}.h_1,$$

dans le second

$$\varphi(x,y,z) = (x^\alpha+y^\beta)^{a_1} z^{a_2\gamma_1}.h_2$$

---

trer que la condition de convergence de l'intégrale III_2 est la même que celle de l'intégrale III_3.

[1] *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 72.

[2] Cela veut dire que la première surface est au-dessus de la seconde.

et dans le troisième

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}.h_3,$$

où

$$1 < h_1 < 2^{a_1+a_2}, \qquad 1 < h_2 < 2^{a_1+a_2}, \qquad 1 < h_3 < 2^{a_1+a_2}.$$

L'intégrale IV′, dans le premier de ces domaines, a pour valeur

$$\mathrm{IV}_1 = h'_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{a_1\gamma + a_2\gamma_1}} \int_{B}^{z^{\frac{\gamma}{\beta}}} dy \int_{A}^{z^{\frac{\gamma}{\alpha}}} dx = h''_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{a_1\gamma + a_2\gamma_1 - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma}{\alpha}}} \text{ (1)},$$

et dans le deuxième, elle est égale à

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}_2 &= \frac{1}{h_2} \int_{A}^{\infty} \int_{B}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}} \int_{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}^{(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{dz}{z^{a_2\gamma_1}} \\ &= h'_2 \int_{A}^{\infty} \int_{B}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1 - \frac{1}{\gamma}(1 - a_2\gamma_1)}}\end{aligned}$$

à cause de l'inégalité (1) (2).

Les intégrales IV_1 et IV_2 convergent si

$$a_2 \frac{\gamma}{\gamma_1} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1.$$

Quant à l'intégrale IV′, prise dans le troisième domaine, elle nous donne encore deux conditions de convergence. En effet, cette intégrale a pour valeur

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}_3 &= \frac{1}{h_3} \int_{A}^{\infty} \int_{B}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}} \int_{C}^{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}} dz \\ &= h'_3 \int_{A}^{\infty} \int_{B}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2 - \frac{1}{\gamma_1}}}.\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale a la forme de l'intégrale III. Nous avons déjà vu que les conditions de sa convergence sont

$$\left(a_2 - \frac{1}{\gamma_1}\right)\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2.$$

Donc, pour que l'intégrale IV soit convergente, il faut et il

(1) Nous supposons toujours $C' > C$.

(2) Nous supposons que $1 - a_2\gamma_1 > 0$. Si $1 - a_2\gamma_1 < 0$, on obtiendra pour la convergence de l'intégrale IV_2 deux conditions : celles de l'intégrale IV_3.

suffit que ses paramètres satisfassent à trois conditions

$$a_2\frac{\gamma_1}{\gamma} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-a_1,$$
$$\left(a_2-\frac{1}{\gamma_1}\right)\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}-a_2,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

En se plaçant au point de vue de l'hypothèse de l'espace à quatre dimensions, on peut considérer l'intégrale

$$\int_a^\infty\int_b^\infty\int_c^\infty\int_d^\infty \frac{dx\,dy\,dz\,dt}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+t^\delta)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1}+t^{\delta_1})^{a_2}}.$$

On trouvera quatre conditions pour sa convergence :

$$a_2\frac{\delta_1}{\delta} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-a_1,$$
$$\left(a_2-\frac{1}{\delta_1}\right)\frac{\gamma_1}{\gamma} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-a_1,$$
$$\left(a_2-\frac{1}{\delta_1}-\frac{1}{\gamma_1}\right)\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\delta_1}-a_2,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \qquad \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\gamma_1}{\delta_1}.$$

En appliquant toujours la même méthode, nous obtiendrons en général, pour la convergence de l'intégrale,

$$\mathfrak{I}_2=\int_a^\infty\int_b^\infty\int_c^\infty\cdots\int_k^\infty\int_l^\infty \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots dx_{n-1}\,dx_n}{\begin{bmatrix}(x_1^\alpha+x_2^\beta+x_3^\gamma+\ldots+x_{n-1}^\varkappa+x_n^\lambda)^{a_1}\\ \times(x_1^{\alpha_1}+x_2^{\beta_1}+x_3^{\gamma_1}+\ldots+x_{n-1}^{\varkappa_1}+x_n^{\lambda_1})^{a_2}\end{bmatrix}},$$

n conditions

$$a_2\frac{\lambda_1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots+\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\lambda}-a_1,$$
$$\left(a_2-\frac{1}{\lambda_1}\right)\frac{\varkappa_1}{\varkappa} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots+\frac{1}{\varkappa}-a_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\left(a_2-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\varkappa_1}-\ldots-\frac{1}{\gamma_1}\right)\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\lambda_1}-a_2.$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\varkappa}{\lambda} > \frac{\varkappa_1}{\lambda_1}.$$

Nous avons vu que l'intégrale

$$\mathfrak{J}_1 = \int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx\,dy\ldots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \ldots + t^\lambda)^{a_1}},$$

dont l'élément différentiel a, dans son dénominateur, un facteur de la forme

(2) $$(x^\alpha + y^\beta + \ldots + t^\lambda)^{a_1}$$

converge, si ses paramètres satisfont à une seule condition. Nous venons de voir aussi que le nombre de conditions de convergence de l'intégrale $\mathfrak{J}_2$ dont l'élément différentiel a, dans son dénominateur, deux facteurs de la même forme, est égal à l'ordre de sa multiplicité. Le nombre de ces conditions croît encore plus vite si l'élément différentiel de l'intégrale a trois facteurs de la forme (2).

En effet, considérons d'abord l'intégrale

$$V = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}(x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}},$$

où a_1 et a_2 sont positifs [1].

Nous supposons ici

(3) $$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

En supposant, en outre,

$$a_1\alpha + a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2 > 1,$$
$$a_1\beta + a_2\beta_1 + a_3\beta_2 > 1,$$

nous pouvons ne considérer que l'intégrale

$$V' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}(x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}}.$$

Traçons dans le champ des variables x, y les courbes

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}, \qquad y = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}, \qquad y = x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}.$$

En vertu des conditions (3), la première courbe sera au-dessus de la seconde et la seconde au-dessus de la troisième. Ainsi nous

---

[1] Dans ce qui suit, nous supposerons maintenant toujours $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.

avons quatre zones à considérer. Dans la première, on a

$$y^\beta > x^\alpha,\qquad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1},\qquad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2},$$
$$\varphi(x,y) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{a_2}(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2})^{a_3} = y^{a_1\beta+a_2\beta_1+a_3\beta_2}.h_1;$$

dans la seconde,

$$y^\beta < x^\alpha,\qquad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1},\qquad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2},$$
$$\varphi(x,y) = x^{a_1\alpha}y^{a_2\beta_1+a_3\beta_2}.h_2;$$

dans la troisième,

$$y^\beta < x^\alpha,\qquad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1},\qquad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2},$$
$$\varphi(x,y) = x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1}y^{a_3\beta_2}.h_3,$$

et dans la quatrième,

$$y^\beta < x^\alpha,\qquad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1},\qquad y^{\beta_2} < x^{\alpha_2},$$
$$\varphi(x,y) = x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1+a_3\alpha_2}.h_4,$$

où h_1, h_2, h_3 et h_4 sont tous compris entre 1 et $2^{a_1+a_2+a_3}$.

En désignant par V_1, V_2, V_3 et V_4 l'intégrale V' respectivement dans les première, deuxième, troisième et quatrième zones, nous avons

$$V' = V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

On trouve, pour chacune de ces intégrales,

$$V_1 = \frac{1}{h_1}\int_{B'}^{\infty}\frac{dy}{y^{a_1\beta+a_2\beta_1+a_3\beta_2}}\int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}}dx = h'_1\int_{B'}^{\infty}\frac{dy}{y^{a_1\beta+a_2\beta_1+a_3\beta_2-\frac{\beta}{\alpha}}}\ (^1).$$

$$V_2 = \frac{1}{h_2}\int_A^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha}}\int_{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}^{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\frac{dy}{y^{a_2\beta_1+a_3\beta_2}} = h'_2\int_A^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha-\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1-a_3\beta_2)}},$$

$$V_3 = \frac{1}{h_3}\int_A^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1}}\int_{x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}^{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}\frac{dy}{y^{a_3\beta_2}} = h'_3\int_A^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}(1-a_3\beta_2)}},$$

$$V_4 = \frac{1}{h_4}\int_A^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1+a_3\alpha_2}}\int_B^{x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}dy = h'_4\int_A^{\infty}\frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1+a_3\alpha_2-\frac{\alpha_2}{\beta_2}}},$$

car A et B sont arbitrairement grands (²).

(¹) Nous supposons toujours que $A^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} > B$. Donc $B' > B$.

(²) Nous n'avons considéré ici que le cas, dans lequel $1 - a_2\beta_1 - a_3\beta_2 > 0$, d'où $1 - a_3\beta_2 > 0$. Si $1 - a_3\beta_2 < 0$ ou seulement $1 - a_2\beta_1 - a_3\beta_2 < 0$, il est facile de démontrer que les conditions de convergence de l'intégrale V sont les mêmes.

Nous voyons ainsi que l'intégrale V est convergente si ses paramètres satisfont à trois conditions :

$$a_2\frac{\beta_1}{\beta}+a_3\frac{\beta_2}{\beta}>\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1}+a_3\frac{\beta_2}{\beta_1}>\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}-a_2,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_2}+a_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}>\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}-a_3.$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha_1}{\beta_1}>\frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Considérons maintenant l'intégrale triple

$$\mathrm{VI}=\int_a^\infty\int_b^\infty\int_c^\infty\frac{dx\,dy\,dz}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1})^{a_2}(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2}+z^{\gamma_2})^{a_3}},$$

où

$$\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha_1}{\beta_1},\qquad \frac{\beta}{\gamma}>\frac{\beta_1}{\gamma_1},\qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1}>\frac{\alpha_2}{\beta_2},\qquad \frac{\beta_1}{\gamma_1}>\frac{\beta_2}{\gamma_2}.$$

En supposant

$$a_1\alpha+a_2\alpha_1+a_3\alpha_2>1,$$
$$a_1\beta+a_2\beta_1+a_3\beta_2>1,$$
$$a_1\gamma+a_2\gamma_1+a_3\gamma_2>1,$$

nous pouvons ramener l'étude de cette intégrale à l'étude de l'intégrale

$$\mathrm{VI}=\int_A^\infty\int_B^\infty\int_C^\infty\frac{dx\,dy\,dz}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1})^{a_2}(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2}+z^{\gamma_2})^{a_3}}.$$

Imaginons dans le champ des variables x, y, z trois surfaces :

$$z^\gamma=x^\alpha+y^\beta,$$
$$z^{\gamma_1}=x^{\alpha_1}+y^{\beta_1},$$
$$z^{\gamma_2}=x^{\alpha_2}+y^{\beta_2}.$$

Ces surfaces divisent le champ en quatre domaines, de sorte que nous avons, dans le premier domaine,

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1}+z^{\gamma_1})^{a_2}(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2}+z^{\gamma_2})^{a_3}\\&=z^{a_1\gamma+a_2\gamma_1+a_3\gamma_2}.h_1;\end{aligned}$$

dans le deuxième

$$\varphi(x,y,z)=(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}\,z^{a_2\gamma_1+a_3\gamma_2}.h\ ;$$

dans le troisième,

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} z^{a_3\gamma_2}.h_3,$$

et dans le quatrième,

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}(x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}.h_4,$$

h_1, h_2, h_3 et h_4 étant compris entre 1 et $2^{a_1+a_2+a_3}$.

Donc, l'intégrale VI′, dans le premier domaine, est égale à

$$\begin{aligned}\mathrm{VI}_1 &= \frac{1}{h_1}\int_{C'}^{\infty}\frac{dz}{z^{a_1\gamma+a_2\gamma_1+a_3\gamma_2}}\int_{B}^{z^{\frac{\gamma}{\beta}}(1-\eta)} dy \int_{A}^{z^{\frac{\gamma}{\alpha}}(1-\eta_1)} dx \\ &= h'_1\int_{C'}^{\infty}\frac{dz}{z^{a_1\gamma+a_2\gamma_1+a_3\gamma_2-\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\beta}}} \quad (^1);\end{aligned}$$

dans le second elle a pour valeur

$$\begin{aligned}\mathrm{VI}_2 &= \frac{1}{h_2}\int_{A}^{\infty}\int_{B}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}}\int_{(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}^{(x^\alpha+y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}}\frac{dz}{z^{a_2\gamma_1+a_3\gamma_2}} \\ &= h'_2\int_{A}^{\infty}\int_{B}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1-\frac{1}{\gamma}(1-a_2\gamma_1-a_3\gamma_2)}} \quad (^2).\end{aligned}$$

La condition de convergence des intégrales VI_1 et VI_2 est donc seule

$$a_2\frac{\gamma_1}{\gamma} + a_3\frac{\gamma_2}{\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1.$$

L'intégrale VI′, dans le troisième domaine, est égale à

$$\begin{aligned}\mathrm{VI}_3 &= \frac{1}{h_3}\int_{A}^{\infty}\int_{B}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{a_2}}\int_{(x^{\alpha_2}+y^{\beta_2})^{\frac{1}{\gamma_2}}}^{(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}\frac{dz}{z^{a_3\gamma_2}} \\ &= h'_3\int_{A}^{\infty}\int_{B}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1}+y^{\beta_1})^{a_2-\frac{1}{\gamma_1}(1-a_3\gamma_2)}} \quad (^3).\end{aligned}$$

(1) Toujours $C' > C$.

(2) Nous supposons donc que $1 - a_2\gamma_1 - a_3\gamma_2 > 0$. Dans le cas contraire, nous aurons pour la convergence de l'intégrale VI_2 deux conditions : celles de l'intégrale VI_3.

(3) En supposant $1 - a_3\gamma_2 > 0$. Dans le cas où $1 - a_3\gamma_2 < 0$, il est aisé de démontrer que l'intégrale VI_3 converge, si ses paramètres satisfont à trois conditions qui sont celles de l'intégrale VI_4. Remarquons qu'il est impossible d'avoir à la fois $1 - a_2\gamma_1 - a_3\gamma_2 > 0$ et $1 - a_3\gamma_2 < 0$ parce que nous avons supposé $a_2 > 0$.

Les conditions de sa convergence sont

$$\left[a_2 - \frac{1}{\gamma_1}(1 - a_3\gamma_2)\right]\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2 + \frac{1}{\gamma_1}(1 - a_3\gamma_2).$$

Enfin, l'intégrale VI′, prise dans le quatrième domaine, qui est égale à

$$\mathrm{VI}_4 = h'_4\int_A^\infty\int_B^\infty \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}(x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3 - \frac{1}{\gamma_2}}},$$

donne encore trois conditions :

$$a_2\frac{\beta_1}{\beta} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{\beta_2}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} - a_3.$$

Donc, l'intégrale VI converge, si ses paramètres satisfont à six conditions :

$$a_2\frac{\gamma_1}{\gamma} + a_3\frac{\gamma_2}{\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1,$$
$$a_2\frac{\beta_1}{\beta} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{\beta_2}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} + a_3\frac{\gamma_2}{\gamma_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$
$$\left(a_1 - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\beta_1} + a_3\frac{\gamma_2}{\gamma_1} > \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2,$$
$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} - a_3,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \qquad \frac{\beta_1}{\gamma_1} > \frac{\beta_2}{\gamma_2}.$$

En général, pour l'intégrale

$$\mathfrak{J}_3 = \int_a^\infty\int_b^\infty\int_c^\infty\cdots\int_k^\infty\int_l^\infty \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots dx_{n-1}\,dx_n}{\left[\begin{array}{l}(x_1^\alpha + x_2^\beta + x_3^\gamma + \ldots + x_{n-1}^\varkappa + x_n^\lambda)^{a_1} \\ \times(x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + x_3^{\gamma_1} + \ldots + x_{n-1}^{\varkappa_1} + x_n^{\lambda_1})^{a_2} \\ \times(x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + x_3^{\gamma_2} + \ldots + x_{n-1}^{\varkappa_2} + x_n^{\lambda_2})^{a_3}\end{array}\right]},$$

on a $3(n-1)$ conditions :

$$a_2\frac{\lambda_1}{\lambda}+a_3\frac{\lambda_2}{\lambda}>\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots+\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\lambda}-a_1,$$

$$a_2\frac{\varkappa_1}{\varkappa}+\left(a_3-\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{\varkappa_2}{\varkappa}>\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots+\frac{1}{\varkappa}-a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1}+a_3\frac{\lambda_2}{\lambda_1}>\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\lambda_1}-a_2,$$

$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_1}+\left(a_3-\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}>\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_1}-a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left(a_1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\beta_1}+a_3\frac{\lambda_2}{\lambda_1}>\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\lambda_1}-a_2,$$

$$\left(a_1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\frac{\gamma}{\gamma_1}+a_3\frac{\lambda_2}{\lambda_1}>\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\lambda_1}-a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_1\frac{\alpha}{\alpha_2}+a_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}>\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\gamma_2}+\ldots+\frac{1}{\varkappa_2}+\frac{1}{\lambda_2}-a_3,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha_1}{\beta_1},\qquad \frac{\beta}{\gamma}>\frac{\beta_1}{\gamma_1},\qquad \ldots\qquad \frac{\varkappa}{\lambda}>\frac{\varkappa_1}{\lambda_1};$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}>\frac{\alpha_2}{\beta_2},\qquad \frac{\beta_1}{\gamma_1}>\frac{\beta_2}{\gamma_2},\qquad \ldots\qquad \frac{\varkappa_1}{\lambda_1}>\frac{\varkappa_2}{\lambda_2}.$$