E. VESSIOT

Sur la théorie des multiplicités et le calcul des variations

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 68-139
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__68_0>

SUR LA THÉORIE DES MULTIPLICITÉS ET LE CALCUL DES VARIATIONS

Par M. E. Vessiot.

1. Dans de précédentes publications ([1]) j'ai été conduit, par l'étude de la propagation d'un ébranlement par ondes, suivant la loi des ondes enveloppes (principe d'Huygens), à reprendre deux problèmes généraux du calcul des variations : l'étude du minimum d'une intégrale définie, de forme (homogène) donnée

$$J = \int F(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n), \tag{1}$$

prise suivant un arc de courbe variable, d'extrémités données; et celle du minimum de la valeur que prend, à l'extrémité d'un arc de courbe variable, d'origine et d'extrémités données, une variable t, de valeur donnée à l'origine de ce même arc et satisfaisant à une équation différentielle donnée

$$dt = F(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n). \tag{2}$$

Ces deux fonctionnelles représentent, en effet, la durée de la propagation le long de l'arc de courbe considéré, de son origine à son extrémité, en régime permanent dans le premier cas, en régime variable dans le second cas.

Le fait essentiel que l'on constate est que le minimum est donné par les arcs de trajectoires de la propagation, au moins pour des extrémités suffisamment rapprochées, lorsque l'arc considéré perce les ondes élémentaires, issues de ses points successifs (et dans le sens où l'ébranlement se transmet sur cet arc), en des points dans le voisinage desquels ces ondes sont concaves vers leurs origines respectives. Dans le premier des deux articles rappelés, j'avais déduit ce résultat de la considération de la variation seconde; dans le second, j'ai employé aussi une méthode

---

([1]) *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. XXXIV, 1906) ; *Essai sur la propagation par ondes* (*Annales de l'Éc. Normale sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909).

directe, plus rigoureuse, qui équivaut aux méthodes de Weierstrass et Hilbert et à laquelle l'étude de la propagation des ondes conduit presque intuitivement.

Dans sa thèse et, plus tard, dans son Mémoire sur les maxima et minima *forts* (¹), M. Carathéodory a fait usage d'une représentation géométrique, où interviennent dans le cas $n = 2$, et pour le premier des deux problèmes, les courbes d'onde, sous le nom d'*indicatrices*. Dans ses *Leçons sur le Calcul des variations* (²), auxquelles nous renverrons souvent dans cet article, M. Hadamard utilise une représentation géométrique analogue : c'est ce qu'il appelle la *figurative* du problème; il introduit, de plus, sa polaire réciproque, la *figuratrice;* et cela, dans les problèmes généraux auxquels il donne le nom de *problème de Lagrange* et *problème de Mayer*, et qui diffèrent des précédents, en ce que les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont liées par des relations différentielles données

$$(3) \qquad F_h(x_1, \ldots, x_n \,|\, dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

dans le cas de l'intégrale (1) (problème de Lagrange);

$$(4) \qquad F_h(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

dans le cas de l'équation (2) (problème de Mayer).

Mais, pour ces deux auteurs, il ne s'agit que d'illustrer des résultats analytiques, tandis qu'à notre point de vue les ondes élémentaires, ou les multiplicités d'onde, leurs homothétiques, sont à l'origine même du problème et le dominent complètement. C'est ainsi, par exemple, que se trouve absolument imposée l'introduction de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi, qui définit, pour nous, les familles d'ondes issues de l'ébranlement simultané des divers points d'une même multiplicité; ainsi que

---

(¹) *Ueber die discontinuierlichen Lösungen der Variations-Rechnung* (Göttingen, 1904);

Ueber die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen (*Math. Annalen*, t. LXII, 1906). M. Carathéodory dit bien que ses *indicatrices* ne diffèrent pas des *surfaces d'onde*, utilisées en Optique, mais il ne fait pas usage de cette analogie. Les Mémoires si remarquables de M. Carathéodory m'avaient, du reste, échappé au moment où je rédigeais mes précédents articles.

(²) Paris, 1910. M. Hadamard a professé au Collège de France, sur le Calcul des variations, à partir de 1902.

l'introduction du système canonique, qui est la traduction complète du mouvement général de propagation, dont le caractère essentiel est d'être un déplacement des éléments de contact des ondes.

2. Dans les pages qui suivent, nous traitons, au même point de vue, le *problème de Lagrange*. Les ondes élémentaires et les multiplicités d'onde qui leur correspondent sont ici des multiplicités à $n-1$ dimensions, dont le support ponctuel contient $\infty^{n-1-\alpha}$ points. Mais si l'on veut avoir une véritable propagation, on est conduit à supposer que le *support tangentiel* de ces multiplicités, c'est-à-dire le système des plans de leurs éléments de contact, contient ∞^{n-1} plans (¹). Or cela revient à supposer que le problème de calcul des variations est un *problème ordinaire* (²), hypothèse qui s'impose aussi dans le calcul des variations pour diverses raisons.

Déjà, dans nos précédents articles, s'était montrée l'importance du point de vue tangentiel dans les problèmes considérés : il équivaut à la considération de la figuratrice de M. Hadamard. Ici encore, c'est la représentation de la multiplicité d'onde par son support tangentiel qui est le fondement de notre méthode. Il est bien remarquable qu'elle permet d'éviter l'objection de du Bois-Reymond sur l'introduction prématurée des dérivées secondes dans une question qui n'en suppose pas l'existence, *a priori*. C'est, en effet, le système canonique d'Hamilton qui se présente d'abord pour définir les extrémales du problème.

On évite aussi les discussions, assez délicates, nécessaires pour justifier l'emploi des multiplicateurs de Lagrange; car ils se présentent ici d'eux-mêmes pour définir le choix que l'on a à faire entre les divers éléments de contact, associés à chaque point, sur les ondes élémentaires successivement rencontrées par une extrémale. Et l'on a ainsi, en outre, la vraie signification de ces multiplicateurs.

En ce qui concerne les conditions du minimum, nous nous

(¹) Sans cela, les ébranlements produits en un point quelconque, suivant certaines orientations des éléments de contact de ce point, ne pourraient pas se propager. Je reviendrai sur ce point dans un autre travail.

(²) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 239, 267, 268.

sommes bornés à établir des conditions suffisantes, en généralisant la méthode déjà employée dans notre article des *Annales de l'École Normale*, 1909. Elles se traduisent encore par la condition de concavité des multiplicités d'onde vers leurs origines, qui ne nous paraît pas encore avoir été énoncée pour ce problème.

Pour faciliter notre exposé, nous avons réuni dans une première Partie les principes sur la géométrie des multiplicités que nous aurions à employer. On y trouvera, outre la double représentation au moyen du support ponctuel et du support tangentiel, la définition et l'étude de la concavité, soit en un élément de contact, soit dans le domaine d'un tel élément. Pour discuter cette concavité, on est conduit à considérer la forme quadratique

$$\varpi = \sum_{i=1}^{n} dp_i \, dq_i,$$

où $p_1, \ldots, p_n$ sont les coordonnées du point d'un élément de contact, et $q_1, \ldots, q_n$ les coefficients de direction [1] de son plan. L'étude de cette forme quadratique se ramène à celle d'autres formes quadratiques, où interviennent les données de la représentation, ponctuelle ou tangentielle, de la multiplicité. De cette même forme ϖ dépendent les notions d'élément osculateur et de variation asymptotique pour les multiplicités les plus générales. Le fait qu'elle s'évanouit identiquement caractérise les multiplicités linéaires.

3. La considération des ondes, où l'intégrale J représente une durée de propagation, exige que l'élément différentiel soit positif. On ramène à ce cas, comme l'on sait, celui où cet élément changerait de signe, sur l'arc de courbe considéré, en ajoutant à F une différentielle totale convenablement choisie : cela revient à effectuer sur la multiplicité d'onde (qui peut toujours se définir) une

[1] Pour mieux mettre en évidence le caractère dualistique de toutes les considérations qui interviennent, nous avons imposé à ces $2n$ coordonnées la condition $\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1$. Mais il n'y aurait rien d'essentiel à changer, si l'on voulait employer des coordonnées homogènes.

transformation projective qui est la dualistique d'une translation. Au point de vue de l'énoncé des résultats, il est plus naturel alors de se borner à la considération des ondes élémentaires : le minimum a lieu s'il y a concavité quand F est positif, et convexité quand F est négatif.

Le procédé de représentation des multiplicités d'onde, que nous avons systématiquement employé, utilise l'équation tangentielle sous la forme résolue par rapport à la coordonnée d'homogénéité. En réalité, cela n'entraîne aucune restriction essentielle, car la condition de possibilité qui intervient est celle qui se présente aussi pour l'application des théorèmes d'existence des intégrales d'un système différentiel aux équations différentielles des extrémales écrites sous la forme donnée par Lagrange.

Néanmoins, nous nous réservons de montrer, dans un autre travail, que notre méthode de mise en équations des problèmes de calcul des variations n'est nullement liée à ce mode de représentation particulier, pas plus qu'au signe de l'élément différentiel. Elle peut aussi s'étendre au cas des intégrales multiples.

Remarquons, pour terminer, que le caractère analytique des équations différentielles du problème, tel qu'il résulte de notre exposé, consiste en ce qu'elles expriment que la variation de l'intégrale curviligne

$$\int \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i \tag{5}$$

est nulle, les variables $x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n$ étant liées par une seule relation

$$G_0(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 0. \tag{6}$$

On pourrait, par suite, rattacher l'étude du problème de Lagrange à la réduction d'une expression de Pfaff. Nous nous bornerons ici à l'indication de cette nouvelle méthode, qui serait susceptible de s'étendre aux problèmes non ordinaires, au problème de Mayer, et aussi aux problèmes d'extremum des intégrales multiples.

I. — Remarques sur la géométrie des multiplicités.

1. Dans un espace à n dimensions, désignons par $p_1, \ldots, p_n$ les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque, et convenons

de ramener l'équation d'un plan quelconque à la forme

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i X_i = 1,$$

$X_1, \ldots, X_n$ étant les coordonnées ponctuelles courantes. Les coordonnées d'un *élément de contact* seront alors $2n$ nombres $p_1, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$, liés par la relation

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1.$$

Se trouvent exclus les éléments de contact dont le plan passe à l'origine, et ceux dont le point est à l'infini [1].

Une *multiplicité* (M) à $n-1$ dimensions sera définie par un système (S) de $n+1$ équations entre les coordonnées de son élément de contact courant; ce système est assujetti à la double condition d'avoir comme conséquence l'équation (2), et l'une ou l'autre des deux équations de Pfaff [2]

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \, dp_i = 0,$$

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i = 0,$$

qui sont équivalentes en tenant compte de l'équation (2).

---

(1) Si l'on en avait quelqu'un à considérer, on pourrait se ramener au cas normal, respectivement, par l'une des transformations suivantes (translation et transformation corrélative) :

$$p'_i = p_i + a_i, \qquad q'_i = \frac{q_i}{1 + \sum_i a_i q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$q'_i = q_i + b_i, \qquad p'_i = \frac{p_i}{1 + \sum_i b_i p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(2) On ne parle, généralement, que de l'équation (3). Notre exposition a pour but de faire apparaître le rôle absolument symétrique des deux groupes de coordonnées $p_1, \ldots, p_n$ et $q_1, \ldots, q_n$.

Or, entre les équations de ce système (S), on peut éliminer $q_1, \ldots, q_n$. On obtient ainsi un certain nombre $\alpha + 1$ d'équations en $p_1, \ldots, p_n$, indépendantes entre elles. De même on peut éliminer $p_1, \ldots, p_n$ et obtenir $\beta + 1$ équations en $q_1, \ldots, q_n$, indépendantes entre elles. Les deux systèmes partiels ainsi obtenus

$$F_h(p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, \alpha), \tag{5}$$

$$G_k(q_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \beta), \tag{6}$$

définissent respectivement ce qu'on peut appeler le *support ponctuel* et le *support tangentiel* de la multiplicité : à savoir le lieu des points et la famille des plans qui, respectivement, font partie des éléments de contact de cette multiplicité.

L'un ou l'autre de ces supports définit entièrement la multiplicité. Rappelons-en la raison, pour le support ponctuel par exemple.

Dire que les équations (5) expriment le résultat de l'élimination de $q_1, \ldots, q_n$ entre les équations du système (S) équivaut à dire que les équations $dF_h = 0$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, \alpha)$ expriment toutes les relations indépendantes, en $dp_1, \ldots, dp_n$, qui résultent de la différentiation des équations du système (S). L'équation (3) ne peut donc être qu'une conséquenee des équations $dF_h = 0$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, \alpha)$. En exprimant ce fait, on obtient $n - \alpha - 1$ équations linéaires homogènes en $q_1, \ldots, q_n$, qui sont indépendantes et constituent avec (2), qui n'est pas homogène, un système (Σ) de $n - \alpha$ équations linéaires, indépendantes, en $q_1, \ldots, q_n$.

Cela posé, soit $(p_1, \ldots, p_n)$ un point du support (5). D'après la définition du support, il y a au moins un élément de contact de (M) associé à ce point. Et les coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ qui achèvent de définir un tel élément satisfont au système linéaire (Σ), en vertu de la définition des multiplicités et des explications précédentes. Si donc nous voulons déterminer tous les éléments de contact de (M) associés au point considéré, nous pourrons tirer de (Σ) les expressions de $n - \alpha$ des inconnues q_i en fonction des autres, $q_1, \ldots, q_\alpha$, par exemple, qu'il s'agira de calculer de manière à satisfaire aux équations obtenues en portant ces expressions dans les équations (S). Ces équations en $q_1, \ldots, q_\alpha$ ne sont pas incompatibles ; et, dès lors, elles ne peuvent être que des identités. Car, sans cela, le système (S) serait équivalent à un système formé de plus de $n+1$ équations indépendantes, et la multiplicité (M) aurait moins de $n-1$ dimensions.

Les éléments de contact de (M) sont donc entièrement définis par les équations (5) et le système (Σ) [1]. Quant au système (Σ), il est formé de l'équation (2) et des équations obtenues en éliminant les inconnues auxiliaires λ_h ($h=0, 1, 2, \ldots, \alpha$) entre les équations

$$(7) \qquad q_i = \frac{\partial f_0}{\partial p_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

où f désigne la fonction

$$(8) \qquad f_0 = \sum_{h=0}^{\alpha} \lambda_h F_h,$$

des variables indépendantes $p_1, \ldots, p_n$; $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$.

Il est, en général, préférable de garder les équations (7) telles quelles : l'élément de contact général de (M) se trouve ainsi exprimé au moyen des $\alpha+1$ paramètres λ_h et des $n-\alpha-1$ paramètres dont dépend le point courant du support ponctuel ; les paramètres étant liés par la relation

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f_0}{\partial p_i} = 1,$$

qui résulte de (2).

On remarquera que cette relation exclut le cas où le système (5) serait homogène; car le premier membre de (9) s'annulerait alors pour tout point du support. Dans ce cas, en effet, tous les éléments de contact de (M) se trouvent exclus par la condition (2).

Tous ces raisonnements et ces résultats s'appliquent au support

---

(1) De là résulte ce théorème : *Tous les plans associés à un même point pour former des éléments de contact de* (M) *forment un système linéaire*. Et, par suite, corrélativement : *Tous les points d'un même plan, qui forment avec lui des éléments de contact de* (M), *constituent une variété linéaire*.

tangentiel. On a donc une autre forme des équations de la multiplicité en associant aux équations (6) les équations

$$(10) \qquad p_i = \frac{\partial g_0}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a posé

$$(11) \qquad g_0 = \sum_{k=0}^{\beta} \mu_k G_k,$$

et l'équation de condition

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial g_0}{\partial q_i} = 1.$$

Il résulte enfin de là que les équations (6) résultent de l'élimination de $p_1, \ldots, p_n$; $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ entre les équations (5), (7), (9); et que les équations (5) résultent de l'élimination de $q_1, \ldots, q_n$; $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\beta$ entre les équations (6), (10), (12).

2. Les formules précédentes se simplifient si l'on donne aux équations des supports une forme particulière qui équivaut à l'emploi de coordonnées polaires. Occupons-nous, par exemple, du support ponctuel et supposons d'abord $\alpha = 0$. Tout point de ce support se trouve sur un certain rayon, issu de l'origine, dont nous désignerons par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les paramètres directeurs, et par ρ la longueur. Celle-ci se trouve définie par l'équation

$$(13) \qquad F_0(\rho a, \ldots, \rho a_n) = 0.$$

On peut la considérer comme définissant $\frac{1}{\rho}$ en fonction de $a_1, \ldots, a_n$, dans le voisinage du point considéré; car, en excluant les éléments de contact dont le plan passe à l'origine, nous avons exclu l'hypothèse $\rho = 0$. On obtient donc, pour ce domaine, une équation de la forme

$$(14) \qquad \frac{1}{\rho} = F(a_1, \ldots, a_n).$$

La fonction F reste positive dans ce domaine. On peut observer de plus qu'elle reste définie pour des valeurs $ma_1, \ldots, ma_n$, où m est suffisamment voisin de 1, car elles sont aussi voisines que l'on veut des valeurs initiales; et, sous la forme (13), on voit que la valeur de ρ, déduite par continuité de la première, est ainsi $\frac{\rho}{m}$. Donc la valeur de $\frac{1}{\rho}$ est $m\frac{1}{\rho}$, c'est-à-dire que la fonction F est homogène (*positivement*) du degré *un* (¹) ; on pourra lui appliquer l'identité d'Euler et ses dérivées partielles auront (*positivement*) les homogénéités connues.

Tout ceci reste vrai si l'on considère plus généralement $a_1, \ldots, a_n, \rho$ comme des coordonnées liées aux coordonnées $p_1, \ldots, p_n$ par les seules relations

$$p_i = \rho a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

sans imposer à $a_1, \ldots, a_n$ de restriction autre que celle d'être, respectivement, du même signe que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On pourra même supposer que $a_1, \ldots, a_n$ ont des valeurs aussi voisines qu'on voudra de $p_1, \ldots, p_n$; et, par suite, on déduira de l'équation (14) l'équation

$$\frac{1}{\rho} = F\left(\frac{p_1}{\rho}, \ldots, \frac{p_n}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}F(p_1, \ldots, p_n), \tag{16}$$

puisque $\frac{1}{\rho}$ sera aussi voisin de *un* que l'on voudra.

Par conséquent, l'équation du support apparaît sous la forme

$$0 = F_0 \equiv F(p_1, \ldots, p_n) - 1, \tag{17}$$

où F a la propriété d'homogénéité indiquée. Il est clair que cette équation, d'après la manière dont nous y sommes arrivés, ne peut représenter qu'une portion du support ponctuel qui est rencontrée en un point au plus par un rayon quelconque issu de l'origine.

Ce rayon n'est ici assujetti tout au plus qu'à la condition de ne balayer qu'une portion (à n dimensions) de l'espace considéré.

Si, au contraire, on suppose maintenant $\alpha > 0$, sa direction devra satisfaire à α conditions, qu'on pourra écrire sous la forme

(¹) S'il arrivait qu'elle ne fût pas, d'abord, définie pour toutes les valeurs $ma_1, \ldots, ma_n$ ($m > 0$), la propriété d'homogénéité permettrait de la *prolonger* à toutes ces valeurs. Mais les valeurs de m négatives restent exclues.

de α équations homogènes (*positivement*) de degré zéro, en $p_1, \ldots, p_n$. Ce seront les équations

$$(18) \qquad F_h(p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Les fonctions F_0, F_1, ..., F_α étant ainsi choisies, on voit immédiatement que la condition (9) équivaut à $\lambda_0 = 1$. La multiplicité (M) est donc définie, pour la portion considérée du support ponctuel, par les équations

$$(19) \qquad F(p_1, \ldots, p_n) = 1,$$

$$(20) \qquad F_h(p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

$$(21) \qquad q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut remarquer que f est homogène de degré *un* par rapport à toutes les variables $p_1, \ldots, p_n$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, toujours au point de vue positif. Il en résulte que le support tangentiel se déduira des seules équations (20) et (21), c'est-à-dire sans faire intervenir l'équation (19).

On remarquera qu'on pourrait, dans le système précédent, à cause de l'homogénéité des fonctions F et F_h, remplacer l'équation (19) par l'équation (2).

Le support tangentiel sera susceptible, à son tour, d'une représentation analogue qui s'appliquera à une portion de ce support telle qu'elle ne contienne qu'un plan rencontrant orthogonalement un rayon quelconque issu de l'origine. Les équations de ce support seront alors de la forme

$$(22) \qquad G(q_1, \ldots, q_n) = 1,$$

$$(23) \qquad G_k(q_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \beta),$$

G et les G_k étant *positivement* homogènes : G de degré un et les G_k de degré zéro [1]. Et pour avoir la multiplicité (M), ou du moins la partie qui correspond à cette portion du support tangentiel, il faut adjoindre aux équations (22) et (28) les équa-

---

[1] Les résultats suivants subsistent, en ce qu'ils ont d'essentiel, et les raisonnements sont à peine modifiés, quand on suppose le degré d'homogénéité des F_k et des G_k égal à *un*. Cette hypothèse est souvent plus commode dans les applications.

tions

$$(24)\qquad p_i = \frac{\partial g}{\partial q_i}, \qquad g = G + \sum_{k=1}^{\beta} \mu_k G_k \qquad = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme g est *positivement* homogène, de degré *un*, en $q_1, \ldots, q_n$; $\mu_1, \ldots, \mu_\beta$, le support ponctuel est ici défini par les équations (23) et (24) seules. Enfin (22) pourrait être remplacé par l'équation (2).

3. Supposons que la multiplicité (M) considérée dépende de un ou plusieurs paramètres, et soit a l'un d'eux : ce paramètre figurera dans les fonctions F, F_h, G, G_k. Les dérivées de ces fonctions sont alors liées par une relation simple qu'on obtient en différentiant l'identité (2) totalement, par rapport à toutes les variables de la question, le paramètre a compris. Les équations (3) et (4) ne sont plus alors vérifiées et l'on obtient seulement

$$(25)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i\, dp_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i = 0,$$

c'est-à-dire, à cause des formules (21) et (26),

$$(26)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

On a, d'autre part, à cause de (19), (20), (22), (23), les identités

$$(27)\qquad f = 1, \qquad g = 1,$$

que l'on peut différentier. Comme l'on a

$$(28)\qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_h} = F_h \quad (h = 1, 2, \ldots, \alpha); \qquad \frac{\partial g}{\partial \mu_k} = G_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta),$$

les termes en $d\lambda_h$ et $d\mu_k$ n'interviennent pas, et il reste

$$(29)\qquad \frac{\partial f}{\partial a} da + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0,$$

$$(30)\qquad \frac{\partial g}{\partial a} da + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

Par comparaison avec (26), on obtient alors la relation annoncée

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial a} = 0. \tag{31}$$

4. Voici une autre remarque dont nous aurons à faire usage.

Supposons que le support tangentiel soit à $n-1$ dimensions, ce qui sera pour nous le cas le plus important : les équations (23) n'existent pas alors et g se réduit à G. Les équations (24), à cause de leur homogénéité, donnent donc une représentation paramétrique du support ponctuel, au moyen des paramètres $q_1, \ldots, q_n$, dont les rapports interviennent seuls : nous pouvons même supposer, à cause de cette circonstance, que ces paramètres vérifient l'équation (22).

Alors $(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ est un élément de contact de la multiplicité (M), associé au point $(p_1, \ldots, p_n)$ du support ponctuel. Mais ce n'est pas nécessairement le seul. Pour les trouver tous, il faut chercher tous les systèmes $(p_1, \ldots, p_n;\ y_1, \ldots, y_n)$ qui satisfont aux conditions

$$\sum_{i=1}^{n} y_i p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i\, dp_i = 0. \tag{32}$$

Les p_i sont donnés par les équations (24) et, dans leurs différentielles, on peut considérer $dq_1, \ldots, dq_n$ comme indépendants ; car il ne s'agit maintenant que d'utiliser la représentation paramétrique du support ponctuel, pour laquelle on aurait pu faire abstraction de (22), à cause de l'homogénéité des formules (24). Les équations du problème sont donc

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1, \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i\, \partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

Pour les résoudre, on déterminera d'abord la solution générale des équations (34) et l'on disposera du facteur arbitraire qui y figure de manière à satisfaire à la condition (33).

Si donc le hessien de G, qui est identiquement nul à cause de l'homogénéité de G, est de rang un seulement, le système (33), (34) n'a qu'une solution qui est

$$y_i = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

et l'élément de contact $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ est le seul qui contienne le point $(p_1, \ldots, p_n)$ du support. C'est le cas où les équations (24) donnent une seule relation entre $p_1, \ldots, p_n$ seuls, c'est-à-dire où le support ponctuel est, lui aussi, à $n - 1$ dimensions.

Si au contraire le hessien de G est de rang $\alpha + 1$ $(\alpha > 0)$, c'est-à-dire si le support ponctuel est à $n - \alpha - 1$ dimensions, ce support est représenté par le système (19), (20), et le résultat exprimé par les formules (21) montre que la solution générale des équations (33), (34) s'écrit, avec α arbitraires $u_1, \ldots, u_\alpha$,

$$y_i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i}, \qquad \bar{f} = \mathrm{F} + \sum_{h=1}^{\alpha} u_h \mathrm{F}_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

Or les équations (19), (20), (21) ont pour conséquence, à leur tour, les équations (22) et (24). Donc les équations (19), (20) et (36), qui n'en diffèrent que par un changement de notations, auront pour conséquences d'abord

$$\overline{\mathrm{G}} \equiv \mathrm{G}(y_1, \ldots, y_n) = 1; \tag{37}$$

en désignant pour abréger par $\overline{\mathrm{G}}$ la fonction G écrite avec les lettres $y_1, \ldots, y_n$ au lieu de $q_1, \ldots, q_n$; et aussi

$$p_i = \frac{\partial \overline{\mathrm{G}}}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Par suite, toute solution du système (33), (34) satisfait au système formé de l'équation (37) et des équations

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{G}}}{\partial y_i} = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{39}$$

Supposons, de plus, que la multiplicité (M) dépende d'un paramètre a comme au n° 3. Les y_i peuvent être considérés, à cause des formules (36) et (24), comme des fonctions bien déterminées

$$(40)\qquad p_i = Q_{i,0}(q_1, \ldots, q_n) + \sum_{h=1}^{\alpha} u_h Q_{i,h}(q_1, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

des variables $q_1, \ldots, q_n$; $u_1, \ldots, u_\alpha$, qui constituent la solution générale du système (33), (34); et ces fonctions rendent identiques, non seulement ces équations, mais aussi les équations (37) et (39). Dans le cas actuel, ces identités ont lieu aussi en a, qui figure, comme paramètre également, dans les coefficients Q des formules (40). On obtient donc en différentiant, par rapport à a, les équations (33) et (37)

$$(41)\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial a} da + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial q_i} dy_i = 0,$$

$$(42)\qquad \frac{\partial \overline{G}}{\partial a} da + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{G}}{\partial y_i} dy_i = 0;$$

d'où, en tenant compte des équations (39), la formule

$$(43)\qquad \frac{\partial \overline{G}}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \, \partial a},$$

qui est une nouvelle conséquence des équations (33) et (34).

5. Dans l'application de l'étude des multiplicités au calcul des variations, la multiplicité (M) nous sera donnée par les équations (19), (20) qui définissent son support ponctuel; et nous ferons ensuite usage de la représentation (22), (23), (24), fondée sur le rapport tangentiel. Il nous faut donc examiner à quelle condition ce second mode de représentation est légitime, dans le domaine d'un élément de contact de la multiplicité.

Prenons, plus généralement, un support ponctuel à $n - \alpha - 1 = \gamma$ dimensions représenté par des équations paramétriques quelconques

$$(44)\qquad p_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_\gamma) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les éléments de contact $(p_1, \ldots, p_n; \; q_1, \ldots, q_n)$ associés à un point quelconque de ce support sont définis par les équations

$$(45)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, \gamma),$$

qui équivalent à la condition (3), et par l'équation (2) qui s'écrit ici

$$(46)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i = 1.$$

Pour arriver à la représentation du support tangentiel sous la forme (22), (23), nous nous donnons des coefficients de direction $(b_1, \ldots, b_n)$ de la normale au plan de l'élément de contact, et nous cherchons à déterminer cet élément (*cf.* n° **2**, où des considérations analogues sont appliquées au support ponctuel). Nous devons donc poser

$$(47)\qquad q_i = b_i \sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et chercher à obtenir $\frac{1}{\sigma}$ comme fonction de $b_1, \ldots, b_n$ par élimination des paramètres $t_1, \ldots, t_\gamma$. Nous avons à faire usage, à cet effet, des équations obtenues en portant les valeurs (47) dans les équations (45) et (46). Si nous posons pour abréger, en considérant $b_1, \ldots, b_n$ comme des constantes données,

$$(48)\qquad \bar{\varphi}(t_1, \ldots, t_\gamma) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i,$$

cela donne les équations

$$(49)\qquad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, \gamma)$$

et

$$(50)\qquad \frac{1}{\sigma} = \varphi;$$

et nous pouvons remplacer cette dernière par la combinaison

$$(51)\qquad \frac{1}{\sigma} = \bar{\varphi} - \sum_{l=1}^{\gamma} t_l \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l} = \varphi_0.$$

Comme on a alors l'identité

$$d\varphi_0 + \sum_{l=1}^{\gamma} t_l \, d \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l} = 0, \tag{52}$$

on voit que φ_0 est fonction de celles des dérivées $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l}$ qui sont indépendantes. Par suite, tout dépend uniquement du déterminant fonctionnel de ces dérivées, c'est-à-dire du hessien de la fonction $\bar{\varphi}$; ou encore, si l'on étudie ce qui se passe dans le domaine d'un élément de contact $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ de la multiplicité, de la nature du hessien de la fonction de $t_1, \ldots, t_\gamma$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i, \tag{53}$$

où $q_1, \ldots, q_n$ sont considérés comme constants ([1]).

Pour un élément de contact général de la multiplicité (M), ce hessien sera d'un certain rang β ($\beta \geqq 0$) ; et, dans le domaine de cet élément, on aura la représentation (22), (23), (24) de (M). Et une telle représentation ne cessera d'être applicable que pour les éléments de contact qui élèvent le rang du hessien considéré.

6. On arrive à un énoncé plus géométrique si l'on observe que ce hessien est le discriminant de la forme quadratique, en $dt_1, \ldots, dt_\gamma$, qu'on obtient en calculant l'expression différentielle $\varpi \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$ correspondant à un déplacement quelconque sur la multiplicité, à partir d'un de ses éléments. On a en effet

$$\sum_{i=1}^{n} dp_i \, dq_i = \sum_{i=1}^{n} dq_i \sum_{l=1}^{\gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} dt_l = \sum_{l=1}^{n} dt_l \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} dq_i. \tag{54}$$

([1]) On arrive plus vite à ce même résultat en constatant que les équations (45) déterminent les points du support où un plan tangent est parallèle au plan

$$\sum_{i=1}^{n} q_i X_i = 0.$$

Mais la différentiation des identités (45) donne aussi

$$(55) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} dq_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \, d\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, \gamma);$$

de sorte qu'il vient

$$(56) \qquad \varpi \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i \, dq_i = -\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{l=1}^{\gamma} \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_l \, \partial t_m} dt_l \, dt_m.$$

Et le hessien considéré est bien le discriminant de la forme quadratique ainsi obtenue.

La multiplicité (M) étant à $n - 1$ dimensions, cette forme quadratique $\sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$ serait écrite, sous la forme la plus générale, au moyen de $n - 1$ différentielles indépendantes, et doit être considérée comme une forme quadratique à $n - 1$ variables. Nous l'aurions obtenue ainsi avec le mode de représentation employé dans le cas $\alpha = 0$ $(\gamma = n - 1)$, c'est-à-dire dans le cas où le support ponctuel a le nombre maximum de dimensions. On voit, de plus, que si $\beta = 0$, c'est-à-dire si le support tangentiel a aussi le nombre maximum de dimensions, le rang de son discriminant est nul, et cette forme quadratique est de la classe générale.

Dans le cas général, le rang de son discriminant, en considérant toujours cette forme quadratique comme à $n - 1$ variables, est $\alpha + \beta$; et la forme est la somme de $(n - 1 - \alpha - \beta)$ carrés indépendants. Ceci, bien entendu, en supposant que l'on a affaire à une variation $(dp_1, \ldots, dp_n; dq_1, \ldots, dq_n)$ effectuée à partir d'un élément de contact général de (M).

La représentation (22), (23), (24) [*et, par suite aussi, par raison de symétrie, la représentation* (19), (20), (21)] *ne peut cesser d'être valable que dans le domaine des éléments de contact qui élèvent le rang du discriminant de la forme* $\varpi \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$. *Nous dirons que de tels éléments sont* EXCEPTIONNELS.

7. Cet énoncé, qui résume la discussion précédente, est facile à appliquer à tous les modes de représentation de la multiplicité. Pour résoudre la question posée au début de ce paragraphe, appliquons-le au cas où la multiplicité est donnée sous la forme (19), (20), (21). La forme quadratique à considérer est alors

$$(57)\qquad \varpi \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i\,dq_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\,\partial p_j}\,dp_i\,dp_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,dp_i\,d\lambda_h;$$

mais il faut y supposer les variables $dp_1, \ldots, dp_n$ liées par les équations de condition obtenues en différentiant les équations (19) et (20), à savoir

$$(58)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,dp_i = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

$$(59)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\,dp_i = 0;$$

ce qui réduira le nombre des variables $dp_1, \ldots, dp_n$; $d\lambda_1, \ldots, d\lambda_\alpha$ à $n - 1$. Il faut observer en effet que nous écartons, comme *singuliers*, les points du support ponctuel pour lesquels ces équations (58), (59), en $dp_1, \ldots, dp_n$ cesseraient d'être indépendantes, car pour de tels points la condition normale de résolubilité du système (19), (20) cesserait d'être remplie.

Quant à la forme quadratique (57), elle se réduit, en tenant compte de (58), à la forme

$$(60)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\,\partial p_j}\,dp_i\,dp_j;$$

et nous avons à déterminer le rang de son discriminant, c'est-à-dire la différence entre le nombre des variables (ici $n - 1$) et le nombre des équations indépendantes obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles de la forme par rapport à ces variables.

Rappelons comment on résout les questions de ce genre. Soit Q une forme quadratique à m variables $X_1, \ldots, X_m$, liées par des relations linéaires indépendantes, $L_1 = 0, \ldots, L_p = 0$. On peut faire un changement linéaires de variables tel qu'on ait identiquement $L_1 \equiv X_1, \ldots, L_p \equiv X_p$; et les équations de condition étant alors $X_1 = 0, \ldots, X_p = 0$, il reste à considérer la forme

$$\overline{Q} = Q(0, \ldots, 0, X_{p+1}, \ldots, X_m), \tag{61}$$

qui donne le système

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = p+1, \ldots, m), \tag{62}$$

qui est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial Q}{\partial X_i} = 0 & (i = p+1, \ldots, m), \\ X_h = 0 & (h = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right. \tag{63}$$

Or si l'on considère la forme quadratique à $m+p$ variables

$$S \equiv Q + \sum_{h=1}^{p} Y_h L_h \equiv Q + \sum_{h=1}^{p} Y_h X_h, \tag{64}$$

et si l'on égale à zéro ses dérivées partielles, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial Q}{\partial X_h} + Y_h = 0 & (h = 1, 2, \ldots, p), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial X_i} = 0 & (i = p+1, \ldots, m), \\ X_h = 0 & (h = 1, 2, \ldots, p); \end{array}\right. \tag{65}$$

qui contient manifestement p équations indépendantes de plus que le système (63), où les variables $Y_1, \ldots, Y_p$ ne figurent pas. Le rang du discriminant de $\overline{Q}$ est donc le même que le rang du discriminant de S, où les $m+p$ variables sont indépendantes.

Appliquons ce résultat à la forme (60). En posant, pour abréger l'écriture, $dp_i = P_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, nous aurons à considérer la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\, \partial p_j} P_i P_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{\partial F_h}{\partial p_i} P_i Y_h + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} P_i Y, \tag{66}$$

qui donne le système

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \, \partial p_j} P_j + \frac{\partial F_h}{\partial p_i} Y_h + \frac{\partial F}{\partial p_i} Y = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{67}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial p_j} P_j = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \tag{68}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} P_j = 0. \tag{69}$$

Multiplions les équations (67) et (68) respectivement par p_i et λ_h, et ajoutons : comme f est homogène de degré un, par rapport aux p_i et aux λ_h, et comme l'on a

$$\frac{\partial F_h}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_h \, \partial p_j},$$

nous obtiendrons, en tenant compte aussi de l'homogénéité de F_h et de F, et enfin de l'équation (19), la combinaison simple

$$Y = 0. \tag{70}$$

Le système considéré est donc équivalent à celui qu'on obtient en adjoignant l'équation (69) et l'équation (70) au système

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \, \partial p_j} P_j + \frac{\partial F_h}{\partial p_i} Y_h = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{71}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial p_j} P_j = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{72}$$

Les équations (69) et (70) sont visiblement indépendantes entre elles. L'équation (70) ne peut être conséquence des équations (71) et (72); et il en est de même de l'équation (69), car elle n'admet pas la solution

$$P_j = p_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad Y_h = \lambda_h \quad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

qui vérifie le système (71) et (72), pour les raisons d'homogénéité déjà utilisées.

Le système (67), (68), (69) a donc un nombre d'équations indépendantes supérieur de deux unités à celui des équations indépendantes du système (71), (72). Or ce dernier système est, aux notations près, celui qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles de la forme quadratique qui constitue le second membre de l'identité (57). Comme cette forme contient $\alpha + 1$ variables de moins [1] que la forme (66), nous concluons que *le rang du discriminant de la forme* $\varpi \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i\, dq_i$ *est supérieur de* $\alpha - 1$ *unités au rang du hessien de la fonction* f. *Il serait, de même, supérieur de* $\beta - 1$ *unités au rang du hessien de la fonction* g.

Donc *les éléments exceptionnels de la multiplicité* (M), *définie par les équations* (19), (20), (21), *pour lesquels peut tomber en défaut le mode de représentation corrélatif* (22), (23), (24), *sont ceux qui élèvent le rang du hessien de la fonction* f.

8. L'étude de la forme $\varpi \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$ équivaut à celle des propriétés projectives du second ordre des multiplicités. Elle permettrait de classer, d'une manière plus précise, les éléments exceptionnels que nous venons de considérer d'après le nombre d'unités dont ils élèvent le rang de cette forme ϖ.

Dans le cas de l'espace ordinaire, par exemple, $n = 3$. Pour les surfaces non développables $\alpha = 0$, $\beta = 0$; et ϖ est une forme générale à deux variables : les éléments exceptionnels, pour lesquels ϖ est un carré parfait, correspondent aux points paraboliques du support ; ceux pour lesquels ϖ serait identiquement nul correspondent aux plans tangents pour lesquels la distance d'un point voisin du point de contact à un tel plan est un infiniment petit d'ordre supérieur au second.

Pour les surfaces développables $\alpha = 0$, $\beta = 1$: ϖ se réduit, en général, à une forme à une seule variable ; elle devient identiquement nulle pour les points exceptionnels où l'ordre de contact du plan tangent avec la surface s'élève.

---

[1] Il faut se rappeler que (66) doit être considérée comme dépendant des variables $P_i = dp_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $d\lambda_h$ $(h = 1, 2, \ldots, \alpha)$, Y_h $(h = 1, 2, \ldots, \alpha)$ et Y. Si donc le système (71), (72) contient exactement $n + \alpha - (\beta + 1)$ équations indépendantes, le rang du hessien de f est $(\beta + 1)$; et le rang du discriminant de (66) est $n + 2\alpha + 1 - (n + \alpha - \beta + 1) = \alpha + \beta$.

Pour un plan seulement, on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2;$$

et la forme est nulle identiquement.

Pour une courbe on a $\alpha = 1$, et le cas $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ne se produit que si la courbe devient une droite. On a donc en général $\beta = 0$; et ϖ est une forme réductible à un seul carré; elle est identiquement nulle pour les éléments de contact exceptionnels formés d'un point de la courbe et de son plan osculateur.

Pour une droite, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, et ϖ est nulle identiquement.

Enfin pour un point, ϖ est encore nulle identiquement.

Dans le cas où n est quelconque, le rang $(\alpha + \beta)$ du discriminant est nécessairement au plus égal à $n - 1$. Ceci est évident, *a priori*, car les $(\alpha + 1)$ équations du support ponctuel, et les $(\beta + 1)$ équations du support tangentiel sont indépendantes, et le nombre total des équations entre $p_1, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$ qui définissent une multiplicité à $n - 1$ dimensions est $n + 1$. Remarquons que cela équivaut à dire que la somme des nombres de dimensions des deux supports est au moins égale à $n - 1$.

On peut montrer que si les inégalités précédentes se changent en égalités, c'est-à-dire *si la forme ϖ est nulle identiquement, la multiplicité est linéaire.*

Reportons-nous, en effet, à la formule (66). Nous pouvons supposer qu'on a choisi pour paramètres $t_1, \ldots, t_\gamma$, γ coordonnées p_i, par exemple $p_1, p_2, \ldots, p_\gamma$. Alors $q_1, q_2, \ldots, q_\gamma$ disparaissent de la forme (56), tandis que les équations de condition (45) se résolvent précisément par rapport à ces coordonnées. Pour exprimer que (56) est identiquement nulle, on n'a donc pas à tenir compte des équations de conditions, et l'on obtient ce résultat que toutes les dérivées secondes des fonctions $(\varphi_{\gamma+1}, \varphi_{\gamma+2}, \ldots, \varphi_n)$ sont nulles identiquement. Ces fonctions sont donc linéaires et, par conséquent, il en est de même des équations du support ponctuel et, par suite aussi, de celles du support tangentiel, d'après la dualité de toutes nos considérations.

On vérifie du reste que si le support ponctuel est

$$(73) \qquad p_{\gamma+h} = \sum_{l=1}^{\gamma} a_{hl} p_l a_h \qquad [h = 1, 2, \ldots, (\alpha + 1)],$$

le support tangentiel est donné par les équations (45), qui sont :

$$q_l + \sum_{h=1}^{\alpha+1} a_{hl} q_{\gamma+h} = 0, \tag{74}$$

et par l'équation (46), qui se réduit à

$$\sum_{h=1}^{\alpha+1} a_h q_{\gamma+h} = 1. \tag{75}$$

Remarquons que, d'après les remarques faites ci-dessus, on peut énoncer le résultat obtenu ainsi : *Les seules multiplicités pour lesquelles la somme des nombres des dimensions des deux supports est égale à $n-1$ sont les multiplicités linéaires; les deux supports d'une multiplicité sont linéaires en même temps, si cette multiplicité est à $n-1$ dimensions.*

Sur une multiplicité non linéaire, la forme ϖ ne peut donc s'annuler identiquement que pour des éléments exceptionnels, qu'on pourra appeler des *éléments osculateurs.*

9. Considérons un élément de contact de la multiplicité (M), pour lequel la forme $\varpi = \sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$ ne soit, ni identiquement nulle, ni réductible à un seul carré ([1]). Il y a alors des variations $(dp_1, \ldots, dp_n;\ dq_1, \ldots, dq_n)$, effectuées à partir de cet élément, qui annulent la forme ϖ. C'est ce qu'on peut appeler les *variations asymptotiques;* mais il est entendu qu'on exceptera celles pour lesquelles tous les dp_i ou tous les dq_i seraient nuls.

Si l'on considère plus spécialement le support ponctuel, à une variation asymptotique correspondra une *direction asymptotique* sur ce support; mais si β n'est pas nul, il correspondra inversement à cette direction asymptotique une infinité de variations asymptotiques, car les q_i étant exprimés par les formules (21), les dq_i dépendent des dp_i et des $d\lambda_h$; et les $d\lambda_h$ restent arbitraires ici, puisqu'ils disparaissent de la formule (57) quand on tient

([1]) Le cas d'un support ponctuel, ou d'un support tangentiel, à une dimension est exclu par là [*voir* équation (56)].

compte de (59). Au contraire, la variation asymptotique est entièrement déterminée par la direction asymptotique quand le support tangentiel est à $n-1$ dimensions.

Si l'on considère le support tangentiel, à une variation asymptotique correspond une *caractéristique asymptotique;* à savoir la multiplicité linéaire à $n-2$ dimensions, définie par les deux équations

$$\sum_{i=1}^{n} q_i X_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} dq_i X_i = 0. \tag{76}$$

On voit alors immédiatement qu'une variation asymptotique est formée par l'association d'une direction du support ponctuel et d'une caractéristique du support tangentiel telles que cette caractéristique contienne cette direction. Et la réciproque se voit en même temps par les mêmes équations : il est bien entendu que la direction et la caractéristique considérées sont supposées fournies par une même variation de l'élément de contact considéré sur la multiplicité. Remarquons encore que toute multiplicité linéaire à $n-2$ dimensions, contenue dans le plan de l'élément de contact, et passant par le point de cet élément, peut être considérée comme une caractéristique de cet élément.

10. La forme $\varpi = \sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$ intervient encore dans la notion de *concavité* et de *convexité* d'une multiplicité, qui joue un rôle essentiel dans le calcul des variations. On peut, pour définir cette notion, se placer à deux points de vue corrélatifs. Soient $(p_1, \ldots, p_n\,;\, q_1, \ldots, q_n)$ un élément de contact (E) de la multiplicité, et $(p'_1, \ldots, p'_n;\, q'_1, \ldots, q'_n)$ un élément de contact voisin (E′) de la même multiplicité, qui sera quelconque dans le domaine de (E).

Au premier point de vue, la multiplicité sera *concave en* (E) *vers l'origine*, si le point de (E′) est constamment du même côté que l'origine par rapport au plan de (E). Au second point de vue, la multiplicité sera concave en (E) vers l'origine, si le point de (E) est toujours du même côté que l'origine par rapport au plan de (E′). Cela se traduira donc, suivant la définition adoptée, par l'une ou l'autre des inégalités

$$(77)\qquad \sum_{i=1}^{n} p'_i q_i - 1 < 0,$$

$$(78)\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - 1 < 0.$$

Les deux définitions sont, du reste, équivalentes, si l'on considère la *concavité dans une région* de la multiplicité : les éléments (E), (E′) sont alors deux éléments quelconques, différents, mais suffisamment voisins de ce domaine et jouent un rôle symétrique dans la question.

La concavité dans une région s'exprimera donc par des inégalités de la même nature, quel que soit le support, ponctuel ou tangentiel, au moyen duquel on définira la multiplicité.

Revenons à la concavité en un élément et considérons, par exemple, l'inégalité (77). Les p'_i se déduisent des p_i en donnant, aux paramètres qui définissent l'élément particulier (E) considéré, des accroissements arbitraires infiniment petits. Si nous ordonnons le premier membre de (77) suivant les puissances de ces accroissements, le terme de degré zéro, qui est $\sum_{i=1}^{n} p_i q_i - 1$, est nul à cause de la condition (2) et l'ensemble des termes du premier degré, qui est $\sum_{i=1}^{n} q_i \, dp_i$ est nul à cause de l'équation (3); enfin l'ensemble des termes du second degré est, comme il résulte de la différentiation de l'équation (3),

$$(79)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \, d^2 p_i = -\sum_{i=1}^{n} dp_i \, dq_i = -\varpi.$$

On obtient le même résultat pour le premier membre de (78).

Par conséquent, *l'une et l'autre concavité sont réalisées si la forme* ϖ *ne peut prendre que des valeurs positives, pour toute variation effective de l'élément de contact considéré :* nous entendons par là que cette variation ne doit annuler ni tous les dp_i, ni tous les dq_i. *L'une ou l'autre concavité ne peut être* *réalisée que si la forme ϖ ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles.*

On passe naturellement de la concavité à la *convexité* en changeant les signes dans tout ce qui précède.

Si l'un des deux supports de la multiplicité est à une dimension, on voit par la formule (56) qu'en un élément qui n'est ni singulier, ni osculateur, la multiplicité est ou convexe, ou concave vers l'origine. Si les deux supports, au contraire, sont à plus d'une dimension, la concavité et la convexité doivent être considérées comme des faits exceptionnels; *il y a concavité ou convexité si toutes les variations asymptotiques sont imaginaires*, car alors la forme ϖ, ne pouvant s'annuler, ne peut non plus changer de signe, et la condition suffisante énoncée précédemment se trouve remplie.

11. Cette même condition suffisante exige, pour pouvoir être vérifiée, que l'un au moins des supports soit à $n-1$ dimensions. Reportons-nous, en effet, à la formule (56) et aux considérations du n° 6. Si le support tangentiel n'est pas à $n-1$ dimensions, le second membre de (56) se décompose en moins de $\gamma = n - \alpha - 1$ carrés; en égalant ces carrés à zéro, on définit un ou plusieurs déplacements asymptotiques réels sur le support ponctuel. Or, si le support ponctuel a aussi moins de $n-1$ dimensions, il figure dans l'expression des dq_i, comme on l'a remarqué au n° 9, outre les dt_l, des quantités arbitraires $d\lambda_h$ $(h = 1, 2, \ldots, \alpha)$; aux déplacements asymptotiques réels obtenus correspondent donc des variations asymptotiques réelles dans lesquelles les dq_i, pas plus que les dp_i, ne sont tous nuls, c'est-à-dire des variations asymptotiques effectives.

Supposons d'abord que le support tangentiel soit à $n-1$ dimensions, et bornons-nous à considérer des éléments de contact non exceptionnels. La condition suffisante trouvée équivaut à la suivante : la forme ϖ est la somme de $n - 1 - \alpha = \gamma$ carrés positifs indépendants. Exprimée par la formule (56) et considérée comme forme en $dt_1, \ldots, dt_\gamma$, ϖ est donc une forme définie positive.

Considérons alors ϖ sous la forme (57) ou, plus exactement, considérons la forme $\overline{\varpi}$ à $n + \alpha$ variables indépendantes $dp_1, \ldots,$

dp_n; $d\lambda_1$, ..., $d\lambda_\alpha$ qui constitue cette expression. Nous savons, par le n° 7, que, pour que ϖ soit la somme de $n-1-\alpha=\gamma$ carrés indépendants, il est nécessaire et suffisant que cette forme $\overline{\varpi}$ soit la somme de $n+\alpha-1=\gamma+2\alpha$ carrés indépendants : en d'autres termes, que le hessien de f soit nul, mais non tous ses mineurs du premier rang.

Pour exprimer la seconde partie de la condition, effectuons la réduction de ϖ en carrés. En posant

$$(80)\qquad U_h=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}dp_i \qquad (h=1,2,\ldots,\alpha),$$

et désignant par V_1, ..., $V_{n-\alpha}$ d'autres formes linéaires en dp_1, ..., dp_n qui forment avec les formes U_1, ..., U_α un système de n formes indépendantes, on peut écrire la forme quadratique $\overline{\varpi}$

$$(81)\qquad \overline{\varpi}=\sum_{h=1}^{\alpha}U_h\,d\lambda_h+\sum_{h=1}^{\alpha}U_h U'_h+Q(V_1,\ldots,V_{n-\alpha}),$$

où Q est une forme quadratique et où les U'_h sont des formes linéaires en U_1, ..., U_α; V_1, ..., $V_{n-\alpha}$. Donc en posant

$$(82)\qquad W_h=d\lambda_h+U'_h \qquad (h=1,2,\ldots,\alpha),$$

nous aurons

$$(83)\qquad \overline{\varpi}=\sum_{h=1}^{\alpha}U_h W_h+Q(V_1,\ldots,V_{n-\alpha}).$$

Comme $\overline{\varpi}$ se réduit à $\gamma+2\alpha$ carrés indépendants, Q sera la somme de γ carrés seulement ($\gamma=n-\alpha-1$), de sorte qu'on a finalement

$$(84)\qquad \overline{\varpi}=\sum_{h=1}^{\alpha}U_h W_h+\sum_{l=1}^{\gamma}\varepsilon_l T_l^2,$$

où les U_h, W_h, T_l sont des formes réelles et indépendantes, et où les ε_l sont égaux à $(+1)$ ou à (-1).

Si l'on tient compte des conditions (58), (59), les T_l deviendront de nouvelles formes linéaires T'_l en dp_1, ..., dp_n seulement; et comme les U_h seront nuls, et que nous devons obtenir, pour ϖ,

γ carrés indépendants, ces T'_l seront des formes indépendantes, de telle sorte que la forme réduite de ϖ est

(85) $$\varpi = \sum_{l=1}^{\gamma} \varepsilon_l T_l'^2.$$

La condition suffisante pour la concavité exige donc que les ε_l soient tous égaux à $(+1)$ et, si l'on se reporte à la formule (84), on voit que cela équivaut à dire que $\overline{\varpi}$ se décompose en

$$\alpha + \gamma = n - 1$$

carrés positifs et α carrés négatifs. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La condition suffisante pour la concavité s'exprime, dans le cas $\beta = 0$, par ce fait que la forme quadratique à $n+\alpha$ variables

(86) $$\overline{\varpi} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \, \partial p_j} dp_i \, dp_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{\partial F_h}{\partial p_i} dp_i \, d\lambda_h$$

se décompose en une somme de $(n+\alpha-1)$ carrés réels indépendants, dont α sont affectés du signe $(-)$ et $(n-1)$ du signe $(+)$.

Passons au cas où le support tangentiel est à $(n-\beta-1)$ dimensions $(\beta > 0)$, mais où, par conséquent, le support ponctuel est à $(n-1)$ dimensions. La fonction f se réduit à F, et les $d\lambda_h$ disparaissent de la forme $\overline{\varpi}$,qui est simplement

(87) $$\overline{\varpi} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \, \partial p_j} dp_i \, dp_j.$$

Le rang du discriminant de ϖ étant alors β, le hessien de F est, d'après le n° 7, de rang $\beta - (\alpha - 1) = \beta + 1$; et $\overline{\varpi}$ se décompose en $(n-\beta-1)$ carrés indépendants, comme la forme ϖ elle-même [1].

[1] D'une manière générale, on conclut du n° 7 que, *dans tous les cas, $\overline{\varpi}$ contient 2α carrés indépendants de plus que ϖ.* Ici $\alpha = 0$, donc le nombre des carrés est le même dans les deux formes.

Si donc on a mis $\overline{\varpi}$ sous la forme

$$\overline{\varpi} = \sum_{m=1}^{\delta} \varepsilon_m T_m^2 \qquad (\delta = n - \beta - 1), \tag{88}$$

on voit que, quand on tiendra compte de (59), les T_m deviendront des formes linéaires T'_m, à $n - 1$ variables seulement, indépendantes, et l'on aura

$$\varpi = \sum_{m=1}^{\delta} \varepsilon_m T'^2_m. \tag{89}$$

La condition suffisante de concavité dans le cas $\alpha = 0$ est donc que la forme $\overline{\varpi}$ ne contienne que des carrés positifs.

Ajoutons que le même mode de raisonnement prouverait plus généralement que *la forme $\overline{\varpi}$ a 2α carrés indépendants de plus que la forme ϖ, dont α carrés positifs et α carrés négatifs.* Donc *pour que ϖ n'ait que des carrés positifs, il faut et il suffit que $\overline{\varpi}$ n'ait que α carrés négatifs.*

Enfin *une condition nécessaire pour la concavité est que la forme ϖ ne contienne que des carrés positifs et, par suite, que la forme $\overline{\varpi}$ ne contienne que α carrés négatifs.*

On obtiendrait naturellement des résultats tout semblables en partant de la représentation tangentielle (22), (23), (24) de la multiplicité. La forme $\overline{\varpi}$ serait remplacé par la forme

$$\overline{\overline{\varpi}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} dq_i\, dq_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{\beta} \frac{\partial G_k}{\partial q_i} dq_i\, d\mu_k, \tag{90}$$

et le nombre α par le nombre β.

II. — Le problème de Lagrange. Mise en équations.

12. Il s'agit d'étudier les conditions d'extremum d'une intégrale curviligne de l'espace à n dimensions :

$$\int F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{1}$$

prise suivant un arc de courbe dont les extrémités peuvent être assujetties à des conditions données de diverse nature; et qui lui-même peut aussi être astreint à satisfaire à un système différentiel du premier ordre

$$F_h(x_1, \ldots, x_n) \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{2}$$

Nous supposerons l'arc de courbe donné paramétriquement au moyen d'une variable u, variant de o à 1, par exemple, et toujours en croissant.

La fonction $F(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$ est, comme on sait ([1]), une fonction homogène (*positivement*) des arguments $y_1, \ldots, y_n$. Nous supposerons, de plus, que $F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n)$ ne prend que des valeurs positives ([2]), au moins pour les courbes que nous aurons à considérer, les différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$ correspondant à un accroissement positif quelconque du. Les fonctions $F_h(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$ sont homogènes, de degré zéro, et au moins positivement, par rapport aux arguments $y_1, \ldots, y_n$. Posons alors

$$F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = \omega\, du; \tag{3}$$

ω sera une variable positive, définie par cette équation, et nous aurons à étudier les conditions d'extremum de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \omega\, du. \tag{4}$$

Nous remplacerons de plus les équations de condition (2) et (3) par le système suivant, qui leur est équivalent, à cause des conditions d'homogénéité supposées :

$$dx_i = \omega p_i\, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$F(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{6}$$

$$F_h(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{7}$$

En d'autres termes, nous introduisons, en même temps que la variable ω, qui correspond à un élément de l'intégrale, les variables $p_1, \ldots, p_n$ qui correspondent à un élément de la courbe.

([1]) *Cf.* Hadamard, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 80.

([2]) Cette restriction, comme nous le montrerons plus loin (n° 20) peut être levée. *Cf.* Hadamard, *loc. cit.*, p. 384.

Et nous voyons que le problème est caractérisé par la nature de la multiplicité (6), (7) qui se trouve associée à chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace. A cause des formules (5), nous devrons interpréter $p_1, \ldots, p_n$ comme les coordonnées d'un point du même espace par rapport à un nouveau système d'axes, parallèles aux axes de coordonnées primitifs, et ayant le point $x_1, \ldots, x_n$ pour origine : ce qui revient à dire que, dans le système de coordonnées primitif, ce même point aurait pour coordonnées $x_1 + p_1, \ldots, x_n + p_n$. La multiplicité ponctuelle ([1]) ainsi introduite s'appellera la *multiplicité d'onde*, qui a pour origine le point $(x_1, \ldots, x_n)$.

Considérons les points de l'espace comme pouvant être affectés de modifications ou ébranlements, de nature déterminée, qui se propagent ensuite, de proche en proche, suivant la loi suivante : l'ébranlement qui se manifeste en un point, à un instant, se manifeste, au bout d'un temps infiniment petit dt, en tous les points de l'*onde élémentaire* que l'on obtient en construisant l'homothétique de la multiplicité d'onde qui a pour origine le point considéré, le pôle d'homothétie étant ce même point, et le rapport d'homothétie étant dt. Cela reviendra à dire que les déplacements possibles de l'ébranlement à partir de chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$, pendant le temps dt, sont donnés par les formules générales

$$(8) \qquad dx_i = p_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $p_1, \ldots, p_n$ doivent satisfaire aux équations (6) et (7).

On voit alors, par les formules (5), que l'élément différentiel de l'intégrale J représente le temps que met l'ébranlement à se propager d'un point de la courbe considérée au point infiniment voisin qui lui fait suite sur la même courbe. Et, par suite, l'intégrale elle-même représente la durée de la propagation de l'ébranlement de l'origine à l'extrémité de cette courbe, quand on suppose qu'on arrête toute propagation de cet ébranlement en dehors des points de la courbe elle-même. C'est donc ce qu'on peut appeler la *durée de propagation de l'ébranlement le long de la courbe*.

([1]) Si $\alpha > 0$ c'est une multiplicité à $n - \alpha - 1$ dimensions seulement, au point de vue ponctuel, seul considéré en ce moment.

([2]) Tout ceci doit être entendu au point de vue infinitésimal, c'est-à-dire à des infiniment petits près d'ordre supérieur.

Si, par exemple, le problème posé est un problème de minimum, il revient à déterminer les courbes le long desquelles la propagation considérée se fait le plus rapidement.

13. La méthode que nous allons exposer consiste à considérer la multiplicité d'onde comme une multiplicité d'éléments de contact et à employer, pour transformer le système (5), (6), (7), les formules obtenues dans la première Partie de cet article : les variables $x_1, \ldots, x_n$ devront être considérées comme de simples paramètres figurant dans les formules en question, tels que le paramètre a considéré aux n[os] 3 et 4.

Nous introduisons donc de nouvelles variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, et les formules

$$(9) \qquad q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où f est la fonction

$$(9') \qquad f = \mathrm{F} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \mathrm{F}_h;$$

de sorte que $(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ sont les coordonnées d'un élément de contact quelconque de la multiplicité d'onde (*cf.* n[os] 1 et 2).

Comme le hessien de f est ici de rang 1, si l'on suppose le problème *ordinaire* (¹), le support tangentiel est à $n-1$ dimensions. On peut donc, sous les conditions (²) discutées aux n[os] 6 et 7, employer, pour représenter la multiplicité d'onde, des formules de la forme

$$(10) \qquad \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1,$$

$$(11) \qquad p_i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont la première résulte simplement de l'élimination des p_i et des λ_h entre les équations (7) et (8) (*cf.* n[os] 1 et 2).

Nous sommes ainsi ramenés au *problème canonique* suivant :

(¹) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 239, 267, 268.

(²) En fait, les restrictions qu'elles imposent au problème sont dans la nature même de la question, comme nous le verrons plus loin (n° 20).

Problème A. — *Trouver* $2n+1$ *fonctions* $x_1, \dots, x_n$; $q_1, \dots, q_n$; ω *d'une variable* u, *satisfaisant aux équations de condition*

$$G(x_1, \dots, x_n \mid q_1, \dots, q_n) = 1, \tag{10}$$

$$dx_i = \omega \frac{\partial G}{\partial q_i} du \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{12}$$

et telles qu'il y ait extremum pour l'intégrale

$$J = \int_0^1 \omega\, du. \tag{4}$$

Les fonctions $x_1, \dots, x_n$ *sont, de plus, assujetties à certaines conditions aux limites* ($u = 0$, $u = 1$) *de l'intervalle d'intégration, et la fonction* ω *doit être positive dans cet intervalle.*

Une condition nécessaire de l'extremun est, comme l'on sait, que δJ soit nul, pour tout système de variations, $\delta x_1, \dots, \delta x_n$; $\delta q_1, \dots, \delta q_n$, $\delta\omega$ satisfaisant aux équations de conditions obtenues en prenant les variations des deux membres des équations (10) et (12); et tel de plus que $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ s'annulent aux limites de l'intervalle d'intégration.

C'est cette condition que nous allons d'abord chercher à exprimer.

14. Pour n'avoir pas à faire intervenir la condition $\delta G = 0$, nous introduirons de nouvelles fonctions inconnues, en posant

$$\gamma_i = q_i \gamma_0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{13}$$

La fonction γ étant supposée positive, le système (10) (12) sera remplacé, vu l'homogénéité de G, par le système

$$\gamma_0 = G(x_1, \dots, x_n \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n) \equiv G', \tag{14}$$

$$dx_i = \omega \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} du \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{15}$$

Alors l'équation (14) n'a d'autre effet que de déterminer γ_0, l'équation qu'on en déduit en prenant les variations n'a d'autre utilité que de déterminer $\delta\gamma_0$, et aucune de ces quantités γ_0, $\delta\gamma_0$ n'intervient dans les relations entre $\delta x_1, \dots, \delta x_n$; $\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_n$; $\delta\omega$; $x_1, \dots, x_n$; $\gamma_1, \dots, \gamma_n$; ω; u. Nous n'aurons donc à tenir compte, pour exprimer que δJ est nul, que des équations (4), (15) et de celles qu'on obtient en prenant les variations des deux membres de chacune de ces équations ; c'est-à-dire

$$\delta J = \int_0^1 \delta\omega \, du, \tag{16}$$

$$\frac{d\,\delta x_i}{du} = \omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \, \partial x_j} \delta x_j + \omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \, \partial \gamma_j} \delta \gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \delta\omega \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Pour exprimer que les δx_i s'annulent pour $u = 0$, $u = 1$, nous allons chercher à les calculer, en considérant $\delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$; $\delta\omega$ comme connus, c'est-à-dire intégrer le système (17).

Suivant la méthode la plus élémentaire, nous considérons le système homogène correspondant :

$$\frac{dz_i}{du} = \omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \, \partial x_j} z_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Soient

$$z_i = z_{ki} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

n solutions, indépendantes, de ce système. Appliquant la méthode de la variation des constantes, nous posons ensuite

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

ce qui donne le système

$$\sum_{k=1}^{n} z_{ki} \frac{d\xi_k}{du} = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$A_i = \omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \, \partial \gamma_j} \delta\gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \delta\omega \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Or il est visible, par les formules (20), que les δx_i s'annulent simultanément quand les ξ_k le font, et dans ce cas seulement. La condition imposée aux δx_i revient donc à la suivante : les fonctions ξ_k, solutions de (21), qui s'annulent pour $u=0$, s'annulent aussi pour $u=1$.

Pour calculer ces fonctions ξ_k, nous mettons le système (21) sous forme résolue

$$(23) \qquad \frac{d\xi_k}{du}=\sum_{i=1}^{n} v_{ki}\,A_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions v_{ki} sont définies par les équations

$$(24) \qquad \sum_{i=1}^{n} z_{ki}v_{ji}=\begin{cases} 0 & \text{pour } k\neq j \\ 1 & \text{pour } k=j \end{cases} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Elles constituent ce qu'on appelle le *système adjoint* du système des z_{ki}, et les formules

$$(25) \qquad v_i=v_{ki} \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

définissent n solutions indépendantes du *système linéaire adjoint* du système (18), à savoir

$$(26) \qquad \frac{dv_i}{du}+\omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial y_j\,\partial x_i}v_j=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

On a alors, pour les fonctions ξ_k cherchées,

$$(27) \qquad \xi_k=\int_0^u\sum_{i=1}^{n} v_{ki}A_i\,du \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

et les conditions qu'il s'agissait d'obtenir sont, en ayant égard aux formules (22),

$$(28) \qquad \int_0^1\sum_{i=1}^{n} v_{ki}\left\{\omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial y_j}\delta y_j+\frac{\partial G'}{\partial y_i}\delta\omega\right\}du=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Il reste, dès lors, à écrire que l'intégrale (16) est nulle pour tous les choix de fonctions $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$; $\delta\omega$ qui satisfont aux conditions (28). La condition [1] est donc qu'il existe n constantes

---

[1] Cette condition est bien connue, sous des formes équivalentes au moins. Nous reviendrons plus loin sur son énoncé et sa démonstration (*voir* n° 23).

$c_1, \ldots, c_n$, telles qu'on ait l'identité

$$(29) \qquad \delta\omega = \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\sum_{i=1}^{n} v_{ki} \left(\omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i \, \partial\gamma_j} \delta\gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial\gamma_i} \delta\omega \right) \right].$$

Celle-ci se décompose en

$$(30) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial G'}{\partial\gamma_i} = 1,$$

$$(31) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial^2 G'}{\partial\gamma_i \, \partial\gamma_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

quand on pose

$$(32) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k v_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, les seconds membres de ces dernières formules constituent quand $c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes arbitraires, la solution générale du système (26). La condition trouvée est donc : il existe une solution $v_i = y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) du système (26) qui satisfait aux équations (30) et (31).

Si l'on revient maintenant aux variables $q_1, \ldots, q_n$, au moyen des équations (13), comme les $\frac{\partial G}{\partial q_i}$ et les $\frac{\partial^2 G}{\partial q_j \, \partial x_i}$ sont homogènes de degré zéro; et les $\frac{\partial^2 G}{\partial q_i \, \partial q_j}$ homogènes, on obtient la condition cherchée sous la forme suivante :

Pour que la variation de l'intégrale J *soit nulle, dans les conditions supposées, il faut et il suffit qu'il existe n fonctions auxiliaires* $y_1, \ldots, y_n$ *qui satisfassent à la fois aux équations*

$$(33) \qquad \frac{dy_i}{du} = -\omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \, \partial x_i} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1,$$

$$(35) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \, \partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

15. Mais ce résultat peut se transformer si l'on tient compte des remarques du n° **4**. Nous examinerons d'abord le cas le plus simple, celui de *l'extremum libre* (¹) : le support ponctuel de la multiplicité d'onde est à $n-1$ dimensions, puisqu'il n'y a pas d'équations de condition (2). Les équations (34) et (35) admettent alors pour seule solution $y_i = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; et, comme on a identiquement

$$(36) \qquad \frac{\partial G}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial q_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la condition obtenue est que les fonctions $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$; ω, *qui satisfont par hypothèse aux équations* (10) *et* (12), *satisfassent aussi aux équations*

$$(37) \qquad dq_i = -\omega \frac{\partial G}{\partial x_i} du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On remarquera qu'il résulte de là que, étant identiques aux fonctions y_i qui, par leur définition même, ont des dérivées, les fonctions q_i sont elles-mêmes dérivables, ce qui, en vertu des relations (8), (11), (12), équivaut à dire que $x_1, \ldots, x_n$ *ont des dérivées du second ordre*. Les hypothèses nécessitées implicitement par nos raisonnements étaient seulement celles de la continuité des dérivées du premier ordre, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles de la fonction G, qui ont figuré dans nos calculs.

Les équations (12) et (37) laissent arbitraire le choix de la fonction ω, ce à quoi l'on devait s'attendre, à cause de l'indétermination de la représentation paramétrique adoptée. *On aura donc à intégrer le système canonique*

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial G}{\partial q_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ dq_i &= \frac{\partial G}{\partial x_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

en prenant des valeurs initiales qui satisfassent à (10) : les équations (38) admettant l'intégrale première $G = \text{const.}$, l'équa-

---

(¹) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 41.

tion (10) sera alors vérifiée par tout système de fonctions x_i, q_i ainsi déterminé. Lorsque t varie en croissant, le point $(x_1, \ldots, x_n)$ décrira une courbe, dite *extrémale*, *dans un sens déterminé*, à savoir le sens de la propagation ; et la variation *positive* de t, d'un point à un autre de cette courbe, est la durée de propagation d'un ébranlement le long de l'arc de courbe considéré. Cela tient à ce que

$$dt = \omega\, du, \tag{39}$$

comme on le voit en comparant les deux systèmes (38) et (12), (37), et à ce que ωdu est l'élément différentiel de l'intégrale J (*cf.* n° 12). La variation de cette durée de propagation, entre deux points quelconques d'une extrémale, est nulle, lorsqu'on remplace l'arc d'extrémale allant d'un de ces points à l'autre, dans le sens de la propagation, par un autre arc de courbe, infiniment voisin, ayant la même origine et la même extrémité.

16. Il faut observer que, si une courbe extrémale est connue, avec le sens de la propagation sur cette courbe, les valeurs de $q_1, \ldots, q_n$ en chaque point de cette courbe sont entièrement déterminées, sans intégration nouvelle, et la variable t, qui correspond à la durée de la propagation d'un point à un autre de cette courbe, s'obtient par une quadrature.

Géométriquement, cela tient à ce que, en chaque point de la courbe, la direction de la tangente qui correspond au sens de la propagation perce la multiplicité d'onde, qui a ce point pour origine, en un point bien déterminé, et détermine ainsi un élément de contact $(p_1, \ldots. p_n; q_1, \ldots, q_n)$; de plus, l'onde élémentaire correspondante devant passer par le point infiniment voisin de la courbe, pris aussi sur la direction positive de la tangente, le rapport d'homothétie dt de cette onde élémentaire à la multiplicité d'onde est aussi connu.

Analytiquement, le fait résulte des formules (39), (3), (5) et (8), qui donnent

$$dt = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{40}$$

$$p_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{41}$$

$$q_i = \frac{\partial \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots. p_n)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{42}$$

Ceci conduit à chercher un système différentiel qui définisse les courbes extrémales, sans passer par les variables auxiliaires $q_1, \ldots, q_n$.

La solution résulte immédiatement de la comparaison des équations (38), (41), (42), et de l'équation (31) du n° 3, qui donne ici

$$(43) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient ainsi le *système différentiel des extrémales* bien connu

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} d\dfrac{\partial F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n)}{\partial\, dx_i} - \dfrac{\partial F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n)}{\partial x_i} = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

17. Passons maintenant au cas général de l'*extremum lié*.

Alors le support ponctuel de la multiplicité d'onde est à $n - \alpha - 1$ dimensions, puisqu'il faut tenir compte des équations (2) : à chaque point de ce support correspondent ∞^α éléments de contact, dont les coordonnées $(p_1, \ldots, p_n ; y_1, \ldots, y_n)$ sont précisément définies, en fonction de celles de l'un d'entre eux $(p_1, \ldots, p_n ; q_1, \ldots, q_n)$, par les équations (34) et (35) [équations (33) et (34) du n° 4].

En tenant compte des équations (37), (39) et (43) du n° 4, on voit que, si l'on pose pour plus de netteté

$$(45) \qquad \overline{G} = G(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n),$$

on peut adjoindre au système trouvé, formé des équations (10), (12), (33), (34), (35), les équations

$$(46) \qquad \overline{G} = 1,$$

$$(47) \qquad \frac{\partial \overline{G}}{\partial y_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui en sont des conséquences, et que l'on peut remplacer les équations (33) par les suivantes

$$(48) \qquad dy_i = -\omega \frac{\partial \overline{G}}{\partial x_i} du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations (47) permettent alors d'écrire les équations (12) sous la forme

$$(49) \qquad dx_i = \omega \frac{\partial \overline{G}}{\partial y_i} du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin les équations (34), (35) expriment seulement que $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ et $(p_1, \ldots, p_n; y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de contact associés au point $(p_1, \ldots, p_n)$ de la multiplicité d'onde; et à cause des équations (47), les coordonnées de ce point peuvent s'écrire indifféremment $p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ou $p_i = \frac{\partial \overline{G}}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. On peut, par conséquent, remplacer encore ces équations par celles qu'on en déduit en échangeant les y_i et les q_i, c'est-à-dire par les équations

$$(50) \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial \overline{G}}{\partial y_i} = 1,$$

$$(51) \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

et celles-ci entraînent, à leur tour, comme conséquences les équations (10) et (47).

Il reste, en définitive, le système formé des équations (46), (48), (49), (50), (51). Et l'on pourra encore, comme au n° 15 et sous le bénéfice des mêmes observations, substituer aux équations (48) et (49), le système canonique qu'on en déduit, en introduisant la variable t, au moyen de l'équation (39).

Les équations (50) et (51) sont vérifiées par les fonctions $q_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; car la première se réduit à (46), et les autres sont des identités, pour $q_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. De là résulte que si $y_1, \ldots, y_n$ est un système de fonctions auxiliaires correspondant à une solution $(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n; \omega)$ du problème de la variation nulle de J; $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \omega)$ est aussi une solution de ce même problème. On voit ainsi apparaître une classe de solutions particulières du problème, que nous pouvons appeler les *solutions canoniques*, puisqu'elles sont définies par le système canonique (38); et toute courbe extrémale intervient dans au moins une solution canonique. De là résulte, comme au n° 15, l'*existence des dérivées secondes des x_i pour toute extrémale.*

18. Imaginons une courbe extrémale et une solution canonique qui la comprenne. La tangente à l'extrémale en un point M, menée dans la direction de la propagation, détermine un point (P) de la multiplicité d'onde qui a (M) pour origine. La solution canonique intervient pour fixer un des ∞^{α} éléments de contact de la multiplicité d'onde en ce point. Enfin les équations (50), (51) signifient seulement que dans toute solution, canonique ou non, qui comprend la même extrémale, les valeurs de $q_1, \ldots, q_n$ correspondent à l'un quelconque des éléments de contact en question. Pour une solution quelconque comprenant une extrémale déterminée, les fonctions $q_1, \ldots, q_n$ sont donc liées aux fonctions $x_1, \ldots, x_n$ par la seule condition qu'en chaque point de l'extrémale elles fournissent le plan de l'un des éléments de contact que nous venons de définir. Dans les solutions canoniques, au contraire, intervient un choix particulier de ces éléments de contact.

Pour mettre ce choix en évidence, on peut introduire, au moyen des formules (8), les α indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ dont dépendent les éléments de contact en question. On a alors à écrire que ces valeurs

$$(9) \qquad q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad \left(f = \mathrm{F} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \mathrm{F}_h\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où l'on suppose [n° 16, équation (41)]

$$(41) \qquad p_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

satisfont au système canonique (38). Tenant compte des équations (31) du n° 3, on obtient ainsi le *système de Lagrange*, où les λ_h ne sont pas autre chose que les *multiplicateurs de Lagrange;* à savoir

$$(51) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A ce système, pour définir les extrémales, il faut adjoindre les équations de condition (2), c'est-à-dire, avec les notations actuelles,

$$(52) \qquad \mathrm{F}_h(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Une question se pose naturellement : combien de solutions canoniques correspondent à une même extrémale ? Les formules définitives du numéro précédent montrent que les fonctions auxiliaires $y_1, \ldots, y_n$ sont les mêmes pour tous les systèmes de fonctions $q_1, \ldots, q_n$ qui correspondent à une même extrémale ; puisque tous ces systèmes de fonctions $q_1, \ldots, q_n$ satisfont aux équations (50), (51), dès que $y_1, \ldots, y_n$ correspondent à l'un d'eux. On peut donc discuter la recherche des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ au moyen des équations (33), (34), (36) (n° 14), en y considérant $x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n, \omega$) comme des fonctions de u connues. La forme linéaire de ces équations montre que la solution générale sera de la forme

$$(53) \qquad y_i = y_{0,i} + \sum_{j=1}^{\gamma} \rho_j (y_{j,i} - y_{0,i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les ρ_j sont arbitraires, et où les $y_{j,i} (j = 0, 1, 2, \ldots, \gamma)$ sont $(\gamma + 1)$ solutions particulières.

C'est ce qu'on pourrait aussi conclure des équations (51). Et, naturellement, γ est au plus égal à α.

Supposons que les équations générales des extrémales, obtenues par intégration de (38),

$$(54) \qquad x_i = \varphi_i(t - t_0 \mid x_1^0, \ldots, x_n^0; q_1^0, \ldots, q_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les valeurs initiales satisfont à l'équation (10), dépendent, abstraction faite de la constante t_0, de $2n - \delta - 1$ constantes arbitraires essentielles ; les équations (52), et par suite l'ensemble des solutions du système (38), dépendent de $2n - \delta + \gamma - 1$ constantes. On a donc $2n - \delta + \gamma - 1 = 2n - 1$, c'est-à-dire $\gamma = \delta$. On remarquera que, dans les mêmes conditions, les *courbes* extrémales dépendent de $2n - \delta - 2 = 2n - \gamma - 2$ constantes arbitraires essentielles. Pour qu'on puisse faire passer une courbe extrémale par deux points arbitrairement choisis, il est nécessaire que $\gamma = 0$; et cela est suffisant, si l'on se limite à un domaine convenable. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, une seule solution canonique correspond à chaque extrémale.

Résumons les résultats obtenus, et nous aurons l'énoncé suivant :

Les systèmes de fonctions $x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n; \omega$ *de la va-*

riable u, qui satisfont aux équations de condition (10) *et* (12), *et annulent la variation de l'intégrale* (4) *se partagent en deux classes. Ce sont d'abord les systèmes de fonctions (solutions canoniques) qui s'obtiennent en prenant pour* ω *une fonction arbitraire positive de* u, *et en déterminant* $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$ *au moyen du système canonique* (38), *joint à l'équation* (39). *Ces solutions sont les seules dans le problème de l'extremum libre, c'est-à-dire si le hessien de* G, *considérée comme fonction de* $q_1, \ldots, q_n$, *est de rang* 1. *Et, de plus, dans ce cas, il n'y a qu'une seule solution canonique fournissant chaque courbe* (en $x_1, \ldots, x_n$), *ou extrémale, qui répond au problème.*

Au contraire, si le hessien de G *est de rang* $\alpha + 1$ $(\alpha > 0)$, *à chaque solution canonique* $(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n; \omega)$ *correspondent* ∞^α *autres solutions fournissant la même extrémale : elles s'obtiennent en remplaçant* $q_1, \ldots, q_n$ *par l'une quelconque des solutions* $q'_1, \ldots, q'_n$ *du système*

$$\sum_{i=1}^{n} q'_i \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1, \tag{55}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q'_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{56}$$

Dans le cas général, où il y a ∞^{2n-2} *extrémales, chacune d'elles n'est fournie que par une seule solution canonique. Si, au contraire, il y a* $\infty^{2n-\gamma-2}$ *extrémales* $(\gamma > 0)$, ∞^γ *solutions canoniques font partie des* ∞^α *solutions correspondant à l'une quelconque d'entre elles au moyen des équations* (54) *et* (55) (¹).

19. Supposons l'intégrale J prise suivant un arc d'extrémale, et faisons varier cet arc, sans laisser ses extrémités fixes. Alors δJ n'est pas nul en général, et il est donné, comme l'on sait, par une formule fondamentale, dite *formule aux limites* (²). Il est facile de la déduire des calculs du n° **14**.

(¹) Il est clair, par la forme initiale (1) de l'intégrale J, qu'elle ne dépend que de l'arc d'extrémale, et non de celle des ∞^α solutions, en $q_1, \ldots, q_n$, qu'on peut lui associer dans ce dernier cas. Cela résulte aussi de ce que δJ est nul constamment, quand, laissant l'arc d'extrémale fixe, on fait varier le système des fonctions $q_1, \ldots, q_n$, pourvu qu'il représente toujours l'une de ces ∞^α solutions.

(²) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 246.

La formule (29) a lieu, en effet, par hypothèse. Elle peut s'écrire, avec les notations (22) et en tenant compte des équations (23),

$$\delta\omega = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{i=1}^{n} v_{ki} A_i = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d\xi_k}{du}. \tag{57}$$

On en déduit, en intégrant et désignant par des indices *zéro* les valeurs qui correspondent à l'origine de l'arc de courbe considéré, et par des indices *un* celles qui correspondent à l'extrémité

$$\delta J = \sum_{k=1}^{n} c_k (\xi'_k - \xi^0_k). \tag{58}$$

Or on tire des équations (20), en les résolvant,

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} v_{ki}\, \delta x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{59}$$

et l'on a, par suite, en tenant compte des formules (32),

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \delta x_i. \tag{60}$$

Si donc nous remettons, à la place des lettres $y_1, \ldots, y_n$, les lettres $q_1, \ldots, q_n$ qui devront correspondre à une des solutions particulières, satisfaisant au système canonique, dont il est question dans l'énoncé final du n° **18**, nous obtiendrons la formule aux limites sous la forme (¹)

$$\delta J = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i\, \delta x_i \right]_0^1 \tag{61}$$

Remarquons que l'intégrale J s'écrit elle-même sous la forme analogue

$$J = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i; \tag{62}$$

(¹) S'il y a seulement $\infty^{2n-\gamma-2}$ courbes extrémales, cette formule (61) est fournie par chacun des systèmes de fonctions (53); et l'on a, entre les variations de $x_1, \ldots, x_n$, γ relations indépendantes de la forme $\left[\sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta x_i \right]_0^1 = 0$.

car l'on a, d'après les équations (12),

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial G}{\partial q_i} \omega \, du = G\omega \, du \tag{63}$$

et, par conséquent, à cause de (10),

$$\omega \, du = \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i. \tag{64}$$

On peut également considérer la formule (62) comme une application de la formule (61) ; il suffit de faire varier l'extrémité de l'arc d'extrémale depuis l'origine de cet arc, qu'on maintiendra fixe, jusqu'au point de l'extrémale que l'on veut prendre comme extrémité définitive de l'arc considéré, en faisant décrire à ce point tout l'arc en question. La formule (61) est alors constamment

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} q_i \, \delta x_i, \tag{65}$$

et la formule (62) en résulte par intégration.

Nous reviendrons plus loin sur les conséquences auxquelles donne lieu la formule (62) (*voir* n^{os} 25 et suivants).

20. Discutons maintenant les restrictions que nous avons imposées à la fonction F, aux n^{os} 12 et 13.

Il s'agit d'abord de la légitimité de la représentation de la multiplicité d'onde au moyen d'équations de la forme (10) et (11). D'après les conclusions de la discussion faite aux n^{os} 6 et 7, il faut écarter les éléments de contact dans le voisinage desquels le rang du hessien de f (de F, dans le cas $\alpha = 0$) s'élève.

Or, en ce qui concerne le système (44), auquel on arrive dans le cas de l'extremum libre ($\alpha \equiv 0$), lorsqu'on revient au point de vue des variables $x_1, \ldots, x_n$ seules, on voit que ce hessien n'est autre que le déterminant des coefficients des différentielles secondes dans ces équations (44). On serait donc conduit à faire la même hypothèse pour pouvoir affirmer l'existence des intégrales de ce système, dans des conditions non singulières. Nous étions donc en droit de dire (note du n° 20) que la restriction ainsi introduite n'est pas artificielle, mais tient à la nature même de la question.

Il en est de même pour le cas, plus général ($\alpha > 0$), de l'extremum lié, qui nous a conduit au système (55), (56). En cherchant à résoudre ce système par rapport aux dérivées secondes des x_i et aux dérivées premières des λ_h, on sera conduit à différentier les équations (56), et le déterminant qui se présentera, comme déterminant du système linéaire homogène obtenu, sera le hessien de f. On arrivera donc à la même conclusion sur la nature de cette première restriction.

L'autre restriction est la condition que nous avons imposée à $F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n)$ d'être positif. Supposons au contraire que, sur la courbe pour laquelle on se propose d'examiner si la variation de l'intégrale (1) est nulle, la fonction F ne soit pas constamment positive. On pourra toujours trouver une fonction auxiliaire $H(x_1, \ldots, x_n)$, définie en tous les points de la courbe considérée et dans le domaine de ces points, c'est-à-dire en tous les points d'un certain domaine (D) contenant la courbe à son intérieur, admettant des dérivées partielles continues dans ce domaine, et dont la valeur sur la courbe soit une fonction croissante du paramètre u servant à représenter la courbe : on peut même se donner arbitrairement la valeur de cette fonction aux divers points de la courbe ; ce sera, par exemple, la valeur du paramètre u lui-même. Alors, sur la courbe, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{du}$ a la valeur 1. D'autre part, $F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{du}, \ldots, \frac{dx_n}{du}\right)$ est supposé continu et fini sur la courbe ; sa valeur absolue est donc inférieure à un nombre fixe M. Si donc l'on pose

$$\overline{F} = F(x_1 \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) + M \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i, \tag{66}$$

le quotient $\frac{\overline{F}}{du}$ sera, sur la courbe considérée, supérieur à un nombre positif fixe, et restera positif sur les courbes qu'on en déduira par des variations continues relativement aux points et aux tangentes. Or il suffit, voulant obtenir des conditions nécessaires pour que la variation soit nulle, de considérer de telles variations de la courbe d'intégration.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(67) \qquad M\frac{\partial H}{\partial x_i} = H_i,$$

de sorte que la fonction (66) est

$$(68) \qquad \overline{F} = F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) + \sum_{i=1}^{n} H_i\, dx_i,$$

et considérons ([1]) l'intégrale

$$(69) \qquad \overline{J} = \int_0^1 \overline{F} \equiv J + M[H(x_1, \ldots, x_n)]_0^1 \equiv \int_0^1 \overline{\omega}\, \overline{du}.$$

Il est clair que $\delta\overline{J} = \delta J$, quand les extrémités de l'arc d'intégration restent fixes. Nous aurons donc à exprimer que $\delta\overline{J}$ est nul; et, pour cela, tous les raisonnements et résultats précédents s'appliquent. Il reste à voir ce qu'ils donneront, relativement aux données primitives.

21. Comparons pour cela les multiplicités d'onde, dans les deux cas, en un même point de la courbe considérée, l'origine des coordonnées étant, par conséquent, mise en ce point. Les coordonnées du nouveau point de la courbe, correspondant à l'accroissement positif du du paramètre, sont $dx_1, \ldots, dx_n$, et satisfont, dans le premier cas, aux équations

$$(70) \qquad \begin{cases} F\ (x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = \omega\, du, \\ F_h(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha) \end{cases}$$

et, dans le second cas, aux équations analogues

$$(71) \qquad \begin{cases} \overline{F}\ (x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = \overline{\omega}\, du, \\ F_h(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \end{cases}$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(72) \qquad X_i\, du = dx_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

([1]) Cette transformation est, au fond, celle qui a été utilisée par Carathéodory et dont se sert aussi Hadamard (cf. *loc. cit.*, p. 385); mais ces auteurs introduisent l'hypothèse que la fonction ε de Weierstrass a un signe constant; tandis que cette hypothèse n'intervient pas ici. Et ils n'examinent que le cas $\alpha = 0$, $n = 2$.

et cessons d'écrire, dans les fonctions considérées, les lettres $x_1, \ldots, x_n$ qui sont des paramètres constants. En vertu des formules (5), la multiplicité d'onde est définie, pour $\overline{J}$, par les équations

$$(73) \quad \begin{cases} \overline{F}\ (X_1, \ldots, X_n) = \overline{\omega}, \\ F_h(X_1, \ldots, X_n) = 0 & (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \\ \quad X_i = \overline{\omega}\,\overline{p_i} & (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n$ étant les coordonnées du point qui correspond au point $dx_1, \ldots, dx_n$ de l'onde élémentaire. Et si ω était positif, on aurait, pour J, des formules toutes semblables

$$(74) \quad \begin{cases} F\ (X_1, \ldots, X_n) = \omega \\ F_h(X_1, \ldots, X_n) = 0 & (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \\ \quad X_i = \omega p_i & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ces formules montrent que, quand ω s'annule, le point correspondant de la multiplicité d'onde s'éloigne à l'infini. Nous pouvons les considérer comme la définition de la multiplicité d'onde dans tous les cas, que ω soit positif ou négatif.

Les deux multiplicités d'onde se correspondent point par point, au moyen des formules (73) et (74). Cherchons les formules de cette correspondance. On a, à cause de (68), (72), (74),

$$(75) \quad \overline{\omega} = \omega + \sum_{i=1}^{n} H_i X_i = \omega\left(1 + \sum_{i=1}^{n} H_i p_i\right),$$

ce qui donne les formules

$$(76) \quad \overline{p}_i = \frac{p_i}{1 + \sum_{i=1}^{n} H_i p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cherchons les coordonnées $q_1, \ldots, q_n$; $\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_n$ pour les éléments de contact correspondants. Pour (74), ω étant une constante, nous avons à écrire que $\sum_{i=1}^{n} q_i\, dX_i$ est une combinaison linéaire et homogène de dF et des dF_h. Donc

$$(77) \quad q_i = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial X_i} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial X_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La condition $\sum_{i=1}^{n} q_i p_i = 1$ donne $\lambda_0 = 1$. On a donc, en posant encore comme au n° **1**,

$$f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h, \tag{78}$$

les formules

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{79}$$

Pour les quantités $\overline{q_i}$, on aura des formules analogues

$$\overline{q_i} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial X_i}, \qquad \overline{f} = \overline{F} + \sum_{h=1}^{\alpha} \overline{\lambda_h} F_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{80}$$

Comme les λ_h, $\overline{\lambda_h}$ sont entièrement arbitraires, on peut s'imposer la condition qu'ils soient, respectivement, égaux

$$\lambda_h = \overline{\lambda_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha);$$

ce qui donne la loi de correspondance des deux multiplicités d'onde, élément de contact à élément de contact. Elle est exprimée par les équations (76) et les équations

$$\overline{q_i} = q_i + H_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{81}$$

On voit qu'elle n'est autre que la *transformation dualistique d'une translation* [*cf.* n° **1**, note (1)].

Avant de revenir aux équations différentielles du problème de Lagrange, indiquons encore comment se généralisent, pour la multiplicité définie par les équations (74), les formules obtenues aux n^{os} **2** et **3**. Le support tangentiel est défini, comme on vient de le voir, par les équations (79). Nous supposons ici, comme au n° **13**, que le hessien de f est de rang 1, c'est-à-dire que l'élimination de $X_1, \ldots, X_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ entre les équations (79) et les équations de condition $F_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, \alpha)$, fournit une seule équation, réductible à la forme

$$G(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1. \tag{82}$$

On a d'autre part

$$\sum_{i=1}^{n} q_i X_i = \omega, \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i \, dX_i = 0; \tag{83}$$

d'où encore

$$\Sigma X_i\, dq_i = 0. \tag{84}$$

On conclut que les X_i sont proportionnels aux $\frac{\partial G}{\partial q_i}$; et l'on constate, à cause de (83) et (82), que le rapport de proportionnalité est ω. Donc on a

$$X_i = \omega \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{85}$$

et, par suite, on a encore les formules (11)

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{86}$$

On verrait enfin, en reprenant les calculs du n° 3, mais en y introduisant les X_i au lieu des p_i, que l'équation (31) de ce n° 3 sera remplacée par les suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n \,|\, X_1, \ldots, X_n)}{\partial x_i} \\ &\qquad + \omega \frac{\partial G(x_1, \ldots, x_n \,|\, q_1, \ldots, q_n)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{87}$$

22. Soit maintenant

$$\frac{dx_i}{d\theta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \overline{q}_i}, \qquad \frac{d\overline{q}_i}{d\theta} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}, \qquad d\theta = \overline{\omega}\, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{88}$$

le système canonique obtenu en égalant à zéro la variation de $\overline{J}$. L'équation

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n \,|\, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_n) = 1 \tag{89}$$

est l'équation tangentielle de la multiplicité d'onde correspondante.

Nous avons à faire le changement de variables défini par les formules (76) et (81) ; de sorte que G est défini par l'équation

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n \,|\, q_1 + H_1 G, \ldots, q_n + H_n G) = G; \tag{90}$$

car, pour obtenir l'équation (82), il faudrait résoudre par rapport à la variable d'homogénéité l'équation de la multiplicité d'onde primitive, qui résulte de (89) par le changement de coordonnées (81) (*cf.* n° 2).

Si l'on différentie alors la relation identique (90), on obtient

$$(91)\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_j}\mathrm{H}_j\frac{\partial G}{\partial q_i}=\frac{\partial G}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$(92)\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_j}\frac{\partial \mathrm{H}_j}{\partial x_i}G+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_j}\mathrm{H}_j\frac{\partial G}{\partial x_i}=\frac{\partial G}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Remarquons que l'on a encore

$$(93)\qquad \overline{p}_j=\frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_j}\qquad (j=1,2,\ldots,n);$$

et, par suite, en tenant compte de (76) et de (75),

$$(94)\qquad 1-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{H}_j\frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_j}=1-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{H}_j\overline{p}_j=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{H}_j p_j}=\frac{\omega}{\overline{\omega}}.$$

Les équations (91) et (92) s'écrivent, par suite, en observant que $\frac{\partial \mathrm{H}_j}{\partial x_i}=\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial x_j}$, et que $\overline{\omega}\,\overline{p}_j=\frac{dx_i}{du}$,

$$(95)\qquad \overline{\omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{q}_i}=\omega\frac{\partial G}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$(96)\qquad \overline{\omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial x_j}\frac{dx_i}{du}=\omega\frac{\partial G}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Et enfin, si l'on y tient compte des équations (88), il reste

$$(97)\qquad dx_i=\omega\frac{\partial G}{\partial q_i}du\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$(98)\qquad -d\overline{q}_i+d\mathrm{H}_i=\omega\frac{\partial G}{\partial x_i}du\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Ces dernières, à cause de (81), se réduisent à

$$(99)\qquad dq_i=-\omega\frac{\partial G}{\partial x_i}du\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

On a ainsi retrouvé le système canonique déduit de l'équation (82).

Il convient d'observer que, pour $\omega=0$, les $\frac{\partial G}{\partial q_i}$, à cause des formules (86), seront, en général, infinis; mais le système canonique pourra, d'après la manière même dont nous venons de l'obtenir, être transformé de manière que cette difficulté apparente disparaisse.

Quant aux systèmes (44) ou (41), (51), (52), on les déduira encore du système canonique, en se servant des formules (87). On les obtiendrait plus immédiatement encore, en partant des systèmes analogues relatifs à l'intégrale $\overline{J}$. On a, en effet avec les variables $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$,

$$(100) \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_j}{\partial x_i} p_j = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} p_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc, à cause de (41),

$$(101) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{dH_i}{dt} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\[2ex] \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial p_i} = \dfrac{\partial f}{\partial p_i} + H_i & (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

et, par suite,

$$(102) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{f}}{\partial p_i} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce qui montre bien qu'on retombe sur les systèmes en question.

23. Le théorème qui nous a permis d'exprimer, au n° **14**, que δJ est nul, pour tous les systèmes de variation $\delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$, $\delta\omega$ qui satisfont aux conditions (28), est, au fond, le théorème qui sert de fondement à la méthode classique des multiplicateurs dans les problèmes isopérimétriques. Mais comme il se présente, dans notre méthode, sous une forme particulière, il ne sera pas inutile de donner l'énoncé précis correspondant, avec la démonstration [1].

Il se rapporte à des intégrales définies de la forme

$$(103) \qquad I = \int_0^1 L\, du,$$

---

[1] *Cf.* les démonstrations analogues données par Hadamard (*loc. cit.*, p. 196). Mais la restriction relative aux *champs singuliers* ne subsiste pas ici.

où L est une forme linéaire par rapport à des fonctions indéterminées $w_1, \ldots, w_n$ de u ; les coefficients de cette forme étant des fonctions données de u.

Considérons m intégrales de cette forme

$$(104) \qquad I_h = \int_0^1 L_h \, du \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

et attribuons y aux fonctions w_i, m systèmes de déterminations, arbitrairement choisies

$$(105) \qquad w_i = w_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Les intégrales considérées $I_1, \ldots, I_m$ prendront des valeurs numériques correspondantes

$$(106) \qquad I_h = I_{kh} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Considérons le déterminant formé avec ces nombres I_{kh}, et examinons le cas où il est nul, pour tous les systèmes de déterminations (105) : il y aura alors un déterminant mineur *principal* qui ne sera pas nul, les déterminants mineurs de degré supérieur étant tous nuls. On peut supposer que ce déterminant principal est celui qui correspond à $k = 1, 2, \ldots, s$; $h = 1, 2, \ldots, s$. Alors tous les déterminants

$$(107) \qquad \begin{vmatrix} I_{11} & \ldots & I_{s1} & I_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{1s} & \ldots & I_{ss} & I_s \\ I_{1,s+l} & \ldots & I_{s,s+l} & I_{s+l} \end{vmatrix} \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-s)$$

sont nuls, quelles que soient les fonctions w_i. On a donc des équations à coefficients constants, de la forme

$$(108) \qquad I_{s+l} = \sum_{h=1}^{s} c_{lh} I_h \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-s),$$

c'est-à-dire

$$(109) \qquad \int_0^1 \left(L_{s+l} - \sum_{h=1}^{s} c_{lh} L_h \right) du = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-s).$$

Comme elles ont lieu, quels que soient les w_i, et que les expressions sous le signe $\int$ sont des formes linéaires par rapport aux w_i, on en conclut les relations identiques en $w_1, \ldots, w_n$ (et u)

$$(110) \qquad \mathrm{L}_{s+l} = \sum_{h=1}^{s} c_{lh} \mathrm{L}_h \qquad (l = 1, 2, \ldots, m - s).$$

Il en résulte en particulier que $\mathrm{I}_{s+1}, \ldots, \mathrm{I}_m$ sont nulles pour tout choix des fonctions $w_1, \ldots, w_n$ qui annule $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_s$.

24. Cela posé, proposons-nous d'exprimer que l'intégrale (103) s'annule pour tout choix des fonctions $w_1, \ldots, w_n$ qui rend nulles les intégrales (104). Et supposons d'abord que le déterminant des quantités (106) n'est pas nul.

Considérons encore un $(m+1)^{\text{ième}}$ système de déterminations des w_i

$$(111) \qquad w_i = w_{0,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et les valeurs correspondantes $\mathrm{I}_{0,1}, \ldots, \mathrm{I}_{0,m}$ des intégrales (104). On pourra déterminer les nombres μ_k par les équations

$$(112) \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu_k \mathrm{I}_{k,h} - \mathrm{I}_{0,h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on prend alors pour les w_i les fonctions

$$(113) \qquad w_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_k w_{k,i} - w_{0,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les valeurs des I_h, étant égales aux premiers membres des équations (112), sont nulles; et, par hypothèse, celle de I est alors nulle aussi.

Désignant par $\mathrm{I}_{1,0}, \ldots, \mathrm{I}_{m,0}, \mathrm{I}_{0,0}$ les valeurs de I qui correspondent aux choix (105) et (111), on a donc l'égalité numérique

$$(114) \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu_k \mathrm{I}_{k,0} - \mathrm{I}_{0,0} = 0.$$

Si on la compare aux égalités (112), vérifiées aussi par les μ_k, on voit que le déterminant

$$\text{(115)} \qquad \begin{vmatrix} I_{0,0} & I_{1,0} & \ldots & I_{m,0} \\ I_{0,1} & I_{1,1} & \ldots & I_{m,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{0,m} & I_{1,m} & \ldots & I_{m,m} \end{vmatrix}$$

est nul, tandis que le mineur du premier élément n'est pas nul, et cela, quel que soit le choix des $m+1$ systèmes de détermination des w_i introduits. D'après le résultat du n° 23, on en conclut une identité à coefficients constants, de la même nature que (110).

$$\text{(116)} \qquad L = \sum_{h=1}^{n} c_h L_h.$$

Si le déterminant des quantités (106) est nul, on pourra ne considérer que les intégrales $I_1, \ldots, I_s$ donnant le mineur principal de ce déterminant ; car $I_{s+1}, \ldots, I_m$ étant nulles toutes les fois que les précédentes le sont, il suffira d'exprimer que I s'annule dès que $I_1, \ldots, I_s$ sont nulles. On obtiendra donc encore une identité de la forme (116), comme condition nécessaire, avec

$$c_{s+1} = c_{s+2} = \ldots = c_m = 0.$$

Comme on a, dans ce cas, les identités (110), il est clair qu'on a même une infinité d'identités de la forme (116), dont la plus générale s'écrirait, au moyen de l'une d'entre elles,

$$\text{(117)} \qquad L = \sum_{h=1}^{m} c_h L_h + \sum_{l=1}^{m-s} \rho_l \left(L_{s+l} - \sum_{k=1}^{s} c_{lk} L_k \right);$$

les ρ_l étant arbitraires.

Enfin, dans tous les cas, l'existence d'une identité de la forme (116) est suffisante pour que I s'annule dès que $I_1, \ldots, I_m$ s'annulent simultanément.

Nous obtenons donc le théorème [1] annoncé : *Pour que l'inté-*

---

[1] Ce théorème étant déduit du lemme fondamental du calcul des variations (*cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 64) subsiste, comme lui, si l'on impose aux fonctions $w_1, \ldots, w_n$ diverses restrictions, relatives soit à leurs valeurs aux limites, soit à leur caractère analytique.

grale (104) *s'annule pour tout choix des fonctions* w_i *qui annule simultanément les intégrales* (105), *il faut et il suffit que les formes linéaires des indéterminées* w_i *désignées par* L, $L_1, \ldots, L_m$, *soient liées par une relation de la forme* (116), *identique en* $w_1, \ldots, w_n$ *et* u, *les lettres* $c_1, \ldots, c_m$ *désignant des constantes numériques.*

Dans l'application faite de ce théorème au n° **14**, $\delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$, $\delta\omega$ jouent le rôle des fonctions $w_1, \ldots, w_n$. L'intégrale I est l'intégrale (16) et les intégrales I_h sont les intégrales (28). Il existe γ relations, analogues aux $(m-s)$ relations (110), dans le cas où le système canonique (38) ne fournit que $\infty^{2n-\gamma-2}$ courbes extrémales (*cf.* la note du n° **19**).

III. — CONDITIONS SUFFISANTES DE L'EXTREMUM FAIBLE.

25. Les résultats trouvés précédemment, et résumés dans l'énoncé du n° **18**, peuvent s'énoncer sous une forme remarquable, à condition qu'on se limite, le cas échéant, aux solutions canoniques. Cette restriction est, du reste, de peu d'importance, puisqu'elle n'empêche pas d'obtenir toutes les courbes qui annulent la variation de J. Elle permet de supposer que les fonctions $q_1, \ldots, q_n$ que l'on considère sont dérivables.

Considérons l'intégrale

$$H = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i, \tag{1}$$

où l'on suppose les fonctions $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$ de la variable d'intégration u liées par la seule équation de condition

$$G(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1; \tag{2}$$

et exprimons que sa variation δH est nulle. Sous le bénéfice de la remarque faite plus haut, nous appliquons le procédé classique, qui nous donne

$$\delta H = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i\right)_0^1 + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (\delta q_i \, dx_i - \delta x_i \, dq_i). \tag{3}$$

Nous supposons encore que les extrémités de l'arc d'intégration sont fixes. La quantité restée sous le signe $\int$ doit donc reproduire δG à un facteur près, et l'on trouve le système canonique

$$(4) \qquad \frac{dx_i}{\frac{\partial G}{\partial q_i}} = \frac{dq_i}{-\frac{\partial G}{\partial x_i}} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui entraîne la formule

$$(5) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i,$$

quand on tient compte de (2), et qu'on se rappelle que G est homogène, de degré 1 en $q_1, \ldots, q_n$.

Les extrémales du problème A *s'obtiennent donc en écrivant que la variation de l'intégrale* H *est nulle, moyennant la seule équation de condition* (2), *quand on suppose fixes les extrémités de l'arc d'intégration.*

On voit de plus que, si l'on faisait varier les fonctions $q_1, \ldots, q_n$ seules, en laissant l'arc d'intégration fixe, on trouverait immédiatement et, par conséquent, sans hypothèses sur la dérivabilité des fonctions $q_1, \ldots, q_n$, la formule

$$(6) \qquad \delta_0 H = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \delta q_i \, dx_i.$$

La condition pour que la variation $\delta_0 H$ fût nulle serait donc

$$(7) \qquad dx_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

puisque les variations des q_i seraient alors liées seulement par l'équation

$$(8) \qquad 0 = \delta_0 G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Et l'on aurait encore la formule (5).

Donc *les systèmes de fonctions considérés dans l'énoncé du problème* A *sont ceux qu'on obtient en écrivant la condition de la variation nulle dans le problème suivant :*

Problème B. — *Étant donné un arc de courbe, représenté par des formules*

$$(9)\qquad x_i = \varphi_i(u),\qquad 0 \leqq u \leqq 1\qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

déterminer des fonctions $q_1, \ldots, q_n$, *de* u, *qui satisfassent à l'équation*

$$(2)\qquad G(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1,$$

et telles qu'il y ait extremum pour l'intégrale

$$(1)\qquad H = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i.$$

On voit de plus, en se reportant à la formule (62) du n° **19**, qui est l'origine des remarques actuelles, que *les intégrales* J *considérées dans le problème* A *sont les intégrales* H *du problème* B, *qui correspondent au cas de la variation nulle* (pour ce même problème B).

Il faut cependant, pour satisfaire à la condition $\omega > 0$ du problème A, n'admettre, pour le problème B, que des fonctions $q_1, \ldots, q_n$ vérifiant la condition

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i > 0.$$

Si l'on interprète $q_1, \ldots, q_n$ comme les composantes d'un vecteur ayant pour origine le point $(x_1, \ldots, x_n)$ qui décrit l'arc de courbe considéré, quand u varie de 0 à 1, cette condition équivaut à dire que ce vecteur doit être situé du côté de la tangente positive, par rapport au plan normal $\sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i)\, dx_i = 0$; ou encore qu'il doit faire un angle aigu avec la direction positive de la tangente.

Il faut observer aussi que si le hessien de G est de rang $(\alpha + 1)$, avec $\alpha > 0$, les équations (7) ont comme conséquences les équations (2) du n° **12**, à savoir :

$$(11)\qquad F_h(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0\qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha);$$

le problème B n'est donc possible, dans ce cas, que si la courbe donnée (9) est une courbe intégrale de ce système de Monge.

26. Dans tous les cas, les remarques précédentes introduisent, de la manière la plus naturelle, l'équation aux dérivées partielles de Jacobi-Hamilton :

$$G\left(x_1, \ldots, x_n \,\middle|\, \frac{\partial t}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial t}{\partial x_n}\right) = 1. \tag{12}$$

Elles montrent en effet qu'on obtiendra des extrémales du problème A, en déterminant d'abord des fonctions $q_1, \ldots, q_n$ de $x_1, \ldots, x_n$, qui satisfassent à (2), et annulent la variation de l'intégrale H; puis en déterminant $x_1, \ldots, x_n$ au moyen des équations (7), où l'on aura porté, à la place de $q_1, \ldots, q_n$, les fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ trouvées. Car la variation de H est alors nulle, soit quand on fait varier la courbe, en gardant pour les q_i les fonctions trouvées ; soit quand, laissant la courbe fixe, on fait varier les q_j ; elle est donc encore nulle quand on fait varier à la fois la courbe et les q_i, car toute variation de cette espèce générale s'obtient en superposant deux variations qui appartiennent respectivement aux deux catégories spéciales considérées.

Or ce calcul revient à prendre d'abord les dérivées

$$q_i = \frac{\partial t}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

d'une intégrale de l'équation (12), soit

$$t = V(x_1, \ldots, x_n); \tag{14}$$

puis à déterminer les *transversales* de la famille de surfaces dépendant du paramètre t, représentées par l'équation (14), c'est-à-dire les courbes définies par la propriété que nous allons rappeler.

Chaque point M de l'une quelconque des surfaces (14) est l'origine d'une multiplicité d'onde (*cf.* n° 12), et sur cette multiplicité d'onde existe un point P, de coordonnées

$$X_i = x_i + \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

les q_i ayant les valeurs (13). Ce point est entièrement défini par le fait qu'il existe, en ce point, un plan tangent à la multiplicité d'onde, de coefficients de direction $\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n$, c'est-à-dire parallèle au plan tangent en M à la surface (14) considérée ([1]). La direction MP, de coefficients de direction

$$(16) \qquad p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est dite *transversale* à l'élément de contact $(x_1, \ldots, x_n; \lambda q_1, \ldots, \lambda q_n)$ du point M et, par suite, transversale, en M, à la surface considérée.

Cela posé, les transversales d'une famille de surfaces à un paramètre (en supposant, pour simplifier, que par chaque point de l'espace ou de la portion d'espace considérée, passe une surface de la famille, et une seule) sont les courbes dont la direction, en chacun de leurs points, est transversale à la surface de la famille qui passe en ce point.

On remarquera que, dans le cas actuel, à cause de la condition $\sum_{i=1}^{n} q_i dx_i > 0$, les transversales de la famille de surfaces (14) doivent être supposées décrites dans le sens des V croissants.

27. La construction précédente donne, réciproquement, toutes les extrémales. Partons en effet d'une surface initiale (S_0), et à chacun de ses éléments de contact $(x_1^0, \ldots, x_n^0; q_1^0, \ldots, q_n^0)$, dont les coordonnées pourront être supposées satisfaire à la condition (2), associons l'intégrale du système (4), qui satisfait, pour $t = 0$, aux conditions initiales $x_i = x_i^0$; $q_i = q_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Elle satisfera à la condition (2). A chaque point M_0 de (S_0) se trouvera associée la courbe extrémale issue de M_0, qui est le lieu décrit par le point M, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, quand t varie à partir de la valeur $t = 0$. Ces courbes, au moins dans le voisinage de (S_0), seront telles que par chaque point M de l'espace il en passe une et une seule ([2]). A ce point $(x_1, \ldots, x_n)$ sera associée la valeur t de l'intégrale $\int \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i$ prise depuis M_0 jusqu'à M, le long de l'arc

([1]) Ce point doit être, par rapport au plan tangent en M à la surface considérée, du côté des V croissants.

([2]) Ceci serait en défaut, si (S_0) satisfaisait à l'équation (aux dérivées partielles) $G(x_1^0, \ldots, x_n^0 | q_1^0, \ldots, q_n^0) = 0$; cas singulier que nous avons implicitement écarté.

d'extrémale passant en M, puisque les équations (4) entraînent l'équation (5) : t est ainsi une fonction $V(x_1, \ldots, x_n)$.

Pour avoir sa différentielle totale, il suffit de faire varier M d'une manière quelconque ; il entraîne avec lui l'extrémale correspondante, dont le pied M_0 décrit (S_0). Appliquons (¹) la formule (3), en remarquant qu'on a

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \, \delta x_i^0 = 0;$$

et il reste

$$\delta t = \sum_{i=1}^{n} q_i \, \delta x_i. \tag{17}$$

La fonction t, que nous avons construite, satisfait donc aux équations (13) et à l'équation aux dérivées partielles (12). Et, les équations (7) étant vérifiées, les extrémales qui ont servi à définir cette fonction sont les transversales de la famille de surfaces (14) qui lui correspond.

Enfin, il est clair que chaque extrémale sera transversale d'une infinité de familles de surfaces, de l'espèce indiquée. Car elle correspond (*cf.* nos 16 et 18) à au moins une solution canonique ; et il suffira que l'une des surfaces de la famille comprenne l'un des éléments $(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$ fournis par cette solution, pour que tous les autres interviennent dans les autres surfaces de la famille (²).

Remarquons encore qu'on pourrait essayer de substituer à la surface (S_0) une multiplicité à $n-1$ dimensions, mais dont le support ponctuel ait moins de $(n-1)$ dimensions. La construction fera encore intervenir ∞^{n-1} solutions canoniques, mais, si l'équation (12) a seulement $\infty^{2n-2-\gamma}$ courbes caractéristiques (extrémales

(¹) Cette méthode, fondée sur la formule aux limites, est employée par M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 169). Le principe en est dû à M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, n° 536).

(²) Le cas singulier signalé dans une note précédente ne peut, ici, se produire, puisque tous les éléments d'une solution canonique satisfont à l'équation (2).

Mais il faudra, en général, limiter l'arc d'extrémale considérée, pour obtenir une famille de surfaces (et de transversales) telles que par chaque point du domaine considéré il en passe une et une seule.

Nous ne voulons pas reprendre ici cette discussion bien connue.

Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 360 et suivantes.

du problème A), il pourra arriver qu'on obtienne moins de ∞^{n-1} extrémales et que, par suite, celles-ci ne remplissent pas l'espace voisin de (S_0). La définition de la fonction V serait alors en défaut. Cela arrivera certainement, toujours en supposant $\gamma > 0$, si (S_0) est remplacé par un point de l'espace, et, plus généralement, si le support employé a moins de γ dimensions.

Même en supposant $\gamma = 0$, mais $\alpha > 0$, et en partant d'un point M_0 pris pour multiplicité initiale, les extrémales employées balayeront bien un espace à n dimensions, mais cet espace se terminera au point considéré sous une forme singulière, puisque les extrémales issues de ce point n'en partent pas dans toutes les directions : il ne contiendra pas tous les points du domaine de M_0, ni même tous ceux de ces points qui sont d'un même côté d'une surface passant en M_0 et ayant un plan tangent en ce point.

28. Les familles de surfaces qui viennent de s'introduire sont formées des états successifs d'une même onde (c'est-à-dire d'un lieu de points ébranlés à un même instant) quand on considère le mode de propagation défini au n° 12. Il faut admettre seulement que l'état d'une onde, au temps $t + dt$, se déduit de l'état de cette onde au temps t, à des infiniment petits près d'ordre supérieur, en prenant l'enveloppe des ondes élémentaires issues de divers points de la multiplicité qui figure l'état de l'onde au temps t.

Nous renverrons, sur ce point, à notre article des *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 405; car l'interprétation en question est une conséquence des résultats du n° 5 de cet article, et les raisonnements qui y conduisent, reposant sur la représentation tangentielle des ondes élémentaires, ne cessent pas d'être applicables quand le support ponctuel de la multiplicité d'onde a moins de $n - 1$ dimensions, pourvu que le support tangentiel ait bien $n - 1$ dimensions.

Ici encore on peut concevoir les extrémales [qui sont les caractéristiques de l'équation (12)] comme les trajectoires de la propagation des divers éléments de contact.

Observons encore que les équations (4) définissent, quand on considère $(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$ comme les coordonnées homogènes d'un élément de contact, un groupe de transformations de contact à un paramètre. et que les états successifs d'une même onde proviennent, d'après ce qui précède, de l'application à l'un d'eux de ces diverses transformations de contact. C'était là le point de vue de notre article publié dans ce *Bulletin* (t. XXXIV, 1906), mais nous avions supposé alors que le hessien de G était de rang 1, tandis que nous ne faisons ici aucune restriction à son égard.

Les transformations de contact finies de ce groupe sont définies par la correspondance établie entre chaque point de l'espace et l'onde qui résulte, au bout d'un temps déterminé t, d'un ébranlement produit en ce point.

Dans le cas ou l'équation (12) a seulement $\infty^{2n-2-\gamma}$ courbes caractéristiques, il y en a $\infty^{n-1-\gamma}$ passant par un point ; de sorte que les multiplicités particulières ponctuelles qui interviennent ici ont $n - 1 - \gamma$ dimensions seulement. On a donc affaire alors à des transformations de contact définies toutes par $\gamma + 1$ équations entre les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ des points des deux espaces intertransformés.

29. Les remarques des numéros précédents, indépendamment de leur intérêt analytique, conduisent très simplement aux conditions suffisantes pour l'extremum du problème A, en le ramenant à l'extremum du problème B. Comme nous allons le voir, *il y aura minimum pour* A *s'il y a maximum pour* B.

Imaginons en effet une extrémale de A, et deux points fixes M_0 et M_1 sur cette extrémale. Admettons que ces points soient assez rapprochés pour qu'on puisse associer à l'arc M_0M_1 d'extrémale une famille de surfaces (14) remplissant les conditions énumérées au n° 27, à savoir : il existe une portion d'espace, à n dimensions, continue et d'un seul tenant, telle que par chacun de ses points passe une surface (14) et une seule ; l'arc M_0M_1 est tout entier intérieur à cet espace, ne rencontre chacune des surfaces qu'en un point au plus et est transversal à chacune d'elles.

Nous désignerons par $\mathcal{C}$ l'arc d'extrémale considéré, et par $\mathcal{S}$ un autre arc (¹) allant de M_0 en M_1, dans la même portion d'espace ; et différant de $\mathcal{C}$, par ses points et ses tangentes, d'aussi peu qu'on le voudra.

(¹) Il doit, bien entendu, dans le cas $\alpha > 0$, vérifier les équations de Monge (II). (*Cf.* n° 25.)

L'intégrale $J_{\mathcal{C}}$, puisqu'on y peut prendre, pour les q_i, les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ (n° 26), est l'intégrale de dV prise de M_0 à M_1, et ne change pas, si on la prend suivant l'arc $\mathcal{C}$. On a donc

$$(18)\qquad J_{\mathcal{C}} = J_{\mathcal{C}} = -\left(\int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{n} q_i\,dx_i - \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i\right) = -(H_{\mathcal{C}} - H'_{\mathcal{C}}),$$

et l'on aperçoit dans le second membre la différence de deux intégrales, relatives à la courbe $\mathcal{C}$, de la nature de celles qui figurent dans l'énoncé du problème B, la première écrite correspondant, par hypothèse, à un système de fonctions $q_1, \ldots, q_n$ qui annule la variation de cette intégrale. De plus, les valeurs de $q_1, \ldots, q_n$ seront aussi voisines qu'on voudra des valeurs

$$q'_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad q'_n = \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

en tout point de $\mathcal{C}$, pourvu que $\mathcal{C}$ soit assez voisin de $\mathcal{C}$ (par points et tangentes).

L'arc $\mathcal{C}$ fournira donc un minimum faible pour J, *si le système* $(q_1, \ldots, q_n)$ *fournit un maximum pour* H *prise le long de* $\mathcal{C}$.

30. Or la discussion du maximum, dans le problème B, est immédiate. Car on a

$$(19)\qquad H_{\mathcal{C}} - H'_{\mathcal{C}} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (q_i - q'_i)\,dx_i.$$

En posant, comme au n° 12,

$$(20)\qquad dx_i = \omega p_i\,du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec [équation (64), n° 19]

$$(21)\qquad \omega\,du = \sum_{i=1}^{n} q_i\,dx_i,$$

il vient

$$(20)\qquad H_{\mathcal{C}} - H'_{\mathcal{C}} = -\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (q'_i p_i - 1)\,\omega\,du$$

L'élément $\omega\, du$ étant, par hypothèse, essentiellement positif, non seulement sur $\mathcal{C}$, mais aussi sur les courbes suffisamment voisines, on voit que, pour que le premier membre soit positif, il est nécessaire et suffisant que la condition

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - 1 < 0 \tag{21}$$

soit vérifiée, sur chacune des multiplicités d'onde ayant leurs origines aux divers points de $\mathcal{G}$, pour l'élément de contact (E) $(p_1, \ldots, p_n;\, q_1, \ldots, q_n)$ que fait intervenir l'intégrale $H_{\mathcal{G}}$.

Si l'on se reporte au n° 10, on voit que chacune de ces multiplicités doit être concave, en (E), vers son origine.

Donc, *pour que l'intégrale* H, *prise suivant un arc de courbe* $\mathcal{G}$ *satisfaisant aux équations de Monge* (11), *ait un maximum pour un système de fonctions* $q_1, \ldots, q_n$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :* 1° *la direction positive de la tangente en chaque point* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\mathcal{G}$ *perce la multiplicité d'onde ayant ce point pour origine en un point auquel correspond un élément de contact dont le plan a pour équation* $\sum_{i=1}^{n} q_i(X_i - x_i) = 1$; 2° *en cet élément de contact, la multiplicité d'onde est concave vers son origine, en ce sens que le point de cet élément est du même côté que l'origine par rapport aux plans des éléments de contact voisins.*

31. Cette condition sera remplie pour $\mathcal{G}$ si elle est remplie pour $\mathcal{C}$ *dans le domaine* des éléments de contact de chacune des multiplicités d'onde, qui résultent de la construction précédente appliquée à $\mathcal{C}$. Car alors, on peut faire varier infiniment peu la courbe sans que la condition cesse d'être réalisée : il est entendu, toujours, que la variation altère infiniment peu les courbes et les tangentes.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Un arc d'extrémale du problème A *fournit un minimum pour l'intégrale* J (*dans le cas où les extrémités de l'arc d'intégration restent fixes*), *s'il satisfait aux conditions suivantes :*

1° *une au moins des familles d'onde coupées transversalement par cette extrémale remplit d'une manière régulière* ([1]) *une portion de l'espace qui entoure de tous côtés l'arc considéré, et satisfait en plus au critérium suivant;* 2° *soient* M *un point quelconque de l'arc d'extrémale,* Π *le plan tangent, en ce point* M, *à celle des ondes considérées qui y passe; la direction positive de la tangente à l'extrémale en* M *perce la multiplicité d'onde, qui a* M *pour origine, en un point* P, *et il résulte de la transversalité que ce point* P *forme, avec un plan parallèle au plan* Π, *un élément de contact* (E) *de cette multiplicité d'onde : dans le domaine de cet élément de contact* (E), *la multiplicité d'onde doit être concave vers son origine.*

Les développements des n^{os} 10 et 11 donnent les moyens analytiques de vérifier, dans des cas étendus, si ce critérium se trouve vérifié. On y peut encore faire intervenir uniquement la fonction G.

On remarquera que, dans le cas de minimum que nous venons d'expliquer, les ondes élémentaires issues des points d'une onde de la famille considérée sont convexes vers leur enveloppe, qui constitue l'onde consécutive de cette même famille : le mot d'enveloppe a donc ici son sens étymologique, et, en quelque sorte, physique. Et l'image qui en résulte est bien d'accord avec l'idée même de la propagation, une onde quelconque devant être le *front* des ondes élémentaires d'où on la considère comme provenant, quand on applique le principe des ondes enveloppes.

32. Dans la remarque précédente, nous avons substitué à la considération de la multiplicité d'onde celle de l'onde élémentaire. Ces deux multiplicités étant homothétiques par rapport à leur origine commune, cette substitution est légitime, car elles sont, en même temps, soit convexes, soit concaves. Il semble même que l'onde élémentaire fasse mieux image, car elle est plus immédiatement associée à l'élément différentiel de l'intégrale considérée.

Cela est vrai surtout, dans le cas où cet élément différentiel ω *du*

([1]) Cela veut dire que, par chaque point, passe une surface de la famille et une seule.

est susceptible de changer de signe, sur l'arc de courbe considéré : cas dont il nous reste à dire un mot, pour terminer.

Reportons-nous, pour cela, aux transformations employées aux n^{os} **20** et **21**. Les formules (76) et (81) du n^{o} **21**, appliquées simultanément à deux éléments de contact voisins, donnent

$$(22)\qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{q}'_i - 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(q'_i + H_i)}{1 + \sum_{j=1}^{n} H_j p_j} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - 1}{1 + \sum_{j=1}^{n} H_j p_j}.$$

En tenant compte encore de la formule (75) du n^{o} **21**, il reste

$$(23)\qquad \bar{\omega}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{q}'_i - 1\right) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - 1\right).$$

Si la condition suffisante du minimum est remplie pour l'intégrale transformée, à élément différentiel positif, $\int \bar{\omega}\, du$, le premier membre de cette identité (33) est négatif. Il en est donc de même du second.

Par conséquent, la deuxième condition suffisante du minimum se traduit par la concavité, ou la convexité, de la multiplicité d'onde, suivant que ω est positif ou négatif. Mais le point qui intervient ici est, de plus, sur la direction positive, ou négative, de la tangente suivant que ω est positif ou négatif. On pourrait dire qu'il y a convexité vers la direction positive de la tangente.

Il paraît plus simple de se borner à l'onde élémentaire

$$(24)\qquad \begin{cases} F\ (x_1, \ldots, x_n \mid X_1, \ldots, X_n) = \omega\, du \\ F_h(x_1, \ldots, x_n \mid X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \end{cases}$$

pour laquelle le point à considérer est toujours (dans le système de coordonnées qui a, pour origine, l'origine $(x_1, \ldots, x_n)$ de cette onde

$$(25)\qquad X_i = dx_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les valeurs de $q_1, \ldots, q_n$ à associer à ce point sont toujours définies par la solution canonique considérée; ou encore par la famille de surfaces définie par l'équation (14), qui correspond à l'une des solutions de l'équation de Jacobi-Hamilton (12).

Mais il se présente ici un fait digne de remarque, quand on applique la construction du n° 27 pour trouver l'une des solutions correspondant à l'extrémale considérée. Quand on passe par un point de l'extrémale pour lequel $\omega\, du$ s'annule en changeant de signe, la valeur de t cesse de croître (par exemple) pour commencer à décroître ; elle reprend donc, au delà d'un tel point N, les valeurs qu'elle avait prise en deçà. Les surfaces obtenues ne coupent donc plus l'arc d'extrémale chacune en un seul point. En N, la surface correspondante est tangente à l'arc d'extrémale, puisque $\sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i$ est alors nul, et dans le voisinage de cette surface particulière, celles qui coupent l'extrémale la coupent en deux points, de part et d'autre de N.

33. En un tel point N, il ne faudra, naturellement, pas conserver le dernier membre ($= dt$) dans les équations canoniques (4) pour la définition même de l'extrémale. Bien plus, comme nous l'avons remarqué au n° 22, ce système canonique est inutilisable, en ce point, sous cette forme (4), car les dérivées de G seront, en général, infinies. Mais cette difficulté disparaîtra si l'on introduit l'équation de Jacobi-Hamilton sous une forme moins restrictive que la forme (12), que nous avons spécialisée en vue de la théorie seulement.

Rappelons-nous en effet que cette équation, sous la forme primitive (2), définit le support tangentiel de la multiplicité d'onde, et, d'après les raisonnements du n° 21, ce support s'obtient en éliminant les rapports de $X_1, \ldots, X_n$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ entre les équations [1]

$$q_i = \frac{\partial F(x \mid X)}{\partial X_i} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h(x \mid X)}{\partial X_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

[1] Les lettres X_i désignent ici les différentielles dx_i, au lieu des dérivées $\frac{dx_i}{du}$; mais cela ne change rien aux raisonnements du n° 21, que, pour abréger, nous ne reprenons pas.

et les équations de condition

$$(27)\qquad 0 = F_h(x \mid X) \equiv F_h(x_1, \ldots, x_n \mid X_1, \ldots, X_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Si le résultat de cette élimination est obtenu sous une forme quelconque

$$(28)\qquad G_0(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 0,$$

dG_0 et dG seront liées par une identité de la forme

$$(29)\qquad dG \equiv M(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)\, dG_0,$$

pour tous les éléments $(x_1, \ldots, x_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ qui satisfont à l'équation (2) ou à l'équation (28), supposée équivalente. Le système canonique (4) et l'équation (2) seront donc remplacés par l'équation (18), et le système canonique plus général

$$(30)\qquad \frac{dx_1}{\dfrac{dG_0}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial G_0}{\partial q_n}} = \frac{dq_1}{-\dfrac{\partial G_0}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{-\dfrac{\partial G_0}{\partial x_n}}.$$

Ainsi seront déterminées les solutions canoniques, et t dépendra toujours de la quadrature de la différentielle

$$(31)\qquad dt = \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i.$$

Cette différentielle, d'après les équations (30), s'annule en même temps que l'expression

$$(32)\qquad D = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial G_0}{\partial q_i}.$$

Et cette expression intervient précisément quand on cherche à déduire G de G_0, puisqu'il s'agit de résoudre, par rapport à G, l'équation

$$(33)\qquad G_0\left(x_1, \ldots, x_n \,\middle|\, \frac{q_1}{G}, \ldots, \frac{q_n}{G}\right) = 0.$$

Si l'on tient compte de ce que G doit avoir la valeur 1 sur la multiplicité considérée, on tire de cette équation, par différentiation totale,

$$(34)\qquad dG_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial G_0}{\partial q_i}\right) dG,$$

ce qui montre que D est l'inverse du coefficient M de la formule (29). Ce coefficient M devient donc infini, pour les éléments de contact exceptionnels qui font l'objet de notre discussion ([1]).

A un autre point de vue, ces éléments se trouvent exceptionnels dans les mêmes conditions que les éléments qui avaient été écartés au n° 1, car les plans qui y figurent passent par l'origine des coordonnées (origine de l'onde élémentaire). Mais la difficulté disparaît ici, parce que les éléments de contact de l'onde élémentaire ont des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n;\ q_1, \ldots, q_n)$, qui, d'après les formules (26) et (24), sont liées maintenant par la relation

$$\sum_{i=1}^{n} q_i X_i = \omega\, du; \tag{35}$$

ce qui équivaut à rétablir l'homogénéité des coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ dont nous nous étions privés au n° 1, afin de mieux indiquer la dualité des deux points de vue : ponctuel et tangentiel.

En résumé : *Les extrémales du problème de Lagrange sont données, sans imposer de condition de signe à l'élément différentiel de l'intégrale* (1) (n° 12), *par les solutions du système canonique* (30), *qui satisfait à l'équation* (28) : *celle-ci est l'équation tangentielle de l'onde élémentaire* (24), *les coordonnées* $(X_1, \ldots, X_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ *d'un élément de contact de cette onde étant liées par la condition* (35). *Un arc d'extrémale ainsi obtenu fournit un minimum pour le problème considéré, si les conditions* (suffisantes) *suivantes sont remplies :* 1° *au moyen de cette extrémale et de* ∞^{n-1} *extrémales voisines, con-*

([1]) Il est facile d'étudier ces particularités sur des exemples. On peut prendre, comme très simple, le suivant : $\omega\, du = \sqrt{dx^2 + dy^2} - 2y\, dy$. On considérera l'extrémale $y = x$, et les extrémales voisines $y = x + c$, qui donnent comme famille d'ondes les paraboles égales $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} - y^2 = V = \text{const}$. Les ondes élémentaires sont des coniques faciles à discuter.

Par le procédé du n° 20, cette intégrale $\int \omega\, du$ se ramène à $\int \bar{\omega}\, du$, où $\bar{\omega}\, du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Le point exceptionnel N de l'extrémale est ici $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

venablement choisies, se construit, par le procédé du n° 27, une famille de surfaces (famille d'ondes) *remplissant d'une manière régulière une portion de l'espace qui contient et entoure de tous côtés l'arc d'extrémale considéré ;* 2° *l'onde élémentaire qui a pour origine chaque point* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de cet arc et qui passe par le point consécutif, infiniment voisin, de cet arc, est concave ou convexe vers son origine* [*dans le domaine de l'élément de contact de cette onde élémentaire qui contient ce point et dont le plan a pour coefficients de direction les quantités* $(q_1, \ldots, q_n)$ *associées à* $(x_1, \ldots, x_n)$ *dans la solution du système* (28), (30) *que l'on considère*], *suivant que l'élément différentiel* $F(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) \equiv \omega\, du$ *est positif ou négatif.*