BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 352-443
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__352_1>

SUR LES SYSTÈMES EN INVOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE DE TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES;

Par M. E. Cartan.

Introduction.

Le présent Mémoire a pour but de donner un aperçu d'ensemble sur une catégorie assez étendue de systèmes différentiels à trois variables indépendantes. Comme tout système différentiel (compatible) peut se ramener à un système en involution, j'ai borné mon étude aux systèmes différentiels en involution, et, parmi ceux-là, à ceux qui sont constitués par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue. Ce n'est pas que la classification des systèmes différentiels suivant le nombre des fonctions inconnues et l'ordre des dérivées partielles qui y figurent soit la plus logique, loin de là ; mais les résultats auxquels on est conduit dans l'étude des systèmes que j'ai choisis présentent assez d'intérêt par eux-mêmes et assez de variété, pour donner une idée des particularités qui peuvent se présenter dans le cas le plus général d'un système différentiel en involution à trois variables indépendantes.

Je me suis surtout préoccupé, une fois obtenue la classification des systèmes en involution, considérés d'après ce qu'on pourrait appeler leurs *formules de structure*, de déterminer leurs caractéristiques (au sens de Monge). Ces caractéristiques, qui peuvent être à une ou deux dimensions, existent dans tous les systèmes considérés, sauf dans ceux qui sont constitués par une seule équation

$$F(x_i, z, p_i, p_{ik}) = 0,$$

le déterminant

$$\left| \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \right|$$

n'étant pas nul.

Dans tous les autres cas, les caractéristiques sont indiquées, et mention est faite de l'usage éventuel qui peut en être fait pour la réduction de l'intégration par la méthode de Monge ; il est presque inutile d'ajouter, bien que je n'en fasse mention que dans un cas (49-55), que la méthode de M. Darboux s'applique comme dans le cas de deux variables indépendantes.

Parmi les résultats les plus saillants, je signale les deux suivants :

1° *Tout système en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre s'intègre par des équations différentielles ordinaires ;* c'est un théorème qui se généralise d'ailleurs pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

2° *Les systèmes en involution de plus de deux équations dont l'intégrale générale ne dépend que de r fonctions arbitraires d'un argument, admettent r familles de caractéristiques à deux dimensions, quelques-unes de ces r familles pouvant* *être doubles ou multiples*. Ce théorème s'étend aussi aux systèmes différentiels quelconques en involution, à un nombre quelconque n de variables indépendantes, pourvu que l'intégrale générale ne dépende que de fonctions arbitraires d'un argument ; dans ce cas général, les caractéristiques sont à $n-1$ dimensions.

Les cas où les caractéristiques dépendent seulement de constantes arbitraires sont étudiés spécialement.

Je signalerai, en particulier (IV), certains systèmes en involution de trois équations, lorsque les trois familles de caractéristiques à deux dimensions sont confondues et lorsque la famille unique dépend seulement des constantes arbitraires, dont le nombre est 7 ou 8. L'étude de ces systèmes présente des particularités intéressantes; elle est liée, au moins en ce qui concerne le cas où les caractéristiques dépendent de 8 paramètres, à la théorie des équations de Monge dans l'espace à cinq dimensions. Elle touche aussi à la théorie générale de l'équivalence des systèmes différentiels (42-55).

On peut d'ailleurs, lorsque les caractéristiques dépendent seulement de constantes arbitraires, appliquer à la recherche de ces caractéristiques la méthode générale d'intégration que j'ai développée ailleurs [1], pour les systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

Les principaux résultats de ce Mémoire ont fait l'objet d'une Communication à la Société mathématique de France, dans sa séance du 28 juin 1911.

I. — Généralités. Détermination des systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre.

1. Considérons une fonction inconnue z de trois variables indépendantes x_1, x_2, x_3. L'intégration d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles du second ordre en z revient à

---

[1] *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 109-192).

l'intégration du système d'équations aux différentielles totales

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\varpi &\equiv dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - p_3\, dx_3 = 0,\\
\varpi_1 &\equiv dp_1 - p_{11}\, dx_1 - p_{12}\, dx_2 - p_{13}\, dx_3 = 0,\\
\varpi_2 &\equiv dp_2 - p_{21}\, dx_1 - p_{22}\, dx_2 - p_{23}\, dx_3 = 0,\\
\varpi_3 &\equiv dp_3 - p_{31}\, dx_1 - p_{32}\, dx_2 - p_{33}\, dx_3 = 0,
\end{aligned}\right.
$$

où x_1, x_2, x_3 sont les variables indépendantes, et où z, p_1, p_2, p_3, $p_{ik} = p_{ki}$ sont les variables dépendantes supposées liées entre elles et aux variables indépendantes par une ou plusieurs relations.

Les covariants bilinéaires des quatre équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
\varpi' &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3,\\
\varpi'_1 &= \omega_1\varpi_{11} + \omega_2\varpi_{12} + \omega_3\varpi_{13},\\
\varpi'_2 &= \omega_1\varpi_{21} + \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23},\\
\varpi'_3 &= \omega_1\varpi_{31} + \omega_2\varpi_{32} + \omega_3\varpi_{33},
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$
\omega_i = dx_i, \qquad \varpi_{ik} = \varpi_{ki} = dp_{ik}.
$$

D'une manière plus générale, les p_{ik} étant regardés pour le moment comme des quantités indépendantes entre elles et indépendantes des x_i, z et p_i, on peut, d'une infinité de manières, choisir des expressions de Pfaff, $\overline{\varpi}$, $\overline{\varpi}_i$, $\overline{\omega}_i$, $\overline{\varpi}_{ik} = \overline{\varpi}_{ki}$, de façon :

1° Que le système

$$
\overline{\varpi} = \overline{\varpi}_1 = \overline{\varpi}_2 = \overline{\varpi}_3 = 0
$$

soit algébriquement équivalent au système (1) ;

2° Que l'on ait

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\overline{\varpi}' &\equiv \overline{\omega}_1\overline{\varpi}_1 + \overline{\omega}_2\overline{\varpi}_2 + \overline{\omega}_3\overline{\varpi}_3 && (\operatorname{mod} \overline{\varpi}),\\
\overline{\varpi}'_1 &\equiv \overline{\omega}_1\overline{\varpi}_{11} + \overline{\omega}_1\overline{\varpi}_{12} + \overline{\omega}_3\overline{\varpi}_{13} && (\operatorname{mod} \overline{\varpi}, \overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2, \overline{\varpi}_3),\\
\overline{\varpi}'_2 &\equiv \overline{\omega}_1\overline{\varpi}_{21} + \overline{\omega}_2\overline{\varpi}_{22} + \overline{\omega}_3\overline{\varpi}_{23} && (\operatorname{mod} \overline{\varpi}, \overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2, \overline{\varpi}_3),\\
\overline{\varpi}'_3 &\equiv \overline{\omega}_1\overline{\varpi}_{31} + \overline{\omega}_2\overline{\varpi}_{32} + \overline{\omega}_3\overline{\varpi}_{33} && (\operatorname{mod} \overline{\varpi}, \overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2, \overline{\varpi}_3).
\end{aligned}\right.
$$

Il suffit, pour cela, de poser d'abord

$$
\begin{aligned}
\overline{\varpi} &= a\varpi,\\
\overline{\varpi}_1 &= a_{11}\varpi_1 + a_{12}\varpi_2 + a_{13}\varpi_3 + a_1\varpi,\\
\overline{\varpi}_2 &= a_{21}\varpi_1 + a_{22}\varpi_2 + a_{23}\varpi_3 + a_2\varpi,\\
\overline{\varpi}_3 &= a_{31}\varpi_1 + a_{32}\varpi_2 + a_{33}\varpi_3 + a_3\varpi,
\end{aligned}
$$

où les a, a_i, a_{ik} sont 13 fonctions arbitraires des variables considérées, a étant différent de zéro, ainsi que le déterminant des a_{ik}. Les $\bar\omega_i$ sont alors, à des combinaisons linéaires près des ϖ_i et de ϖ, des formes linéaires de ω_i telles que, abstraction faite des termes en ϖ, la forme $\bar\omega_1\bar\varpi_1 + \bar\omega_2\bar\varpi_2 + \bar\omega_3\bar\varpi_3$ (où les produits sont des produits algébriques ordinaires) devienne égale à la forme

$$a(\omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3).$$

Quant aux $\bar\varpi_{ik}$, à des combinaisons linéaires près des ω_i, des ϖ_i et de ϖ (arbitraires par rapport aux ϖ_i et à ϖ), ce sont des formes linéaires des ϖ_{ik} telles que, abstraction faite des termes en ϖ_i et ϖ, la forme

$$\bar\varpi_{11}\bar\omega_1^2 + \bar\varpi_{22}\bar\omega_2^2 + \bar\varpi_{33}\bar\omega_3^2 + 2\bar\varpi_{23}\bar\omega_2\bar\omega_3 + 2\bar\varpi_{31}\bar\omega_3\bar\omega_1 + 2\bar\varpi_{12}\bar\omega_1\bar\omega_2$$

devienne égale à la forme

$$a(\varpi_{11}\omega_1^2 + \varpi_{22}\omega_2^2 + \varpi_{33}\omega_3^2 + 2\varpi_{23}\omega_2\omega_3 + 2\varpi_{31}\omega_3\omega_1 + 2\varpi_{12}\omega_1\omega_2).$$

Pour toute solution du système (1), les expressions de Pfaff $\bar\omega_1$, $\bar\omega_2$, $\bar\omega_3$ doivent rester indépendantes, les expressions $\bar\varpi$, $\bar\varpi_i$ sont nulles, et les expressions $\bar\varpi_{ik}$ sont des combinaisons linéaires des $\bar\omega_i$.

S'il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à la fonction inconnue z de x_1, x_2, x_3, les expressions $\bar\varpi_{ik}$, $\bar\varpi_i$, $\bar\varpi$, $\bar\omega_i$ sont liées identiquement entre elles par un certain nombre de relations linéaires, si l'on tient compte des relations qui existent entre les variables p_{ik}, p_i, z, x_i.

On pourra profiter de l'indétermination qui existe dans le choix des expressions $\bar\varpi_{ik}$, $\bar\varpi_i$, $\bar\varpi$, $\bar\omega_i$ pour réduire ces relations linéaires aux formes les plus simples possible.

Dorénavant, nous supprimerons les traits horizontaux sur ces expressions de Pfaff, sans qu'il puisse y avoir là une cause d'équivoque.

2. Rappelons brièvement la définition et les propriétés essentielles des systèmes différentiels en involution [1]. Soit un système

---

[1] *Voir* E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, chap. I, 1904, p. 153).

différentiel qu'on peut supposer ramené à un système de Pfaff de r équations

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_r = 0,$$

à $r+n+p$ variables, dont n indépendantes et $r+p$ dépendantes.

Considérons, avec les θ, $n+p$ autres expressions de Pfaff, $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+p}$, indépendantes entre elles et indépendantes de θ, et soient

$$\theta'_i \equiv \sum_{\rho,\sigma}^{1,2,\ldots,n+p} c_{\rho\sigma i}\,\omega_\rho\,\omega_\sigma \qquad (\operatorname{mod} \theta_1, \ldots, \theta_r),$$

les covariants bilinéaires des θ. Dans l'espace à $r+n+p$ dimensions, un *élément linéaire* E_1, c'est-à-dire l'ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point, peut être défini par les coordonnées du point et les rapports mutuels des θ et des ω, quand on se déplace sur la droite ; l'élément linéaire est dit *intégral* si les θ_i sont tous nuls. Un élément plan à h dimensions E_h, c'est-à-dire l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane à h dimensions passant par ce point, peut être défini par h éléments linéaires qui y sont contenus ; l'élément E_h est dit *intégral* si chacun de ces éléments linéaires est intégral et si, de plus, deux quelconques d'entre eux (ω_i) et $(\overline{\omega}_i)$ sont en *involution*, c'est-à-dire satisfont aux r relations

$$\sum_{\rho,\sigma} c_{\rho\sigma i}(\omega_\rho\overline{\omega}_\sigma - \omega_\sigma\overline{\omega}_\rho) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Le système de Pfaff considéré est dit *en involution* si, par un élément linéaire intégral arbitraire E_1, il passe au moins un élément intégral E_2 ; si, par un élément intégral E_2 arbitraire, il passe au moins un élément intégral E_3, etc. ; si, par un élément intégral E_{n-1} arbitraire, il passe au moins un élément intégral E_n. Le degré d'indétermination des intégrales d'un système en involution se déduit d'une manière très simple des degrés d'indétermination des éléments intégraux E_{i+1}, qui passent par un élément intégral arbitraire E_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

En particulier, supposons $n = 3$; supposons que nous ne considérions que les intégrales pour lesquelles ω_1, ω_2, ω_3 restent linéairement indépendantes, et écrivons ϖ_i au lieu de ω_{3+i} ; supposons enfin que nous ayons

$$\theta'_i \equiv \sum_{\rho}^{1,2,3} \sum_{\sigma}^{1,\ldots,p} a_{\rho\sigma i}\omega_\rho\varpi_\sigma \qquad (\operatorname{mod} \theta_1, \ldots, \theta_r ; i = 1, 2, \ldots, r).$$

On peut reconnaître de la manière suivante si un tel système est en involution. En désignant par u_1, u_2, u_3 ; u'_1, u'_2, u'_3 ; u''_1, u''_2, u''_3 neuf indéterminées, on forme la matrice à p colonnes et à $3r$ lignes

$$\begin{array}{llll}
a_{111}u_1 + a_{211}u_2 + a_{311}u_3, & a_{121}u_1 + a_{221}u_2 + a_{321}u_3, & \ldots, & a_{1p1}u_1 + a_{2p1}u_2 + a_{3p1}u_3, \\
a_{112}u_1 + a_{212}u_2 + a_{312}u_3, & a_{122}u_1 + a_{222}u_2 + a_{322}u_3, & \ldots, & a_{1p2}u_1 + a_{2p2}u_2 + a_{3p2}u_3, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
a_{11r}u_1 + a_{21r}u_2 + a_{31r}u_3, & a_{12r}u_1 + a_{22r}u_2 + a_{32r}u_3, & \ldots, & a_{1pr}u_1 + a_{2pr}u_2 + a_{3pr}u_3, \\
a_{111}u'_1 + a_{211}u'_2 + a_{311}u'_3, & a_{121}u'_1 + a_{221}u'_2 + a_{321}u'_3, & \ldots, & a_{1p1}u'_1 + a_{2p1}u'_2 + a_{3p1}u'_3, \\
a_{112}u'_1 + a_{212}u'_2 + a_{312}u'_3, & a_{122}u'_1 + a_{222}u'_2 + a_{322}u'_3, & \ldots, & a_{1p2}u'_1 + a_{2p2}u'_2 + a_{3p2}u'_3, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
a_{11r}u''_1 + a_{21r}u''_2 + a_{31r}u''_3, & a_{12r}u''_1 + a_{22r}u''_2 + a_{32r}u''_3, & \ldots, & a_{1pr}u''_1 + a_{2pr}u''_2 + a_{3pr}u''_3.
\end{array}$$

On désigne par $s_1 \leqq 3$ le rang de la matrice formée par les r premières lignes, par $s_1 + s_2 \leqq 2s_1$ le rang de la matrice formée par les $2r$ premières lignes, par $s_1 + s_2 + s_3 \leqq s_1 + 2s_2$ le rang de la matrice formée par toutes les lignes. On cherche ensuite de combien de paramètres dépend l'élément intégral E_3, le plus général, passant par un point arbitraire de l'espace ; ce nombre de paramètres est au plus égal à $3p - 2s_1 - s_2$. *Pour que le système soit en involution, il faut et il suffit qu'il soit exactement égal à ce nombre limite* $3p - 2s_1 - s_2$.

L'élément intégral E_3 le plus général s'obtient d'ailleurs en posant

$$\varpi_\rho = \alpha_{\rho 1}\omega_1 + \alpha_{\rho 2}\omega_2 + \alpha_{\rho 3}\omega_3 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

les coefficients $\alpha_{\rho i}$ étant assujettis à satisfaire aux $3r$ relations

$$\sum_{k=1}^{k=p}(a_{\rho k i}\alpha_{k\sigma} - a_{\sigma k i}\alpha_{k\rho}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r ; \rho, \sigma = 1, 2, 3).$$

Le système de Pfaff est en involution si le rang de ce système d'équations linéaires est

$$2s_1 + s_2.$$

L'intégrale générale dépend alors de $p - s_1 - s_2$ fonctions arbitraires de trois arguments, s_2 fonctions arbitraires de deux arguments et s_1 fonctions arbitraires d'un argument.

Le nombre s_1 peut être regardé comme le nombre des formes indépendantes (en $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$) :

$$u_1 \frac{\partial \theta'_i}{\partial \omega_1} + u_2 \frac{\partial \theta'_i}{\partial \omega_2} + u_3 \frac{\partial \theta'_i}{\partial \omega_3} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

le nombre s_2 comme le nombre des formes indépendantes entre elles et indépendantes des précédentes :

$$u'_1 \frac{\partial \theta'_i}{\partial \omega_1} + u'_2 \frac{\partial \theta'_i}{\partial \omega_2} + u'_3 \frac{\partial \theta'_i}{\partial \omega_3} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

3. Appliquons d'abord ce qui précède au système (1), où x_i, z, p_i, p_{ik} ne sont supposés liés par aucune relation. *Un tel système est en involution.*

En effet, une substitution linéaire effectuée sur les ω_i permet toujours de faire en sorte que l'on ait

$$\begin{array}{lll} u_1 = 1, & u_2 = 0, & u_3 = 0, \\ u'_1 = 0, & u'_2 = 1, & u'_3 = 0, \\ u''_1 = 0, & u''_2 = 0, & u''_3 = 1; \end{array}$$

on en déduit immédiatement

$$s_1 = 3, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 1, \quad p = 6,$$
$$3p - 2s_1 - s_2 = 10.$$

Or, l'élément intégral le plus général est fourni par les équations

$$\varpi_{ik} = \alpha_{ik1}\omega_1 + \alpha_{ik2}\omega_2 + \alpha_{ik3}\omega_3 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

où l'on peut permuter d'une manière quelconque les indices de α_{ijk} ; il dépend donc exactement de 10 constantes arbitraires.

Comme $p - s_1 - s_2 = 1$, l'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire de trois arguments, ce qui est évident, puisque z est une fonction arbitraire de x_1, x_2, x_3.

4. Passons maintenant au cas d'*une* équation aux dérivées partielles du second ordre.

Remarquons d'abord, et cette remarque nous servira dans la suite, que les formules (2) ne cessent pas d'être valables si l'on remplace ϖ_{ik} par

$$\varpi_{ik} + \alpha_{ik1}\omega_1 + \alpha_{ik2}\omega_2 + \alpha_{ik3}\omega_3 + \beta_{ik1}\varpi_1 + \beta_{ik2}\varpi_2 + \beta_{ik3}\varpi_3 + \beta_{ik}\varpi,$$

où les $\beta_{ik\rho}$ et les β_{ik} sont arbitraires et où les α_{ikj} sont assujettis aux conditions

$$\alpha_{ijk} = \alpha_{jik} = \alpha_{ikj} = \alpha_{jki} = \alpha_{kij} = \alpha_{kji}.$$

Cela étant, une relation entre les variables x_i, z, p_i, p_{ik} établira une relation linéaire entre les ϖ_{ik}, ω_i, ϖ_i et ϖ, relation qui, d'après ce qui précède, pourra toujours être réduite à la forme

$$\sum A_{ik}\varpi_{ik} + \sum B_i\omega_i = 0. \tag{3}$$

Si l'on effectue sur ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 une substitution linéaire, les coefficients A_{ik} de la relation précédente subissent aussi une substitution linéaire, et de telle manière que l'équation algébrique

$$\sum A_{ik}\varpi_i\varpi_k = 0$$

reste invariante. Il résulte de là et de la théorie des formes quadratiques que la relation (3) peut supposer être ramenée à l'une des trois formes

$$\varpi_{11} + \varpi_{22} + \varpi_{33} + \sum B_i\omega_i = 0,$$
$$\varpi_{12} + \sum B_i\omega_i = 0,$$
$$\varpi_{11} + \sum B_i\omega_i = 0.$$

On peut enfin disposer des quantités α_{ijk} de manière à réduire à zéro les coefficients B_i.

On a donc le résultat suivant :

Toute équation aux dérivées partielles du second ordre établit entre les expressions ϖ, ϖ_i, ω_i, ϖ_{ik} une relation qu'on peut ramener à l'une des trois formes

$$a)\qquad \varpi_{11} + \varpi_{22} + \varpi_{33} = 0,$$
$$b)\qquad \varpi_{12} = 0,$$
$$c)\qquad \varpi_{11} = 0.$$

On peut démontrer enfin facilement que dans chacun de ces cas le système de Pfaff (1) est en involution. On voit d'abord, en effet, que les 10 constantes α_{ijk}, qui définissent l'élément intégral E_3 le plus général (qui passe par un point donné), sont liées par trois relations indépendantes, à savoir

$$a)\qquad \alpha_{111}+\alpha_{122}+\alpha_{133}=\alpha_{112}+\alpha_{222}+\alpha_{233}=\alpha_{113}+\alpha_{223}+\alpha_{333}=0,$$

$$b)\qquad \alpha_{112}=\alpha_{122}=\alpha_{123}=0,$$

$$c)\qquad \alpha_{111}=\alpha_{112}=\alpha_{113}=0.$$

L'élément E_3 dépend donc de 7 constantes arbitraires.

D'autre part, en faisant

$$u_1=0,\qquad u_2=0,\qquad u_3=1,$$
$$u'_1=1,\qquad u'_2=1,\qquad u'_3=0,$$

on voit que l'on a

$$s_1=3,\qquad s_2=2;\qquad p=5,\qquad 3p-2s_1-s_2=7,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à la détermination des systèmes *en involution* de plusieurs équations aux dérivées partielles du second ordre. Nous ferons à cet égard deux remarques générales.

Si un tel système introduit entre les ϖ_{ik}, ω_i, ϖ_i, ϖ un certain nombre de relations linéaires indépendantes, on peut d'abord supposer ces relations de la forme

$$\sum A_{ik}\varpi_{ik}+\sum A_i\omega_i=0,$$
$$\sum B_{ik}\varpi_{ik}+\sum B_i\omega_i=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\sum L_{ik}\varpi_{ik}+\sum L_i\omega_i=0.$$

Or, le système étant en involution, il existe des éléments intégraux E_3 ; un d'entre eux, pris d'ailleurs au hasard, sera défini par les équations

$$\varpi_{ik}=\sum_{\rho=1}^{\rho=3}\alpha_{ik\rho}\,\omega_\rho\qquad (i,k=1,2,3);$$

autrement dit, on aura

$$\begin{aligned} &\sum_{i,k}^{1,2,3} A_{ik}\alpha_{ik\rho} + A_\rho = 0 \\ &\sum_{i,k}^{1,2,3} B_{ik}\alpha_{ik\rho} + B_\rho = 0 \qquad (\rho = 1, 2, 3). \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\sum_{i,k} L_{ik}\alpha_{ik\rho} + L_\rho = 0 \end{aligned}$$

Il résulte de là qu'en remplaçant, ce qui est permis,

$$\varpi_{ik} \quad \text{par} \quad \varpi_{ik} + \alpha_{ik1}\omega_1 + \alpha_{ik2}\omega_2 + \alpha_{ik3}\omega_3,$$

les coefficients A_i, B_i, ..., L_i disparaissent. *On peut donc se borner au cas où les relations entre les* ϖ_{ik}, ω_i, ϖ_i, ϖ *ne contiennent que les* ϖ_{ik}.

La seconde remarque est la suivante : Si l'on a un système en involution de h équations aux dérivées partielles du second ordre, il existe h relations linéaires indépendantes entre les ϖ_{ik} ; on a par suite

$$p = 6 - h;$$

on a, d'autre part,

$$s_1 + s_2 \leqq p, \qquad s_1 \leqq 3, \qquad 2s_1 + s_2 \leqq p + 3,$$
$$3p - 2s_1 - s_2 \geqq 2p - 3 = 9 - 2h.$$

L'élément intégral E_3 le plus général doit donc dépendre *au moins* de $9 - 2h$ constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'il doit exister entre les α_{ijk}, *au plus*, $10 - (9 - 2h) = 2h + 1$ relations indépendantes. En définitive, si le système en involution introduit les h relations suivantes entre les ϖ_{ik} :

$$\sum A_{ik}\varpi_{ik} = \sum B_{ik}\varpi_{ik} = \ldots = \sum L_{ik}\varpi_{ik} = 0,$$

il faut que les $3h$ relations suivantes, entre les α_{ijk},

$$\sum A_{ik}\alpha_{ik\rho} = \sum B_{ik}\alpha_{ik\rho} = \ldots = \sum L_{ik}\alpha_{ik\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, 3)$$

se réduisent à $2h + 1$ indépendantes au plus.

Cette dernière remarque peut encore s'exprimer de la manière suivante : *Si l'on désigne par* v_1, v_2, v_3 *trois variables quelconques, par* $F_1, F_2, \ldots, F_h$ *les h formes quadratiques*

$$\sum A_{ik} v_i v_k, \qquad \sum B_{ik} v_i v_k, \qquad \ldots, \qquad \sum L_{ik} v_i v_k,$$

les $3h$ *formes ternaires*

$$v_1 F_1, \quad v_2 F_1, \quad v_3 F_1; \quad v_1 F_2, \quad \ldots, \quad v_3 F_h$$

doivent être reliées au moins par $h - 1$ *relations linéaires indépendantes à coefficients constants.*

6. La détermination des systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre résulte immédiatement de ce qui précède. Il correspondra à un tel système deux formes quadratiques F_1, F_2 de trois variables v_1, v_2, v_3, et l'on devra avoir une relation linéaire à coefficients constants entre les six formes

$$v_1 F_1, \quad v_2 F_1, \quad v_3 F_1; \quad v_1 F_2, \quad v_2 F_2, \quad v_3 F_2.$$

Autrement dit il existera deux formes *linéaires* l_1 et l_2 telles que l'on ait identiquement

$$l_1 F_1 + l_2 F_2 = 0.$$

Ces formes linéaires sont nécessairement indépendantes, sans quoi les deux relations entre les ϖ_{ik} ne seraient pas indépendantes. Comme une substitution linéaire effectuée sur les ϖ_i fournit la même substitution linéaire sur les v_i, on peut faire en sorte qu'on ait

$$v_2 F_1 - v_1 F_2 = 0,$$

et par suite

$$F_1 = v_1(A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3), \qquad F_2 = v_2(A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3).$$

On peut enfin se réduire à l'un des deux cas

a) $\qquad F_1 = v_1 v_3, \qquad F_2 = v_2 v_3,$

b) $\qquad F_1 = v_1^2, \qquad F_2 = v_1 v_2.$

En conclusion *tout système en involution de deux équations* *aux dérivées partielles du second ordre conduit à l'un des deux systèmes de relations linéaires*

a) $$\varpi_{13} = \varpi_{23} = 0,$$

b) $$\varpi_{11} = \varpi_{12} = 0.$$

Réciproquement *chacun de ces deux cas correspond effectivement à un système en involution;* une vérification directe montre en effet qu'on a

$$s_1 = 3, \qquad s_2 = 1, \qquad 3p - 2s_1 - s_2 = 5;$$

d'autre part les relations entre les a_{ijk} sont au nombre de 5 et l'élément intégral E_3 dépend de $10 - 5 = 5$ constantes arbitraires.

7. La détermination des systèmes en involution de trois équations aux dérivées partielles du second ordre conduit à la considération de trois formes quadratiques F_1, F_2, F_3 telles qu'on ait deux identités distinctes de la forme

$$l_1 F_1 + l_2 F_2 + l_3 F_3 = 0,$$
$$m_1 F_1 + m_2 F_2 + m_3 F_3 = 0,$$

où l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 désignent six formes linéaires.

Déterminons la constante ρ par la condition que les trois formes linéaires

$$l_1 + \rho m_1, \qquad l_2 + \rho m_2, \qquad l_3 + \rho m_3$$

soient dépendantes; ρ s'obtient en annulant un déterminant du troisième ordre et est par suite donné par une équation du troisième degré. On peut toujours supposer que cette équation admet la racine $\rho = 0$, et aussi par suite que l'on a

$$l_1 = v_1, \qquad l_2 = v_2, \qquad l_3 = 0.$$

Soit alors

$$m_1 = av_1 + bv_2 + cv_3, \qquad m_2 = a'v_1 + b'v_2 + c'v_3, \qquad m_3 = a''v_1 + b''v_2 + c''v_3.$$

L'équation en ρ est

$$\begin{vmatrix} 1 + a\rho & b\rho & c\rho \\ a'\rho & 1 + b'\rho & c'\rho \\ a''\rho & b''\rho & c''\rho \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} 1 + a\rho & b\rho & c\rho \\ a'\rho & 1 + b'\rho & c'\rho \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cela étant, plusieurs cas sont à distinguer :

1° *L'équation en ρ a trois racines distinctes;* on peut supposer que ces racines sont $0, \infty, 1$.

Le coefficient de ρ étant c'', il faut que c'' ne soit pas nul; on peut alors réduire m_3 à v_3 et même, en changeant F_3, on peut supposer $c = c' = 0$. L'équation en ρ se réduit alors à

$$(ab' - ba')\rho^3 + (a + b')\rho^2 + \rho = 0.$$

Comme $ab' - ba'$ est nul on peut supposer, par une substitution linéaire effectuée sur v_1 et v_2, que l'on a

$$b = b' = 0,$$

et par suite

$$a = -1.$$

Les deux relations entre F_1, F_2 et F_3 se réduisent donc à

$$v_1 F_1 + v_2 F_2 = 0,$$
$$-v_1 F_1 + a' v_1 F_2 + v_3 F_3 = 0.$$

On peut enfin changer $F_1 - a' F_2$ en F_1, $v_2 + a' v_1$ en v_2 et l'on obtient

$$v_1 F_1 = -v_2 F_2 = v_3 F_3,$$

d'où

$$\frac{F_1}{v_2 v_3} = \frac{F_2}{-v_1 v_3} = \frac{F_3}{v_1 v_2}.$$

Ce premier cas correspond donc aux trois relations linéaires

$$\varpi_{23} = \varpi_{31} = \varpi_{12} = 0.$$

2° *L'équation en ρ a deux racines doubles et une racine simple.* On peut supposer que la racine double est ∞ et la racine simple 0. On arrive, comme dans le premier cas, à supposer

$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad c'' = 1;$$

puis

$$ab' - ba' = 0, \qquad a + b' = 0.$$

La première des deux dernières équations permet de supposer

$$b = b' = 0,$$

d'où

$$a = 0;$$

par suite

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = v_1, \qquad m_3 = v_3.$$

On a donc

$$v_1 F_1 + v_2 F_2 = 0,$$
$$v_1 F_2 + v_3 F_3 = 0,$$

et par suite

$$\frac{F_1}{v_1 v_3} = \frac{F_2}{-v_1 v_3} = \frac{F_3}{v_1^2}.$$

Le deuxième cas correspond donc aux trois relations linéaires

$$\varpi_{23} = \varpi_{13} = \varpi_{11} = 0.$$

3° *L'équation en* ρ *a une racine triple;* on peut supposer que cette racine est o. On a alors $c'' = 0$, ce qui permet, comme m_3 ne peut pas être identiquement nulle, de supposer

$$m_3 = v_1.$$

L'équation en ρ étant

$$(bc' - cb')\rho^3 - c\rho^2 = 0,$$

il faut

$$c = 0, \qquad bc' \neq 0.$$

On a alors

$$v_1 F_1 + v_2 F_2 = 0,$$
$$bv_2 F_1 + c'\left(v_3 + \frac{b'}{c'} v_2\right) F_2 + v_1(F_3 + aF_1 + a'F_2) = 0,$$

ou, sans nuire à la généralité,

$$v_1 F_1 + v_2 F_2 = 0,$$
$$v_2 F_1 + v_3 F_2 + v_1 F_3 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{F_1}{v_1 v_2} = \frac{F_2}{-v_1^2} = \frac{F_3}{v_1 v_3 - v_2^2}.$$

Le troisième cas correspond donc aux trois relations linéaires

$$\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{13} - \varpi_{22} = 0.$$

4° *L'équation en* ρ *se réduit à une identité.* En raisonnant comme dans le cas précédent, on voit qu'on peut supposer

$$m_3 = v_1, \qquad c = 0, \qquad bc' = 0.$$

Ce cas se décompose donc en deux autres.

4_a. $b = 0$. Alors on peut supposer, sans nuire à la généralité, que l'on a

$$v_1 F_1 + v_2 F_2 = 0,$$
$$v_3 F_2 + v_1 F_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{F_1}{v_1 v_2} = \frac{F_2}{-v_1^2} = \frac{F_3}{v_1 v_3}.$$

Ce cas 4_a correspond donc aux relations

$$\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{13} = 0.$$

4_b. $c' = 0$. On peut supposer que l'on a

$$v_1 F_1 + v_2 F_2 = 0,$$
$$v_2 F_1 + v_1 F_3 = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{F_1}{v_1 v_2} = \frac{F_2}{-v_1^2} = \frac{F_3}{-v_2^2}.$$

Ce cas 4_b correspond donc aux relations

$$\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{22} = 0.$$

Réciproquement les cinq cas obtenus correspondent tous à des systèmes en involution. On voit d'abord immédiatement que dans le cas 4_a on a

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = 1, \qquad p = 3; \qquad 3p - 2s_1 - s_2 = 4;$$

or les α_{ijk} sont reliés par les relations

$$\alpha_{111} = \alpha_{112} = \alpha_{113} = \alpha_{122} = \alpha_{123} = \alpha_{133} = 0,$$

de sorte que l'élément intégral E_3 dépend bien de quatre constantes arbitraires.

Dans chacun des autres cas, on a

$$s_1 = 3, \qquad s_2 = 0,$$

comme on peut s'en rendre compte immédiatemeut en faisant

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_3 = 1.$$

On a donc

$$3p - 2s_1 - s_2 = 3,$$

et en effet dans chaque cas les dix constantes α_{ijk} sont liées par sept relations, à savoir :

1° $\alpha_{112} = \alpha_{122} = \alpha_{123} = \alpha_{113} = \alpha_{133} = \alpha_{223} = \alpha_{233} = 0$;

2° $\alpha_{111} = \alpha_{112} = \alpha_{113} = \alpha_{123} = \alpha_{133} = \alpha_{223} = \alpha_{233} = 0$;

3° $\alpha_{111} = \alpha_{112} = \alpha_{113} = \alpha_{122} = \alpha_{123} = \alpha_{222} = \alpha_{133} - \alpha_{223} = 0$;

4° $\alpha_{111} = \alpha_{112} = \alpha_{113} = \alpha_{122} = \alpha_{123} = \alpha_{222} = \alpha_{223} = 0$.

Il existe donc cinq types de systèmes en involution de trois équations aux dérivées partielles du second ordre caractérisés par les relations

a) $\varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0,$

b) $\varpi_{11} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0,$

c) $\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{13} - \varpi_{22} = 0,$

d) $\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{22} = 0,$

e) $\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{13} = 0.$

8. Nous abandonnerons les méthodes précédentes pour déterminer les systèmes en involution de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre. Dans ces systèmes on a $p = 2$. Or, on démontre facilement qne pour tout système en involution pour lequel $p = 2$, on a des relations de la forme

$$\theta'_1 \equiv \omega_1 \chi_1, \quad \theta'_2 \equiv \omega_2 \chi_2, \quad \theta'_3 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \theta'_r \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \theta_1, \ldots, \theta_r),$$

ou de la forme

$$\theta'_1 \equiv \omega_1 \chi_1, \quad \theta'_2 \equiv \omega_1 \chi_2 + \omega_2 \chi_1, \quad \theta'_3 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \theta'_r \equiv 0$$
$$(\operatorname{mod} \theta_1, \ldots, \theta_r),$$

ou enfin de la forme

$$\theta'_1 \equiv \omega_1 \chi_1 + \omega_2 \chi_2, \quad \theta'_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \theta'_r \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \theta_1, \ldots, \theta_r).$$

Ici les ϖ_{ik} seront des combinaisons linéaires de χ_1 et χ_2 et l'on aura dans le premier cas

$$\varpi'_1 \equiv a_1 \omega_1 \chi_1 + b_1 \omega_2 \chi_2,$$
$$\varpi'_2 \equiv a_2 \omega_1 \chi_1 + b_2 \omega_2 \chi_2,$$
$$\varpi'_3 \equiv a_3 \omega_1 \chi_1 + b_3 \omega_2 \chi_2,$$

c'est-à-dire

$$\varpi_{11} = a_1 \chi_1, \quad \varpi_{22} = b_2 \chi_2, \quad \varpi_{33} = 0,$$
$$\varpi_{23} = b_3 \chi_2 = 0, \quad \varpi_{31} = a_3 \chi_1 = 0, \quad \varpi_{12} = b_1 \chi_2 = a_2 \chi_1,$$

d'où enfin les relations

$$\varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0.$$

Dans le deuxième cas on a

$$\begin{aligned}
\varpi'_1 &\equiv a_1 \omega_1 \chi_1 + b_1(\omega_1 \chi_2 + \omega_2 \chi_1),\\
\varpi'_2 &\equiv a_2 \omega_1 \chi_1 + b_2(\omega_1 \chi_2 + \omega_2 \chi_1),\\
\varpi'_3 &\equiv a_3 \omega_1 \chi_1 + b_3(\omega_1 \chi_2 + \omega_2 \chi_1),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varpi_{11} = a_1 \chi_1 + b_1 \chi_2, \qquad \varpi_{22} = b_2 \chi_1, \qquad \varpi_{33} = 0,$$
$$\varpi_{23} = b_3 \chi_1 = 0, \qquad \varpi_{31} = a_3 \chi_1 + b_3 \chi_2 = 0, \qquad \varpi_{12} = b_1 \chi_1 = a_2 \chi_1 + b_2 \chi_2,$$

d'où enfin les relations

$$\varpi_{22} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0.$$

Dans le troisième cas on aurait

$$\begin{aligned}
\varpi'_1 &\equiv a_1(\omega_1 \chi_1 + \omega_2 \chi_2),\\
\varpi'_2 &\equiv a_2(\omega_1 \chi_1 + \omega_2 \chi_2),\\
\varpi'_3 &\equiv a_3(\omega_1 \chi_1 + \omega_2 \chi_2),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varpi_{11} = a_1 \chi_1 \qquad \varpi_{22} = a_2 \chi_2, \qquad \varpi_{33} = 0,$$
$$\varpi_{23} = a_3 \chi_2 = 0, \qquad \varpi_{31} = a_3 \chi_1 = 0, \qquad \varpi_{12} = a_1 \chi_2 = a_2 \chi_1,$$

cela est impossible, car on aurait

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

et tous les ϖ_{ik} seraient nuls.

Il y a donc deux types de systèmes en involution de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre, caractérisés par les relations

$$a) \qquad \varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0,$$

$$b) \qquad \varpi_{22} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0.$$

9. Dans le cas d'un système en involution de cinq équations aux dérivées partielles du second ordre, on a $p = 1$; dans ce cas chacun des covariants bilinéaires ϖ'_i peut être supposé de la forme $a_i \omega_1 \chi$. On voit facilement comme dans le cas précédent que cela

donne *un seul type, caractérisé par les relations*

$$\varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{22} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0.$$

10. Enfin un système en involution de six équations aux dérivées partielles du second ordre est caractérisé par les relations

$$\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{22} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0;$$

c'est un système d'équations de Pfaff complètement intégrable dont l'intégrale générale dépend de constantes arbitraires.

II. — Les systèmes formés d'une seule équation.

11. Nous nous proposons d'étudier les *caractéristiques* des équations ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes. Les caractéristiques sont des multiplicités à une ou deux dimensions pouvant dépendre de constantes ou de fonctions arbitraires, mais telles que chaque multiplicité intégrale soit engendrée par une famille de ces caractéristiques dépendant seulement de constantes arbitraires (deux ou une).

12. Occupons-nous d'abord *d'une* équation aux dérivées partielles; cette équation peut être du type *a*), *b*) ou *c*) (4). Les équations du type *a*), dont la plus simple est l'équation de Laplace, n'admettent pas de caractéristiques au sens qui vient d'être donné à ce mot.

L'intégration d'une équation du type *b*) revient à celle d'un système de Pfaff

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = 0,$$

avec les conditions

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lr} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & (\mathrm{mod}\,\varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_1\varpi_{11} + \qquad\qquad \omega_3\varpi_{13} & (\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_2 \equiv \qquad\qquad \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23} & (\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} & (\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{array}\right.$$

Considérons sur une multiplicité intégrale la famille de courbes (à une dimension) définie par les équations

$$\omega_1 = \omega_3 = 0;$$

ces courbes dépendent de deux constantes arbitraires et elles engendrent la multiplicité intégrale, puisque par chaque point de celle-ci il passe une de ces courbes et une seule.

Dans l'espace $(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)$ on obtient ainsi des multiplicités à une dimension, appelées *caractéristiques du premier ordre*, satisfaisant aux équations de Pfaff

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_3 = 0. \tag{2}$$

Dans l'espace (x_i, z, p_i, p_{ik}) on obtient des *caractéristiques* du *second ordre* qui satisfont aux équations de Pfaff

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_3 = \varpi_{11} = \varpi_{13} = 0; \tag{3}$$

en effet les équations d'un élément intégral E_3 contenant en particulier les deux suivantes

$$\varpi_{11} = \alpha_{111}\omega_1 + \alpha_{113}\omega_3,$$
$$\varpi_{13} = \alpha_{113}\omega_1 + \alpha_{133}\omega_3,$$

les équations $\varpi_{11} = \varpi_{13} = 0$ sont, sur chaque multiplicité intégrale, des conséquences des équations $\omega_1 = \omega_3 = 0$; elles sont donc vérifiées par chaque caractéristique du second ordre.

L'équation aux dérivées partielles considérée admet une seconde famille de caractéristiques définies par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{22} = \varpi_{23} = 0. \tag{4}$$

On peut se servir de la considération des caractéristiques pour intégrer dans certains cas l'équation aux dérivées partielles, comme dans le cas d'une équation à deux variables indépendantes. Il en est ainsi par exemple *lorsque les équations* (2) *des caractéristiques du premier ordre admettent trois combinaisons intégrables indépendantes*. En tenant compte des équations (2) on a d'abord

$$\varpi' = 0,$$
$$\varpi'_1 = 0,$$
$$\varpi'_2 = \omega_2\varpi_{22},$$
$$\varpi'_3 = \omega_2\varpi_{23},$$

ce qui prouve que les seules combinaisons intégrables possibles sont des combinaisons linéaires de ϖ, ϖ_1, $\omega_1 + \alpha\varpi_2 + \beta\varpi_3$,

$\omega_3 + \alpha' \varpi_2 + \beta' \varpi_3$, ou encore, à cause de l'indétermination du choix de ω_1 et ω_3, des combinaisons linéaires de ϖ, ϖ_1, ω_1, ω_3. D'autre part, on a

$$\varpi' \equiv \omega_2 \varpi_2 \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \omega_1, \omega_3);$$

donc il n'y a que trois combinaisons intégrables indépendantes *au plus*, qu'on peut supposer dépendre linéairement de ϖ_1, ω_1, ω_3. S'il y en a trois, soit

$$du, \quad dv, \quad dw,$$

l'équation $\varpi_1 = 0$ sera de la forme

$$dw - \lambda\, du - \mu\, dv = 0,$$

λ et μ étant obtenus par des différentiations, et, sur chaque multiplicité intégrale, w est une fonction de u et de v.

Si l'on se donne cette fonction, l'équation $\varpi_1 = 0$ est vérifiée d'elle-même, et le système de Pfaff à intégrer se réduit à

$$\varpi = \varpi_2 = \varpi_3 = 0$$

avec

$$\varpi' \equiv \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi),$$

$$\left.\begin{aligned} \varpi'_2 &\equiv \omega_2 \varpi_{22} + \omega_3 \varpi_{23} \\ \varpi'_3 &\equiv \omega_2 \varpi_{23} + \omega_3 \varpi_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_2, \varpi_3).$$

L'intégration d'un tel système revient à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. *La recherche des caractéristiques de cette équation peut dans certains cas être simplifiée, et quelquefois effectuée sans intégration.*

Si les équations de Pfaff de chaque famille de caractéristiques admettent trois combinaisons intégrables, on peut se donner arbitrairement deux fonctions arbitraires de deux arguments et l'on a alors à réduire à sa forme normale une équation de Pfaff par deux opérations d'ordre 3 et 1; cette réduction est à son tour susceptible de simplifications dont l'étude serait un peu longue ici.

13. Une équation aux dérivées partielles du type *c*) se ramène à un système de Pfaff

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = 0$$

avec les conditions

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & (\mathrm{mod}\,\varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \qquad\qquad \omega_2\varpi_{12} + \omega_3\varpi_{13} & (\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \\ \varpi'_2 \equiv \omega_1\varpi_{12} + \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23} & (\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} & (\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{array}\right.$$

Ici il y a *une seule* famille de caractéristiques à une dimension définie par les équations

$$\omega_2 = \omega_3 = 0,$$

lesquelles entraînent, sur chaque multiplicité intégrale,

$$\varpi_{12} = \varpi_{13} = 0.$$

Pour que la méthode d'intégration de Monge réussisse ici, il faut qu'une équation de la forme $\varpi_1 + \alpha\varpi = 0$ soit réductible à la forme

$$dw - \lambda\, du - \mu\, dv = 0.$$

S'il en est ainsi on peut supposer que le système de Pfaff dont les intégrales premières sont u, v, w, λ, μ est

$$\varpi_1 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{12} = \varpi_{13} = 0;$$

on a alors

$$\varpi'_1 \equiv \omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \varpi'_{12} \equiv \varpi'_{13} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\varpi_1, \omega_2, \omega_3, \varpi_{12}, \varpi_{13}).$$

Or, les équations (5) montrent qu'on a

$$\varpi' \equiv \varpi'_1 \equiv \varpi'_2 \equiv \varpi'_3 \equiv \omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \varpi'_{12} \equiv \varpi'_{13} \equiv 0$$
$$(\mathrm{mod}\,\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \omega_2, \omega_3, \varpi_{12}, \varpi_{13}).$$

Autrement dit les *equations de Pfaff des caracteristiques du second ordre sont complètement intégrables.*

14. Réciproquement supposons que les caractéristiques du second ordre (et par suite du premier ordre) dépendent seulement de constantes arbitraires (au nombre de 8). Considérons le système de Pfaff

$$\varpi = \varpi_1 = 0.$$

On a des équations de la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varpi' \equiv \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1),\\ &\varpi'_1 \equiv \omega_2\varpi_{12} + \omega_3\varpi_{13} + \varpi_2(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\varpi_{12}\\ &\qquad\qquad + a_5\varpi_{13} + a_6\varpi_{22} + a_7\varpi_{23} + a_8\varpi_{33})\\ &\quad + \varpi_3(b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3\\ &\qquad + b_4\varpi_{12} + b_5\varpi_{13} + b_6\varpi_{22} + b_7\varpi_{23} + b_8\varpi_{33}) + c\varpi_2\varpi_3\\ &\qquad\qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1).\end{aligned}\right.$$

On peut d'abord remplacer ϖ_{12} et ϖ_{13} par

$$\varpi_{12} + a_2\varpi_2 + b_2\varpi_3, \qquad \varpi_{13} + a_3\varpi_2 + b_3\varpi_3$$

ce qui revient à supposer

$$a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0;$$

on peut ensuite remplacer ω_2 et ω_3 par

$$\omega_2 + \alpha\varpi_2 + \beta\varpi_3, \qquad \omega_3 = \beta\varpi_2 + \gamma\varpi_3,$$

ce qui permet de supposer

$$a_4 = b_4 = b_5 = 0.$$

On a donc

$$(6')\quad \left\{\begin{aligned} &\varpi' \equiv \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1),\\ &\varpi'_1 \equiv \omega_2\varpi_{12} + \omega_3\varpi_{13} + \varpi_2(a_1\omega_1 + a_5\varpi_{13} + a_6\varpi_{22} + a_7\varpi_{23} + a_8\varpi_{33})\\ &\qquad + \varpi_3(b_1\omega_1 + b_6\varpi_{22} + b_7\varpi_{23} + b_8\varpi_{33}) + c\varpi_2\varpi_3\\ &\qquad\qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1).\end{aligned}\right.$$

Nous allons montrer que tous les coefficients a, b, c sont nuls.

Appliquons *l'identité fondamentale* [1] au covariant ϖ'_1 en ne

---

[1] L'identité fondamentale est la suivante. Si

$$\sum a_{ik}\omega_i\omega_k$$

est le covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff quelconque, on a identiquement

$$\sum (da_{ik}\omega_i\omega_k + a_{ik}\omega'_i\omega_k - a_{ik}\omega_i\omega'_k) = 0,$$

où le premier membre est une forme trilinéaire symbolique.

conservant que les termes en $\omega_1 \omega_2 \varpi_{22}$; ces termes ne peuvent venir que de

$$-\omega_2 \varpi'_{12} \quad \text{et} \quad a_1 \varpi'_2 \omega_1 ;$$

or ϖ'_{12} ne contient pas de termes en $\omega_1 \varpi_{22}$, puisque par hypothèse ϖ'_{12} est nul en tenant compte des équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{12} = \varpi_{13} = 0 ;$$

de plus ϖ'_2 contient le terme $\omega_2 \varpi_{22}$; donc le premier membre de l'identité fondamentale contenant le terme $a_1 \omega_1 \omega_2 \varpi_{22}$, il faut que a_1 soit nul. On démontrerait de même que b_1 est nul.

En considérant de même, dans l'identité fondamentale, les termes en

$$\omega_1 \varpi_{12} \varpi_{22}, \quad \omega_1 \varpi_{12} \varpi_{23}, \quad \omega_1 \varpi_{12} \varpi_{33} ;$$
$$\omega_1 \varpi_{13} \varpi_{22}, \quad \omega_1 \varpi_{13} \varpi_{23}, \quad \omega_1 \varpi_{13} \varpi_{33},$$

on démontre que les coefficients

$$a_6, \quad a_7, \quad a_8 ; \quad b_6, \quad b_7, \quad b_8$$

sont tous nuls.

Restent les coefficients a_5 et c. Pour démontrer que a_5 est nul, appliquons encore l'identité fondamentale à ϖ'_1 en ne conservant que les termes en $\omega_1 \varpi_{12} \varpi_{13}$; ces termes proviennent de

$$\omega'_2 \varpi_{12} + \omega'_3 \varpi_{13} + a_5 \varpi'_2 \varpi_{13}.$$

Soit donc

$$\omega'_2 = \alpha \omega_1 \varpi_{13} + \ldots, \qquad \omega'_3 = \beta \omega_1 \varpi_{12} + \ldots ;$$

on aura

$$-\alpha + \beta + a_5 = 0.$$

Appliquons l'identité fondamentale à ϖ' en ne conservant que les termes en $\omega_1 \varpi_2 \varpi_{13}$, et $\omega_1 \varpi_3 \varpi_{12}$; on obtient

$$-a_5 - \alpha = 0, \qquad -\beta = 0 ;$$

des trois relations qui viennent d'être obtenues il résulte

$$a_5 = \alpha = \beta = 0.$$

Appliquons enfin l'identité fondamentale à ϖ'_1, en conservant les termes en $\omega_1 \varpi_3 \varpi_{12}$, et $\omega_1 \varpi_2 \varpi_{13}$; on en déduit

$$\omega'_2 = c\, \omega_1 \varpi_3 + \ldots, \qquad \omega'_3 = -c\, \omega_1 \varpi_2 + \ldots ;$$

appliquons l'identité fondamentale à ϖ', en ne conservant que les termes en $\omega_1\,\varpi_2\,\varpi_3$; il vient

$$3c = 0,$$

d'où

$$c = 0.$$

Finalement on a les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 \\ \varpi'_1 \equiv \omega_2\varpi_{12} + \omega_3\varpi_{13} \end{cases} \qquad (\bmod\, \varpi,\, \varpi_1).$$

15. Les formules précédentes montrent [1] que l'équation $\varpi_1 = 0$ peut s'exprimer au moyen de x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 et *deux* quantités indépendantes entre elles et indépendantes des précédentes, soit

$$dp_1 - u\,dx_2 - v\,dx_3 - a_1\,dx_1 - a_2\,dp_2 - a_3\,dp_3 = 0$$

où a_1, a_2, a_3 sont *certaines* fonctions des neuf quantités

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad z,\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad u,\quad v.$$

Le système $\varpi = \varpi_1 = 0$ *est par suite équivalent à l'équation aux dérivées partielles* donnée : il en est en effet une conséquence ; d'autre part de ce système on déduit les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} p_{11} - a_1 - a_2p_{12} - a_3p_{13} = 0, \\ p_{12} - u\ \ - a_2p_{22} - a_3p_{23} = 0, \\ p_{13} - v\ \ - a_2p_{23} - a_3p_{33} = 0, \end{cases}$$

d'où l'élimination de u et v conduit à *une seule* équation aux dérivées partielles du second ordre, qui ne peut être que l'équation donnée.

Les fonctions a_1, a_2, a_3, de x_1, z, p_1, u, v ne sont pas arbitraires ; il *faut* en effet que ϖ' et ϖ'_1 s'annulent en même temps

---

[1] Cela résulte de ce que les équations $\varpi = \varpi_1 = 0$ (*voir* la note du n° 16) peuvent s'exprimer au moyen des intégrales premières du système complètement intégrable

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{12} = \varpi_{13} = 0$$

et que parmi ces intégrales deux sont indépendantes des x_i, z, p_i, intégrales elles-mêmes du système

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

que ϖ, ϖ_1 et deux certaines combinaisons linéaires de

$$dx_1,\quad dx_2,\quad dx_3,\quad dp_2,\quad dp_3.$$

Ces combinaisons linéaires ne peuvent être que

$$dx_2+\frac{\partial a_1}{\partial u}dx_1+\frac{\partial a_2}{\partial u}dp_2+\frac{\partial a_3}{\partial u}dp_3,$$

$$dx_3+\frac{\partial a_1}{\partial v}dx_1+\frac{\partial a_2}{\partial v}dp_2+\frac{\partial a_3}{\partial v}dp_3.$$

En exprimant d'abord que ϖ' s'annule dans ces conditions on trouve que a_1, a_2, a_3 sont de la forme

$$(9)\qquad a_1=2F-u\frac{\partial F}{\partial u}-v\frac{\partial F}{\partial v},\qquad a_2=\frac{\partial F}{\partial u},\qquad a_3=\frac{\partial F}{\partial v},$$

où F est une fonction de $u, v, x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$. En exprimant ensuite que ϖ'_1 s'annule, on trouve que la fonction F satisfait aux trois équations aux dérivées partielles du second ordre suivantes :

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial a_3}{\partial p_2}+a_2\frac{\partial a_3}{\partial p_1}-\frac{\partial a_2}{\partial p_3}-a_3\frac{\partial a_2}{\partial p_1}-\frac{\partial a_2}{\partial u}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial a_3}{\partial z}+u\frac{\partial a_3}{\partial p_1}\right)\\
&\quad+\frac{\partial a_3}{\partial u}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial a_2}{\partial z}+u\frac{\partial a_2}{\partial p_1}\right)-\frac{\partial a_2}{\partial v}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial a_3}{\partial z}+v\frac{\partial a_3}{\partial p_1}\right)\\
&\quad+\frac{\partial a_3}{\partial v}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial a_2}{\partial z}+v\frac{\partial a_2}{\partial p_1}\right)=0,\\
&\frac{\partial a_2}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial a_2}{\partial z}+a_1\frac{\partial a_2}{\partial p_1}-\frac{\partial a_1}{\partial p_2}-a_2\frac{\partial a_1}{\partial p_1}-\frac{\partial a_1}{\partial u}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial a_2}{\partial z}+u\frac{\partial a_2}{\partial p_1}\right)\\
&\quad-\frac{\partial a_1}{\partial v}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial a_2}{\partial z}+v\frac{\partial a_2}{\partial p_1}\right)+\frac{\partial a_2}{\partial u}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial a_1}{\partial z}+u\frac{\partial a_1}{\partial p_1}\right)\\
&\quad+\frac{\partial a_2}{\partial v}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial a_1}{\partial z}+v\frac{\partial a_1}{\partial p_1}\right)=0,\\
&\frac{\partial a_3}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial a_3}{\partial z}+a_1\frac{\partial a_3}{\partial p_1}-\frac{\partial a_1}{\partial p_3}-a_3\frac{\partial a_1}{\partial p_1}-\frac{\partial a_1}{\partial u}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial a_3}{\partial z}+u\frac{\partial a_3}{\partial p_1}\right)\\
&\quad-\frac{\partial a_1}{\partial v}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial a_3}{\partial z}+v\frac{\partial a_3}{\partial p_1}\right)+\frac{\partial a_3}{\partial u}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial a_1}{\partial z}+u\frac{\partial a_1}{\partial p_1}\right)\\
&\quad+\frac{\partial a_3}{\partial v}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial a_1}{\partial z}+v\frac{\partial a_1}{\partial p_1}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

16. *Les équations aux dérivées partielles ainsi déterminées s'intègrent par des équations différentielles ordinaires.* En

effet les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 \\ \varpi'_1 \equiv \omega_2\varpi_{12} + \omega_3\varpi_{13} \end{cases} \qquad (\bmod \varpi, \varpi_1)$$

montrent (¹) que les équations $\varpi = \varpi_1 = 0$ peuvent s'exprimer au moyen de huit fonctions indépendantes des x_i, z, p_i, u, v et de leurs différentielles; ces huit quantités sont les intégrales du système complètement intégrable

$$(11)\qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{12} = \varpi_{13} = 0;$$

en les égalant à des constantes on a les *caractérisques* de l'équation aux dérivées partielles. L'intégrale générale de cette équation s'obtiendra en associant les caractéristiques de manière que les équations $\varpi = \varpi_1 = 0$ soient vérifiées (équations où l'on suppose n'avoir laissé que les huit paramètres des caractéristiques). Or, si l'on prend pour paramètres des caractéristisques les intégrales principales du système (11) relatives à $x_1 = 0$, et si l'on désigne ces paramètres par

$$X_2,\quad X_3,\quad Z,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad U,\quad V,$$

le système à intégrer s'écrit

$$(12)\qquad \begin{cases} dZ - P_2\, dX_2 - P_3\, dX_3 = 0, \\ dP_1 - U\, dX_2 - V\, dX_3 - a_2^0\, dP_2 - a_3^0\, dP_3 = 0, \end{cases}$$

où l'on désigne par a_2^0, a_3^0, ce que deviennent les fonctions a_2, a_3 quand on y remplace

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad z,\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad u,\quad v$$

(¹) Cela résulte du théorème suivant, qui sera souvent utilisé dans la suite :

Si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r, \omega_1, \ldots, \omega_p$ *sont* $r+p$ *expressions de Pfaff indépendantes et si l'on a*

$$\theta'_i = \sum_{\rho,\sigma} c_{\rho\sigma i}\,\omega_\rho\,\omega_\sigma \qquad (\bmod \theta_1, \ldots, \theta_r),$$

le système

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_r = \sum_{\rho} c_{\alpha\rho i}\,\omega_\rho = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p;\ i = 1, 2, \ldots, r)$$

est complètement intégrable et les équations $\theta_1 = \ldots = \theta_r = 0$ *peuvent s'exprimer au moyen des intégrales premières de ce système et de leurs différentielles.*

par

$$o, \quad X_2, \quad X_3, \quad Z, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad U, \quad V.$$

On assemblera donc les caractéristiques de la manière la plus générale possible en posant

$$(13) \qquad Z = f(X_2, X_3), \qquad P_2 = f'_{X_2}, \qquad P_3 = f'_{X_3}, \qquad P_1 = \varphi(X_2, X_3),$$

et en déterminant U et V par les deux équations

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi'_{X_2} - U - a_2^0 f''_{X_2^2} - a_3^0 f''_{X_2 X_3} = o, \\ \varphi'_{X_3} - V - a_2^0 f''_{X_2 X_3} - a_3^0 f''_{X_3^2} = o. \end{cases}$$

Les fonctions f et φ sont donc absolument arbitraires et l'on a l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles sans aucun signe d'intégration, *une fois connuès les caractéristiques.*

17. Les equations aux dérivées partielles dont il vient d'être question constituent une généralisation des équations à deux variables indépendantes que j'ai proposé d'appeler *équations de M. Goursat.* Elles sont déterminées par les équations (8), (9) et (10). On peut aussi les faire correspondre aux systèmes de Pfaff formés de deux équations à huit variables

$$(15) \qquad \theta_1 = o, \qquad \theta_2 = o,$$

telles que les covariants θ'_1, θ'_2 soient de la forme [identique à (7)]

$$(16) \qquad \begin{cases} \theta'_1 \equiv \chi_1\chi_3 + \chi_2\chi_4 \\ \theta'_2 \equiv \chi_1\chi_5 + \chi_2\chi_6 \end{cases} \qquad (\mathrm{mod}\, \theta_1, \theta_2).$$

En effet, si l'on introduit une 9^e variable auxiliaire λ et si l'on pose

$$\varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2,$$

on a

$$\varpi' \equiv \chi_1(\chi_3 + \lambda\chi_5) + \chi_2(\chi_4 + \lambda\chi_6) + \theta_2\chi \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi),$$

où χ est de la forme $d\lambda + \alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \alpha_3\chi_3 + \ldots + \alpha_6\chi_6$. Il résulte de là que l'équation $\varpi = o$ peut se ramener à la forme normale

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = o.$$

Quant à θ_2 c'est une combinaison linéaire de ϖ, dx_1, dx_2, dx_3,

dp_1, dp_2, dp_3; par suite le système considéré (15) peut s'écrire

$$\varpi = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0,$$
$$\varpi_1 = dp_1 - u\,dx_2 - v\,dx_3 - a_1\,dx_1 - a_2\,dp_2 - a_3\,dp_3 = 0,$$

où les coefficients a_1, a_2, a_3, fonctions des neuf variables indépendantes x_i, z, p_i, u, v, satisfont aux relations (9) et (10).

On démontre que toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre qu'on peut ainsi faire correspondre au système $\theta_1 = \theta_2 = 0$ sont équivalentes entre elles vis-à-vis du groupe des transformations de contact de l'espace (x_1, x_2, x_3, z).

18. Les considérations du n° **16** montrent que tout système de Pfaff (15) satisfaisant à des relations de la forme (16) peut se mettre sous la forme (12). Si donc l'on connaît tous ces systèmes (12) on pourra, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires (à savoir la réduction de l'équation $\theta_1 + \lambda\theta_2 = 0$ à sa forme normale), déterminer toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre qui viennent d'être étudiées, c'est-à-dire en somme on pourra intégrer le système (9) (10). Et pour que le système (12) soit de la forme voulue, on trouve sans difficulté qu'on doit avoir

$$a_2^0 = \frac{\partial F}{\partial U}, \qquad a_3^0 = \frac{\partial F}{\partial V},$$

où F est une fonction de X_1, X_2, Z, P_1, P_2, P_3, U, V, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial P_2} + \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial P_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial P_3} - \frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial P_1}\\
&\quad - \frac{\partial^2 F}{\partial U^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial X_2} + P_2\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial Z} + U\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial P_1}\right)\\
&\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial V}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial X_2} + P_2\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial Z}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + U\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial P_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial X_3} - P_3\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial Z} - V\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial P_1}\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial X_3} + P_3\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial Z} + V\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial P_1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation dont dépend, en dernière analyse, la détermination de toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes qui sont l'objet des numéros précédents, c'est-à-dire qui admettent une famille double de caractéristiques dépendant seulement de constantes arbitraires.

Ajoutons que la détermination des caractéristiques d'une de ces équations supposée donnée peut être simplifiée par une méthode identique à celle que j'ai indiquée pour les équations de M. Goursat.

III. — Les systèmes en involution de deux équations.

19. Il y a deux types de systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes.

Pour les systèmes du *type a*) on a

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{array}{lll}
\varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & & (\operatorname{mod} \varpi),\\
\varpi'_1 \equiv \omega_1\varpi_{11} & & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\
\varpi'_2 \equiv & \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\
\varpi'_2 \equiv & \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3).
\end{array}
\right.
$$

Un tel système admet une famille de caractéristiques à une dimension définie par les équations

$$
(2)\qquad \omega_2 = \omega_3 = 0,
$$

qui entraînent

$$
(3)\qquad \varpi_{22} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0;
$$

mais *il admet en outre une famille de caractéristiques à deux dimensions*. Considérons en effet une multiplicité intégrale; on a sur cette multiplicité

$$
\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = 0,
$$

et l'on peut toujours supposer (n° 1) que l'on a aussi

$$
\varpi_{11} = \varpi_{22} = \varpi_{23} = \varpi_{33} = 0.
$$

L'équation de Pfaff

$$
\omega_1 = 0
$$

est, *sur cette multiplicité*, complètement intégrable. Sinon, en effet, on aurait une relation de la forme

$$\omega_1' = a\,\omega_2\omega_3 + \ldots \qquad (a \neq 0),$$

les termes non écrits s'annulant avec $\omega_1, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_{11}, \varpi_{22}, \varpi_{23}, \varpi_{33}$.

Or l'équation

$$\varpi_1' \equiv \omega_1 \varpi_{11} \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$$

entraîne, d'après l'identité fondamentale,

$$\omega_1' \varpi_{11} - \omega_1 \varpi_{11}' \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_1', \varpi_2', \varpi_3');$$

on aurait donc

$$a\,\omega_2\omega_3\varpi_{11} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \omega_1, \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23}, \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33}),$$

ce qui est impossible si a n'est pas nul.

Il existe donc une famille de caractéristiques à deux dimensions sur chacune desquelles on a

$$(4) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \varpi_{11} = 0.$$

Par chaque point d'une multiplicité intégrale il passe une caractéristique à une dimension et une caractéristique à deux dimensions, *la tangente à la première n'étant pas tangente à la seconde.*

20. Nous allons montrer que le *système en involution considéré peut toujours s'intégrer par la méthode de Monge.*

L'équation

$$\varpi_1' \equiv \omega_1 \varpi_{11} \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$$

peut s'écrire

$$(5) \quad \begin{aligned} \varpi_1' \equiv \omega_1\varpi_{11} &+ \varpi_2(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\varpi_{22} + a_5\varpi_{23} + a_6\varpi_{33} + a_7\varpi_{11}) \\ &+ \varpi_3(b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\varpi_{22} + b_5\varpi_{23} + b_6\varpi_{33} + b_7\varpi_{11}) \\ &+ c\,\varpi_2\varpi_3 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1), \end{aligned}$$

où les a_i, b_i et c sont des fonctions des variables x_i, z, p_{ik}. On peut toujours remplacer

$$\omega_1 + a_7\varpi_2 + b_7\varpi_3 \qquad \text{et} \qquad \varpi_{11} - a_1\varpi_2 - b_1\varpi_3$$

par

$$\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \varpi_{11},$$

ce qui revient à supposer a_1, b_1, a_7 et b_7 nuls, en changeant la valeur du coefficient c.

Appliquons l'identité fondamentale au covariant ϖ'_1. La considération des termes en

$$\omega_2 \varpi_{22} \varpi_{23}, \quad \omega_2 \varpi_{22} \varpi_{33}, \quad \omega_2 \varpi_{23} \varpi_{33}$$

donne respectivement

$$a_5 - b_4 = 0, \qquad a_6 = 0, \qquad b_6 = 0;$$

celle des termes en

$$\omega_3 \varpi_{22} \varpi_{23}, \quad \omega_3 \varpi_{22} \varpi_{33}, \quad \omega_3 \varpi_{23} \varpi_{33}$$

donne

$$a_4 = 0, \qquad b_4 = 0, \qquad a_6 - b_5 = 0;$$

celle des termes en

$$\omega_2 \omega_3 \varpi_{22}, \quad \omega_2 \omega_3 \varpi_{23}, \quad \omega_2 \omega_3 \varpi_{33}$$

donne

$$a_3 = 0, \qquad a_2 - b_3 = 0, \qquad b_2 = 0.$$

On a donc une formule de la forme

$$\varpi'_1 \equiv \omega_1 \varpi_{11} + a(\omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3) + c \varpi_2 \varpi_3 \qquad (\text{mod}\, \varpi, \varpi_1). \tag{6}$$

Si nous remplaçons maintenant, ce qui est permis, $\varpi_1 - a\varpi$ par ϖ_1, on a

$$\varpi'_1 \equiv \omega_1 \varpi_{11} + c \varpi_2 \varpi_3 \qquad (\text{mod}\, \varpi, \varpi_1);$$

l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1 en ne conservant que les termes en $\omega_2 \varpi_3 \varpi_{22}$ donne alors $c = 0$.

On obtient finalement les équations

$$\left\{ \begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 \\ \varpi'_1 &\equiv \omega_1 \varpi_{11} \end{aligned} \right. \qquad (\text{mod}\, \varpi, \varpi_1). \tag{7}$$

On en déduit, en appliquant un théorème général sur les systèmes de Pfaff (n° **16**, note), que les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{11} = 0$$

forment un système complètement intégrable. Autrement dit il existe une certaine fonction u des x_i, z, p_i et p_{ik} telle que les équations $\varpi = \varpi_1 = 0$ puissent s'exprimer uniquement au moyen des x_i, z, p_i et u.

On peut aller plus loin. On a en effet une équation de la forme

$$\varpi_1' \equiv \omega_1 \varpi_{11} + \varpi(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 + \alpha_4 \varpi_2 + \alpha_5 \varpi_3 + \alpha_6 \varpi_{11}) \qquad (\text{mod}\, \varpi_1),$$

où l'on peut tout de suite supposer $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$. Appliquons l'identité fondamentale au covariant ϖ_1' en conservant les termes en

$$\omega_2 \omega_3 \varpi_2, \quad \omega_2 \omega_3 \varpi_3, \quad \omega_2 \varpi_2 \varpi_3, \quad \omega_3 \varpi_2 \varpi_3;$$

on obtient successivement

$$\alpha_3 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_5 = 0, \qquad \alpha_4 = 0.$$

On a donc finalement la formule

$$\varpi_1' \equiv \omega_1 \varpi_{11} \qquad (\text{mod}\, \varpi_1), \tag{8}$$

qui montre (n° 16, note) que *le système*

$$\varpi_1 = \omega_1 = \varpi_{11} = 0$$

est complètement intégrable. Autrement dit *l'équation* $\varpi_1 = 0$ *est réductible à la forme*

$$dV - W\, dU = 0,$$

où U, V, W sont des fonctions de x_i, z, p_i et u.

21. Le résultat précédent montre tout de suite comment on peut intégrer le système en involution donné. En éliminant u entre les deux équations

$$V = f(U), \qquad W = f'(U),$$

on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument (et de sa dérivée); l'intégration de cette équation fournit l'intégrale générale du système en involution donné. Les caractéristiques à deux dimensions s'obtiennent en donnant à U et par suite à V et à W des valeurs constantes.

Si le système $\omega_1 = \varpi_1 = 0$ est complètement intégrable, on peut supposer que U et V ne dépendent que des x_i, z et p_i; le système en involution admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$V = f(U),$$

dont l'intégration fournit l'intégrale générale du système. Les fonctions U et V sont d'ailleurs arbitraires. Le système en involution s'obtient par les formules

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial V}{\partial z} + p_{11}\dfrac{\partial V}{\partial p_1} + p_{12}\dfrac{\partial V}{\partial p_2} + p_{13}\dfrac{\partial V}{\partial p_3}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial U}{\partial z} + p_{11}\dfrac{\partial U}{\partial p_1} + p_{12}\dfrac{\partial U}{\partial p_2} + p_{13}\dfrac{\partial U}{\partial p_3}} \\ = &\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial V}{\partial z} + p_{12}\dfrac{\partial V}{\partial p_1} + p_{22}\dfrac{\partial V}{\partial p_2} + p_{23}\dfrac{\partial V}{\partial p_3}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial U}{\partial z} + p_{12}\dfrac{\partial U}{\partial p_2} + p_{22}\dfrac{\partial U}{\partial p_2} + p_{23}\dfrac{\partial U}{\partial p_3}} \\ = &\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_3} + p_3\dfrac{\partial V}{\partial z} + p_{13}\dfrac{\partial V}{\partial p_1} + p_{23}\dfrac{\partial V}{\partial p_2} + p_{33}\dfrac{\partial V}{\partial p_3}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_3} + p_3\dfrac{\partial U}{\partial z} + p_{13}\dfrac{\partial U}{\partial p_1} + p_{23}\dfrac{\partial U}{\partial p_2} + p_{33}\dfrac{\partial U}{\partial p_3}}. \end{aligned}\right.$$

Si le système $\omega_1 = \varpi_1 = 0$ n'est pas complètement intégrable, on peut supposer $U = u$; comme l'expression ne contient pas de terme en du, on pourra prendre pour V une fonction quelconque de x_i, z, p_i et u, à condition de prendre $W = \dfrac{\partial V}{\partial u}$. L'équation aux dérivées partielles du premier ordre à intégrer s'obtiendra alors en éliminant u entre l'équation

$$V = f(u),$$

et sa dérivée prise par rapport à u, f désignant une fonction arbitraire. Les équations du système en involution s'obtiennent alors en éliminant u entre les trois équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial V}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial V}{\partial p_1} + p_{12}\frac{\partial V}{\partial p_2} + p_{13}\frac{\partial V}{\partial p_3} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial V}{\partial z} + p_{12}\frac{\partial V}{\partial p_1} + p_{22}\frac{\partial V}{\partial p_2} + p_{23}\frac{\partial V}{\partial p_3} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial x_3} + p_3\frac{\partial V}{\partial z} + p_{13}\frac{\partial V}{\partial p_1} + p_{23}\frac{\partial V}{\partial p_2} + p_{33}\frac{\partial V}{\partial p_3} = 0. \end{aligned}\right.$$

22. Considérons maintenant les systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre du type *b*). On a pour un tel système

$$
(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\varpi' &\equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 && (\operatorname{mod} \varpi),\\
\varpi'_1 &\equiv \omega_3\varpi_{13} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\
\varpi'_2 &\equiv \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\
\varpi'_3 &\equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3).
\end{aligned}\right.
$$

Ce système s'intègre par des équations différentielles ordinaires.

Avant de démontrer ce théorème important, introduisons les *éléments caractéristiques*. Il y a d'abord en chaque point d'une multiplicité intégrale un élément caractéristique à *deux dimensions* satisfaisant aux équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_3 = \varpi_{13} = 0,$$

puis un élément caractéristique à *une dimension* contenu dans le précédent et satisfaisant aux équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{22} = \varpi_{23} = 0.$$

Chaque multiplicité intégrale peut être regardée comme engendrée par une famille de multiplicités caractéristiques à une dimension (dépendant de deux paramètres) telles qu'en chaque point la multiplicité caractéristique qui passe par ce point admette pour tangente l'élément linéaire caractéristique correspondant à ce point. Mais *on ne peut pas toujours* regarder la multiplicité intégrale comme engendrée par des multiplicités caractéristiques à deux dimensions (dépendant d'un paramètre), telles que par chaque point de l'intégrale il en passe une et une seule tangente en ce point à l'élément caractéristique à deux dimensions correspondant à ce point.

Il y a donc toujours des multiplicités caractéristiques à une dimension, mais pas toujours des multiplicités caractéristiques à deux dimensions.

23. Pour voir les choses d'un peu plus près, posons

$$
(12)\quad \begin{aligned}
\varpi'_1 \equiv \omega_3\varpi_{13} &+ \varpi_2(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\varpi_{13} + a_5\varpi_{22} + a_6\varpi_{23} + a_7\varpi_{33})\\
&+ \varpi_3(b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\varpi_{13} + b_5\varpi_{22} + b_6\varpi_{23} + b_7\varpi_{33})\\
&+ c\varpi_2\varpi_3 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1).
\end{aligned}
$$

On voit d'abord que, par des changements de notations permis, et en changeant au besoin la valeur du coefficient c, on peut supposer

$$a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = 0.$$

Appliquons l'identité fondamentale au covariant ϖ'_1. La considération des termes en

$$\omega_1 \omega_2 \varpi_{22} \quad \text{et} \quad \omega_1 \omega_2 \varpi_{23}$$

donne

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad b_1 = 0;$$

celle des termes en

$$\omega_2 \varpi_{22} \varpi_{33} \quad \text{et} \quad \omega_2 \varpi_{23} \varpi_{33}$$

donne

$$a_7 = 0 \quad \text{et} \quad b_7 = 0.$$

La considération des termes en $\omega_1 \varpi_{13} \varpi_{23}$ donne

$$\frac{\partial \omega'_3}{\partial(\omega_1 \varpi_{23})} = b_6;$$

d'autre part l'identité fondamentale appliquée à ϖ' donne, en considérant les termes en $\omega_1 \varpi_3 \varpi_{23}$,

$$-2b_6 = 0.$$

De même la considération, dans l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, des termes en $\omega_1 \varpi_{13} \varpi_{22}$ et celle, dans l'identité fondamentale appliquée à ϖ', des termes en $\omega_1 \varpi_3 \varpi_{22}$ donne

$$b_5 = 0.$$

Enfin la considération des termes en $\omega_2 \varpi_{22} \varpi_{23}$ dans l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1 donne

$$a_6 = 0.$$

On peut aller plus loin. La considération des termes en $\omega_1 \omega_2 \varpi_{13}$ dans l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1 donne

$$\frac{\partial \omega'_3}{\partial(\omega_1 \omega_2)} = b_2;$$

celle des termes en $\omega_1 \omega_2 \varpi_3$ et $\omega_1 \varpi_2 \varpi_{22}$ dans l'identité fondamentale appliquée à ϖ' donne

$$\frac{\partial\varpi'_2}{\partial(\omega_1\varpi_3)} = -2b_2,$$

$$\frac{\partial\omega'_2}{\partial(\omega_1\varpi_{22})} = -a_5\,;$$

enfin celle des termes en $\omega_1\varpi_3\varpi_{22}$ dans l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1 donne

$$b_2 a_5 = 0.$$

Cela étant il y aura trois cas à distinguer suivant qu'on aura

b_1) $\qquad b_2 = 0, \quad a_5 \neq 0;$

b_2) $\qquad b_2 \neq 0, \quad a_5 = 0;$

b_3) $\qquad b_2 = 0, \quad a_5 = 0.$

24. *Systèmes en involution du type b_1).* — On a dans ce cas

$$\varpi'_1 \equiv \omega_3\varpi_{13} + \varpi_2(a\omega_2 + b\varpi_{22} + c\varpi_3) \qquad (\text{mod}\,\varpi,\,\varpi_1)$$

avec

$$b \neq 0;$$

on peut d'ailleurs toujours supposer $b = 1$ et aussi $a = c = 0$, ce qui donne

$$(13)\qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & (\text{mod}\,\varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_3\varpi_{13} + \varpi_2\varpi_{22} & (\text{mod}\,\varpi,\,\varpi_1). \end{cases}$$

L'application d'un théorème général (n° **16**, note) au système de Pfaff $\varpi = \varpi_1 = 0$ montre que le système

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{22} = 0$$

est complètement intégrable. Donc les *caractéristiques* (du premier ordre) *à une dimension dépendent de huit constantes arbitraires.*

L'équation

$$\frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\omega_2)} = b_2 = 0,$$

démontrée au numéro précédent, montre qu'*il y a des caractéristiques à deux dimensions;* mais elles dépendent de fonctions arbitraires.

Posons

$$\varpi'_2 \equiv \omega_2 \varpi_{22} + \omega_3 \varpi_{23}$$
$$+ \varpi_3(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 + \alpha_4 \varpi_{13} + \alpha_5 \varpi_{22} + \alpha_6 \varpi_{23} + \alpha_7 \varpi_{33})$$
$$(\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2).$$

On peut d'abord supposer $\alpha_3 = 0$ en changeant $\varpi_{23} - \alpha_3 \varpi_3$ en ϖ_{23}. L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, en considérant les termes en

$$\omega_1 \varpi_3 \varpi_{22}, \qquad \omega_2 \varpi_3 \varpi_{22}, \qquad \varpi_3 \varpi_{22} \varpi_{23}, \qquad \varpi_3 \varpi_{22} \varpi_{33},$$

donne

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_6 = 0, \qquad \alpha_7 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2 donne, en conservant les termes en $\omega_1 \varpi_{13} \varpi_{22}$,

$$\frac{\partial \omega'_2}{\partial(\omega_1 \varpi_{13})} = -\alpha_5;$$

puis l'identité fondamentale appliquée à ϖ' donne, en conservant les termes en $\omega_1 \varpi_2 \varpi_{13}$,

$$\alpha_5 = 0.$$

Il reste donc finalement

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 && (\operatorname{mod} \varpi), \\ \varpi'_1 &\equiv \omega_3 \varpi_{13} + \varpi_2 \varpi_{22} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1), \\ \varpi'_2 &\equiv \omega_2 \varpi_{22} + \omega_3 \varpi_{23} + \alpha \varpi_3 \varpi_{13} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2), \end{aligned} \right.$$

et l'on voit facilement qu'on peut supposer

$$\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 1.$$

25. Les formules précédentes montrent que les équations $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$ peuvent s'écrire de manière à ne contenir, outre les x_i, z, p_i, que trois fonctions indépendantes u, v, w, des p_{ik}, x_i, z, p_i. Le système de Pfaff $\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$ peut donc s'écrire

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} & dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - p_3\, dx_3 = 0, \\ & dp_1 + \lambda_1\, dx_1 + \lambda_2\, dx_2 + \lambda_3\, dx_3 + \lambda_4\, dp_3 = 0, \\ & dp_2 + \mu_1\, dx_1 + \mu_2\, dx_2 + \mu_3\, dx_3 + \mu_4\, dp_3 = 0, \end{aligned} \right.$$

où les λ et les μ sont des fonctions données des x_i, z, p_i, u, v, w.

Comme on a d'autre part

$$\varpi' \equiv \omega_3 \varpi_3 \qquad (\bmod\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2)$$

et

$$\begin{aligned}\varpi' \equiv &- dx_1(\lambda_2\, dx_2 + \lambda_3\, dx_3 + \lambda_4\, dp_3)\\ &- dx_2(\mu_1\, dx_1 + \mu_3\, dx_3 + \mu_4\, dp_3) + dx_3\, dp_3\\ &(\bmod\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2),\end{aligned}$$

il en résulte que le carré (symbolique) du second membre de la dernière formule est nul, ce qui donne

$$(16) \qquad -\lambda_3\mu_4 + \mu_3\lambda_4 - \lambda_2 + \mu_1 = 0.$$

Le système (15) *est équivalent au système en involution donné;* en effet toute intégrale du système en involution donné est intégrale du système (15); d'autre part, le système (15) revient au système obtenu en éliminant u, v, w entre les équations

$$\begin{array}{lll} p_{11} + \lambda_1 + \lambda_4 p_{13} = 0, & p_{12} + \lambda_2 + \lambda_4 p_{23} = 0, & p_{13} + \lambda_3 + \lambda_4 p_{33} = 0,\\ p_{12} + \mu_1 + \mu_4 p_{13} = 0, & p_{22} + \mu_2 + \mu_4 p_{23} = 0, & p_{23} + \mu_3 + \mu_4 p_{33} = 0,\end{array}$$

équations qui se réduisent à cinq d'après la relation (16). Le système (15) revient donc à un système de *deux* équations aux dérivées partielles du second ordre qui ne peuvent être que les deux équations du système en involution donné.

Or les formules (14) donnent

$$(14') \qquad \left\{\begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_3 \varpi_3\\ \varpi'_1 &\equiv \omega_3 \varpi_{13}\\ \varpi'_2 &\equiv \omega_2 \varpi_{22} + \omega_3 \varpi_{23} + \alpha \varpi_3 \varpi_{13}\end{aligned}\right. \qquad (\bmod\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2),$$

ce qui montre que les équations

$$(17) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_3 = \varpi_{22} = \varpi_{23} = \varpi_{13} = 0$$

sont complètement intégrables. Les équations (15) peuvent donc s'écrire de manière à ne contenir que neuf fonctions de x_i, z, p_i, u, v, w (et les différentielles de ces neuf fonctions). Ces fonctions égalées à des constantes fournissent les *caractéristiques* (à une dimension) du système (15). Si l'on choisit les intégrales principales du système caractéristique relatives à $x_1 = 0$, et si l'on désigne ces intégrales principales par

$$X_2, \quad X_3, \quad Z, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad U, \quad V, \quad W,$$

le système (15) s'écrit

$$(15')\quad \left\{\begin{aligned} &dZ - P_2\,dX_2 - P_3\,dX_3 = 0,\\ &dP_1 + \lambda_2^0\,dX_2 + \lambda_3^0\,dX_3 + \lambda_4^0\,dP_3 = 0,\\ &dP_2 + \mu_2^0\,dX_2 + \mu_3^0\,dX_3 + \mu_4^0\,dP_3 = 0,\end{aligned}\right.$$

où les λ_i^0 et les μ_i^0 se déduisent des λ_i et μ_i en remplaçant x_1 par o et les petites lettres par les grandes lettres correspondantes.

Si donc l'on connaît les caractéristiques à une dimension donnée par le système (17), l'intégration du système en involution revient à celle du système (15'). Or pour intégrer (15') on peut poser

$$Z = f(X_2, X_3),\qquad P_2 = f'_{X_2},\qquad P_3 = f'_{X_3};$$

P_1 est alors une fonction de X_2, X_3 obtenue en intégrant une équation aux dérivées partielles du premier ordre, celle qu'on obtient en éliminant U, V, W entre les équations

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial P_1}{\partial X_2} + \lambda_2^0 + \lambda_4^0 f''_{X_2X_3} = 0, &\qquad &\frac{\partial P_1}{\partial X_3} + \lambda_3^0 + \lambda_4^0 f''_{X_3^2} = 0,\\ &f''_{X_2^2} + \mu_2^0 + \mu_4^0 f''_{X_2X_3} = 0, &\qquad &f''_{X_2X_3} + \mu_3^0 + \mu_4^0 f''_{X_3^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

L'intégration du système en involution donné est ainsi ramenée à l'intégration d'équations différentielles ordinaires. On peut remarquer en outre que si l'on connaît les caractéristiques à une dimension du premier ordre, données par

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{22} = 0,$$

les caractéristiques du système (15) s'en déduisent par des différentiations.

26. Les fonctions λ_i^0, μ_i^0 des formules (15') ne sont pas arbitraires. L'utilisation des formules (14') conduit à écrire le système (15') sous la forme générale suivante :

$$(15'')\quad \left\{\begin{aligned} &dZ - P_2\,dX_2 - P_3\,dX_3 = 0,\\ &dP_1 - u\,dP_2 - v\,dP_3 + \Phi'_u\,dX_2 + \Phi'_v\,dX_3 = 0,\\ &dP_2 - \Phi''_{u^2}\,dX_2 - \Phi''_{uv}\,dX_3 + w(dP_3 - \Phi''_{uv}\,dX_2 - \Phi''_{v^2}\,dX_3) = 0.\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules (15'') Φ désigne une fonction de u, v, X_2,

X_3, Z, P_1, P_2, P_3, assujettie à satisfaire à l'unique équation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial X_2}+P_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial Z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial X_3}-P_3\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial Z}-\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial P_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial P_1}$$
$$+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial P_2}+u\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial P_1}\right)$$
$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial P_2}+u\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial P_1}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial P_3}-v\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,\partial P_1}\right)$$
$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial P_3}+v\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial P_1}\right)=0.$$

Les caractéristiques à deux dimensions sont données par les équations

$$\begin{aligned}
&dv-w\,du=0,\\
&dX_3-w\,dX_2=0,\\
&dZ-(P_2+wP_3)\,dX_2=0,\\
&dP_2-(F''_{u^2}+wF''_{uv})\,dX_2=0,\\
&dP_3-(F''_{uv}+wF''_{v^2})\,dX_2=0,\\
&dP_1+[F'_u-uF''_{u^2}-vF''_{uv}+w(F'_v-uF''_{uv}-vF''_{v^2})]\,dX_2=0,
\end{aligned}$$

et elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.

27. Le système (15″) est un système de Pfaff à neuf variables pouvant se mettre sous la forme

$$(19)\qquad \theta_1=\theta_2=\theta_3=0,$$

avec les relations

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}\theta'_1&\equiv\chi_1\chi_2\\ \theta'_2&\equiv\chi_1\chi_3\\ \theta'_3&\equiv\chi_1\chi_4+\chi_5\chi_6+m\chi_2\chi_3\end{aligned}\right.\qquad (\mathrm{mod}\,\theta_1,\theta_2,\theta_3),$$

et la condition supplémentaire que les expressions linéaires $\frac{\partial\theta'_1}{\partial\theta_3}$, $\frac{\partial\theta'_2}{\partial\theta_3}$ soient indépendantes entre elles et de θ_1, θ_2, θ_3, χ_1, χ_2.

Partons réciproquement d'un tel système. On peut lui faire correspondre d'une infinité de manières un système en involution du type b_1) et tel que les équations (19) indiquent comment les caractéristiques à une dimension de ce système doivent être associées pour engendrer l'intégrale générale.

On a d'abord en effet des formules telles que les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\theta'_1 &\equiv \chi_1\chi_2 + \theta_3(a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 + a_4\chi_4 + a_5\chi_5 + a_6\chi_6)\\ \theta'_2 &\equiv \chi_1\chi_3 + \theta_3(b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + b_3\chi_3 + b_4\chi_4 + b_5\chi_5 + b_6\chi_6)\end{aligned}\right\} \pmod{\theta_1, \theta_2}.$$

On peut d'abord supposer

$$a_1 = a_2 = b_1 = 0,$$

en remplaçant

$$\chi_1 + a_2\theta_3, \quad \chi_2 - a_1\theta_3, \quad \chi_3 - b_1\theta_3$$

par

$$\chi_1, \quad \chi_2, \quad \chi_3.$$

L'identité fondamentale appliquée à θ'_1, en conservant les termes en

$$\chi_3\chi_5\chi_6, \quad \chi_4\chi_5\chi_6,$$

donne

$$a_3 = 0, \qquad a_4 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à θ'_2, en conservant les termes en

$$\chi_2\chi_5\chi_6, \quad \chi_4\chi_5\chi_6,$$

donne

$$b_2 = 0, \qquad b_4 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à θ'_2, en considérant les termes en $\chi_3\chi_5\chi_6$, donne

$$\frac{\partial\chi'_1}{\partial(\chi_5\chi_6)} = -b_3;$$

d'autre part l'identité fondamentale appliquee à θ'_1, en considérant les termes en $\chi_2\chi_5\chi_6$, donne

$$b_3 = 0.$$

Il reste donc

$$\left.\begin{aligned}\theta'_1 &\equiv \chi_1\chi_2 + \theta_3(a_5\chi_5 + a_6\chi_6)\\ \theta'_2 &\equiv \chi_1\chi_3 + \theta_3(b_5\chi_5 + b_6\chi_6)\end{aligned}\right\} \pmod{\theta_1, \theta_2}.$$

Par hypothèse $a_5 b_6 - b_5 a_6$ n'est pas nul ; on voit facilement qu'on peut supposer

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}\theta'_1 &\equiv \chi_1\chi_2 + \theta_3\chi_6 && \pmod{\theta_1, \theta_2},\\ \theta'_2 &\equiv \chi_1\chi_3 + \theta_2\chi_5 && \pmod{\theta_1, \theta_2},\\ \theta'_3 &\equiv \chi_1\chi_4 + \chi_5\chi_6 + m\chi_2\chi_3 && \pmod{\theta_1, \theta_2, \theta_3}.\end{aligned}\right.$$

Cela étant introduisons une dixième variable auxiliaire λ et posons

$$\begin{aligned} \varpi &= \theta_1 + \lambda\theta_2, \\ \varpi_1 &= \theta_2, \\ \varpi_2 &= \theta_3 ; \end{aligned}$$

on a

$$\varpi' \equiv \chi_1(\chi_2 + \lambda\chi_3) + \theta_3(\chi_6 + \lambda\chi_5) + \theta_2\chi \qquad (\text{mod}\, \varpi).$$

Cette dernière formule montre qu'on peut réduire l'équation

$$\varpi = 0$$

à la forme normale

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - p_3\, dx_3 = 0 ;$$

ϖ_1 et ϖ_2 sont alors des combinaisons linéaires de dz, dx_1, dx_2, dx_3, dp_1, dp_2, dp_3, qui dépendent des x_i, z, p_i et trois autres quantités u, v, w. On retrouve d'ailleurs les formules (14) en posant

$$\varpi_3 = \chi_2 + \lambda\chi_3, \qquad \omega_1 = -\chi, \qquad \omega_2 = -(\chi_6 + \lambda\chi_5), \qquad \omega_3 = \chi_1,$$
$$\varpi_{13} = \chi_3, \qquad \varpi_{22} = \chi_5, \qquad \varpi_{23} = \chi_4,$$
$$\alpha = m.$$

On est donc en somme ramené ainsi à un système de Pfaff

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$$

avec les conditions (14). Comme nous l'avons vu ce système de Pfaff est équivalent à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre ; ce système est d'autre part en involution parce que pour toute intégrale de ce système on a $\varpi' = 0$ et par suite

$$\varpi_3 = \rho\omega_3,$$

où ρ est une nouvelle variable auxiliaire.

En remplaçant $\varpi_3 - \rho\omega_3$ par $\overline{\varpi}_3$ les formules (14) ne sont pas essentiellement changées (il suffit de modifier ϖ_{23}); le système de Pfaff entraîne donc

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \overline{\varpi}_3 = 0,$$

et l'identité fondamentale appliquée à ϖ' donne

$$\overline{\varpi}'_3 \equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} \qquad (\text{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \overline{\varpi}_3, \omega_3),$$

d'où enfin

$$
\begin{aligned}
\varpi' &\equiv \omega_1\varpi_1 - \omega_2\varpi_2 + \omega_3\bar{\varpi}_3 && (\operatorname{mod}\varpi),\\
\varpi'_1 &\equiv \omega_3\varpi_{13} && (\operatorname{mod}\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \bar{\varpi}_3).\\
\varpi'_2 &\equiv \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23} && (\operatorname{mod}\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \bar{\varpi}_3),\\
\bar{\varpi}'_3 &\equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} && (\operatorname{mod}\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \bar{\varpi}_3).
\end{aligned}
$$

On arrive donc bien à un systeme en involution qui est évidemment du type b_1).

On peut démontrer que tous les systèmes en involution qui peuvent se déduire d'un même système (19) sont équivalents entre eux vis-à-vis du groupe des transformations de contact de l'espace (x_1, x_2, x_3, z).

Les considérations des nos 25 et 26 montrent de plus que tout système de Pfaff (19) satisfaisant aux conditions (20) peut se mettre sous la forme (15″), où Φ satisfait à l'équation indiquée plus haut.

28. Comme exemple de système en involution du type b_1) citons le suivant :

$$p_{11} = \frac{1}{3} p_{22}^3, \qquad p_{12} = \frac{1}{2} p_{22}^2.$$

L'intégrale générale de ce système est donnée par les formules

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \alpha,\\
x_2 &= \beta - f''_{\beta^2} x_1,\\
z &= f(\alpha, \beta) + \left[\varphi(\alpha) - f'_\beta f''_{\beta^2} + \frac{1}{2}\int (f''_{\beta^2})^2\, d\beta\right] x_1 + \frac{1}{6}(f''_{\beta^2})^3 x_1^2,\\
p_1 &= \varphi(\alpha) + \frac{1}{2}\int (f''_{\beta^2})^2\, d\beta - \frac{1}{6}(f''_{\beta^2})^3 x_1,\\
p_2 &= f'_\beta - \frac{1}{2} f''_{\beta^2} x_1.\\
p_3 &= f'_\alpha + \left[\varphi'(\alpha) + \int f''_{\beta^2} f'''_{\alpha\beta^2}\, d\beta\right] x_1,
\end{aligned}
$$

où $f(\alpha, \beta)$ est une fonction arbitraire de α et de β, et $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de α. Les caractéristiques à une dimension s'obtiennent en faisant α et β constants, les caractéristiques à deux dimensions en faisant α constant.

29. *Systèmes en involution du type b_2).* — On a dans ce cas (n° 23)

$$\varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} + \omega_2(a\varpi_2 + b\varpi_3) + c\varpi_2\varpi_3 \qquad (\bmod\, \varpi, \varpi_1),$$

le coefficient b n'étant pas nul. On peut d'ailleurs supposer b réduit à l'unité et a à zéro, ainsi que c. Il reste alors

$$(22) \qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & (\bmod\, \varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_3\varpi_{13} + \omega_2\varpi_3 & (\bmod\, \varpi, \varpi_1). \end{cases}$$

L'application d'un théorème général (n° 16, note) au système de Pfaff $\varpi = \varpi_1 = 0$ montre que le système

$$(23) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = 0$$

est complètement intégrable. Donc *les caractéristiques (du premier ordre) à une dimension dépendent de sept constantes arbitraires.*

L'équation (n° 23)

$$\frac{\partial \omega'_3}{\partial(\omega_1\omega_2)} = -1$$

montre au contraire qu'*il n'y pas de caractéristiques à deux dimensions.*

Les formules (22) montrent (n° 15, note) que l'équation $\varpi_1 = 0$ dépend outre les x_i, z, p_i d'une seule fonction u des p_{ik}, x_i, z, p_i. Le système $\varpi = \varpi_1 = 0$ s'écrit donc

$$(24) \qquad \begin{cases} \varpi = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0, \\ \varpi_1 = dp_1 - a_1\,dx_1 - a_2\,dx_2 - u\,dx_3 - b_2\,dp_2 - b_3\,dp_3 = 0, \end{cases}$$

où les a_i et b_i sont certaines fonctions des huit quantités x_i, z, p_i et u. Toute intégrale du système en involution donné fournit naturellement une intégrale du système (24); mais réciproquement toute intégrale du système (24) satisfait aux équations obtenues en éliminant u entre les trois relations

$$\begin{aligned} p_{11} - a_1 - b_2 p_{12} - b_3 p_{13} &= 0, \\ p_{12} - a_2 - b_2 p_{22} - b_3 p_{23} &= 0, \\ p_{13} - u - b_2 p_{23} - b_3 p_{33} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire satisfait à deux équations aux dérivées partielles du second ordre qui ne peuvent être que les équations du système en involution donné. *L'intégration du système donné est donc ramenée à celle du système* (24).

Or, les formules

$$(22') \qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 \\ \varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} + \omega_2 \varpi_3 \end{cases} \qquad (\bmod \varpi, \varpi_1)$$

montrent que les intégrales du système (24) sont engendrées par les caractéristiques à une dimension données par les équations (23). Si l'on connaît ces caractéristiques, si en particulier on a déterminé les intégrales principales du système (23) relatives à $x_1 = 0$, ces caractéristiques, pour engendrer une surface intégrale, doivent être associées de manière à satisfaire aux équations (24), équations qui peuvent s'écrire de manière à ne contenir que les intégrales principales. On aura donc en définitive à intégrer le système à deux variables indépendantes

$$(24') \qquad \begin{cases} dZ - P_2\, dX_2 - P_3\, dX_3 = 0, \\ dP_1 - a_2^0\, dX_2 - U\, dX_3 - b_2^0\, dP_2 - b_3^0\, dP_3 = 0, \end{cases}$$

où a_2^0, b_2^0, b_3^0 se déduisent de a_2, b_2, b_3 en remplaçant x_1 par o et les autres lettres par les intégrales principales correspondantes (représentées par les mêmes lettres majuscules).

Or, l'intégration de (24') est immédiate : on pose

$$Z = f(X_2, X_3), \qquad P_2 = f'_{X_2}, \qquad P_3 = f'_{X_3},$$

et l'on a P_1 par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre obtenue en éliminant U entre les deux relations

$$\frac{\partial P_1}{\partial X_2} - a_2^0 - b_2^0 f''_{X_2^2} - b_3^0 f''_{X_2 X_3} = 0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial X_3} - U - b_2^0 f''_{X_2 X_3} - b_3^0 f''_{X_3^2} = 0.$$

En définitive *l'intégration du système en involution revient à l'intégration du système complètement intégrable* (23) *et à celle d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

30. Le système (24') est un système de deux équations de Pfaff à sept variables. Prenons réciproquement un système quelconque de deux équations de Pfaff à sept variables

$$\theta_1 = \theta_2 = 0. \tag{25}$$

On démontre et nous admettrons que θ'_1 et θ'_2 peuvent être mis, en général, sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \theta'_1 \equiv \chi_1\chi_3 + \chi_2\chi_4 \\ \theta'_2 \equiv \chi_1\chi_4 + \chi_2\chi_5 \end{array}\right. \quad (\bmod \theta_1, \theta_2). \tag{26}$$

Nous allons montrer qu'on peut déduire de ce système un système en involution du type b_2) tel que le système (25) indique comment doivent être associées les caractéristiques de ce système en involution pour engendrer une multiplicité intégrale.

Posons en effet, en introduisant une huitième variable auxiliaire λ,

$$\varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2;$$

on a

$$\varpi' \equiv \chi_1(\chi_3 + \lambda\chi_4) + \chi_2(\chi_4 + \lambda\chi_5) + \chi\theta_2 \quad (\bmod \varpi), \tag{27}$$

où χ est de la forme

$$-d\lambda + \alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \alpha_3\chi_3 + \alpha_4\chi_4 + \alpha_5\chi_5 + \alpha_6\theta_2.$$

L'équation $\varpi = 0$ est, d'après la formule (27), réductible à la forme normale

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0; \tag{28}$$

cette réduction étant supposée effectuée, les expressions θ_2, χ, χ_1, χ_2, $\chi_3 + \lambda\chi_4$, $\chi_4 + \lambda\chi_5$ sont des combinaisons linéaires des dx_i, dz et dp_i. On a, en particulier, pour l'équation $\theta_2 = 0$:

$$dp_1 - a_1\,dx_1 - a_2\,dx_2 - u\,dx_3 - b_2\,dp_2 - b_3\,dp_3 = 0, \tag{29}$$

où les coefficients a_1, a_2, b_2, b_3 sont certaines fonctions des x_i, z, p_i et u. Le système formé par les équations (28) et (29) est équivalent à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, z étant la fonction inconnue de x_1, x_2, x_3. Ce système est en involution du type b_2), car on retrouvera les formules (22) si l'on pose

$$\begin{array}{llll} \varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2, & \varpi_1 = \theta_2, & \varpi_2 = \chi_3 + 2\lambda\chi_4 + \lambda^2\chi_5, & \varpi_3 = \chi_4 + \lambda\chi_5, \\ \varpi_{13} = \chi_5, & \omega_1 = \chi, & \omega_2 = \chi_1; & \omega_3 = \chi_2 - \lambda\chi_1. \end{array}$$

On démontre que tous les systèmes en involution qu'on peut déduire d'un même système (25) satisfaisant aux relations (26) sont équivalents entre eux vis-à-vis du groupe des transformations de contact de l'espace (x_1, x_2, x_3, z).

Il résulte de ce qui précède que tout système de Pfaff de deux équations à sept variables peut se mettre sous la forme (24′), où a_2^0, b_2^0 et b_3^0 sont des fonctions *quelconques* de X_2, X_3, Z, P_1, P_2, P_3, U. Par suite *on peut par l'intégration d'équations différentielles ordinaires déterminer tous les systèmes en involution du type b_2)*.

31. On peut prendre comme exemple le système en involution

$$p_{33} = 0, \qquad p_1 = (x_3 + p_{23})p_{13},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = x_3 f(x_1, x_2) + \varphi(x_2) + \int f'_{x_1} f'_{x_2}\, dx_1$$

avec une fonction arbitraire f de x_1, x_2, et une fonction arbitraire φ de x_2. Les caractéristiques à une dimension s'obtiennent en faisant x_1 et x_2 constants. Les éléments intégraux caractéristiques à deux dimensions sont donnés par l'équation *non intégrable*

$$dx_2 - \frac{f'_{x_1} dx_1}{x_3 + f'_{x_2}} = 0.$$

Les équations des caractéristiques à une dimension sont

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad z = b_3 x_3 + c,$$
$$p_1 = \frac{b_1}{a_3}(x_3 + a_3), \qquad p_2 = a_3 x_3 + b_2, \qquad p_3 = b_3.$$

32. *Systèmes en involution du type b_3).* — On a dans ce cas (n° 23)

$$\varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} + a\,\omega_2 \varpi_2 + b\,\varpi_2 \varpi_3 \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1).$$

En prenant $\varpi_1 - a\varpi$ comme nouvelle expression ϖ_1, et en changeant ϖ_{13}, on a

$$\varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} + b\,\varpi_2 \varpi_3 \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1).$$

Le coefficient b est nul ; il suffit, pour le voir, d'appliquer l'identité fondamentale à ϖ'_1 en ne considérant que les termes en $\omega_2 \varpi_3 \varpi_{22}$. Par suite on a

$$(30)\qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 & (\bmod \varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} & (\bmod \varpi, \varpi_1). \end{cases}$$

Ces formules montrent que le système

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = 0$$

est complètement intégrable, autrement dit que les *caractéristiques à une dimension (du premier ordre) ne dépendent que de sept constantes arbitraires*, comme dans le cas du type b_2). Mais d'autre part *il existe des caractéristiques à deux dimensions*, comme dans le cas du type b_1).

Le système $\varpi = \varpi_1 = 0$ est équivalent au système en involution donné; l'intégration s'effectue comme dans le cas du type b_2).

A chaque système de deux équations de Pfaff à sept variables

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,$$

tel que l'on ait des équations de la forme

$$\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv \chi_1 \chi_3 + \chi_2 \chi_4 \\ \theta'_2 &= \chi_1 \chi_5 \end{aligned} \qquad (\bmod \theta_1, \theta_2),$$

on peut faire correspondre un système en involution du type b_3), en introduisant une variable auxiliaire λ et posant

$$\varpi = \theta_1 + \lambda \theta_2, \qquad \varpi_1 = \theta_2.$$

Citons comme exemple le système

$$p_{11} = p_{12} = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$z = x_1 f(x_2) + \varphi(x_1, x_2),$$

et le système

$$p_{11} = p_{12} + \frac{1}{2} p_{13}^2 = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par les formules

$$\begin{aligned} x_3 &= f'(\alpha) - \alpha x_2, \\ z &= x_1 \left[f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 x_2 \right] + \varphi(\alpha, x_2). \end{aligned}$$

Dans le dernier exemple les caractéristiques à une dimension sont obtenues en faisant α et x_2 constants, les caractéristiques à deux dimensions en faisant α constant.

33. Dans tous les systèmes en involution des types b) il existe des caractéristiques à une dimension dépendant de sept ou huit constantes arbitraires. D'après la méthode générale que j'ai appliquée en détail aux systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, la nature des opérations nécessaires pour obtenir ces caractéristiques dépend de la structure du plus grand groupe de transformations de contact qui laisse invariant le système en involution donné. Les opérations nécessaires pour ramener l'un à l'autre deux systèmes équivalents sont d'ailleurs les mêmes. C'est ainsi que si un système en involution est réductible par une transformation de contact à la forme

$$p_{11} = p_{12} + \frac{1}{2} p_{13}^2 = 0,$$

cette réduction (et par suite l'intégration du système) s'effectue par *dix quadratures*. Ces mêmes quadratures donnent les caractéristiques.

IV. — Les systèmes en involution de trois équations.

34. Il y a cinq types de systèmes en involution de trois équations aux dérivées partielles du second ordre.

Pour les *systèmes du type a*), on a

$$(1)\quad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & (\operatorname{mod} \varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_1\varpi_{11} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_2 \equiv \qquad\quad \omega_2\varpi_{22} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv \qquad\qquad\qquad \omega_3\varpi_{33} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{cases}$$

L'intégrale générale dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Il y a en chaque point d'une multiplicité intégrale trois éléments intégraux caractéristiques à deux dimensions définis respectivement par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \varpi_{11} = 0,$$
$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \varpi_{22} = 0,$$
$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_3 = \varpi_{33} = 0.$$

Il existe sur chaque multiplicité intégrale des multiplicités *caractéristiques à deux dimensions* telles qu'il en passe une et une seule par chaque point de l'intégrale, cette multiplicité étant tangente à l'un des trois éléments intégraux caractéristiques relatifs à ce point. Il suffit en effet de remarquer que sur la multiplicité intégrale, l'équation

$$\omega_1 = 0,$$

par exemple, est complètement intégrable. En effet on peut supposer que sur cette multiplicité intégrale ϖ_{11}, ϖ_{22}, ϖ_{33} sont nuls ; il suffit alors de démontrer que le coefficient de $\omega_2\omega_3$ dans ω'_1 est nul. Or, si l'on a

$$\omega'_1 = a\omega_2\omega_3 + \ldots,$$

l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1 donne

$$\omega'_1\varpi_{11} - \omega_1\varpi'_{11} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi', \varpi'_1, \varpi'_2, \varpi'_3);$$

la considération des termes en $\omega_2\omega_3\varpi_{11}$ donne immédiatement

$$a = 0.$$

Il existe donc trois familles de multiplicités caractéristiques à deux dimensions, et chaque multiplicité intégrale peut être regardée comme engendrée par une infinité (dépendant d'une constante arbitraire) de caractéristiques de chacune des trois familles.

35. La méthode d'intégration de Monge s'applique au système en involution donné si, par exemple, l'équation $\varpi_1 = 0$ est réductible à la forme

$$dV - W\,dU = 0;$$

cela arrive si les équations de Pfaff des caractéristiques de la première famille admettent trois combinaisons intégrables (il ne peut pas y en avoir plus de trois). On a dans ce cas, par un choix convenable de ϖ_1, ω_1, ϖ_{11},

$$\varpi'_1 \equiv \omega_1 \varpi_{11} \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi_1).$$

S'il en est ainsi, pour intégrer l'équation on pose

$$V = f(U), \qquad W = f'(U);$$

ϖ_1 devient identiquement nul et le système à intégrer se réduit à

$$\varpi = \varpi_2 = \varpi_3 = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 && (\mathrm{mod}\, \varpi),\\ \varpi'_2 &\equiv \omega_2 \varpi_{22} && (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_2, \varpi_3),\\ \varpi'_3 &\equiv \qquad\quad \omega_3 \varpi_{33} && (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_2, \varpi_3). \end{aligned}$$

L'équation $\varpi = 0$ se réduit à la forme

$$dZ - P_2\, dX_2 - P_3\, dX_3 = 0,$$

et le système à intégrer revient à une équation aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue Z des deux variables indépendantes X_2, X_3; les deux familles de caractéristiques de cette équation sont distinctes.

Si la particularité qui vient d'être envisagée se présente pour les deux premières familles de caractéristiques, on posera

$$\begin{aligned} V &= f(U), & W &= f'(U),\\ V_1 &= \varphi(U_1), & W_1 &= \varphi'(U_1), \end{aligned}$$

et l'intégration se ramène à la réduction de l'équation $\varpi = 0$ à sa forme normale, ce qui exigera deux opérations d'ordre 3 et 1.

Si enfin la particularité se présente pour les trois familles de caractéristiques, on sera ramené à une quadrature, comme on pourrait le démontrer.

36. *Systèmes en involution du type b).* — On a dans ce cas

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 && (\mathrm{mod}\, \varpi),\\ \varpi'_1 &\equiv \qquad\quad \omega_2 \varpi_{12} && (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\ \varpi'_2 &\equiv \omega_1 \varpi_{12} + \omega_2 \varpi_{22} && (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\ \varpi'_3 &\equiv \qquad\qquad\quad \omega_3 \varpi_{33} && (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{aligned} \right.$$

L'intégrale générale dépend encore de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Il y a en chaque point d'une multiplicité intégrale deux éléments caractéristiques du second ordre définis par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \varpi_{12} = 0,$$

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_3 = \varpi_{33} = 0;$$

il y a également deux éléments caractéristiques à une dimension définis par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_2 = \varpi_{12} = \varpi_{22} = 0,$$

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{12} = \varpi_{33} = 0.$$

Il y a donc deux familles de caractéristiques à une dimension; mais *il y a aussi deux familles de caractéristiques à deux dimensions.*

D'abord en effet, sur une multiplicité intégrale donnée, on peut supposer ϖ_{12}, ϖ_{22}, ϖ_{33}, identiquement nuls. L'équation $\omega_3 = 0$ est complètement intégrable : cela se démontre comme pour le type *a*). Il en est de même pour l'équation

$$\omega_2 = 0.$$

En effet, supposons qu'on ait

$$\omega'_2 = a\,\omega_1\,\omega_3 + \ldots:$$

l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, en considérant les termes en $\omega_1\,\omega_3\,\varpi_{12}$, donne

$$\frac{\partial \varpi'_1}{\partial(\varpi_2\,\omega_3)} = a;$$

en considérant les termes en $\omega_2\,\omega_3\,\varpi_{22}$, on obtient alors

$$\frac{\partial \varpi'_{12}}{\partial(\omega_3\,\varpi_{22})} = -a;$$

enfin l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2 donne, en considérant les termes en $\omega_1\,\omega_3\,\varpi_{22}$,

$$a = 0.$$

Il existe donc deux familles de caractéristiques à deux dimensions. Chaque multiplicité intégrale peut être regardée *comme engendrée par une infinité (dépendant d'une constante arbitraire) de caractéristiques de chacune des deux familles. Il existe aussi deux familles de caractéristiques à une dimension : celles de la première famille sont situées sur les caractéristiques à deux dimensions de la première famille; celles de la deuxième famille sont les intersections des caractéristiques à deux dimensions des deux familles différentes.*

37. Si les équations de Pfaff de la dernière famille de caractéristiques à deux dimensions admettent trois combinaisons intégrables, c'est-à-dire si l'équation $\varpi_3 = 0$ est réductible à la forme

$$dV - W\,dU = 0,$$

on pose, comme précédemment,

$$V = f(U), \qquad W = f'(U),$$

et l'on est ramené, par la réduction de l'équation $\varpi = 0$ à sa forme normale, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, admettant une famille double de caractéristiques.

Si c'est l'équation $\varpi_1 = 0$ qui est réductible à la forme normale

$$dV - W\,dU = 0,$$

on est ramené encore à une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, mais à caractéristiques distinctes.

Si les deux cas qui viennent d'être considérés se présentent simultanément, on est ramené à la réduction de l'équation $\varpi = 0$ à sa forme normale $dZ - P_2\,dX_2 = 0$.

37. *Systèmes en involution du type c*). — On a, dans ce cas,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 && (\operatorname{mod} \varpi),\\ \varpi'_1 &\equiv \omega_3\varpi_{13} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\ \varpi'_2 &\equiv \omega_2\varpi_{13} + \omega_3\varpi_{23} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),\\ \varpi'_3 &\equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} && (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{aligned}\right.$$

L'intégrale générale dépend encore de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Par chaque point d'une multiplicité intégrale, passent un élément intégral caractéristique à deux dimensions défini par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_3 = \varpi_{13} = 0$$

et un élément intégral caractéristique à une dimension, contenu dans le précédent et défini par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0.$$

Il existe ici une famille de multiplicités caractéristiques à deux dimensions. Sur une multiplicité intégrale donnée, on peut, en effet, supposer ϖ_{13}, ϖ_{23}, ϖ_{33} identiquement nuls ; soit alors

$$\omega'_3 = a\,\omega_1\,\omega_2 + \ldots.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, en considérant les termes en $\omega_1\,\omega_2\,\varpi_{13}$, donne

$$\frac{\partial\varpi'_1}{\partial(\varpi_2\,\omega_1)} - \frac{\partial\varpi'_1}{\partial(\varpi_3\,\omega_2)} + a = 0;$$

en considérant les termes en $\omega_3\,\omega_1\,\varpi_{23}$, on obtient

$$-\frac{\partial\varpi'_{13}}{\partial(\omega_1\,\varpi_{23})} - \frac{\partial\varpi'_1}{\partial(\varpi_2\,\omega_1)} = 0;$$

en considérant les termes en $\omega_2\,\omega_3\,\varpi_{33}$, on obtient

$$\frac{\partial\varpi'_{13}}{\partial(\omega_2\,\varpi_{33})} + \frac{\partial\varpi'_1}{\partial(\varpi_3\,\omega_2)} = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2, en considérant les termes en $\omega_1\,\omega_2\,\varpi_{23}$, donne

$$\frac{\partial\varpi'_{13}}{\partial(\omega_1\,\varpi_{23})} + a + \frac{\partial\varpi'_2}{\partial(\varpi_3\,\omega_1)} = 0;$$

en considérant les termes en $\omega_3\,\omega_1\,\varpi_{33}$, on obtient

$$-\frac{\partial\varpi'_{23}}{\partial(\omega_1\,\varpi_{33})} - \frac{\partial\varpi'_2}{\partial(\varpi_3\,\omega_1)} = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_3, en considérant les termes en $\omega_1\,\omega_2\,\varpi_{33}$, donne

$$-\frac{\partial\varpi'_{13}}{\partial(\omega_2\,\varpi_{33})} + \frac{\partial\varpi'_{23}}{\partial(\omega_1\,\varpi_{33})} + a = 0.$$

En ajoutant enfin, membre à membre, les six relations qui viennent d'être obtenues, il vient

$$3a = 0.$$

Autrement dit, sur la multiplicité intégrale, l'équation $\omega_3 = 0$ est complètement intégrable.

Il existe donc une famille de multiplicités caractéristiques à deux dimensions telle que chaque multiplicité intégrale soit engendrée par une infinité (dépendant d'une constante arbitraire) de ces caractéristiques.

38. Il existe des simplifications dans l'intégration analogues à celles qui ont été examinées dans les cas précédents. Mais il y a ici un cas particulièrement intéressant, c'est celui où les équations de Pfaff des caractéristiques à une dimension

$$(4) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0$$

sont complètement intégrables; ces caractéristiques dépendent alors de huit constantes arbitraires.

Posons, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \varpi'_1 &\equiv \omega_3 \varpi_{13} \qquad\qquad\quad + \varpi_3(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\varpi_{13} + a_5\varpi_{23} + a_6\varpi_{33}) \\ \varpi'_2 &\equiv \omega_2\varpi_{13} + \omega_3\varpi_{23} + \varpi_3(b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\varpi_{13} + b_5\varpi_{23} + b_6\varpi_{33}) \\ &\qquad\qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2). \end{aligned}$$

On peut d'abord, en changeant de notations pour ω_2, ω_3, ϖ_{13}, ϖ_{23}, supposer que l'on a

$$a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, en considérant les termes en $\omega_1\omega_2\varpi_{23}$ et $\omega_2\varpi_{23}\varpi_{33}$, donne

$$a_1 = 0, \qquad a_6 = 0.$$

On a, par hypothèse,

$$\frac{\partial \varpi'_{23}}{\partial(\omega_1 \varpi_{33})} = 0;$$

les équations obtenues dans le numéro précédent donnent alors

$$\frac{\partial \varpi'_2}{\partial(\varpi_3 \omega_1)} = \frac{\partial \varpi'_1}{\partial(\varpi_3 \omega_2)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$b_1 = a_2 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2, en considérant les termes en $\omega_1 \varpi_{13} \varpi_{33}$, et en tenant compte de ce que, par hypothèse, ω'_2 ne contient pas de terme en $\omega_1 \varpi_{33}$, donne

$$b_6 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, en considérant les termes en $\omega_1 \varpi_{13} \varpi_{23}$, donne

$$-\frac{\partial \omega'_3}{\partial(\omega_1 \varpi_{23})} + a_5 = 0;$$

l'identité fondamentale appliquée à ϖ', en considérant les termes en $\omega_1 \varpi_3 \varpi_{23}$, donne ensuite

$$-a_5 - \frac{\partial \omega'_3}{\partial(\omega_1 \varpi_{23})} = 0;$$

on en déduit

$$a_5 = 0.$$

On a finalement

$$(5) \quad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 & (\operatorname{mod} \varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2), \\ \varpi'_2 \equiv \omega_2 \varpi_{13} + \omega_3 \varpi_{23} + \varpi_3(a\omega_2 + b\varpi_{23}) & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2); \end{cases}$$

réciproquement, les formules précédentes entraînent la complète intégrabilité du système

$$(4) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_3 = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0.$$

39. Le système en involution donné est équivalent au système

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = 0,$$

lequel s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 &= 0, \\ dp_1 - a\,dp_3 - b_1\,dx_1 - b_2\,dx_2 - b_3\,dx_3 &= 0, \\ dp_2 - \alpha\,dp_3 - \beta_1\,dx_1 - \beta_2\,dx_2 - \beta_3\,dx_3 &= 0, \end{aligned}$$

où les coefficients a, α, b_i, β_i dépendent, outre les x_i, z et p_i, de deux quantités nouvelles u et v. L'élimination de u et v entre les six équations

$$p_{1i} - ap_{3i} - b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$p_{2i} - \alpha p_{3i} - \beta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qui se réduisent à cinq, conduit à trois équations aux dérivées partielles qui ne peuvent être que les équations du système en involution donné.

Les équations $\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$ peuvent s'écrire de manière à ne contenir que les intégrales premières du système (4). Si l'on introduit les intégrales principales relatives à $x_1 = 0$, ce système devient

$$dZ - P_2\, dX_2 - P_3\, dX_3 = 0,$$
$$dP_1 - a^0\, dP_3 - b_2^0\, dX_2 - b_3^0\, dX_3 = 0,$$
$$dP_2 - \alpha^0\, dP_3 - \beta_2^0\, dX_2 - \beta_3^0\, dX_3 = 0.$$

On voit facilement que *l'intégration de ce système revient à celle d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à une fonction inconnue* Z *de deux variables indépendantes* X_2 *et* X_3, *et à celle d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable.*

40. Les formules (5) peuvent être ramenées à l'une des formes suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \theta'_1 \equiv \chi\chi_1 \\ \theta'_2 \equiv \chi\chi_2 \\ \theta'_3 \equiv \chi_1\chi_3 + \chi_2\chi_4 \end{cases} \qquad (\bmod\, \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3),$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \theta'_1 \equiv \chi\chi_1 \\ \theta'_2 \equiv \chi\chi_2 \\ \theta'_3 \equiv \chi\chi_3 + \chi_1\chi_4 \end{cases} \qquad (\bmod\, \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3),$$

avec la condition complémentaire que le système $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ne puisse pas s'exprimer au moyen de moins de sept variables.

Réciproquement, un système de Pfaff

$$(8)\qquad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, peut toujours être regardé comme provenant d'un système en involution du type considéré.

Considérons d'abord les formules (6), et posons

$$(9)\quad \begin{cases} \theta'_1 \equiv \chi\chi_1 + \theta_3(a\chi + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 + a_4\chi_4) \\ \theta'_2 \equiv \chi\chi_2 + \theta_3(b\chi + b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + b_2\chi_3 + b_4\chi_4) \end{cases} \pmod{\theta_1, \theta_2}.$$

L'identité fondamentale appliquée à θ'_1 donne, en considérant les termes en $\chi_2\chi_3\chi_4$,

$$a_3 = 0;$$

on a de même

$$b_4 = 0.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial\chi'}{\partial(\chi_3\chi_4)} + a_4 = 0, \qquad \frac{\partial\chi'}{\partial(\chi_3\chi_4)} - b_3 = 0,$$

ce qui donne

$$b_3 = -a_4.$$

Par hypothèse, la valeur commune de b_3 et de $-a_4$ n'est pas nulle, et on peut la supposer égale à 1. On peut, de même, en changeant les notations, supposer

$$a = a_1 = a_2 = b = b_1 = b_2 = 0.$$

On a donc finalement

$$(6')\quad \begin{cases} \theta'_1 \equiv \chi\chi_1 \;-\; \theta_3\chi_4 & \pmod{\theta_1, \theta_2}, \\ \theta'_2 \equiv \chi\chi_2 \;+\; \theta_3\chi_3 & \pmod{\theta_1, \theta_2}, \\ \theta'_3 \equiv \chi_1\chi_3 + \chi_2\chi_4 & \pmod{\theta_1, \theta_2, \theta_3}. \end{cases}$$

Cela étant, posons

$$\varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2,$$

en désignant par λ une variable auxiliaire nouvelle. On a

$$\varpi' = \chi(\chi_1 + \lambda\chi_2) + \theta_3(\lambda\chi_3 - \chi_4) + \theta_2(-d\lambda + \ldots) \pmod{\varpi}.$$

L'équation $\varpi = 0$ est donc réductible à la forme

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0.$$

Si les équations (8) sont vérifiées, on aura les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = 0,$$

en posant

$$\varpi_1 = \theta_2, \qquad \varpi_2 = \theta_3, \qquad \varpi_3 = \chi_1 + \lambda\chi_2 + \mu\chi,$$
$$\omega_1 = d\lambda - \ldots, \qquad \omega_2 = \chi_4 - \lambda\chi_3, \qquad \omega_3 = \chi.$$

Il en résulte

$$\left.\begin{array}{l}\varpi'_1 \equiv \omega_3\chi_2\\ \varpi'_2 \equiv -\omega_2\chi_2 - \mu\omega_3\chi_3\end{array}\right\} \quad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),$$

et, par suite,

$$\varpi'_3 \equiv \omega_1\chi_2 - \mu\omega_2\chi_3 + \omega_3(-d\mu + \ldots) \quad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3).$$

Les formules précédentes prouvent que z satisfait à un système en involution pour lequel on a

$$\varpi_{11} = \varpi_{12} = \varpi_{13} + \varpi_{22} = 0,$$

et qui, par suite, est du type c). De plus, le système de Pfaff des caractéristiques à une dimension est

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0;$$

ces caractéristiques dépendent de huit constantes arbitraires, et les équations (8) indiquent comment elles doivent être associées pour engendrer une multiplicité intégrale.

11. Dans le cas des formules (7), le raisonnement est identique. Les coefficients a_i, b_i des formules (9) satisfont aux conditions

$$\frac{\partial\chi'}{\partial(\chi_3\chi_4)} - a_3 = 0, \qquad b_3 = 0, \qquad \frac{\partial\chi'}{\partial(\chi_3\chi_4)} = 0;$$

et l'on peut supposer qu'on a

$$(7') \quad \left\{\begin{array}{ll}\theta'_1 \equiv \chi\chi_1 + \theta_3(a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_4\chi_4) & (\operatorname{mod} \theta_1, \theta_2),\\ \theta'_2 \equiv \chi\chi_2 + \theta_3(b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + b_4\chi_4) & (\operatorname{mod} \theta_1, \theta_2),\\ \theta'_3 \equiv \chi\chi_3 + \chi_1\chi_4 & (\operatorname{mod} \theta_1, \theta_2, \theta_3);\end{array}\right.$$

les coefficients a_4 et b_4 n'étant pas nuls tous les deux.

Citons comme exemple, dans le cas des formules (6), le système en involution obtenu en éliminant u entre les équations

$$p_{11} = \frac{1}{4}u^4 p_{33},$$

$$p_{12} = \frac{1}{4}u^4 x_1 + \frac{1}{2}u^3 p_{33} - \frac{1}{2}u^2 x_3,$$

$$p_{13} + p_{22} = u^3 x_1 + \frac{3}{2}u^2 p_{33} - 2u x_3,$$

$$p_{23} = \frac{1}{2}u^2 x_1 + u p_{33} - x_3.$$

L'intégration de ce système revient à celle de l'équation

$$P_{222} - \frac{X_3 + 3P_{23}}{P_{33}} P_{223} + \frac{P_{23}(X_3 + P_{23})}{P_{33}^2}(1 + P_{233}) - \frac{P_{23}(X_3 + P_{23})^2}{P_{33}^3} P_{333} = 0,$$

où les variables indépendantes sont X_2 et X_3.

42. L'intégration du système (8) se simplifie, dans le cas des formules (7), si l'une des équations de ce système est réductible à la forme

$$dV - W\,dU = 0;$$

cette équation peut toujours être supposée

$$\theta_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta_2 = 0.$$

Dans le second cas, une fois intégrée l'équation $\theta_2 = 0$ par les équations

$$V = f(U), \qquad W = f'(U),$$

on est ramené à intégrer le système

$$\theta_1 = \theta_3 = 0$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv \chi\chi_1 \\ \theta'_3 &\equiv \chi\chi_3 + \chi_1\chi_4 \end{aligned}\right\} \quad (\operatorname{mod} \theta_1,\ \theta_3).$$

L'équation $\theta_1 = 0$ est réductible à la forme

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0$$

et l'équation $\theta_3 = 0$ à la forme

$$dP + u\,dQ + \alpha\,dX + \beta\,dY = 0,$$

où α et β sont des fonctions u, X, Y, Z, P, Q. On a finalement à intégrer une équation aux dérivées partielles du second ordre, à caractéristiques confondues.

Dans le premier cas, on a, dans les formules (7'),

$$a_2 = a_4 = 0$$

et *le système*

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi = \chi_1 = 0$$

est complètement intégrable.

Considérons, d'une manière plus générale, le cas où, *parmi les* *équations*

(10) $$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi = \chi_1 = \chi_2 = 0$$

des caractéristiques à deux dimensions, il y a cinq combinaisons intégrables, un tel nombre ne pouvant d'ailleurs pas être dépassé. Nous allons voir que, dans ce cas, *le système en involution s'intègre par des équations différentielles ordinaires.*

43. Prenons d'abord le cas des formules (6′). On a, dans ce cas,

$$\frac{\partial\chi'}{\partial(\chi_3\chi_4)} = 1, \qquad \frac{\partial\chi'_1}{\partial(\chi_3\chi_4)} = \frac{\partial\chi'_2}{\partial(\chi_3\chi_4)} = 0.$$

La première équation a été démontrée plus haut; les deux autres s'obtiennent en appliquant l'identité fondamentale à θ'_1 et à θ'_2, et en annulant les termes en $\chi\chi_3\chi_4$.

Il résulte de là que, parmi les quatre équations (10), les seules combinaisons intégrables possibles sont

(11) $$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi_1 = \chi_2 = 0.$$

Supposons donc le système (11) *complètement intégrable.*

Le système en involution est équivalent au système

(12) $$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0,$$

où l'on a posé

$$\theta_4 = \chi_2 - \lambda\chi_1,$$

λ désignant une nouvelle variable auxiliaire. On a, d'ailleurs,

(13) $$\left\{\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv \chi\chi_1 \\ \theta'_2 &\equiv \lambda\chi\chi_1 \\ \theta'_3 &\equiv \chi_1(\chi_3 + \lambda\chi_4) \\ \theta'_4 &\equiv \chi_1(d\lambda + \ldots) \end{aligned}\right. \qquad (\operatorname{mod} \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4).$$

Il résulte de là que, en désignant par X_1, X_2, X_3, X_4, X cinq intégrales premières indépendantes du système (11) (¹), le sys-

(¹) L'intégrabilité complète du système (11) est d'ailleurs une conséquence des formules (13).

tème (12) est de la forme

$$\begin{aligned} dX_1 - Y_1\,dX &= 0, \\ dX_2 - Y_2\,dX &= 0, \\ dX_3 - Y_3\,dX &= 0, \\ dX_4 - Y_4\,dX &= 0, \end{aligned}$$

où les X et les Y sont des fonctions des intégrales premières du système complètement intégrable

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \chi_1 = \chi = \chi_3 + \lambda\chi_4 = d\lambda + \ldots = 0.$$

Il y a donc *une* relation entre les X et les Y. Autrement dit, *l'intégration du système en involution donné revient, une fois intégré le système* (11), *à l'intégration d'une équation de Monge*

$$F\left(X, X_1, X_2, X_3, X_4, \frac{dX_1}{dX}, \frac{dX_2}{dX}, \frac{dX_3}{dX}, \frac{dX_4}{dX}\right) = 0. \tag{14}$$

44. Réciproquement, partons d'une équation de Monge (14), c'est-à-dire au fond d'un système de Pfaff

$$\Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = 0, \tag{15}$$

avec les équations

$$\left\{\begin{aligned} \Pi' &\equiv 0 \\ \Pi'_1 &\equiv \Omega\Omega_1 \\ \Pi'_2 &\equiv \Omega\Omega_2 \\ \Pi'_3 &\equiv \Omega\Omega_3 \end{aligned}\right. \quad (\operatorname{mod} \Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3). \tag{16}$$

Les variables X, X_1, X_2, X_3 X_4 sont, avec ces notations, des intégrales premières du système complètement intégrable

$$\Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Omega = 0$$

qui jouera le rôle du système (11).

Posons

$$\Pi' \equiv \Pi_1(\alpha_{10}\Omega + \alpha_{11}\Omega_1 + \alpha_{12}\Omega_2 + \alpha_{13}\Omega_3) + \ldots + \beta_1\Pi_2\Pi_3 + \beta_2\Pi_3\Pi_1 + \beta_3\Pi_1\Pi_2 \quad (\operatorname{mod} \Pi).$$

L'identité fondamentale appliquée à Π', en négligeant tous les termes en Π, Π_1, Π_2, Π_3, montre que l'on a

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

De plus, la forme quadratique

$$\mathcal{F} = \Sigma \alpha_{ik} u_i u_k$$

est *covariante* pour toute substitution linéaire effectuée simultanément sur Π_1, Π_2, Π_3, sur Ω_1, Ω_2, Ω_3 et sur u_1, u_2, u_3. Or, dans le cas des formules (13), il est facile de voir que cette forme quadratique a un discriminant différent de zéro ; c'est donc une première condition pour que l'équation de Monge (14) corresponde à un système en involution du type étudié dans le numéro précédent. On peut encore exprimer cette condition en exprimant que *le hessien du premier membre* F *de l'équation de Monge*, *regardé comme fonction homogène de* $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{X}_1$, $d\mathrm{X}_2$, $d\mathrm{X}_3$, $d\mathrm{X}_4$, *n'est pas identiquement nul*, *en tenant compte de cette équation.*

Il résulte de là qu'on peut supposer

$$(17) \qquad \Pi' \equiv \Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \Pi_3 \Omega_3 \qquad (\text{mod}\,\Pi),$$

car on peut aisément, en changeant de notations, mais sans altérer les formules (16), annuler les coefficients α_{i0} et β_i.

Cela étant, cherchons à remonter aux équations

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.$$

D'abord, le système

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

sera de la forme

$$\Pi = 0, \qquad \Pi_3 + u\Pi_1 + v\Pi_2 = 0;$$

on pourra prendre la troisième équation de la forme

$$\Pi_1 - w\Pi_3 = 0.$$

Nous allons exprimer qu'en tenant compte de ces trois équations, les covariants bilinéaires de θ_1 et de θ_2 n'introduisent que trois expressions de Pfaff (χ, χ_1, χ_2), combinaisons linéaires des Π et des Ω, et que le covariant de θ_3 introduit, en outre, deux nouvelles expressions de Pfaff (χ_3, χ_4), dont une seule ($\chi_3 + \lambda\chi_4$) est une combinaison linéaire des Π et des Ω.

Posons donc

$$\theta_1 = \Pi, \qquad \theta_2 = \Pi_3 + u\Pi_1 + v\Pi_2, \qquad \theta_3 = \Pi_1 - w\Pi_3.$$

On a

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv \Pi_3\left(\Omega_3 + w\Omega_1 - \frac{1+uw}{v}\Omega_2\right) \qquad (\operatorname{mod} \theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ \theta'_2 &\equiv \Omega(\Omega_3 + u\Omega_1 + v\Omega_2) + \Pi_3\left(-w\,du + \frac{1+uw}{v}dv + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Il faut d'abord que θ'_2 s'annule en même temps que Π_3 et $\Omega_1 + w\Omega_1 - \frac{1+uw}{v}\Omega_2$. Il en résulte

$$u = w, \qquad v = -\frac{1+uw}{v},$$

c'est-à-dire

$$(19)\qquad u^2 + v^2 + 1 = 0, \qquad w = u.$$

Il faut encore exprimer que θ'_2 n'introduit que deux expressions de Pfaff.

Pour cela posons

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi'_1 &\equiv \Omega\Omega_1 + \Pi_1\Omega_{11} + \Pi_2\Omega_{12} + \Pi_3\Omega_{13} \\ \Pi'_2 &\equiv \Omega\Omega_2 + \Pi_1\Omega_{21} + \Pi_2\Omega_{22} + \Pi_3\Omega_{23} \qquad (\operatorname{mod} \Pi), \\ \Pi'_3 &\equiv \Omega\Omega_3 + \Pi_1\Omega_{31} + \Pi_2\Omega_{32} + \Pi_3\Omega_{33} \end{aligned}\right.$$

où les Ω_{ik} sont des combinaisons linéaires de Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Π_1, Π_2, Π_3.

On a alors

$$\begin{aligned} \theta'_2 \equiv \Omega(\Omega_3 + u\Omega_1 + v\Omega_2) + \Pi_3[u^2\Omega_{11} &+ uv(\Omega_{12} + \Omega_{21}) \\ &+ v^2\Omega_{22} + u(\Omega_{13} + \Omega_{31}) \\ &+ v(\Omega_{23} + \Omega_{32}) + \Omega_{33}] \qquad (\operatorname{mod} \theta_1, \theta_2, \theta_3). \end{aligned}$$

Il faut donc que, en négligeant dans les Ω_{ik} *les termes en* Ω, Π_1, Π_2, Π_3, *l'expression*

$$u^2\Omega_{11} + uv(\Omega_{12} + \Omega_{21}) + v^2\Omega_{22} + u(\Omega_{13} + \Omega_{31}) + v(\Omega_{23} + \Omega_{32}) + \Omega_{33}$$

soit, quels que soient u *et* v *satisfaisant à* $u^2 + v^2 + 1 = 0$, *proportionnelle à*

$$u\Omega_1 + v\Omega_2 + \Omega_3.$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$\Omega_{ii} = a_{ii1}\Omega_1 + a_{ii2}\Omega_2 + a_{ii3}\Omega_3,$$
$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 2a_{ij1}\Omega_1 + 2a_{ij2}\Omega_2 + 2a_{ij3}\Omega_3,$$

on aura

$$(21)\qquad \begin{cases} \alpha_{iii} = l_i + m_i \\ \alpha_{jji} = \alpha_{kki} = l_i \\ \alpha_{ijj} = \alpha_{ikk} = \dfrac{1}{2} m_i \\ \alpha_{ijk} = 0 \end{cases} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Dans ces formules i, j, k désignent trois indices différents, l_i et m_i des quantités arbitraires.

Il résulte de là *certaines restrictions nouvelles pour l'équation de Monge* (14). Si elles sont réalisées on aura

$$\left.\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv \Pi_3(\Omega_3 + u\Omega_1 + v\Omega_2) \\ \theta'_2 &\equiv [\Omega + (m_3 + um_1 + vm_2)\Pi_3](\Omega_3 + u\Omega_1 + v\Omega_2) \end{aligned}\right\} \pmod{\theta_1, \theta_2, \theta_3}.$$

On aura enfin

$$\theta'_3 \equiv \Omega(\Omega_1 - u\Omega_3) + \Pi_3(du + \ldots) \qquad (\operatorname{mod} \theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

et *ces formules sont effectivement de la forme* (6). De plus le système (11) correspondant est

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \Omega = \Pi_3 = 0,$$

c'est-à-dire le système complètement intégrable

$$\Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Omega = 0.$$

Donc *toute équation de Monge* (14), *à hessien différent de zéro, et satisfaisant aux conditions* (21), *donne naissance à un système en involution du type considéré.* En réalité il y a une infinité de ces systèmes qui correspondent à la même équation de Monge, *mais on peut toujours passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.*

En définitive on formera le système en involution, d'après ce qui a été dit au n° **40**, en posant

$$\begin{aligned} \varpi &= \Pi_3 + u\Pi_1 + v\Pi_2 + \lambda\Pi, \\ \varpi_1 &= \Pi, \\ \varpi_2 &= \Pi_1 - u\Pi_3, \\ \varpi_3 &= \Omega + \lambda\Pi_3 + \mu(\Omega_3 + u\Omega_1 + v\Omega_2), \end{aligned}$$

où u, v, λ, μ sont quatre variables auxiliaires, les deux premières étant liées par la relation

$$u^2 + v^2 + 1 = 0.$$

Citons comme exemple l'équation de Monge

$$dX\, dX_4 = dX_1\, dX_2 + \frac{1}{2} dX_3^2,$$

qui donne naissance au système en involution

$$p_{11} - p_{33}(p_{22}p_{33} + p_{23}^2) = 0,$$

$$p_{12} + p_{22}p_{33} + \frac{1}{2} p_{23}^2 = 0,$$

$$p_{13} + p_{23}p_{33} = 0.$$

L'intégrale générale est donnée par les formules

$$x_2 = \alpha x_1 + f(\alpha),$$

$$z = x_1\,\varphi(\alpha) + x_3\,\psi(\alpha) + \frac{1}{2} x_3^2 \alpha + \int \left[f'(\alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{1}{2} \psi'^2(\alpha) \right] d\alpha,$$

où x_2 et z sont exprimés en fonction de x_1, x_3, α.

45. Passons maintenant aux formules ($7'$). On a ici

$$\frac{\partial\chi'}{\partial(\chi_3\chi_4)} = 0, \qquad \frac{\partial\chi'_1}{\partial(\chi_3\chi_4)} = a_4, \qquad \frac{\partial\chi'_2}{\partial(\chi_3\chi_4)} = b_4,$$

et par suite, si le système (10) (n° **42**) admet cinq combinaisons intégrables, elles ne peuvent être que

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi = b_4\chi_1 - a_4\chi_2 = 0;$$

la forme de θ'_3 montre que cela n'est possible que si a_4 est nul. *Supposons donc le système*

(22) $$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi = \chi_1 = 0,$$

complètement intégrable.

Le système en involution est équivalent au système

(23) $$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0,$$

où l'on a posé

$$\theta_4 = \chi_1 - \lambda\chi,$$

λ désignant une nouvelle variable auxiliaire. On a d'ailleurs

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta'_1 \equiv 0 \\ \theta'_2 \equiv \chi\chi_2 \\ \theta'_3 \equiv \chi(\chi_3 + \lambda\chi_4) \\ \theta'_4 \doteq \chi(d\lambda + \ldots) \end{array}\right. \qquad (\bmod \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4),$$

ce qui prouve que l'intégration est ramenée, encore ici, à celle d'une certaine équation de Monge (14).

Or dans les formules (7') (n° 41) le coefficient a_2 est nul comme le prouve l'identité fondamentale appliquée à θ'_1, lorsqu'on y considère les termes en $\chi_1\,\chi_2\,\chi_4$. On peut aussi supposer a_1 nul, de sorte qu'on a

$$\theta'_1 \equiv \chi\theta_4 \qquad (\bmod \theta_1, \theta_2).$$

Posons

$$\theta'_1 \equiv \chi\theta_4 + \theta_2(\alpha\chi + \alpha_1\chi_2 + \alpha_2\chi_3 + \alpha_3\chi_4 + \alpha_4\theta_3 + \alpha_5\theta_4) \qquad (\bmod \theta_1).$$

L'identité fondamentale appliquée à θ'_1 donne, en considérant les termes en $\chi\chi_2\chi_3$ et $\chi\chi_2\chi_4$,

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0;$$

puis, en considérant les termes en $\theta_3\,\chi_2\,\chi_4$,

$$\alpha_1 = 0.$$

On a donc

$$(25)\qquad \theta'_1 \equiv (\chi + \alpha_5\theta_2)(\theta_4 - \alpha\theta_2) + \beta\theta_2\theta_3 \qquad (\bmod \theta_1).$$

On peut d'ailleurs changer les notations de manière à supposer α_2 et α_5 nuls; quant à β on peut le supposer égal à 0 ou à 1.

46. *Supposons d'abord* $\beta = 0$. Le système (23) peut se mettre sous la forme

$$\Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = 0,$$

avec les formules

$$\begin{array}{ll} \Pi' \equiv \Omega\Pi_1 & (\bmod \Pi), \\ \Pi'_1 \equiv \Omega\Omega_1 & (\bmod \Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), \\ \Pi'_2 \equiv \Omega\Omega_2 & (\bmod \Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), \\ \Pi'_3 \equiv \Omega\Omega_3 & (\bmod \Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3). \end{array}$$

L'équation de Monge (14) se réduit ici à

$$\frac{dX_1}{dX} = X_2,$$

et son intégration est par suite immédiate.

Les équations (23) sont donc ici de la forme

$$\begin{aligned} dX_1 - X_2\, dX &= 0, \\ dX_2 - Y_2\, dX &= 0, \\ dX_3 - Y_3\, dX &= 0, \\ dX_4 - Y_4\, dX &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement partons de ces équations et tâchons de remonter au système

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.$$

On aura d'abord

$$\theta_1 = \Pi = dX_1 - X_2\, dX. \tag{26}$$

Posons ensuite

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_2 &= dX_4 + u\, dX_3 + v\, dX_2 + w\, dX, \\ \theta_3 &= u_1\, dX_3 + v_1\, dX_2 + w_1\, dX. \end{aligned} \right. \tag{27}$$

Il faudra que u, v, w, $\frac{v_1}{u_1}$, $\frac{w_1}{u_1}$ soient des fonctions de X, X_1, X_2, X_3, X_4 et trois autres variables, d'après la forme même que doivent avoir les covariants θ'_i. On a

$$\theta'_1 = dX\, dX_2,$$

$$\theta'_2 = du\, dX_3 + dv\, dX_2 + dw\, dX \equiv \left(dv - \frac{v_1}{u_1} du\right) dX_2 + \left(dw - \frac{w_1}{u_1} du\right) dX$$

$$(\bmod \theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

Pour que θ'_2 soit de la forme voulue $\chi\chi_2$, il faut qu'en annulant dX, dX_2, θ_1, θ_2, θ_3, il y ait une relation linéaire entre $dv - \frac{v_1}{u_1} du$ et $dw - \frac{w_1}{u_1} du$. Autrement dit on doit avoir une relation

$$\Phi(u, v, w, X, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, \tag{28}$$

et l'on doit avoir de plus

$$u_1 \Phi'_u + v_1 \Phi'_v + w_1 \Phi'_w = 0. \tag{29}$$

Il ne peut pas d'ailleurs y avoir plus d'une relation indépendante entre u, v, w et les X, car alors les équations $\theta_1 = \theta_2 = 0$ pourraient s'écrire avec six variables seulement, ce qui, d'après les formules (7'), est impossible.

Finalement *on choisira* θ_1, θ_2, θ_3 *d'après les formules* (26) *et* (27), *les quantités* X, X_i, u, v, w, u_1, v_1, w_1 *étant liées par les relations* (28) *et* (29) *dont la première est absolument arbitraire*, sauf la restriction, facile à démontrer, qu'elle ne soit pas linéaire en u, v, w.

On remontera enfin au système en involution en posant

$$\varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2,$$

et procédant comme il a été dit au n° **40**.

Pour tous les systèmes en involution ainsi obtenus, les équations des intégrales dépendront d'un paramètre α, *de trois fonctions arbitraires* $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, *de leurs dérivées premières* $f'(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ *et de la dérivée seconde* $f''(\alpha)$.

Ces systèmes ne sont pas tous équivalents entre eux vis-à-vis du groupe des transformations de contact, bien qu'on puisse établir une correspondance univoque entre les caractéristiques de deux quelconques d'entre eux, de manière qu'à toute famille de caractéristiques engendrant une intégrale du premier corresponde une famille de caractéristiques engendrant une intégrale du second.

Citons deux exemples. Le premier est fourni par le système

$$p_{11} = p_{12} = p_{13} - p_{22} = 0, \tag{30}$$

dont l'intégrale générale est

$$z = x_1 f(x_3) + \frac{1}{2} x_2^2 f'(x_3) + x_2\,\varphi(x_3) + \psi(x_3). \tag{31}$$

Le second est fourni par le système

$$p_{11} = p_{12} + \frac{1}{2} p_{13}^2 = p_{22} + 2p_{13}p_{23} - 2p_{12}p_{33} = 0, \tag{32}$$

dont l'intégrale générale est déterminée par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x_3 &= \alpha x_2 + f'(\alpha), \\ z &= \frac{1}{2}\alpha^2 x_1 x_2 + [\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)]x_1 + \varphi(\alpha)x_2 + \psi(\alpha). \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Les deux systèmes (30) et (32) ne sont certainement pas équivalents entre eux vis-à-vis du groupe des transformations de contact, car le système (30) admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$p_1 = f(x_3),$$

et le système (32) n'en admet pas.

47. *Supposons enfin*, dans les formules (25), $\beta = 1$, c'est-à-dire

$$\theta'_1 \equiv \chi\theta_4 + \theta_2\theta_3 \qquad (\mathrm{mod}\,\theta_1).$$

Le système (23) peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
\Pi' &\equiv \Omega\Pi_1 + \Pi_2\Pi_3 && (\mathrm{mod}\,\Pi),\\
\Pi'_1 &\equiv \Omega\Omega_1 && (\mathrm{mod}\,\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3),\\
\Pi'_2 &\equiv \Omega\Omega_2 && (\mathrm{mod}\,\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3),\\
\Pi'_3 &\equiv \Omega\Omega_3 && (\mathrm{mod}\,\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3),
\end{aligned}$$

et l'on voit immédiatement que l'équation $\Pi = 0$ s'exprime au moyen des cinq intégrales du système complètement intégrable

$$\Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Omega = 0.$$

Autrement dit *l'équation de Monge* (14) *est linéaire par rapport aux dérivées et réductible à la forme*

$$dX_1 - X_2\,dX_3 - X_4\,dX = 0.$$

Si nous voulons revenir au système

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,$$

nous aurons à poser

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= dX_1 - X_2\,dX_3 - X_4\,dX,\\
\theta_2 &= dX_2 + u\,dX_3 + v\,dX_4 + w\,dX,\\
\theta_3 &= dX_3 + u_1\,dX_4 + v_1\,dX.
\end{aligned}$$

On montre comme précédemment que u, v, w doivent être reliés par une équation non linéaire de la forme

$$F(u, v, w, X, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

et que l'on a alors

$$F'_u + u_1 F'_v + v_1 F'_w = 0.$$

On remonte ensuite au système en involution comme il a été expliqué plus haut.

Tous les systèmes en involution ainsi obtenus peuvent ne pas être équivalents entre eux vis-à-vis du groupe des transformations de contact, comme il a été dit dans le numéro précédent.

Citons comme exemple le système en involution

$$p_{23} = \frac{1}{2} p_{22}^2,$$

$$p_{33} = \frac{1}{3} p_{22}^3,$$

$$p_{13} - p_{12} p_{22} + \frac{1}{2} x_2^2 p_{22} + x_2 x_3 p_{23} + \frac{1}{2} x_3^2 p_{33} + z - p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par l'équation

$$\begin{aligned} z = \psi(x_1) + x_2 f(x_1) + x_3 \int [\varphi(x_1) f'(x_1) - \psi(x_1)]\, dx_1 \\ + \frac{1}{2} x_2^2 \varphi(x_1) + \frac{1}{2} x_2 x_3 \varphi^2(x_1) + \frac{1}{6} x_3^2 \varphi^3(x_1). \end{aligned}$$

48. On peut remarquer que les cas qui viennent d'être étudiés (**42**-**47**) sont ceux où les équations de Pfaff des caractéristiques à deux dimensions

$$(34) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \varpi_{13} = 0,$$

admettent cinq combinaisons intégrables; les caractéristiques dépendent alors de huit constantes arbitraires.

Réciproquement si les équations (34) admettent cinq combinaisons intégrables les équations

$$(35) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0$$

des caractéristiques à une dimension sont complètement intégrables. En effet on peut toujours changer les notations de manière que les cinq combinaisons intégrables du système (34) soient

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \omega_2 = \varpi_{12} = 0.$$

Pour démontrer que le système (35) est complètement intégrable il suffit alors de démontrer que l'on a

$$\frac{\partial \omega_2'}{\partial(\omega_1 \varpi_{33})} = \frac{\partial \varpi_{23}'}{\partial(\omega_1 \varpi_{33})} = 0.$$

Or l'on a

$$\varpi'_2 \equiv \omega_2 \varpi_{13} + \omega_3 \varpi_{23} + \varpi_3(\alpha\omega_3 + \beta\varpi_{13}) \qquad (\bmod \varpi, \varpi_1, \varpi_2),$$

et l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2, en considérant les termes en $\omega_1\, \varpi_{13}\, \varpi_{33}$ et $\omega_1\, \omega_3\, \varpi_{33}$, donne précisément les deux équations à démontrer.

Nous avons donc, en définitive, étudié dans les paragraphes précédents tous les cas où le système (34) admet cinq combinaisons intégrables.

Nous avons d'autre part (n° **42**) considéré le cas où l'une des équations $\theta_1 = 0$ ou $\theta_2 = 0$, c'est-à-dire en somme $\varpi = 0$ ou $\varpi_1 = 0$ était réductible à la forme

$$dV - W\, dU = 0,$$

en supposant au préalable que les caractéristiques à une dimension dépendaient de constantes arbitraires. Réciproquement si l'une de ces équations, qui ne peut pas être $\varpi = 0$, et qui par suite peut être supposée $\varpi_1 = 0$, est réductible à la forme précédente, on peut supposer

$$\varpi'_1 \equiv \omega_3 \varpi_{13} \qquad (\bmod \varpi_1).$$

En posant alors

$$\varpi'_2 \equiv \omega_2 \varpi_{13} + \omega_3 \varpi_{23} + \varpi_3(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 + \alpha_4 \varpi_{13} + \alpha_5 \varpi_{23} + \alpha_6 \varpi_{33})$$
$$(\bmod \varpi, \varpi_1, \varpi_2),$$

l'identité fondamentale montre, en considérant les termes en

$$\omega_1\, \omega_2\, \varpi_{23} \qquad \text{et} \qquad \omega_2\, \varpi_{23}\, \varpi_{33},$$

qu'on a

$$\alpha_1 = \alpha_6 = 0.$$

Par suite, comme

$$\varpi' \equiv \omega_3 \varpi_3 \qquad (\bmod \varpi, \varpi_1, \varpi_2),$$

le système (35) est complètement intégrable.

49. En définitive les cas de réduction de l'intégration qui ont été étudiés sont les suivants :

1° *Le cas où le système des caractéristiques à une di-*

mension

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0$$

est complètement intégrable;

2° *Le cas où l'équation* $\varpi_1 = 0$ *est réductible à la forme*

$$dV - W\,dU = 0;$$

3° *Le cas où, en choisissant convenablement les notations, le système des caractéristiques à deux dimensions*

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = 0$$

est complètement intégrable.

Les cas 2° et 3° sont des cas particuliers du cas 1°. L'intégration, dans le cas 3°, se ramène à des équations différentielles ordinaires; dans le cas 1° et 2°, à un système à deux variables indépendantes.

On peut se demander si l'application de la méthode de M. Darboux ne conduirait pas à des cas plus généraux où se présenteraient des simplifications analogues. Nous allons voir que cela ne peut arriver que pour la réduction 2°.

Remarquons d'abord que la méthode de M. Darboux consiste essentiellement à *prolonger* le système de Pfaff donné. Le premier prolongement fournit le système de Pfaff

$$(36) \qquad \varpi_1 = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \overline{\varpi}_{13} = \overline{\varpi}_{23} = \overline{\varpi}_{33} = 0,$$

en posant

$$(37) \qquad \begin{cases} \overline{\varpi}_{13} = \varpi_{13} - u_1\omega_3, \\ \overline{\varpi}_{23} = \varpi_{23} - u_1\omega_2 - v_1\omega_3, \\ \overline{\varpi}_{33} = \varpi_{33} - u_1\omega_1 - v_1\omega_2 - w_1\omega_3, \end{cases}$$

et l'on aura, en tenant compte des équations (36), des équations de la forme

$$\begin{aligned} &\varpi' \equiv \varpi'_1 \equiv \varpi'_2 \equiv \varpi'_3 \equiv 0, \\ &\overline{\varpi}'_{13} \equiv \omega_3\varpi_{133}, \\ &\overline{\varpi}'_{23} \equiv \omega_2\varpi_{133} + \omega_3\varpi_{233}, \\ &\overline{\varpi}'_{33} \equiv \omega_1\varpi_{133} + \omega_2\varpi_{233} + \omega_3\varpi_{333}; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \varpi_{133} &= du_1 + \ldots, \\ \varpi_{233} &= dv_1 + \ldots, \\ \varpi_{333} &= dw_1 + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant des combinaisons linéaires des ϖ, ω_i, ϖ_{ik}.

On aura un deuxième prolongement par le système

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \bar{\varpi}_{13} = \bar{\varpi}_{23} = \bar{\varpi}_{33} = \bar{\varpi}_{133} = \bar{\varpi}_{233} = \bar{\varpi}_{333} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} \bar{\varpi}_{133} &= \varpi_{133} - u_2\omega_3, \\ \bar{\varpi}_{233} &= \varpi_{233} - u_2\omega_2 - v_2\omega_3, \\ \bar{\varpi}_{333} &= \varpi_{333} - u_2\omega_1 - v_2\omega_2 - w_2\omega_3; \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

On voit d'une manière générale que le système de Pfaff prolongé un nombre quelconque de fois est de la forme

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(2)} = \ldots = \Pi^{(k)} = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = 0,$$

avec

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\Pi^{(1)})' \equiv (\Pi^{(2)})' \equiv \ldots \equiv (\Pi^{(k)})' \equiv 0 & \\ \Pi'_1 \equiv \omega_3\Pi_{13} & \\ \Pi'_2 \equiv \omega_2\Pi_{13} + \omega_3\Pi_{23} & \\ \Pi'_3 \equiv \omega_1\Pi_{13} + \omega_2\Pi_{23} + \omega_3\Pi_{33} & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{mod}\,\Pi^{(1)}, \ldots, \Pi_3).$$

50. Cela étant, montrons d'abord que si l'équation

$$\Pi_1 = 0$$

est réductible à la forme

$$dV - W\,dU = 0,$$

le système

$$(39)\qquad \Pi^{(1)} = \Pi^{(2)} = \ldots = \Pi^{(k)} = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \Pi_{13} = \Pi_{23} = 0$$

est complètement intégrable. Si en effet le système

$$\Pi_1 = \omega_3 = \Pi_{13} = 0$$

est complètement intégrable, on montre d'abord que

$$\frac{\partial(\Pi^{(i)})'}{\partial(\Pi_3\omega_1)} = \frac{\partial(\Pi^{(i)})'}{\partial(\Pi_3\Pi_{33})} = 0,$$

puis, comme plus haut, que l'on a

$$\frac{\partial\Pi'_2}{\partial(\Pi_3\omega_1)} \quad \frac{\partial\Pi'_2}{\partial(\Pi_3\Pi_{33})} = 0.$$

La considération du système

$$\Pi^{(1)} = \ldots = \Pi^{(k)} = \Pi_1 = \Pi_2 = 0$$

montre alors que le système (39) est complètement intégrable.

On montrerait de même qu'il en est ainsi si le système

$$\Pi^{(1)} = \ldots = \Pi^{(k)} = \Pi_1 = \Pi_2 = \omega_3 = \Pi_{13} = 0$$

est complètement intégrable, où l'on a supposé ω_3 susceptible d'être additionné d'une combinaison linéaire quelconque des $\Pi^{(i)}$, Π_1, Π_2, Π_3.

Donc *les réductions que peut faire espérer la méthode de M. Darboux n'ont lieu que si, pour l'un des systèmes prolongés, le système* (39) *est complètement intégrable.*

51. Montrons maintenant que si pour le système prolongé considéré, le système (39) n'est pas complètement intégrable, le système (39) correspondant à un prolongement de plus ne sera pas non plus complètement intégrable.

Le système prolongé une fois de plus est

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)} = \ldots = \Pi^{(k)} = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_{13} - u\,\omega_3 \\ = \Pi_{23} - u\,\omega_2 - v\,\omega_3 = \Pi_{33} - u\,\omega_1 - v\,\omega_2 - w\,\omega_3 = 0,\end{aligned}$$

et l'on aura

$$\Pi_{133} = du + \ldots, \qquad \Pi_{233} = dv + \ldots, \qquad \Pi_{333} = dw + \ldots.$$

Le système (39) correspondant sera

$$\begin{aligned}(39)' \quad \Pi^{(1)} = \ldots = \Pi^{(k)} = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_{13} = \Pi_{23} \\ = \Pi_{33} - u\,\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = du + A\,\omega_1 = dv + B\,\omega_1 = 0.\end{aligned}$$

En tenant compte de (39') les covariants des premiers membres sont tous nuls, excepté peut-être ceux des deux dernières équations. Pour que ceux-là aussi soient nuls, il faut que

$$\frac{\partial A}{\partial w} = \frac{\partial B}{\partial w} = 0.$$

Or on a

$$(\Pi_{13} - u\,\omega_3)' \equiv \omega_3(du + A\,\omega_1) \qquad (\mathrm{mod}\ \Pi^{(i)}, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \omega_2, \overline{\Pi}_{13}, \overline{\Pi}_{23}, \overline{\Pi}_{33}),$$

et les termes en w dans A ne peuvent provenir que des termes en

$\omega_1 \Pi_{33}$ dans Π'_{13} et ω'_3 ; il faut donc que ces termes n'existent pas. Il en est de même pour Π'_{23} et ω'_2, ce qui prouve que le système (39) est complètement intégrable.

Les réductions que peut faire espérer la méthode de M. Darboux n'ont donc lieu que si le système

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \omega_3 = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0$$

est complètement intégrable.

52. S'il en est ainsi le système en involution donné est équivalent au système considéré n° 40,

$$(8) \qquad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,$$

avec les formules (6) ou (7), et l'on est ramené à chercher si les simplifications qui se produisent dans les deux cas étudiés plus haut peuvent encore se produire dans d'autres cas en appliquant la méthode de M. Darboux. Mais ici, qu'on parte des formules (6) ou des formules (7), un quelconque des prolongements du système (8) conduit à un nouveau système de la forme

$$(40) \qquad \theta^{(1)} = \theta^{(2)} = \ldots = \theta^{(k)} = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,$$

avec

$$(41) \qquad \begin{cases} (\theta^{(i)})' \equiv 0 \\ \theta'_1 \equiv XX_1 \\ \theta'_2 \equiv XX_2 \\ \theta'_3 \equiv XX_3 + X_1 X_4 \end{cases} \qquad (\bmod \theta^{(i)}, \theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

Il est facile de voir qu'on peut toujours poser

$$(42) \qquad \begin{cases} (\theta^{(i)})' \equiv \theta_3(\alpha^{(i)} X + \beta^{(i)} X_1) \\ \theta'_1 \equiv XX_1 + \theta_3(a X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2) \\ \theta'_2 \equiv XX_2 + \theta_3(b X_4 + b_1 X_1 + b_2 X_2) \end{cases} \qquad (\bmod \theta^{(i)}. \theta_1, \theta_2),$$

et l'on a alors

$$\frac{\partial X'}{\partial(X_3 X_4)} = 0, \qquad \frac{\partial X'_1}{\partial(X_3 X_4)} = a, \qquad \frac{\partial X'_2}{\partial(X_3 X_4)} = b.$$

Si maintenant l'on prolonge le système (40) en lui ajoutant les équations

$$X_1 - uX = 0, \qquad X_2 - vX = 0, \qquad X_3 + uX_4 - wX = 0,$$

les nouvelles expressions X et X_4 ne changent pas et l'on voit sans peine que *les nouveaux coefficients a et b ne changent pas non plus.*

53. Supposons d'abord que pour le système prolongé de (40) les équations des caractéristiques à deux dimensions, sauf une, forment un système complètement intégrable. Cela ne sera possible que si a est nul, et le système complètement intégrable sera de la forme

$$\theta^{(i)} = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = X = X_1 = X_2 = X_3 + uX_4 = du + AX_4 = 0.$$

Il faudra pour cela que

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial w} = 0.$$

Or l'on a

$$(X_1 - uX)' \equiv X(du + AX_4)$$
$$(\bmod\, \theta^{(i)}, \theta_1, \theta_2, \theta_3, X_1 - uX, X_2 - vX, X_3 + uX_4 - wX).$$

Les termes en w dans A ne peuvent provenir que des termes en X_3X_4 dans X'_1 et X'; or ces termes n'existent pas. Les termes en v proviennent des termes en X_2X_3 et X_2X_4 dans X'_1 et X' et l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial v} = u^2 \frac{\partial X'}{\partial(X_2X_3)} - u\left[\frac{\partial X'_1}{\partial(X_2X_3)} + \frac{\partial X'}{\partial(X_2X_4)}\right] + \frac{\partial X'_1}{\partial(X_2X_4)}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\frac{\partial X'}{\partial(X_2X_3)} = \frac{\partial X'_1}{\partial(X_2X_3)} + \frac{\partial X'}{\partial(X_2X_4)} = \frac{\partial X'_1}{\partial(X_2X_4)} = 0.$$

D'autre part l'identité fondamentale appliquée à Θ'_3 donne, en considérant les termes en $X_2X_3X_4$,

$$-\frac{\partial X'}{\partial(X_2X_4)} + \frac{\partial X'_1}{\partial(X_2X_3)} = 0.$$

Finalement les équations précédentes montrent que le système

$$\theta^{(i)} = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = X = X_1 = 0$$

est complètement intégrable. *La propriété supposée au système prolongé de* (40) *appartenait donc déjà à ce système lui-même.*

54. La démonstration précédente ne s'applique pas au système prolongé de (8), dans le cas des formules (6). Ce système prolongé est

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi_2 - u\chi_1 = \chi - v\chi_1 = \chi_3 + u\chi_4 - w\chi_1 = 0.$$

On a donc ici

$$\Theta_1 = \chi_2 - u\chi_1, \qquad \Theta_2 = \chi - v\chi_1, \qquad \Theta_3 = \chi_3 + u\chi_4 - w\chi_1,$$

et l'on a

$$\left.\begin{aligned} \Theta'_1 &\equiv \chi_1(du + A\chi_4) \\ \Theta'_2 &\equiv \chi_1(dv + B\chi_4) \\ \Theta'_3 &\equiv (du + A\chi_4)\chi_4 + \chi_1(dw + C\chi_4) \end{aligned}\right\} \quad (\bmod \theta_1, \theta_2, \theta_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3).$$

Par suite ici

$$X = \chi_1, \qquad X_1 = du + A\chi_4, \qquad X_2 = dv + B\chi_4, \qquad X_4 = \chi_4.$$

D'autre part le terme en $\Theta_3 X_4$ dans Θ'_1 provient des termes en $\chi_3\chi_4$ dans $\chi'_2 - u\chi'_1$ et ces termes n'existent pas. Par suite le système complètement intégrable à considérer est

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \chi_1 = du + A\chi_4 = 0$$

ou

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 + u\chi_4 = du + A\chi_4 = 0.$$

Pour que ce système soit complètement intégrable il faut que l'on ait

$$\frac{\partial A}{\partial w} = \frac{\partial A}{\partial v} = 0.$$

Or on a

$$\chi'_2 - u\chi'_1 + \chi_1\, du \equiv \chi_1(du + A\chi_4)$$
$$(\bmod \theta_1, \theta_2, \theta_3, \chi_2 - u\chi_1, \chi - v\chi_1, \chi_3 + u\chi_4 - w\chi_1).$$

Les termes en w dans A ne peuvent par suite provenir que des termes en $\chi_3\chi_4$ dans χ'_2 et χ'_1 : il n'y en a pas. Quant aux termes en v, ils proviennent dans χ'_2 et χ'_1 des termes en $\chi\chi_3$ et $\chi\chi_4$. On a, d'une manière plus précise,

$$\frac{\partial A}{\partial v} = u^2 \frac{\partial \chi'}{\partial(\chi\chi_3)} - u\left[\frac{\partial \chi'_2}{\partial(\chi\chi_3)} + \frac{\partial \chi'}{\partial(\chi\chi_4)}\right] + \frac{\partial \chi'_2}{\partial(\chi\chi_4)} = 0,$$

et l'on démontre, d'autre part, comme dans le cas général, que

$$\frac{\partial \chi'_2}{\partial(\chi\chi_3)} - \frac{\partial \chi'}{\partial(\chi\chi_4)} = 0.$$

Il en résulte la complète intégrabilité du système

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \chi_1 = \chi_2 = 0.$$

En résumé, *si les caractéristiques à deux dimensions d'un ordre suffisamment élevé dépendent seulement de constantes arbitraires, ou, d'une manière plus précise, si les équations*

$$\varpi = \varpi_i = \overline{\varpi}_{ik} = \overline{\varpi}_{ijk} = \ldots = \omega_3 = \varpi_{133\ldots3} = 0$$

admettent le nombre maximum de combinaisons intégrables, il en est de même pour les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_3 = \varpi_{13} = 0$$

et les caractéristiques à deux dimensions dépendent de huit constantes arbitraires.

55. Il resterait à voir si, dans le système prolongé un nombre suffisant de fois, une des équations de Pfaff est réductible à la forme

$$dV - W\,dU = 0.$$

Cette circonstance peut fort bien se présenter sans qu'elle se présente pour le système lui-même. Citons comme exemple le système en involution défini par les équations

$$p_{11} = 0,$$

$$p_{13} = \frac{p_3 - p_1}{x_1},$$

$$p_{33} = p_{13} + x_1 p_{12},$$

qui admet l'intégrale intermédiaire du *second* ordre

$$p_2 + \frac{p_1 - p_3}{x_1} - p_{12} x_1 = F(x_2).$$

L'intégrale générale du système est

$$z = f(x_2, x_3) + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \varphi(x_2),$$

où φ est une fonction de x_2 et où f désigne l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

56. *Systèmes en involution du type d).* — On a dans ce cas

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{lll} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & & (\operatorname{mod} \varpi), \\ \varpi'_1 \equiv & \omega_3\varpi_{13} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_2 \equiv & \omega_3\varpi_{23} & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv \omega_1\varpi_{13} + \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} & & (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{array}\right.$$

L'intégrale générale dépend encore ici de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Posons

$$\varpi'_1 \equiv \omega_3\varpi_{13} + \varpi_3(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\varpi_{13} + a_5\varpi_{23} + a_6\varpi_{33})$$
$$(\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2),$$
$$\varpi'_2 \equiv \omega_3\varpi_{23} + \varpi_3(b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\varpi_{13} + b_5\varpi_{23} + b_6\varpi_{33})$$
$$(\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2).$$

On peut d'abord, en remplaçant $\varpi_{13} - a_3\varpi_3$, $\varpi_{23} - b_3\varpi_3$, $\omega_3 + a_4\varpi_3$ par ϖ_{13}, ϖ_{23}, ω_3, supposer

$$a_3 = b_3 = a_4 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1 et ϖ'_2, en considérant respectivement les termes en $\omega_2\varpi_{23}\varpi_{33}$ et $\omega_1\varpi_{13}\varpi_{33}$, donne

$$a_6 = 0, \qquad b_6 = 0;$$

en considérant respectivement les termes en $\omega_1\omega_2\varpi_{23}$ et $\omega_1\omega_2\varpi_{13}$, on obtient

$$a_1 = 0, \qquad b_2 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée successivement à ϖ'_1, ϖ'_2 et ϖ', en considérant respectivement les termes en $\omega_1\omega_2\varpi_{13}$, $\omega_1\omega_2\varpi_{23}$ et $\omega_1\omega_2\varpi_3$, donne

$$\frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\omega_2)} - a_2 = 0, \qquad \frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\omega_2)} + b_1 = 0, \qquad \frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\omega_2)} + a_2 - b_1 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$a_2 = 0, \qquad b_1 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée successivement à ϖ'_1 et ϖ', en considérant les termes en $\omega_1\varpi_{13}\varpi_{23}$ et $\omega_1\varpi_3\varpi_{23}$, donne

$$\frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\varpi_{23})} - a_5 = 0, \qquad \frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\varpi_{23})} + a_5 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$a_5 = 0;$$

on démontre de même qu'on a

$$b_4 = 0.$$

Enfin l'identité fondamentale appliquée successivement à ϖ'_2 et ϖ', en considérant les termes en $\omega_1\varpi_{13}\varpi_{23}$ et $\omega_1\varpi_3\varpi_{13}$, donne

$$\frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\varpi_{13})} + b_5 = 0, \qquad \frac{\partial\omega'_3}{\partial(\omega_1\varpi_{13})} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$b_5 = 0.$$

On a donc finalement

$$(44) \qquad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_3\varpi_3 \\ \varpi'_1 \equiv \omega_3\varpi_{13} \\ \varpi'_2 \equiv \omega_3\varpi_{23} \end{cases} \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2).$$

Soit alors

$$\omega'_3 \equiv \alpha\varpi_3\varpi_{13} + \beta\varpi_3\varpi_{23} + \gamma\varpi_{13}\varpi_{23} \qquad (\operatorname{mod} \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \omega_3);$$

l'identité fondamentale appliquée à ϖ', ϖ'_1, ϖ'_2 montre qu'on a

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Le système

$$(45) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \omega_3 = 0$$

est donc complètement intégrable.

Soient U, U_1, U_2, U_3 quatre intégrales premières indépendantes du système (45); les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$$

expriment que ces quatre intégrales sont fonctions de l'une d'entre elles :

$$(46)\qquad U_1 = f_1(U), \qquad U_2 = f_2(U), \qquad U_3 = f_3(U).$$

Ces *formules fournissent l'intégrale générale du système en involution donné, qui s'intègre par suite par l'intégration du système* (45).

Remarquons que les équations

$$U = a, \qquad U_1 = a_1, \qquad U_2 = a_2, \qquad U_3 = a_3,$$

entraînent comme conséquence $\varpi = 0$; elles définissent une famille de *multiplicités* de l'espace à quatre dimensions. Les formules (46) montrent alors que *tout système en involution du type d) admet comme intégrale générale les multiplicités qu'on déduit par une transformation de contact déterminée de l'ensemble des courbes de l'espace à quatre dimensions.*

Tous ces systèmes sont donc réductibles l'un à l'autre par une transformation de contact. L'un d'eux est

$$p_{11} = p_{12} = p_{22} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = x_1 f(x_3) + x_2\,\varphi(x_3) + \psi(x_3).$$

57. *Systèmes en involution du type e).* — On a, dans ce cas,

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & & (\bmod\,\varpi), \\ \varpi'_1 \equiv 0 & & (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3), \\ \varpi'_2 \equiv & \omega_2\varpi_{22} + \omega_3\varpi_{23} & (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv & \omega_2\varpi_{23} + \omega_3\varpi_{33} & (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3). \end{array}\right.$$

L'intégrale générale dépend ici d'*une fonction arbitraire de deux arguments*, car on a

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = 1, \qquad p = 3.$$

Posons

$$\begin{aligned} \varpi'_1 \equiv\ & \varpi_2(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\varpi_{22} + a_5\varpi_{23} + a_6\varpi_{33}) \\ & + \varpi_3(b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\varpi_{22} + b_5\varpi_{22} + b_6\varpi_{33}) + c\,\varpi_2\varpi_3 \\ & (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1). \end{aligned}$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ_1' donne, en négligeant les termes qui contiennent ϖ, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3,

$$\begin{aligned}(\omega_2\varpi_{22}+\omega_3\varpi_{23})(a_1\omega_1+a_2\omega_2+a_3\omega_3+a_4\varpi_{22}+a_5\varpi_{23}+a_6\varpi_{33})\\ +(\omega_2\varpi_{23}+\omega_3\varpi_{33})(b_1\omega_1+b_2\omega_2+b_3\varpi_3+b_4\varpi_{22}+b_5\varpi_{23}+b_6\varpi_{33})=0.\end{aligned}$$

On déduit de cette identité

$$a_1=a_3=a_4=a_5=a_6=b_2=b_3=b_4=b_5=b_6=0,$$
$$b_1=a_2.$$

On a donc

$$\varpi_1' \equiv a(\omega_2\varpi_2+\omega_3\varpi_3)+c\varpi_2\varpi_3 \qquad (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1).$$

En remplaçant maintenant $\varpi_1 - a_2\varpi$ par ϖ_1, on obtient

$$\varpi_1' \equiv c\varpi_2\varpi_3 \qquad (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1),$$

mais l'identité fondamentale appliquée à ϖ_1', en considérant les termes en $\omega_2\varpi_3\varpi_{22}$, donne

$$c=0.$$

Posons enfin

$$\varpi_1' \equiv \varpi\chi \qquad (\bmod\,\varpi_1),$$

l'identité fondamentale donne

$$(\omega_2\varpi_2+\omega_3\varpi_3)\chi \equiv 0 \qquad (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1),$$

ce qui exige

$$\chi \equiv 0 \qquad (\bmod\,\varpi,\ \varpi_1).$$

Donc, on a la formule importante

$$\varpi_1' \equiv 0 \qquad (\bmod\,\varpi_1)$$

qui montre que *l'équation* $\varpi_1 = 0$ *est complètement intégrable*.

L'intégration de cette équation conduit à une équation de la forme

$$U(x_1,\ x_2,\ x_3,\ z,\ p_1,\ p_2,\ p_3) = a, \tag{48}$$

et cette équation est équivalente au système en involution donné, car elle conduit à trois équations du second ordre

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial U}{\partial z}+p_{1i}\frac{\partial U}{\partial p_1}+p_{2i}\frac{\partial U}{\partial p_2}+p_{3i}\frac{\partial U}{\partial p_3}=0 \qquad (i=1,2,3).$$

On intégrera donc complètement le système donné en intégrant l'équation complètement intégrable $\varpi_1 = 0$, *et en intégrant ensuite l'équation aux dérivées partielles du premier ordre* (48).

Tous les systèmes du type *e*) sont manifestement réductibles l'un à l'autre par une transformation de contact.

V. — Les systèmes en involution de quatre équations.

58. Il y a deux types de systèmes en involution de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre.

Pour les *systèmes du type a*), on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varpi' \equiv \omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 & & (\mathrm{mod}\, \varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_1 \varpi_{11} & & (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_2 \equiv & \omega_2 \varpi_{22} & (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv 0 & & (\mathrm{mod}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{array} \right.$$

L'intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Comme l'on a

$$\varpi' \equiv 0 \qquad (\mathrm{mon}\, \varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3),$$

le système

$$(2) \qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_2 = \varpi_{11} = \varpi_{22} = 0$$

est complètement intégrable. Les multiplicités intégrales sont donc engendrées par des caractéristiques à une dimension dépendant de huit constantes arbitraires. Si l'on a intégré le système (2) et si l'on a déterminé huit intégrales premières indépendantes, on peut écrire les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = 0,$$

de manière à ne faire intervenir que ces huit quantités. Si, en particulier, on a pris les intégrales principales relatives à $x_3 = 0$, le système à intégrer devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &dZ - P_1\ dX_1 - P_2\ dX_2 = 0,\\ &dP_1 - P_{11}\,dX_1 - P_{12}\,dX_2 = 0,\\ &dP_2 - P_{12}\,dX_1 - P_{22}\,dX_2 = 0,\\ &dP_3 - P_{13}\,dX_1 - P_{33}\,dX_1 = 0,\end{aligned}\right.$$

où P_{12}, P_{13}, P_{23} désignent trois certaines fonctions de X_1, X_2, Z, P_1, P_2, P_3, P_{11}, P_{22}. Pour intégrer ce système à deux variables indépendantes, on peut remarquer que la fonction Z de X_1, X_2 satisfait, en général, à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre obtenues en écrivant que les équations (3) sont compatibles par rapport à la fonction inconnue P_3.

Le système (3) admet deux familles de caractéristiques définies respectivement par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \varpi_{11} = 0,$$
$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \varpi_{22} = 0;$$

elles constituent, par suite, pour le système en involution donné, deux familles de caractéristiques à deux dimensions.

On pourra appliquer la méthode de Monge lorsque, par exemple, l'équation $\varpi_1 = 0$ sera réductible à la forme

$$dV - W\,dU = 0,$$

ou lorsqu'on aura, en choisissant convenablement ϖ_1, ϖ_3, ω_1,

$$\left.\begin{aligned}\varpi'_1 &\equiv \omega_1\varpi_{11}\\ \varpi'_3 &\equiv 0\end{aligned}\right.\qquad (\operatorname{mod} \varpi_1,\ \varpi_3).$$

Dans ce cas, on sera ramené à l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

59. Les trois relations qui existent dans le système (3), entre X_1, X_2, Z, P_1, P_2, P_3, P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{13}, P_{23} ne sont pas arbitraires. Elles dépendent, comme on peut le voir assez facilement, d'une fonction de huit arguments assujettie à satisfaire à une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Cette fonction étant choisie, on peut inversement, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, remonter au système en involution primitif par un procédé identique à celui qui a été

souvent indiqué précédemment. On peut ainsi déterminer tous les systèmes en involution du type *a*).

Citons comme exemple le système en involution défini par les équations

$$\begin{aligned}
p_{11} &= -\frac{p_{13}}{p_{23}}\sqrt{p_{13}p_{23}(p_{13}p_{23}-x_3)},\\
p_{22} &= -\frac{p_{23}}{p_{13}}\sqrt{p_{13}p_{23}(p_{13}p_{23}-x_3)},\\
p_{33} &= -\frac{1}{2}\log\left[2p_{13}p_{23}-x_3+2\sqrt{p_{13}p_{23}(p_{13}p_{23}-x_3)}\right],\\
p_{12} &= p_3 - x_3 p_{33} - \frac{1}{2}x_3.
\end{aligned}$$

L'intégrale générale de ce système est donnée par les formules

$$x_1 = \alpha - \frac{\gamma}{\beta + A''}, \qquad x_2 = \beta - \frac{\gamma}{\alpha + B''}, \qquad x_3 = \gamma - \frac{\gamma^2}{(\alpha + B'')(\beta + A'')},$$

$$\begin{aligned}
z = {} & \frac{1}{8}\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{2}\alpha B + \frac{1}{2}\beta A + \frac{1}{4}\alpha\int A''^2\,d\alpha - \frac{1}{4}\int \alpha A''^2\,d\alpha + \frac{1}{4}\beta\int B''^2\,d\beta\\
& - \frac{1}{4}\int \beta B''^2\,d\beta - \frac{\gamma}{\beta + A''}\left(\frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\beta A' + \frac{1}{4}\int A''^2\,d\alpha\right)\\
& \qquad - \frac{\gamma}{\alpha + B''}\left(\frac{1}{4}\alpha^2\beta + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\alpha B' + \frac{1}{4}\int B''^2\,d\beta\right)\\
& + \frac{1}{2}\gamma(\alpha\beta + A' + B') - \frac{\gamma^3}{2(\alpha + B'')(\beta + A'')} + \frac{3\gamma^4}{8(\alpha + B'')^2(\beta + A'')^2}\\
& - \frac{[(\alpha + B'')(\beta + A'') - \gamma]^2\gamma^2}{4(\alpha + B'')^2(\beta + A'')^2}\log\frac{\gamma^2}{(\alpha + B'')(\beta + A'')}.
\end{aligned}$$

Dans ces formules, A et B désignent deux fonctions arbitraires, la première de α, la seconde de β.

60. *Systèmes en involution du type b*). — On a, dans ce cas,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & & (\mathrm{mod}\ \varpi),\\
\varpi'_1 \equiv \qquad\qquad \omega_2\varpi_{12} & & (\mathrm{mod}\ \varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3),\\
\varpi'_2 \equiv \omega_1\varpi_{12} + \omega_2\varpi_{22} & & (\mathrm{mod}\ \varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3),\\
\varpi'_3 \equiv 0 & & (\mathrm{mod}\ \varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3).
\end{array}\right.$$

L'intégrale générale dépend encore de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Le système

$$(5)\qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \omega_2 = \varpi_{12} = \varpi_{22} = 0$$

est complètement intégrable, et l'on peut répéter ce qui a été dit au sujet du sytème a).

Il y a une famille de caractéristiques à deux dimensions définie par les équations

$$\varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_2 = \varpi_{12} = 0. \tag{6}$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où le système (6) est complètement intégrable, c'est-à-dire où les caractéristiques à deux dimensions dépendent seulement de constantes arbitraires. On a, dans ce cas,

$$\frac{\partial \omega'_2}{\partial(\omega_1 \varpi_{22})} = \frac{\partial \varpi'_{12}}{\partial(\omega_1 \varpi_{22})} = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_2 \varpi_2 \\ \varpi'_1 &\equiv \omega_2 \varpi_{12} + \varpi_2(a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + a_3 \varpi_{12} + a_4 \varpi_{22}) \qquad (\bmod \varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_3). \\ \varpi'_3 &\equiv \qquad \varpi_2(b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2 + b_3 \varpi_{12} + b_4 \varpi_{22}) \end{aligned}$$

On peut d'abord supposer a_2 et a_3 nuls. L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_1, en considérant les termes en $\omega_1 \omega_2 \varpi_{22}$ et $\omega_1 \varpi_{12} \varpi_{22}$, donne

$$a_1 = 0, \qquad a_4 = 0$$

On trouve, de même,

$$b_1 = 0, \qquad b_4 = 0.$$

En écrivant enfin ϖ_3 à la place de $\varpi_3 - b_2 \varpi$, on obtient les formules

$$\left\{ \begin{aligned} \varpi' &\equiv \omega_2 \varpi_2 \\ \varpi'_1 &\equiv \omega_2 \varpi_{12} \qquad (\bmod \varpi,\ \varpi_1,\ \varpi_3). \\ \varpi'_3 &= b \varpi_2 \varpi_{12} \end{aligned} \right. \tag{7}$$

L'intégrale générale du système (7) dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument, et elle est identique à l'intégrale générale du système en involution donné.

Les équations de ce système, si l'on utilise les intégrales principales de (6) relatives à $x_1 = x_3 = 0$, s'écrivent

$$\left\{ \begin{aligned} dZ - P_2\, dX_2 &= 0, \\ dP_1 - P_{12}\, dX_2 &= 0, \\ dP_3 - P_{23}\, dX_2 &= 0, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

où P_{23} est une fonction de X_2, Z, P_1, P_2, P_3, P_{12}.

Pour intégrer le système (3), on peut se donner arbitrairement Z et P_1 en fonction de X_2. La fonction P_3 est alors donnée par une équation différentielle du premier ordre.

61. On peut inversement passer du système (8), où P_{23} est une fonction quelconque de X_1, Z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, au système en involution donné. Soit, en effet, un système de trois équations de Pfaff à six variables

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0 \tag{9}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv \chi_1\chi_2, \\ \theta'_3 &\equiv \chi_1\chi_3, \\ \theta'_3 &\equiv \alpha\chi_2\chi_3. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On posera

$$\varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2 + \mu\theta_3$$

en désignant par λ et μ deux nouvelles variables auxiliaires.

L'équation $\varpi = 0$ est réductible à la forme

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0.$$

Il y a maintenant, grâce à l'introduction de λ et μ, trois variables indépendantes, et z satisfait, comme on le vérifie facilement, à un système en involution du type *b*).

On peut donc ainsi déterminer, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, tous les systèmes en involution du type considéré.

Citons, comme exemple, le système

$$p_{11} = 0, \qquad p_{12} = \frac{1}{2}p_{13}^2, \qquad p_{22} = p_{13}p_{23}, \qquad p_{23} = p_{13}p_{33},$$

dont l'intégrale générale est donnée par les formules

$$x_3 = \alpha - x_2\,\varphi'(\alpha),$$

$$z = f(\alpha) + x_1\,\varphi(\alpha) - x_2\int f'(\alpha)\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}x_1 x_2\,\varphi'^2(\alpha),$$

avec deux fonctions arbitraires $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ de l'argument α.

Les caractéristiques du second ordre s'obtiennent en faisant α constant.

VI — Les systèmes en involution de cinq équations.

62. Il y a un type de sytèmes en involution de cinq équations aux dérivées partielles du second ordre. On a, pour ce type,

$$(1)\quad \begin{cases} \varpi' \equiv \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_3 & (\operatorname{mod}\varpi), \\ \varpi'_1 \equiv \omega_1\varpi_{11} & (\operatorname{mod}\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_2 \equiv 0 & (\operatorname{mod}\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3), \\ \varpi'_3 \equiv 0 & (\operatorname{mod}\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3). \end{cases}$$

L'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

Le système

$$(2)\qquad \varpi = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \omega_1 = \varpi_{11} = 0$$

est complètement intégrable et définit une famille de caractéristiques à deux dimensions, dépendant de six constantes arbitraires et engendrant les multiplicités intégrales.

Si l'on introduit les intégrales principales du système (2) relatives à $x_2 = x_3 = 0$, le système de Pfaff à intégrer prend la forme

$$(3)\quad \begin{cases} dZ - P_1\, dX_1 = 0, \\ dP_1 - P_{11}\, dX_1 = 0, \\ dP_2 - P_{12}\, dX_1 = 0, \\ dP_3 - P_{13}\, dX_1 = 0, \end{cases}$$

où P_{12}, P_{13} sont deux fonctions, d'ailleurs quelconques, de X_1, Z, P_1, P_2, P_3, P_{11}. Les caractéristiques étant connues, on aura donc l'intégrale générale en intégrant le système (3); on prendra pour Z une fonction arbitraire de X_1; les fonctions inconnues P_2 et P_3 seront données par un système d'équations différentielles ordinaires simultanées du premier ordre.

63. Réciproquement, on pourra passer de tout système (3) à une infinité de systèmes en involution à cinq équations aux dérivées partielles du second ordre, tous équivalents entre eux vis-à-vis du groupe des transformations de contact. D'une manière générale, quand on aura quatre équations de Pfaff à 6 variables non complètement intégrables,

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0,$$

on pourra toujours poser

$$(4)\qquad \begin{cases} \theta'_1 \equiv 0 \\ \theta'_2 \equiv 0 \\ \theta'_3 \equiv 0 \\ \theta'_4 \equiv \chi_1\chi_2 \end{cases} \pmod{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4}.$$

Supposons alors que le système $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ne soit pas complètement intégrable; on posera

$$\varpi = \theta_1 + \lambda\theta_2 + \mu\theta_3,$$

en désignant par λ et μ deux variables auxiliaires nouvelles.

L'équation $\varpi = 0$ est alors réductible à la forme

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0,$$

et le système donné entraîne pour la fonction z de x_1, x_2, x_3 cinq équations aux dérivées partielles du second ordre formant évidemment un système en involution.

On peut donc déterminer par l'intégration d'équations différentielles ordinaires tous les systèmes en involution de cinq équations aux dérivées partielles du second ordre.

64. L'exemple le plus simple est fourni par le système

$$p_{12} = p_{13} = p_{22} = p_{23} = p_{33} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = f(x_1) + ax_2 + bx_3.$$

Un autre exemple, moins simple, est donné par le système

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - x_3^2 z + x_3^3 p_3 - \frac{u + \sin u\cos u}{2x_3},\\
p_{22} &= -\frac{1}{2}x_1x_2x_3 - x_3^2 z + x_3^3 p_3 - \frac{u - \sin u\cos u}{2x_3};\\
p_{12} &= \frac{\cos 2u}{4x_3},\\
p_{13} &= \frac{p_1}{x_3} + \frac{x_2}{2x_3^2} + \frac{\sin u}{x_3^3},\\
p_{23} &= \frac{p_2}{x_3} - \frac{x_1}{2x_3^2} - \frac{\cos u}{x_3^3},\\
p_{33} &= -\frac{p_3}{x_3} + \frac{z}{x_3^2} - \frac{u}{x_3^3},
\end{aligned}$$

L'intégrale générale de ce système est donnée par les équations

$$x_1 = \frac{\cos A}{\alpha} - \frac{\cos u}{x_3},$$

$$x_2 = \frac{\sin A}{\alpha} - \frac{\sin u}{x_3},$$

$$\begin{aligned}
z = x_3 \Bigg[& \frac{\sin 4A}{96\alpha^4} - \frac{3}{8}\frac{f}{\alpha} + \frac{11}{8} f' + \frac{3}{8}\alpha f'' \\
& + \frac{\cos A}{\alpha}\int \frac{\sin A}{\alpha^4}\, d\alpha - \frac{\sin A}{\alpha}\int \frac{\cos A}{\alpha^4}\, d\alpha \Bigg] \\
& + \sin u \int \frac{\cos A}{\alpha^4}\, d\alpha - \cos u \int \frac{\sin A}{\alpha^4}\, d\alpha \\
& + \cos(A - u)\left(\frac{3}{2} f - \frac{3}{2}\alpha f' - \frac{1}{2}\alpha^2 f''\right) \\
& + \frac{\sin u \cos A(2\cos^2 A + 3\sin^2 A) - \sin A \cos u(2\sin^2 A + 3\cos^2 A)}{6\alpha^3} \\
& + \frac{\sin 2A \cos 2u}{8\alpha^2 x_3} + \frac{\sin u \cos A(\sin^2 u - 3\cos^2 u) - \cos u \sin A(\cos^2 u + 3\sin^2 u)}{12\alpha x_3^2} \\
& - \frac{u}{8x_3^3} + \frac{\sin 4u}{96 x_3^3}.
\end{aligned}$$

Dans ces formules, x_1, x_2 et z sont exprimés au moyen de x_3 et de deux paramètres α et u. La lettre f désigne une fonction arbitraire de α, et A désigne la quantité

$$A = \alpha^3 f - \alpha^4 f' - \alpha^5 f''.$$

Les caractéristiques s'obtiennent en faisant α constant.